

К расчету железобетонных перекрытий с учетом изменения крутильной жесткости сборных плит от образования нормальных трещин

**Азизов Т.Н., докт. техн. наук, проф., Мельник А.С., канд. техн. наук, доц. *,
Каленчук-Порханова А.А., канд. физ.-мат. наук, с.н.с. **, Орлова О.М. ***

* Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины,
г. Умань, Украина;

** Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины

Аннотация. В статье показано влияние крутильной жесткости железобетонных элементов на пространственную работу мостов, перекрытий, каркасов зданий и других сложных статически неопределимых систем. Показано, что при определении крутильных жесткостей существующими методами предполагается обязательное наличие пространственных спиральных трещин, а крутильная жесткость при наличии нормальных трещин не исследована. Описан метод определения крутильной жесткости железобетонных элементов при наличии в них нормальных трещин. Показано, что такой подход позволяет рассчитывать на кручение железобетонные элементы любого поперечного сечения, а также с учетом нелинейных свойств бетона

Анализ публикаций и постановка задачи.

Известно, что на пространственную работу плитно-ребристых систем существенное влияние оказывает крутильная жесткость их элементов. В железобетонных плитно-ребристых системах (мосты, ребристые монолитные и сборные перекрытия) на изгибную и крутильную жесткости оказывают влияние различные трещины [1, 2, 9, 10, 13, 16, 20].

При действии локальных нагрузок на сборные или монолитные железобетонные перекрытия в отдельных балках или плитах могут появляться трещины, в других они могут отсутствовать. При этом крутильные и изгибные жесткости в балках без трещин и с трещинами будут отличаться. В работах [2, 16, 20] показано, что перераспределение локальной нагрузки зависит практически одинаковым образом как от изгибной, так и от крутильной жесткостей отдельных элементов. Эта зависимость является существенной. Следовательно, определение изгибной и крутильной жесткостей является важной и актуальной задачей. Не смотря на это, большинство расчетов при проектировании различных сооружений, включая и известные мощные программные комплексы, такие как Ansys, Nastran, Lira, проводится без учета изменения крутильной жесткости в результате образования нормальных трещин.

Учет крутильной жесткости отдельных элементов с нормальными трещинами можно производить в программных комплексах, упомянутых выше, при использовании объемных конечных элементов. Однако при расчете, например, каркаса многоэтажного здания, мостовой конструкции или перекрытия, состоящего из многих элементов, моделирование каждого элемента (колонна, балка, плита и т.п.) из объемных конечных элементов с

включением элементов арматуры представляется весьма и весьма трудоемким и практически невыполнимым.

На сегодняшний день существует большое количество работ по исследованию изгибной жесткости железобетонных элементов с трещинами и весьма малое количество исследований крутильной жесткости таких элементов. Большинство исследований, касающихся кручения в железобетоне, посвящено изучению прочности таких элементов. Существующие методики определения жесткости на кручение [14, 22, 25, 26] касаются в основном железобетонных элементов с пространственными (спиральными) трещинами при действии изгиба с кручением, хотя экспериментальными исследованиями установлено существенное влияние нормальных трещин на крутильную жесткость железобетонных элементов [9, 13]. Работы, посвященные исследованию крутильной жесткости железобетонных элементов с нормальными трещинами [3, 5, 19, 21] имеют приближенный и частный характер.

В связи с вышесказанным **целью настоящей статьи** является развитие методов определения крутильных жесткостей железобетонных элементов с нормальными трещинами с использованием экспериментальных данных и данных численного эксперимента с применением известных программных комплексов, а также доказательство существенного влияния изменения крутильной жесткости элементов конструкций перекрытий на перераспределение усилий в отдельных элементах.

Изложение основного материала. Как было сказано выше, жесткость железобетонных элементов при кручении рассматривалась ранее только для случаев наличия спиральных пространственных трещин. Кроме того, и в этих работах рассматриваются простые виды сечений: прямоугольник с симметричной арматурой, кольцо, цилиндрические элементы. На практике же встречаются самые различные виды сечений: тавровые, двутавровые, полые треугольники, коробчатые и т.д. Некоторые исследования в этом направлении проведены в Одесской государственной строительной академии [3, 5, 21]. Однако эти работы находятся только на начальной стадии исследований. Поэтому актуальной является развитие методов определения крутильных жесткостей, которые имели бы общие гипотезы для любого типа сечения, а также включали бы в себя способы расчета элементов с наличием как пространственных, так и наклонных и нормальных трещин.

