УДК 624.012.45

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АППРОКСИМАЦИОННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ КОНСТРУКЦИЙ

Азизов Т.Н., *д.т.н., проф.*
(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина)

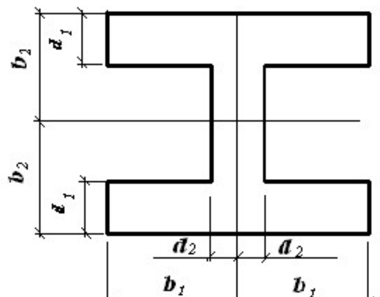
Постановка задачи и анализ исследований.

При исследовании НДС различных элементов и конструкций в настоящее время используются, как правило, численные методы, в первую очередь метод конечных элементов (МКЭ).

Существуют задачи, в которых могут быть использованы только объемные конечные элементы. К таким задачам можно отнести задачи о кручении. В последнее время автор статьи со своими учениками исследует НДС железобетонных элементов с нормальными трещинами при кручении [1-3, 5]. В этих работах показано, что для определения крутильной жесткости железобетонного элемента с нормальными трещинами следует решить задачу об НДС параллелепипеда, к части поперечного сечения которого приложен крутящий момент, т.к. последний передается с блока на блок через сжатую от изгиба зону балки (см. [1, 5]).

Для решения этой задачи методом конечных элементов следует использовать объемные конечные элементы в виде параллелепипедов конечных размеров. Одним из недостатков решения этой задачи таким способом является условие использования большого количества конечных элементов, что усложняет как создание расчетной схемы, так и анализ результатов расчета, тем более, если это является только частью решения общей задачи о НДС железобетонного элемента с нормальными трещинами при кручении [5].

Другим примером возникающих сложностей может служить расчет стержневых систем с применением тонкостенных профилей. Так, если используется стержень таврового или двутаврового сечения, у которого толщина полок и стенки не может считаться малой (железобетонные балки), то использование теории расчета тонкостенных стержней будет давать ощутимую погрешность. В тоже время теоретически решенные задачи о кручении (например, [4]) предполагают симметричное сечение (рис. 1, а), тогда как железобетонные двутавровые балки как правило имеют несимметричную форму поперечного сечения (рис. 1, б).



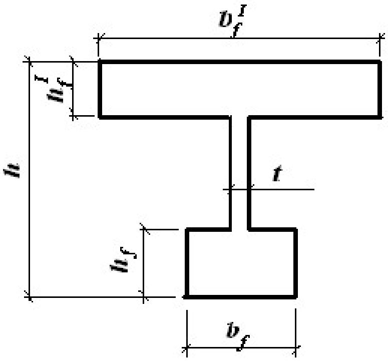


Рис. 1. Схема поперечного сечения в виде двутавра:
а)- для которого имеется точное решение теории упругости;
б) – несимметричное, встречающееся в ж/б конструкциях

Изложение методики. Для решения подобных задач можно использовать аппроксимационные конечные элементы. Для пояснения предлагаемого метода рассмотрим сначала вычисление момента инерции при кручении стержня прямоугольного сечения с шириной b и высотой h с помощью аппроксимации результатов расчета по известным методикам. Известно, что момент инерции при кручении элемента прямоугольного сечения определяется по формуле [6]:

$$J_t = b^3 h \cdot \beta, \tag{1}$$

где b и h – соответственно меньшая и большая стороны прямоугольного сечения; β – коэффициент, зависящий от соотношения сторон b и h.

Представим момент инерции при кручении в виде, подобном (1):

$$J_t = b^n h^m \cdot \beta, \tag{2}$$

Степени n и m, а также коэффициент β будут искомыми неизвестными величинами. В общем виде степени n и m можно представить в виде полиномов. Тогда выражение (2) будет выглядеть:

$$J_t = \beta \cdot b^{x_1\alpha + x_2\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^n} \cdot h^{x_{n+1}\alpha + x_{n+2}\alpha^2 + \ldots + x_{2n}\alpha^n}, \tag{3}$$

где $\alpha = b/h$ – отношение сторон прямоугольника; β, $x_1 \ldots x_{2n}$ – неизвестные, подлежащие определению. В зависимости от степени полинома будем иметь $2n+1$ неизвестных.

