

УДК 539.375

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ЕТАПУ ПОВОРОТУ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

М. В. ДУДИК, Ю. В. ДІХТЯРЕНКО

Уманський державний педагогічний університет

Подано розв'язок задачі про початкову зону передруйнування в умовах плоскої деформації в околі кутової точки межі поділу двох різних пружних матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина. Досліджено залежності орієнтації, довжини зони і її розкриття від навантаження, кута розхилу межі поділу і пружних параметрів з'єднаних матеріалів. На основі деформаційного критерію розглянуто умови зрушення тріщини.

**Ключові слова:** кутова точка межі поділу середовищ, міжфазна тріщина, зона передруйнування, поворот тріщини.

В останнє десятиліття виконано низку праць, присвячених повороту тріщини, розташованої на плоскій межі поділу двох різних середовищ [1–5], в яких основний метод визначення кута повороту полягав у введенні на продовженні тріщини короткого бічного тріщиноподібного відгалуження з використанням того чи іншого критерію вибору напрямку його поширення. Проте, у цих дослідженнях не враховувалось утворення в кінці міжфазної тріщини, як концентратора напружень, зони передруйнування, яка суттєво змінює напружено-деформований стан в околі її вершини. Це врахували [6, 7] і запропонували ефективний метод розрахунку початкової бічної зони передруйнування, орієнтація якої визначає напрямок підростання тріщини під час збільшення навантаження.

Водночас бракує досліджень аналогічних задач про міжфазну тріщину, що виходить з кутової точки межі поділу середовищ. Їх розв'язок актуальний для механіки руйнування композитів з гранульованими наповнювачами, зварних або клеєних з'єднань кусково-однорідних клиновидних тіл тощо. Мета роботи – розрахувати початкову бічну зону передруйнування у вершині кута ламаної межі поділу двох пружних середовищ з міжфазною тріщиною, визначити її орієнтацію, довжину і розкриття та дослідити умови і напрямок зрушення тріщини.

**Формулювання задачі.** В умовах плоскої деформації розглянемо задачу про початковий етап повороту прямолінійної міжфазної тріщини довжини  $L$ , що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних пружних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга  $E_1$ ,  $E_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ . Кут розхилу межі поділу  $\alpha$ . На цьому етапі, згідно з гіпотезою локалізації [8, 9], передбачається утворення бічної зони передруйнування, яка поширюється з кутової точки у тонкому шарі менш тріщиностійкого з матеріалів композита, припускаємо, що першого. У зв'язку з цим, приймаючи відривний характер розвитку зони, моделюватимемо її нахилоною під кутом  $\beta$  до межі поділу середовищ лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опорі відриву першого матеріалу  $\sigma_1$ . Довжину лінії розриву  $l$  та кут її нахилу  $\beta$  визначають під час розв'язання задачі.

На початку розвитку довжина зони передруйнування значно менша від довжини тріщини та всіх інших розмірів тіла, і оскільки напружено-деформований

Контактна особа: М. В. ДУДИК, e-mail: dudik\_m@hotmail.com

стан досліджують лише в околі зони, то вихідна задача зводиться до задачі про лінію розриву скінченної довжини у кусково-однорідній площині з межею поділу середовищ у формі сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін виходить півнескінченна тріщина.

Граничні умови на нескінченності визначають асимптотичним розв'язком в околі кутової точки аналогічної задачі без лінії розриву, що відповідає кореням її характеристичного рівняння у смугі  $-1 < \text{Re} \lambda < 0$  [10]:

$$D(\lambda) = 0, \quad (1)$$

$$D(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 d_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)d_1 d_2 - e^2(1 + \kappa_2)^2 d_3 +$$

$$+ 4(e - 1)^2 d_1 d_3 + 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)d_3 d_4 + 2e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)d_5,$$

$$d_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad d_2 = \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$d_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \quad d_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$d_5 = d_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \quad e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Числовий аналіз рівняння (1) показав, що таких коренів може бути два або три, причому два найменших корені  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  близькі за порядком до  $-0,5$ , а  $\lambda_3$  – до  $0$  [11]. Існує також інтервал кутів розхилу ( $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$ ), на якому корені  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  є комплексно спряжені ( $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ ). Далі під час обчислень параметрів зони передруйнування розрізнятимемо у смугі  $-1 < \text{Re} \lambda < 0$  лише дійсні або комплексний і дійсний корені.