Рассмотрим железобетонный элемент с нормальной трещиной, подверженный воздействию крутящего момента M_t (рис. 1).

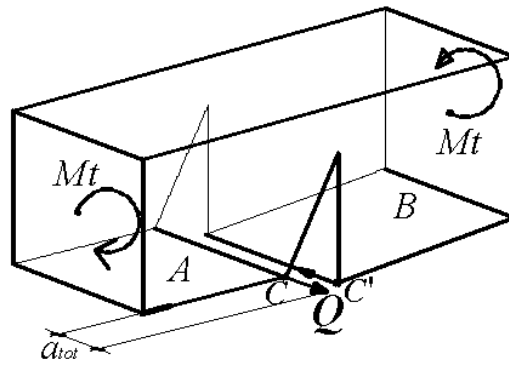


Рис. 1. Схема железобетонного элемента с нормальной трещиной, подверженного кручению

После мысленного рассечения продольной арматуры нагельная сила Q в ней определяется из условия совместности деформаций в месте рассечения арматуры.

Определим деформации элемента в трещине по методике [2]. Расхождение точек C и C' (см. рис. 1) в месте разреза арматуры должно быть равно нулю:

$$\Delta_C = \Delta_{Mt} - \Delta_Q - \Delta_{sm} = 0 \quad (1)$$

где Δ_{Mt} - расхождение точек от действия внешнего момента M_t ; Δ_Q - расхождение точек от кручения стержня неизвестной нагельной силой Q ; Δ_{sm} - расхождение точек от смятия бетона нагельной силой Q . Ввиду того, что бетон сминается в обоих блоках, отделенных трещиной, величину Δ_{sm} следует умножить на 2. Если обозначить расхождения точек в результате действия единичной нагельной силы $\bar{Q}=1$ от кручения и от смятия соответственно Δ_{Qed} и $\Delta_{sm,ed}$, то из выражения (1) с учетом сделанного выше примечания для Δ_{sm} получим значение нагельной силы:

$$Q = \frac{\Delta_{Mt}}{\Delta_{Qed} + 2 \cdot \Delta_{sm,ed}}, \quad (2)$$

Составляющие Δ_{Mt} и Δ_{Qed} определяются с использованием программных комплексов, о чем будет сказано ниже. При этом следует использовать объемные конечные элементы. Составляющая $\Delta_{sm,ed}$ от смятия единичной нагельной силой \bar{Q} может быть определена с использованием эмпирических данных [18]:

$$\Delta_{sm,ed} = \varphi_{cc} \left(1000 \frac{\bar{Q}^2}{d_s^3 E_b^2} + \frac{\bar{Q}}{d_s E_b} \right) \quad (3)$$

где (3) $\varphi_{cc}=1$ при кратковременном действии нагрузки; d_s – диаметр арматурного стержня; E_b – модуль упругости бетона. В выражении (3) в отличие от [18] не учитывается сила прижатия закладной к бетону ввиду ее отсутствия. Определение величины

перемещения от смятия $\Delta_{sm,ed}$ может быть получено любым другим известным теоретическим или экспериментальным способом. Сущность расчета от этого не изменится.

Выражение (2) отличается от выражения (6.59) [2] отсутствием члена, содержащего перемещение от сдвига арматурного стержня в трещине. Это сделано потому, что перемещение от сдвига арматурного стержня в трещине оказывается существенно меньшим (на порядок и более) перемещения от смятия бетона и им можно пренебречь.

После вычисления неизвестной величины Q достаточно просто определить полное перемещение в трещине a_{tot} (см. рис. 1):

$$a_{tot} = 2 \cdot \Delta_{sm,ed} \cdot Q \quad (4)$$

Далее определяется коэффициент k_t , представляющий собой отношение деформативности элемента с нормальной трещиной к деформативности элемента без трещин:

$$k_t = \frac{a_{tot} + a_e}{a_e}, \quad (5)$$

где a_e - перемещение от кручения элемента без трещин, которое определяется по формуле:

$$a_e = R \cdot \varphi_e; \quad (6)$$

R – радиус поворота до точки определения перемещения (для прямоугольного сечения – это практически половина высоты полного сечения балки); φ_e - угол поворота упругого (без трещин) элемента длиной l_{crc} , равной расстоянию между трещинами, определяемый по известной формуле сопротивления материалов:

$$\varphi_e = \frac{M_t \cdot l_{crc}}{GJ_t}, \quad (7)$$

где GJ_t - крутильная жесткость элемента без трещин.