Рассмотрим для примера полином второй степени:

$$J_t = \beta \cdot b^{x_1\alpha + x_2\alpha^2} \cdot h^{x_3\alpha + x_4\alpha^2} \tag{4}$$

Прологарифмировав (4), получим:

$$x_1\alpha \ln a + x_2\alpha^2 \ln a + x_3\alpha \ln b + x_4\alpha^2 \ln b + \ln \beta = \ln J_t \;, \tag{5}$$

где $x_1 \ldots x_4; \ln b$ – пять неизвестных величин, подлежащих определению. Для определения этих неизвестных следует составить пять уравнений типа (5) и мы получим систему пяти линейных уравнений с пятью неизвестными. Для этого следует взять пять различных размеров сечения, вычислить моменты инерции по (1) и составить систему уравнений (5). Очевидно, что для получения достаточной точности следует взять как можно большее количество вариантов, в результате чего система уравнений типа (5) на основе (3) будет соответственно содержать большее количество уравнений и неизвестных. Форму выражения (3) можно взять в виде любого другого подобного полинома или ряда, что представляет широкие возможности для инженеров-исследователей.

Следует отметить, что размеры сечения b и h нужно задавать в абсолютных величинах в пределах реальных размеров используемых на практике сечений. Попытка использования относительных параметров (например, в виде отношения одной стороны к другой) для определения жесткостных параметров оказывается безуспешной. Действительно, при соотношении *b/h*, равном, например, 0.5 при значениях *bxh*=100x200 и *bxh*=200x400 стержень будет иметь совершенно разные параметры жесткости.

Для пояснения рассмотрим пример получения аппроксимационых жесткостных характеристик. Автором был задан ряд размеров сечения: два варианта ширины сечения 20 и 100 мм; для каждого из вариантов ширины сечения варьировалась высота сечения с отношением *b/h*, в интервале от 0.2 до 2 с шагом 0.2. Таким образом получилась система 19 уравнений типа (3) с девятнадцатью неизвестными. Сверка полученных моментов инерции с точными формулами во всем интервале заданных ширин показала весьма высокую точность (максимальная погрешность не превышала 3%), что подтверждает достоверность предложенного метода. Для расчета следует задать интервал ширин сечения и интервал отношений *b/h* и задача будет решена достаточно просто. При этом программа для расчета на ЭВМ получается достаточно простой (20-40 строк).

Аналогичный подход можно применять для различного рода загружения как объемных, так и плоских конечных элементов. Так, например, пусть требуется определить перемещения угловых точек прямоугольного параллелепипеда, закрученного сосредоточенными силами, приложенными в этих угловых точках (рис. 2).

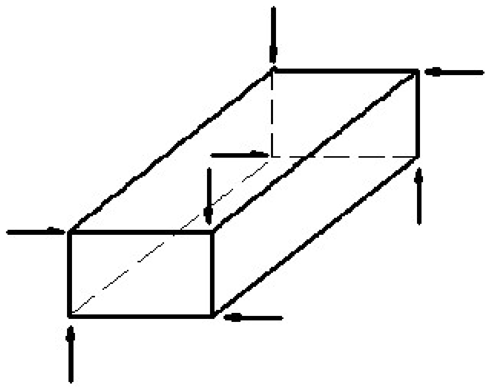


Рис. 2. Схема параллелепипеда, закрученного сосредоточенными силами, приложенными в его угловых точках

Для решения задачи о перемещении угловых точек параллелепипеда методом конечных элементов следует разбить его на достаточно большое количество объемных конечных элементов. Действуя аналогично вышеописанному, мы можем на основе достаточно большого количества расчетов с помощью того же МКЭ получить аппроксимационные зависимости того или иного перемещения от размеров параллелепипеда b, h и l. Полученные один раз такие зависимости в дальнейшем могут быть сколько угодно раз использованы при решении конкретных задач.

Создание библиотеки таких аппроксимационных конечных элементов позволило бы существенно упростить решение многих сложных задач механики, где количество таких элементов было бы значительно меньшим чем количество конечных элементов при использовании традиционного МКЭ.