Вважаємо, що береги тріщини вільні від навантаження, а на межі поділу реалізовано ідеальне зчеплення, яке забезпечує неперервність напружень і переміщень. На нескінченності задана асимптотика, що відповідає головним членам розвинень розв'язку задачі без зони передруйнування. Враховуючи моделювання зони передруйнування відрізком розриву нормального переміщення, приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \quad \theta = -\alpha \cup \theta = 2\pi - \alpha;$$

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \theta = 0;$$

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0, \quad \theta = \beta;$$

$$\sigma_\theta(r, \beta) = \sigma_1, \quad \theta = \beta, \quad r < l; \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \theta = \beta, \quad r > l;$$

$$\sigma_\theta = \sum_i C_i F(\lambda_i, \beta) r^{\lambda_i} + O(1/r), \quad \theta = \beta, \quad r \rightarrow \infty,$$

де  $\langle f \rangle$  – стрибок величини  $f$ ;  $C_i$  – сталі, що характеризують інтенсивність зовнішнього силового поля і вважаються заданими;  $(r, \theta)$  – полярна система координат у вершині кута. Тут

$$F(\lambda, \beta) = \frac{X}{(1 + \kappa_1)\Delta} \{ (\lambda + 2) [ e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) - e^2(1 + \kappa_2)^2 + 4(e - 1)^2 d_1 +$$

$$+ 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)d_4 ] (h_1 + h_2) + (1 + \kappa_1) [ d_1 h_3 + e(1 + \kappa_2)h_4 ] \},$$

$$X = \sqrt{\frac{e + \kappa_1}{2\pi(1 + e\kappa_2)}},$$

$$\Delta = 2(1 + \kappa_1)d_6 - e(1 + \kappa_2)d_7 + 4(e - 1)(\lambda d_8 \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) + d_9 \sin \lambda \alpha),$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= -(\lambda + 1) \sin \alpha \sin \beta \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha - \beta), \\
h_2 &= \sin(\alpha + \beta) \sin(\lambda + 1) \beta \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
h_3 &= -2(e - 1) \left[ (\lambda + 2) \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) + \right. \\
&\quad \left. + \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha - \beta) \right] - (1 + \kappa_1) \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha - \beta), \\
h_4 &= d_1 \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha - \beta) - (\lambda + 2) \sin(\lambda + 1)(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) \sin 2\lambda\pi, \\
d_6 &= \lambda \sin \alpha \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) - \sin \lambda \alpha \cos 2\lambda\pi, \\
d_7 &= (\lambda + 2) \sin \lambda (2\pi - \alpha) - \lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha), \\
d_8 &= (\lambda + 2) \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1) \alpha, \\
d_9 &= (\lambda + 2) \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 1) \alpha - \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2) \alpha.
\end{aligned}$$

Біля кінця зони переддруйнування для напружень і переміщень реалізується асимптотика, що відповідає найбільшому розв'язку однорідної задачі теорії пружності біля вершини півнескінченної прямої лінії розриву нормального переміщення в однорідному матеріалі. Зокрема, має місце асимптотика  $\sigma_\theta(r, \beta) \sim \frac{k_1}{\sqrt{2\pi(r-l)}}$

для  $r \rightarrow l + 0$ , де  $k_1$  – коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці лінії нормального відриву, який визначають під час розв'язування задачі.

**Обчислення параметрів зони переддруйнування.** Розв'язок сформульованої задачі знайдено методом Вінера–Хопфа з використанням інтегрального перетворення Мелліна, аналогічно розв'язку задачі про бічну зону переддруйнування в кінці тріщини на плоскій межі поділу двох пружних середовищ [6]. З нього знайдені трансцендентні рівняння для визначення відносної довжини зони переддруйнування  $x = l/L$  та вирази для її розкриття у вершині тріщини як стрибка нормального переміщення  $\delta = \langle u_\theta(0, \beta) \rangle$ . Для встановлення кута між зоною переддруйнування і межею поділу середовищ використано умову максимуму потенціальної енергії, накопиченої в зоні переддруйнування. Залежно від коренів характеристичного рівняння (1) у смугі  $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$  вказані співвідношення мають вигляд

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i, \beta) N(\lambda_i, \beta) x^{\lambda_i} &= \frac{N(0, \beta)}{\sigma}, \quad (2) \\
\delta &= -\frac{4(1 - \nu_1^2)L}{E_1 \sqrt{\pi G(0)}} \sigma \sigma_1 \sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i, \beta) N(\lambda_i, \beta) \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} x^{\lambda_i + 1}, \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i, \beta) N(\lambda_i, \beta) m(\lambda_i, \beta) x^{\lambda_i + 2} = \max,
\end{aligned}$$