Величина k_t представляет собой отношение крутильной жесткости элемента без трещин к жесткости элемента с трещинами, т.е. во сколько раз жесткость элемента с нормальными трещинами меньше первоначальной его жесткости. Как видно из вышеприведенных формул она зависит от расстояния между трещинами, диаметра арматуры и глубины трещины (т.к. от последней зависят величины Δ_{Mt} и Δ_{Qed}).

Преимуществом описанного подхода является его общность для вычисления жесткости элементов с нормальными трещинами при любой форме поперечного сечения (прямоугольное, тавровое, коробчатое и т.д.), т.к. исходными данными для расчета являются

величины Δ_{Mt} и Δ_{Qed} , определяемые из расчета по МКЭ. При этом величины Δ_{Mt} и Δ_{Qed} , определенные один раз для конкретного сечения и высоты сжатой зоны, позволят определить жесткость элемента с разными диаметрами арматуры.

Рассмотрим более подробно определение величин Δ_{Mt} и Δ_{Qed} выражения (2).

В работах авторов статьи [5, 6, 7, 17] проведена серия исследований крутильной жесткости железобетонных элементов прямоугольного и таврового сечений с нормальными трещинами. В этих работах показано, что основной частью задачи определения крутильной жесткости железобетонного элемента с нормальными трещинами является определение взаимного перемещения берегов трещины. Эту задачу можно решать как приближенным способом [6, 19], так и с использованием метода конечных элементов. Одним из недостатков решения этой задачи, как было сказано выше, является условие использования большого количества объемных конечных элементов, что усложняет как создание расчетной схемы, так и анализ результатов расчета, тем более, что это является только частью решения общей задачи о напряженно-деформированном состоянии железобетонного элемента с нормальными трещинами при кручении [5, 6, 19]. Использование решений теории упругости [7] возможно далеко не во всех случаях рассматриваемой задачи [6, 19].

Одним из способов решения задачи об определении перемещения берегов трещины при кручении является предложенный в [4] метод. Его использование может существенно упростить решение инженерной задачи.

Следуя [4] можно предположить, что взаимное перемещение берегов трещины будет являться четкой функцией от высоты сжатой зоны, высоты и ширины сечения балки и расстояния между трещинами. Рассмотрим для начала зависимость перемещений в балке прямоугольного сечения от двух параметров – ширины b и высоты h сечения при фиксированном значении расстояния между трещинами и высоты сжатой от изгиба зоны. В таком случае можно будет построить график такой зависимости в виде некоторой поверхности.

Для пояснения получения аппроксимационной зависимости рассмотрим пример. Пусть имеется балка прямоугольного поперечного сечения из материала с модулем упругости $E_b=32500$ МПа, модулем сдвига 10000 МПа. Остальные параметры имеют следующие значения: расстояние между трещинами $l_{cr}=400$ мм; высота сжатой зоны $x=30$ мм, крутящий момент $T=1000$ Н·см.

Аппроксимация искомой поверхности в среде Matlab производится достаточно просто. Авторами предварительно был проведен ряд расчетов по МКЭ с использованием

объемных конечных элементов. Варьируемые параметры и перемещения приведены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные параметры для аппроксимации

№ П/ П	Расст. между трещ. $l_{crс}$, мм	Высо та сжато й зоны x , мм	b , мм	h , мм	Перемещение берегов трещины (по МКЭ) $\Delta \cdot 10^3$ (мм)
1	400	30	60	100	3.104
2			80	100	1.668
3			100	100	1.043
4			60	180	7.614
5			80	180	3.879
6			100	180	2.305
7			160	180	0.769
8			180	180	0.585

В результате обработки исходных данных в среде Matlab получена аппроксимационная поверхность, показанная на рис. 2.

