

Ю. В. Діхтяренко, М. В. Дудик

**ОСОБЛИВОСТІ
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
БІЛЯ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ
У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ**

Монографія

Умань – 2017

УДК 539.37 + 539.42

ББК 22.251

Д 50

Рецензенти:

Н. Д. Вайсфельд – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечнікова;

Л. А. Кіпніс – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

В. М. Дякон – кандидат фізико-математичних наук, доцент, директор Уманської філії ПВНЗ «Європейський університет»

*Рекомендовано вченою радою
Уманського державного педагогічного університету
імені Павла Тичини*

Протокол № 10 від 21 лютого 2017 року

Д 50 Діхтяренко Ю. В. Особливості напружено-деформованого стану біля вершини тріщини нормального відриву у кутовій точці межі поділу матеріалів: монографія / Ю. В. Діхтяренко, М. В. Дудик. – Бровари : АНФ груп, 2017. – 180 с.

ISBN 978-617-7252-08-4

Отримано аналітичні розв'язки нових задач механіки руйнування про розрахунок модельних зон передруйнування в кінці тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох крихких або квазікрихких матеріалів у точці зламу. Відповідні плоскі статичні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщиною і розрізами розв'язано за допомогою методу Вінера-Хопфа з використанням окремих положень теорії функцій комплексної змінної. Виведено формули для довжин зон передруйнування та встановлено напрямки їх розвитку. Знайдено вирази для розкриття тріщини у її вершині, поля напружень після утворення бічних зон передруйнування та встановлено граничні навантаження, при яких відбувається зрушення тріщини.

Це монографічне дослідження буде корисним для науковців в галузі механіки деформівного твердого тіла, а також студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ISBN 978-617-7252-08-4

УДК 539.37 + 53942

ББК 22.251

© Ю. В. Діхтяренко, М. В. Дудик, 2017

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ НДС БІЛЯ ГОСТРОКІНЦЕВИХ КОНЦЕНТРАТОРІВ НАПРУЖЕНЬ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ.....	9
1.1. Дослідження кусково-однорідних тіл з ламаною межею поділу матеріалів	9
1.2. Моделювання зон передруйнування біля гострокінцевих концентраторів напружень	28
РОЗДІЛ 2. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БІЛЯ ВЕРШИН ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ	39
2.1. Локальне поле напружень в околі вершини тріщини нормального відриву, що виходить з куткової точки межі поділу	39
2.2. КІН біля вершини тріщини нормального відриву, що виходить з куткової точки межі поділу, при навантаженні її берегів відривним нормальним напруженням довільного виду	45
2.2.1. Постановка задачі	45
2.2.2. Побудова розв'язку задачі методом Вінера-Хопфа	46
2.2.3. Частинні випадки навантаження	53
РОЗДІЛ 3. РОЗГАЛУЖЕННЯ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ В КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ	56
3.1. Постановка задачі про розрахунок бічної зони передруйнування в кінці тріщини нормального відриву	57
3.2. Вивід рівняння Вінера-Хопфа	60
3.3. Розв'язання рівняння Вінера-Хопфа задачі.....	66
3.4. Визначення параметрів бічної зони передруйнування	67
3.5. Розрахунок довжини міжфазної зони передруйнування	70
3.6. Розрахунок довжини фронтальної зони передруйнування.....	74
3.7. Аналіз отриманих результатів	79
3.8. Дослідження напруженого стану в околі вершини тріщини після утворення бічної зони передруйнування	89

3.9. Умови поширення тріщини нормального відриву, що виходить на кутову точку межі поділу матеріалів	97
РОЗДІЛ 4. РОЗВИТОК ПОЧАТКОВОЇ ПЛАСТИЧНОЇ ЗОНИ У ВЕРШИНІ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ МЕЖІ ПОДІЛУ РІЗНИХ МАТЕРІАЛІВ.....	102
4.1. Постановка задачі.....	103
4.2. Рівняння Вінера-Хопфа та його розв'язок.....	105
4.3. Визначення довжини та орієнтації бічної пластичної зони.....	108
4.4. Розрахунок довжини міжфазної пластичної зони.....	110
4.5. Аналіз отриманих результатів	114
4.6. Дослідження напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини після утворення бічної пластичної зони.....	122
4.7. Визначення розкриття тріщини нормального відриву при її вершині, обумовленого утворенням пластичних смуг	131
РОЗДІЛ 5. РОЗРАХУНОК ПОЧАТКОВОЇ ПЛАСТИЧНОЇ ЗОНИ В КІНЦІ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ В РАМКАХ МОДЕЛІ "ТРИЗУБЕЦЬ" .	134
5.1. Постановка задачі.....	134
5.2. Розв'язання рівняння Вінера-Хопфа.....	138
5.3. Розрахунок довжини пластичної зони передруйнування	140
5.4. Розрахунок довжини міжфазної пластичної зони в рамках моделі «тризубець»	141
5.5. Аналіз отриманих результатів	146
5.6. Дослідження напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини після утворення пластичної зони передруйнування.....	148
5.7. Умови зрушення тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу матеріалів.....	155
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	160