де  $n_i = \frac{C_i L^{\lambda_i}}{C_1 L^{\lambda_1}}$ ,  $\sigma = \frac{C_1 L^{\lambda_1}}{\sigma_1}$  – коли характеристичне рівняння має два або три дійсні корені та

$$x^{\lambda_1} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \xi + \psi) + n_3 M x^{\lambda_3} = \frac{S}{\sigma}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\delta &= -\frac{4(1 - \nu_1^2)L}{E_1 \sqrt{\pi G(0)}} \sigma \sigma_1 \left[ 2 \left| F(\lambda_1, \beta) \right| \left| N(\lambda_1, \beta) \right| \left| \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} \right| x^{\lambda_1 + 1} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \xi + \psi + \zeta) + \right. \\
&\quad \left. + n_3 F(\lambda_3, \beta) N(\lambda_3, \beta) \frac{\lambda_3}{1 + \lambda_3} x^{\lambda_3 + 1} \right],
\end{aligned}$$

$$-\left\{2x^{\lambda_r+2}|F(\lambda_1,\beta)||N(\lambda_1,\beta)||m(\lambda_1,\beta)|\cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \psi + \xi + \gamma) + n_3 x^{\lambda_3+2} F(\lambda_3,\beta) N(\lambda_3,\beta) m(\lambda_3,\beta)\right\} = \max,$$

$$\text{де } \varphi = \arg(F(\lambda_1,\beta)), \quad \xi = \arg N(\lambda_1,\beta), \quad \psi = \arctg n, \quad n = \frac{K_I}{K_{II}}, \quad \zeta = \arg \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1},$$

$$n_3 = \frac{\sqrt{2\pi} C_3 L^{\lambda_3}}{|K| L^{\lambda_r}}, \quad \sigma = \frac{|K| L^{\lambda_r}}{\sqrt{2\pi} \sigma_1}, \quad M = \frac{F(\lambda_3,\beta) N(\lambda_3,\beta)}{2|F(\lambda_1,\beta)||N(\lambda_1,\beta)|}, \quad S = \frac{N(0,\beta)}{2|F(\lambda_1,\beta)||N(\lambda_1,\beta)|},$$

$\gamma = \arg m(\lambda,\beta)$  – коли характеристичне рівняння має два комплексно-спряжені ( $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_m$ ,  $C_1 = \bar{C}_2 = (K_I + iK_{II})/\sqrt{2\pi}L^{i\lambda_m}$ ) і один або жодного дійсного кореня  $\lambda_3$ .

У формулах (2) і (3) використані спільні позначення:

$$N(\lambda,\beta) = \frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G^+(-\lambda-1,\beta)}, \quad m(\lambda,\beta) = \frac{\lambda}{(\lambda+2)G^+(-1,\beta)}, \quad K^+(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(0,5-p)},$$

$$G^+(p,\beta) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z,\beta)}{z-p} dz\right], \quad G(z,\beta) = \frac{D_1(z,\beta) \cos z\pi}{D(-1-z) \sin z\pi},$$

$$D_1(p,\beta) = \Delta_1 \Delta_2 \left( e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1) - (1+\kappa_1)^2 \right) - (\Delta_2 \Delta_3 - \Delta_4 \Delta_5) \left( e^2(1+\kappa_2)^2 - 4(e-1)^2 \Delta_1 - 4e(e-1)(1+\kappa_2) \sin^2 p\alpha \right) +$$

$$+ 4(e-1)(1+\kappa_1) \Delta_1 \left( \Delta_4 \sin 2p\beta - \Delta_2 \sin^2 p\beta \right) + e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1) (2\Delta_4 \Delta_6 - \Delta_2 \Delta_7),$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_2 = p \sin 2(\alpha + \beta) + \sin 2p(2\pi - \alpha - \beta),$$

$$\Delta_3 = p^2 \sin^2 \beta - \sin^2 p\beta, \quad \Delta_4 = p^2 \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 p(2\pi - \alpha - \beta),$$

$$\Delta_5 = p \sin 2\beta - \sin 2p\beta, \quad \Delta_6 = p \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) - \sin p\alpha \cos p(\alpha + 2\beta),$$

$$\Delta_7 = p^2 \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) - \sin p\alpha \sin p(\alpha + 2\beta),$$

$$G(0) = \frac{g_1 e(1+\kappa_2) [e(1+\kappa_2) g_2 + (1+\kappa_1) g_3] - g_4 [(1+\kappa_1)^2 g_5 + e^2(1+\kappa_2)^2 g_6 + e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1) g_7]}{\pi [2e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)(g_5 + 2\pi\alpha) - (1+\kappa_1)^2 g_5 - e^2(1+\kappa_2)^2 g_8]},$$

$$g_1 = \sin^2(\alpha + \beta) - (2\pi - \alpha - \beta)^2, \quad g_2 = \sin 2\beta - 2\beta, \quad g_3 = 2 \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) - 2\alpha,$$

$$g_4 = \sin 2(\alpha + \beta) + 2(2\pi - \alpha - \beta), \quad g_5 = \sin^2 \alpha - \alpha^2, \quad g_6 = \sin^2 \beta - \beta^2,$$

$$g_7 = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta, \quad g_8 = \sin^2 \alpha - (2\pi - \alpha)^2,$$

$\Gamma(p)$  – гамма-функція; функція  $D(p)$  визначена в рівнянні (1). В співвідношеннях (3), згідно з широкоживаною в теорії міжфазних тріщин термінологією, введені комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень  $K = K_I + iK_{II}$  і фазовий кут  $\psi$ , який характеризує ступінь змішування мод навантаження.