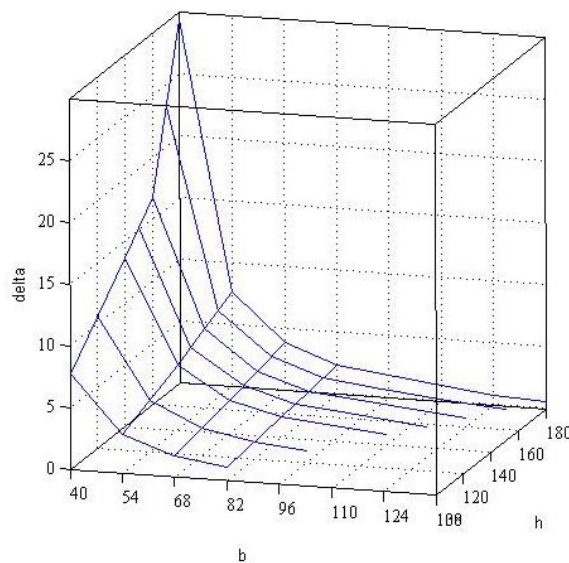


Рис.2. Зависимость перемещения берегов трещины (Δ) от ширины (b) и высоты (h) сечения балки

Для сравнения перемещений, полученных в результате аппроксимации, с перемещениями, полученными непосредственно из расчетов по программе Lira с использованием объемных конечных элементов, составлена таблица 2. В графе 6 таблицы приведены значения перемещений, полученных по МКЭ (программа Lira). В графе 7 – перемещения, полученные на основе аппроксимации в среде Matlab. Как видно из таблицы значения в графах 6 и 7 совпадают с достаточно высокой точностью, что подтверждает правильность принятого подхода к решению задачи.

Таблица 2. Сравнение перемещений берегов трещины, полученных по программе Liga с использованием объемных конечных элементов и аппроксимационным методом

№ п/п	Расст. между трещинами $l_{crс}$ (мм)	Высота сжатой зоны x (мм)	b (мм)	h , (мм)	Перемещение $\Delta \cdot 10^3$ (мм)		Погрешность (%)
					МКЭ	Аппроксимация	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	400	30	60	140	5.2469	5.3575	2.11
2			80	140	2.72018	2.7735	1.96
3			100	140	1.641188	1.6743	2.02
4			140	140	0.770339	0.8139	5.65
5			60	160	6.40637	6.4858	1.24
6			80	160	3.288858	3.3262	1.14
7			100	160	1.96683	1.9898	1.17
8			160	160	0.688064	0.6992	1.62
9			120	120	0.89508	0.90685	1.31
10			90	130	1.87789	1.8287	2.62
11			90	150	2.292	2.263	1.29
12			130	150	0.99102	1.0638	7.34
13			150	150	0.71663	0.7994	11.55

Аналогичный подход достаточно просто применить для элементов с любой другой формой сечений (тавровые, двутавровые, коробчатые и др.), а также с наклонными трещинами. При этом количество переменных данных для аппроксимации может быть различным.

Создание библиотеки аппроксимационных функций (подобно табл.2, рис. 2) позволит существенно упростить решение многих задач определения жесткостных параметров железобетонных элементов с трещинами, которые могут войти как отдельный блок в существующие программные комплексы.

При определении жесткостных параметров железобетонного элемента с нормальными (или наклонными) трещинами при кручении для определения перемещений каких-либо точек следует составить аппроксимационные выражения (на основе некоторого количества расчетов с помощью МКЭ), в которых должны варьироваться размеры сечения b и h , высота сжатой зоны (высота зоны, через которую передается крутящий момент), а также длина блока, отделенного нормальными трещинами, угол наклона трещины (в случае наклонных трещин) и т.д.

Для более сложных сечений количество варьируемых параметров будет больше. Так, например, когда высота сжатой зоны находится в пределах ребра железобетонного элемента двутаврового сечения (рис. 3), перемещение берегов трещины (угла взаимного поворота двух блоков, отделенных нормальной трещиной) будет являться функцией семи переменных:

$$\Delta_{crс} = f(b_1, h_1, b_2, h_2, t, h, x) \quad (8)$$

Аппроксимация такой функции семи переменных может быть проведена по методике, предложенной в [12].

