Метод Винера-Хопфа в задаче о расчете маломасштабной зоны предразрушения в конце межфазной трещины

Михаил В. ДУДИК, Юлия В. РЕШЕТНЫК, Владимир М. ФЕНЬКИВ

Уманский государственный педагогический университет, Умань, Украина

dudik m@hotmail.com, fenkiv@ukr.net

В условиях плоской статической деформации рассмотрено задачу о расчете маломасштабной зоны предразрушения ℓ в соединительном материале в конце межфазной трещины L, которая выходит с угловой точки ломаной границы раздела материалов при наличии контакта берегов значительных размеров $s(\ell << s << L)$. Модули Юнга материалов E_1, E_2, коэффициенты Пуассона ν_1, ν_2 и угол излома α. Контактную зону моделируем разрезом, берега которого взаимодействуют по закону сухого трения Кулона.

Применив аппарат интегрального преобразования Меллина [1] к граничным условиям задачи сводится к функциональному уравнению Винера-Хопфа [2] в полосе $-\epsilon_1 < Re\, p < \epsilon_2$ ($\epsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа), которая содержит мнимую ось:

$$\int_0^\infty \sigma_\theta(r,0)\cdot r^p dr = C\cdot Ctg(p\pi)\cdot G_1(p)\cdot \int_0^\infty \left.\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle\right|_{\theta=0} r^p dr,$$

где $\langle f\rangle$ - скачок величины f, $C = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{E_1}{1+\nu_1}\cdot\dfrac{(1+e\cdot k_2)+(e+k_1)}{(1+e\cdot k_2)\cdot(e+k_1)}$ - постоянная, $G_1(p) =$ $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(1+e\cdot k_2)\cdot(e+k_1)}{(1+e\cdot k_2)+(e+k_1)}\cdot\dfrac{D(p)}{\Delta_0(p)}\cdot \mathrm{tg}(p\pi)$, $e = \dfrac{E_1}{E_2}\dfrac{1+\nu_2}{1+\nu_1}$, $k_i = 3-4\nu_i$, $\Delta_0(p)$ и $D(p)$ - известные функции, полученные в ходе решения системы однородных алгебраических уравнений (в данной статье они не представлены, поскольку очень громоздкие), выведенной из граничных условий задачи.

Факторизация котангенса $\mathrm{ctg}(p\pi)$ на мнимой оси осуществляется с помощью гамма-функций: $\mathrm{ctg}(p\pi) = \dfrac{K^+(p)\cdot K^-(p)}{p}$, где $K^\pm(p) = \dfrac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(0,5\mp p)}$. Функция $G_1(it)$ имеет парную положительную действительную часть, которая $\lim_{t\to\pm\infty} Re\, G_1(it) = 1$. Мнимая часть является нечетной и $\lim_{t\to\pm\infty} Im\, G_1(it) = 0$. В нуле имеем $Im\, G_1(it) = 0$ и $Re\, G_1(it) > 0$. Все это обеспечивает возможность использования формулы Гахова [3] для факторизации $G_1(p)$:

$$G_1(p) = \frac{G_1^+(p)}{G_1^-(p)},\ \ Rep = 0,\ \ \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{lnG(z)}{z-p}dz\right] = \begin{cases} G_1^+(p),\ Re\, p < 0,\\ G_1^-(p),\ Re\, p > 0.\end{cases}$$

Используя в уравнении (1) описанные факторизации и некоторые положения теории функций комплексной переменной, построено точное решение уравнения (1), которое выражается через интегралы типа Коши и гамма-функции. На основе этого решения получено выражение для длины маломасштабной зоны предразрушения ℓ и контактного напряжения на ее берегах. Исследованы зависимости размеров маломасштабной зоны предразрушения ℓ от конфигурации нагрузки и параметров композитного тела.

References. **1.** Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - Л.: Наука, 1967. - 402с. **2.** Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962. - 279с. **3.** Гахов Ф. Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640с.