ПЕРЕДМОВА

Наявність або зародження і розвиток у твердих тілах дефектів структури типу тріщин, включень та ін. істотно впливають на міцність конструкцій, оскільки приводять до високого рівня концентрації напружень в їх околі. Навантаження тіла супроводжується появою біля вершин гострокінцевих дефектів областей незворотних деформацій – зон передруйнування. Це вимагає детального дослідження впливу зон передруйнування на напружено-деформований стан біля концентраторів та умови зародження і поширення з їх вершин тріщин чи інших дефектів. Розв'язання даного класу задач складає предмет механіки руйнування, основи якої були започатковані у роботах А.А. Griffith, G.R. Irvin, E.O. Orowan і отримали подальший розвиток у працях А.Г. Акопяна, В.М. Александрова, О.Є. Андрейківа, Н.Д. Вайсфельд, П.М. Витвицького, О.М. Гузя, С.О. Калоєрова, А.О. Камінського, Л.А. Кіпніса, Г.С. Кіта, О.С. Космодам'янського, О.Ф. Кривого, Р.М. Кушніра, М.Я. Леонова, О.М. Лінькова, В.В. Лободи, Р.М. Мартиняка, В.В. Мелешка, Н.Ф. Морозова, М.І. Мусхелішвілі, В.М. Назаренка, М.М. Николишина, В.І. Острика, В.В. Панасюка, В.З. Партон, П.І. Перліна, Я.С. Підстригача, Ю.М. Подільчука, В.Г. Попова, Г.Я. Попова, Ю.М. Работнова, Г.М. Савіна, М.П. Саврука, Б.І. Сметаніна, Л.Й. Слепяна, Г.Т. Сулима, А.Т. Улітко, Л.П. Хорошуна, А.О. Храпкова, Л.А. Фільштинського, В.П. Шевченка, M. Isida, W.T. Koiter, H. Liebowitz, P.C. Paris, I.R. Rice, G.C. Sih, P.S. Theocaris, M.L. Williams, M. Wnuk, T. Yokobori, A.R. Zak.

Процес деформування матеріалу в зонах передруйнування носить складний, суттєво нелінійний характер, тому його завершеної теорії немає. Це обумовило запровадження рядом авторів для вивчення зон передруйнування різного роду моделей (Г.І. Баренблатт, Р.В. Гольдштейн, А.О. Камінський, М.Я. Леонов, В.В. Панасюк, Р.Л. Салганик, Г.П. Черепанов, F. Erdogan, D.S. Dugdale, I.W. Hutchinson, J.R. Rice, K.K. Lo, A. Tvergaard, M. Wnuk та ін.). Проте, дослідження зон виконувались переважно біля вершин тріщини в однорідних тілах. В той же час актуальним для механіки руйнування

композитів, зварних і клеєних з'єднань, гірських порід тощо є визначення зон передруйнування та відповідного напружено-деформованого стану в околі концентраторів напружень у кусково-однорідних тілах. У зв'язку з цим в даній роботі в рамках лінійної механіки руйнування розглядаються задачі про розрахунок в умовах плоскої деформації маломасштабних зон передруйнування, які виникають у кусково-однорідному тілі в кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох однорідних ізотропних матеріалів, та досліджується вплив зон передруйнування на напружено-деформований стан в привершинній області.