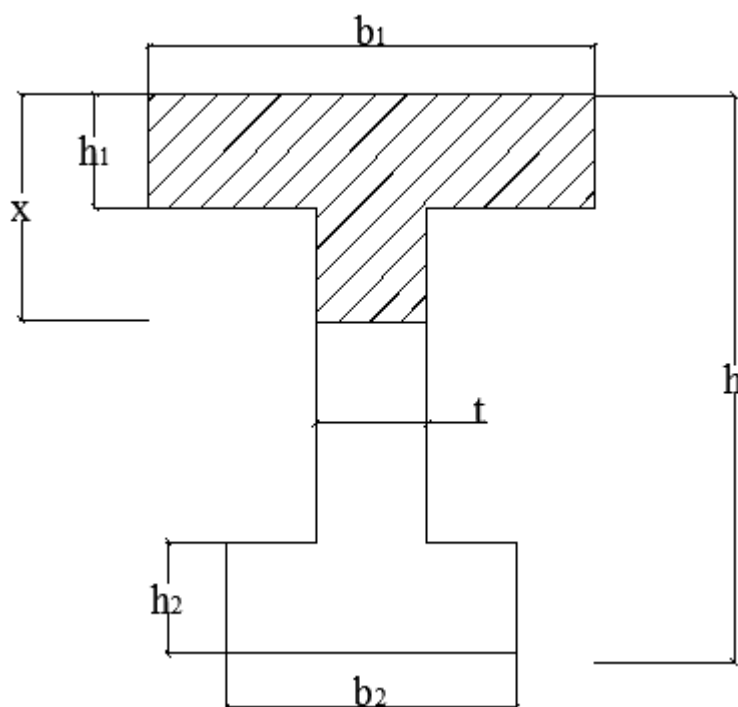


Рис.3. Схема к определению параметров аппроксимации для железобетонного двугаврового сечения с нормальной трещиной

Следует отметить, что вся база аппроксимационных данных может быть получена для конкретных значений модуля упругости E и модуля сдвига G бетона. Учитывая, что эта задача линейная, для получения перемещений в элементе с другими значениями модулей упругости и сдвига легко умножить их на отношение соответствующих параметров рассматриваемой конструкции (или соответствующей стадии итерации) на параметры, приведенные в базе данных.

Рассмотрим расчет крутильной жесткости многопустотных плит по предложенной методике. Сечение многопустотной плиты с достаточной точностью можно представить в виде, показанном на рис. 4.

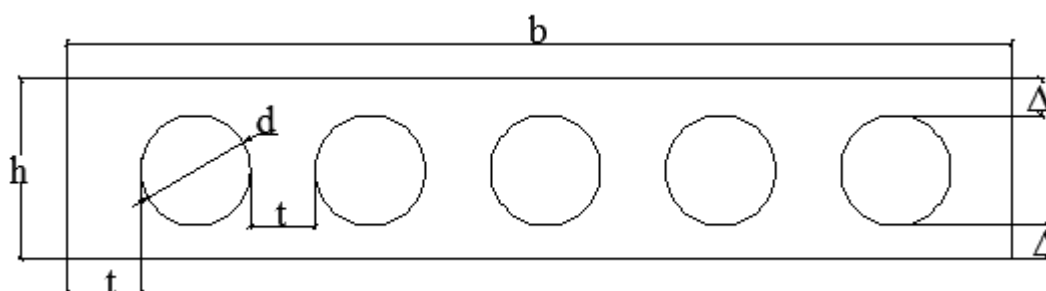


Рис. 4. Схема к определению параметров аппроксимации для многопустотной плиты с нормальной трещиной

Функция взаимного перемещения берегов трещины в этом случае будет иметь вид:

$$\Delta_{crc} = f(b, h, d, t, \Delta, n), \quad (9)$$

где n – количество пустот; остальные обозначения – по рис. 4.

Для аппроксимации данных численного эксперимента, как было сказано выше. Удобно использовать методику Каленчук-Порхановой А.А. [12]. Так, например, для таврового элемента с шириной верхней полки b_1 , ее толщиной h_1 , шириной ребра b_2 , высотой ребра h_2 на основе серии расчетов по программе «Лира» с использованием объемных конечных элементов были получены данные численного эксперимента для угла взаимного поворота φ двух блоков, отделенных нормальной трещиной. Аппроксимация данных численного эксперимента по методике [12] имеет вид:

$$\varphi = \frac{-0,00011792b_1h_1 + 0,1886524}{b_2h_2 + 16,95905} \quad (10)$$

Наличие формулы (10) позволяет вычислить угол взаимного поворота берегов трещины для любых значений геометрических параметров таврового элемента. Следует отметить, что формула (10) получена на основе данных численного эксперимента с варьированием геометрических данных таврового сечения при конкретной высоте сжатой зоны (в данном случае – это толщина полки тавра). Если высота сжатой зоны также должна изменяться, то функция угла поворота φ будет содержать не четыре переменные (как в (10)), а пять, включая высоту сжатой зоны (зоны, через которую передается крутящий момент с блока на блок). Но в любом случае, полученная один раз (хотя и на основе достаточно сложного набора данных численного эксперимента) эта функция в дальнейшем может быть использована в практике проектирования сколько угодно раз.