Возвращаясь к задаче об определении жесткостных параметров железобетонного элемента с нормальными (или наклонными) трещинами при кручении, можно отметить, что для определения, например, перемещений каких-либо точек следует составить аппроксимационные уравнения (на основе некоторого большого количества расчетов с помощью МКЭ), в которых должны варьироваться размеры сечения b и h, высота сжатой зоны (высота зоны, через которую передается крутящий момент), а также длина блока, отделенного нормальными трещинами.

Как недостаток предлагаемого подхода следует отметить его существенную ограниченность по сравнению с МКЭ, т.к. аппроксимационные зависимости можно получить для конкретных точек элемента (например, угловых точек параллелепипеда на рис. 2). Однако, и при такой ограниченности предлагаемого подхода, его применение для решения многих задач может быть весьма эффективным.

Кроме вышеописанной задачи о кручении железобетонного элемента с нормальными трещинами в качестве другого примера успешного применения описанного метода можно привести расчет стены здания, состоящего из панелей, соединяемых между собой в углах. При использовании МКЭ следовало бы разбить каждую панель на достаточно большое количество конечных элементов. Наличие же аппроксимацонных формул для перемещений четырех угловых точек панелей позволит в качестве одного элемента использовать целую панель. Преимущества такого подхода к решению конкретной задачи подобного типа очевидно.

Выше были упомянуты трудности по определению крутильной жесткости стержней двутаврового сечения (см. рис. 1). В классических задачах теории упругости [4] приводятся решения и формулы для жесткости при кручении симметричного двутаврового сечения. Для сечения в виде, показанном на рис. 1, б, решение отсутствует. Кроме того, использование теории кручения тонкостенных стержней в данном случае не подходит в виду достаточно большой толщины элементов, составляющих сечение.

Крутильная жесткость такого сечения может быть получена с помощью предлагаемого метода. Для этого составляется некоторое множество расчетов с применением объемных конечных элементов. Жесткость ***C*** двутаврового сечения является функцией шести переменных (см. рис. 1, б):

$$C = f\left(b_f^I, h_f^I, b_f, h_f, t, h\right) \tag{6}$$

По перемещениям определенных точек такого стержня вычисляется его крутильная жесткость и составляется система уравнений типа (5), в которой правыми частями являются величины крутильных жесткостей, полученных из расчета по МКЭ. Конечно, ввиду большого количества переменных количество неизвестных и уравнений будет достаточно большим, но при этом будет получена аппроксимационная формула определения крутильной жесткости стержня двутаврового сечения с любыми размерами, входящими в интервал исследования. С другой стороны, определенная таким образом жесткость при кручении будет автоматически учитывать и секториальную жесткость при рассмотрении тонкостенных стержней, т.к. в решении с помощью пространственных конечных элементов учитывается и депланация сечений.

Выводы и перспективы исследования. Предлагаемый способ позволяет решать задачи механики деформируемого твердого тела с помощью использования элементов конечных размеров, перемещения или напряжения отдельных точек которых получены путем аппроксимации определенными функциями этих перемещений, полученных в результате численного решения задач методом конечных элементов или определенные параметры (например жесткость), полученные из известных точных методов.

В перспективе предполагается очерчивание круга аппроксимационных конечных элементов для решения конкретных задач строительной механики, исследование различных функций для аппроксимации результатов численного эксперимента, а также создание библиотеки аппроксимационных конечных элементов.

SUMMARY

The method of the determination of the stress-tensioned state for various structures is represented in article.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т.Н. НДС железобетонного элемента с нормальными трещинами при кручении //Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 36 – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – С. 10-16.
2. Азизов Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами//Дороги і мости. Збірник наукових праць. Вип. 7. Том 1. – К.: ДерждорНДІ, 2007. – С. 3-8.
3. Азизов Т.Н., Стадник В.И. Крутильная жесткость тавровых железобетонных элементов с нормальными трещинами//Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 33 – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – С. 4-11.
4. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.
5. Срібняк Н.М. Крутильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами// Автореф. дис. … канд..техн.наук: 05.23.01. Одеса, 2009. – 23.
6. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1970. – 544 с.