Враховуючи експериментально відкриту тенденцію пластичних зон при низьких рівнях навантаження до локалізації у вузьких смугах матеріалу, в роботі для опису зон передруйнування в залежності від властивостей матеріалів з'єднання та умов навантаження використовується модель Леонова-Панасюка-Дагдейла у наступних варіантах:

1) якщо зона передруйнування утворена у крихкому матеріалі і переважаючі деформації в ній носять характер відриву, то вона моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу (зона крихкого передруйнування);

2) якщо зона передруйнування утворена у квазікрихкому матеріалі і переважаючі деформації в ній носять характер зсуву, то вона моделюється лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює межі текучості матеріалу при зсуві (смуга пластичності).

У монографії наведено одержані авторами розв'язки задач про розрахунок модельних зон передруйнування в кінці тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох крихких або квазікрихких матеріалів у точці зламу.

Перший розділ містить огляд опублікованих в літературі з механіки руйнування результатів досліджень напружено-деформованого стану кусково-однорідних тіл з ламаною межею поділу матеріалів та проаналізовано основні математичні моделі, що описують початковий процес передруйнування біля

гострокінцевих концентраторів напружень і допускають аналітичний розв'язок задач про розрахунок зон передруйнування.

У другому розділі викладено необхідні для подальшого загальні положення про поведінку напружень біля вершини тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу матеріалів.

У третьому розділі наведено аналітичні розв'язки симетричних задач про розрахунок маломасштабної зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних крихких матеріалів, та досліджено напружено-деформований стан після утворення зони передруйнування. Зону подано двома лініями розриву нормального переміщення, на яких нормальне напруження дорівнює опору відриву відповідного матеріалу. На нескінченності сформульовано умову збігу шуканого розв'язку з асимптотичним розв'язком біля вершини тріщини аналогічної задачі без зони передруйнування, що дозволило врахувати вплив зовнішнього силового поля на параметри зони. Для визначення орієнтації ліній розриву використано умову максимуму потенціальної енергії, накопиченої в зоні передруйнування. Отримано формули для чисельного визначення орієнтації і довжини маломасштабної зони передруйнування, поля напружень в околі вершини тріщини після утворення зони. Знайдено розкриття тріщини у її вершині, яке використано для формулювання умов зрушення в рамках деформаційного критерію руйнування. Досліджено залежність параметрів зони від навантаження, кута розхилу межі поділу та відношення модулів Юнга матеріалів. Встановлено умови і напрямок зрушення тріщини.

У четвертому розділі наведено аналітичні розв'язки симетричних задач про розрахунки маломасштабних бічних пластичних смуг у кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу двох квазікрихких матеріалів, та обумовлених їх появою змін напружено-деформованого стану в околі вершини. У відповідності з гіпотезою локалізації та моделлю Леонова-Панасюка-Дагдейла зону представлено двома відрізками розриву дотичного переміщення, на яких дотичне напруження дорівнює

границі текучості матеріалу при зсуві. Отримано аналітичні вирази для довжини пластичних смуг та визначено їх орієнтацію з умови максимуму швидкості дисипації енергії в зоні. Використовуючи зворотне перетворення Мелліна, досліджено поле напружень в околі кутової точки після утворення початкових пластичних смуг. На основі числового аналізу показано, що при певних параметрах задачі концентрація напружень у кутовій точці зберігається, тому після появи двох бічних пластичних смуг з вершини тріщини нормального відриву, що співпадає з кутовою точкою межі поділу, передбачено появу вторинної пластичної зони передруйнування на продовженні тріщини. Розрахунок розмірів пластичної зони передруйнування і пов'язаного з нею розкриття тріщини приведено в рамках моделі "тризубець" у п'ятому розділі монографії. Встановлено, що поява зони на продовженні тріщини усуває концентрацію напружень у кутовій точці. На основі числових розрахунків проаналізовані залежності параметрів зони від кута зламу межі поділу та пружних характеристик матеріалів. Отримано вирази для повного розкриття тріщини внаслідок розвитку бічних пластичних смуг і смуги на продовженні тріщини та поля напружень після утворення пластичної зони передруйнування. Досліджено вплив утворення пластичної зони на умови зрушення тріщини. Розв'язок усіх задач виконано за допомогою методу Вінера-Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна.

Викладені у монографії результати можуть бути корисними науковцям у галузі механіки деформівного твердого тіла, а також студентам фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Автори висловлюють щирю вдячність Л.А. Кіпнісу, О.Ф. Кривому, В.І. Острику, Н.Д. Вайсфельд за цінні наукові поради та зауваження, що були висловлені у процесі роботи над монографією.