Преимущества предложенного выше метода определения крутильной жесткости с помощью создания базы аппроксимационных данных состоит еще и в том, что он позволяет учитывать нелинейные свойства бетона. Учитывая, что расчет с учетом нелинейных свойств материалов ведется с помощью итераций, то на каждом шаге итераций следует принимать новые деформационные характеристики. В базе же данных взаимное перемещение берегов нормальной трещины является функцией геометрических параметров и высоты сжатой от изгиба зоны (высоты нормальной трещины) типа выражения (8), полученной для конкретных фиксированных значений модуля упругости E и модуля сдвига G бетона. Следовательно, имея экспериментальные данные этих параметров для конкретно рассматриваемого случая, на каждом шаге итерации мы используем выражение типа (8) с корректировкой на значение модулей упругости и сдвига на текущей итерации к этим параметрам, принятым в базе данных.

Что касается экспериментальных данных об изменении модуля упругости бетона, то их в литературе имеется достаточно большое количество. Экспериментальные данные о нелинейном изменении модуля сдвига бетона, по-видимому, впервые были получены под руководством автора настоящей статьи [8]. В этих работах была предложена экспериментально обоснованная диаграмма сдвига бетона, имеющая небольшой участок нисходящей ветви. Данные о нелинейном деформировании при кручении приведены также в работах [23, 24, 27].

Таким образом, имея аппарат определения крутильной жесткости железобетонного элемента с нормальными трещинами с учетом нелинейных свойств бетона, введя его как один блок расчета в программные комплексы, упомянутые выше, мы можем рассчитывать сложные многократно статически неопределимые системы (перекрытия, мосты, каркасы зданий и т.п.) с учетом влияния крутильной жесткости на перераспределение усилий между отдельными элементами системы.

Рассмотрим теперь важность учета изменения крутильной жесткости на примере элемента прямоугольного сечения в зависимости от высоты зоны без трещин (высоты сжатой зоны для балочного элемента) и диаметра продольной арматуры. В таблице 3 приведены значения k_t для разных вариантов элемента прямоугольного сечения при следующих исходных данных: $E_b=25000$ МПа; $G=10000$ МПа; $b=125$ мм; $h=250$ мм; $M_t=10$ кН*см; $L_{crc}=500$ мм. Данные таблицы получены Н.М. Срибняк под руководством автора по приближенной методике [19].

Как видно из таблицы крутильная жесткость элемента с нормальными трещинами может быть значительно меньше жесткости элемента без трещин, и она зависит как от расстояния между трещинами, высоты зоны без трещин, так и от диаметра продольной арматуры.

Для получения аппроксимационных функций f типа (8) или (9) следует провести достаточно большое, но конечное число расчетов с применением программных комплексов, в которых реализован метод конечных элементов с использованием объемных конечных элементов. На первый взгляд это может показаться сложным, но преимущество такого подхода очевидно, т.к. полученные один раз такие зависимости в дальнейшем могут быть сколько угодно раз использованы проектировщиками и инженерами при решении конкретных задач вышеописанным способом.

Создание библиотеки таких аппроксимационных функций позволит существенно упростить решение многих сложных задач, где количество таких элементов было бы значительно меньшим, чем количество конечных элементов при использовании традиционного метода конечных элементов.

Таблица 3. Изменение крутильной жесткости железобетонного элемента с нормальными трещинами в зависимости от диаметра арматуры и высоты трещин

L_{crc} (мм)	X (мм)	d_s (мм)	Δ_{M_t} (мм*100)	$\Delta_{Q_{ed}}$ (мм*10000)	k_t
500	25	0.8	2.766	7.178	1.63
500	25	1.2	2.766	7.178	1.44
500	25	1.8	2.766	7.178	1.3
500	50	0.8	1.512	4.027	1.56
500	50	1.2	1.512	4.027	1.4
500	50	1.8	1.512	4.027	1.28
500	75	0.8	0.926	2.580	1.48
500	75	1.2	0.926	2.580	1.36
500	75	1.8	0.926	2.580	1.25
250	25	0.8	2.766	7.178	2.27
250	25	1.2	2.766	7.178	1.88
250	25	1.8	2.766	7.178	1.6

После определения нагельной силы в продольной арматуре и жесткости железобетонного элемента с нормальными трещинами при кручении достаточно просто определить прочность бетона сжатой от изгиба зоны от действия крутящего момента по методике [3].

Рассмотрим теперь влияние крутильных жесткостей на пространственную работу мостов и перекрытий. Современные методы расчета железобетонных конструкций мостов и перекрытий учитывают в основном изменение изгибных жесткостей при трещинообразовании. Изменению же крутильных жесткостей практически не уделяется внимание. Это связано, в первую очередь, совершенно малой изученностью данного вопроса, хотя, как было сказано выше, учет этого фактора имеет существенное значение на перераспределение усилий между элементами мостовых конструкций и перекрытий. Рассмотрим для примера ребристую систему пролетом 5000 мм с пятью ребрами 250x250 мм при нагружении среднего (третьего) ребра равномерно распределенной нагрузкой $q=10$ кН/м. Толщина полок, соединяющих ребра 50 мм. Предположим, что полки соединены к ребрам на уровне центров тяжести последних, а также шарнирное соединение полок (имитация сборной ребристой системы). В таблице 4 приведены значения для пяти разных вариантов крутильных жесткостей первых трех ребер (слева направо) такой ребристой системы. Расчеты произведены по методике [2]. Справа от значения изгибающих моментов

приведены погрешности по отношению к базовому варианту, в котором предусмотрена одинаковая крутильная жесткость всех ребер ребристой системы.

Таблица 4. Сравнение изгибающих моментов [кН·м] в ребрах ребристой системы при изменении крутильных жесткостей отдельных ребер

№	Значения жесткостей ребер	$M_{1,max}$		$M_{2,max}$		$M_{3,max}$	
		значение	$\epsilon, \%$	значение	$\epsilon, \%$	значение	$\epsilon, \%$
1	Все ребра одинакового сечения (базовый вариант)	3,194	0	6,688	0	11,498	0
2	Первое ребро имеет крутильную жесткость в 2 раза меньше	3,015	6	6,802	1,7	11,540	0,3
3	Первое ребро имеет крутильную жесткость в 4 раза меньше	2,711	18	6,995	4,5	11,611	1
4	Второе ребро имеет крутильную жесткость в 4 раза меньше	1,085	294	6,486	3,1	12,978	12,8
5	Второе и четвертое ребра имеют крутильную жесткость в 4 раза меньше	1,184	269	7,083	5,9	14,729	28,1

Как видим, при уменьшении крутильной жесткости только одного ребра в 4 раза (что в полнее возможно в реальных железобетонных балках) изгибающие моменты могут изменяться в несколько раз (!), что накладывает существенный отпечаток на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой балки и системы в целом. Таким образом, на простом примере мы показали, на сколько важным является учет изменения крутильных жесткостей в балках мостов и перекрытий при образовании в них нормальных трещин.

Выводы и перспективы исследований. Предложен новый подход к определению крутильных жесткостей железобетонных элементов с трещинами. Предлагаемый способ позволяет решать задачи о кручении железобетонных элементов любого поперечного сечения с помощью аппроксимации функций перемещений в месте расположения трещины, полученных из решения некоторого количества задач с применением метода конечных элементов. Показано существенное влияние крутильных жесткостей на пространственную работу элементов мостов и перекрытий при действии локальных полосовых нагрузок.

В перспективе предполагается определение функций типа (8) или (9) для решения задач о кручении железобетонных элементов различного поперечного сечения и с различными их размерами, а также распространение предложенного подхода на расчет с учетом нелинейных свойств железобетона.

1. Азизов Т.Н. Жесткость железобетонных элементов при кручении и ее влияние на пространственную работу мостов // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій// Збірник наукових праць. НАН України. Фізико-мех.інститут ім.. В.Г. Карпенка. – Львів, 2009. – С. 576-590
2. Азизов Т.Н. Пространственная работа железобетонных перекрытий. Теория и методы расчета: Дисс. ... докт. техн. наук: 05.23.01 / Полтавский национальный технический университет. – Полтава, 2006. – 406 с.
3. Азизов Т.Н., Срібняк Н.Н. Прочность при кручении железобетонных элементов прямоугольного сечения с нормальными трещинами//Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 17., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2008. – С. 100-104.
4. Азизов, Т.Н. Использование аппроксимационных конечных элементов в расчетах конструкций / Т.Н. Азизов // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2010. – № 39, частина 1. – С. 4-9.
5. Азизов, Т.Н. Крутильная жесткость тавровых железобетонных элементов с нормальными трещинами / Т.Н. Азизов, В.И. Стадник // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2009. – № 33 – С. 4-11.
6. Азизов, Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами / Т.Н. Азизов // Дороги і мости. Збірник наукових праць. К.: ДерждорНДІ, 2007. – Вип. 7. Том 1. – С. 3-8.
7. Арутюнян, Н.Х. Кручение упругих тел. / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян; – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.
8. Вільданова Н.Р. Модуль зсуву бетону з врахуванням деформацій пластичності і його вплив на крутильну жорсткість залізобетонних елементів: Дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Одеська державна академія будівництва та архітектури. – Одеса, 2013. – 187 с.
9. Горнов В.Н. Исследование прочности и жёсткости сборных железобетонных перекрытий из лотковых настилов // Материалы и конструкции в современной архитектуре. – М.: Стройиздат, 1950.
10. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчёт несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. – М.: Стройиздат, 1977. – 223 с.
11. Залесов А.С., Климов Ю.А. Прочность железобетонных конструкций при действии поперечных сил. – Киев: Будівельник, 1989. – 105 с.
12. Каленчук-Порханова А.А. Пакет программ аппроксимации функций / А.А. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. — 2008. — № 7.

— С. 32-38.

13. Карабанов Б.В. Нелинейный расчет сборно-монолитных железобетонных перекрытий // Бетон и железобетон. – 2001. - №6. - С. 14-18.

14. Карпенко, Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. / Н.И. Карпенко; – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.

15. Коуэн, Г.Дж. Кручение в обычном и предварительно напряженном железобетоне: Пер. с англ. / Г.Дж. Коуэн; – М.: Изд-во литературы по строительству, 1972. – 104 с.

16. Лантух-Лященко А.И. Развитие дискретно-континуальных методов расчета комбинированных систем: Автореф. дисс. ... докт. техн. наук: 05.23.17/ КИСИ. – К., 1992. – 30 с.

17. Мельник О.С. Жорсткість та міцність залізобетонних елементів порожнистого трикутного перерізу з нормальними тріщинами при крученні: Дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Одеська державна академія будівництва та архітектури. – Одеса, 2013. – 187 с.

18. Рекомендации по проектированию стальных закладных деталей для железобетонных конструкций / НИИЖБ. – М.: Стройиздат, 1984. – 87 с.

19. Срібняк, Н.М. Крутильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами: автореф. дис. канд. техн. наук 05.23.01 / Срібняк Наталія Миколаївна; Одеська державна академія будівництва та архітектури. – О., 2009. – 23 с.

20. Улицкий Б.Е., Потапкин А.А, Руденко В.И., Сахарова И.Д., Егорушкин Ю.М. Пространственные расчёты мостов. – М.: Транспорт, 1967. – 404 с.

21. Azizov, T. Effect of torsional rigidity of concrete elements with normal cracks onto special work of bridges and floorings / T. Azizov // International science Ukrainian edition. – USA – December, 2010. – P.55-59.

22. Cowan H.J. and Armstrong S. Experiments on the Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams and of Concrete-Encased Steel Joints in Combined Bending and Torsion/ Magazine of Concrete Research, Vol.6, No.19//U.K.: London, 1955.- pp. 3-20.

23. Hsu T.T.C. Torsion of Structural Concrete A Summary on Pure Torsion // Symposium on Tor sion, SP №18, AC I, 1968.- SP-18, 165-178.

24. Kemp E.L. Torsion in Reinforced Concrete. A report on a Research Project Sponsored by The University Research Board // E.L.Kemp, M.A.Sozen, C.P.Siess. – Urbana, Illinois: University of Illinois, 1961. – 128p.

25. Luís L.F.A. Behaviour of concrete beams under torsion: NSC plain and hollow beams// Bernardo L.F.A., Sérgio M. R. Lopes. Materials and Structures. July 2008, Volume 41, Issue 6, pp. 1143-1167.

26. Shanmugam S.P. Seismic behavior of circular reinforced concrete bridge columns under combined loading including torsion/ Thesis for the degree Doctor of Philosophy in Civil Engineering// Missouri University of Science and Technology. Missouri, 2009. - 338p.

27. Zia P. Combined Bending and Torsion of Reinforced Plaster Model Beams / P. Zia, R. Cardenas // Torsion of Structural Concrete: Publication SP-18. – ACI Detroit, Michigan, 1968. – P. 337.