**Результати обчислень та їх аналіз.** Напрямок поширення зони передруйнування мало залежить від відношення модулів Юнга середовищ (рис. 1a) і навантаження, заданого безрозмірним параметром  $\sigma$  (рис. 1d), проте суттєво залежить

від кута розхилу межі поділу та конфігурації навантаження, яку визначають множниками  $n_i$  для дійсних коренів характеристичного рівняння, або параметром змішування мод  $n$  для комплексних коренів (рис. 2a).

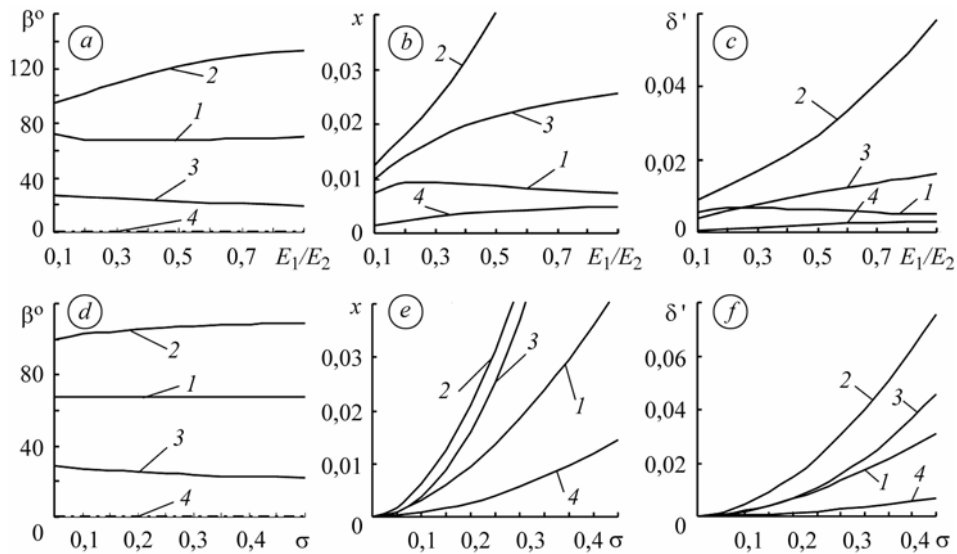


Рис. 1. Залежності кута нахилу зони передруйнування до межі поділу середовищ (a, d), відносних довжини (b, e) та розкриття (c, f) зони передруйнування від відношення модулів Юнга середовищ  $E_1/E_2$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $\sigma = 0,2$ ;  $n_3 = 0$ ) (a–c) та безрозмірного параметра навантаження  $\sigma$  ( $E_1/E_2 = 0,25$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $\sigma = 0,2$ ;  $n_3 = 0$ ) (d–f):  
 1 –  $\alpha = 50^\circ$ ,  $n_2 = 0$ ; 2 –  $\alpha = 50^\circ$ ,  $n_2 = 1$ ; 3 –  $\alpha = 210^\circ$ ,  $n = 0$ ; 4 –  $\alpha = 210^\circ$ ,  $n = 1$ .

Fig. 1. Dependences of a slope angle of the process zone to the interface (a, d); relative length (b, e) and relative opening of the process zone (c, f) on the ratio of the Young's modulus  $E_1/E_2$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ;  $\sigma = 0.2$ ;  $n_3 = 0$ ) (a–c) and on the dimensionless parameter of the load,  $\sigma$ , ( $E_1/E_2 = 0.25$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ;  $\sigma = 0.2$ ;  $n_3 = 0$ ) (d–f):  
 1 –  $\alpha = 50^\circ$ ,  $n_2 = 0$ ; 2 –  $\alpha = 50^\circ$ ,  $n_2 = 1$ ; 3 –  $\alpha = 210^\circ$ ,  $n = 0$ ; 4 –  $\alpha = 210^\circ$ ,  $n = 1$ .

$$\text{Довжина зони передруйнування і її відносне розкриття } \delta' = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)\sigma_0} \frac{\delta}{L}$$

нелінійно зростають зі збільшенням зовнішнього навантаження та суттєво залежать від його конфігурації (рис. 1e, f). Вони істотно залежать від кута розхилу  $\alpha$  межі поділу середовищ (рис. 2b, c, e, f), причому існують кути  $\alpha$ , що за певних конфігурацій навантаження призводять до їх максимальних значень, тобто, відповідна орієнтація прикладених до тіла зовнішніх сил сприяє розвитку зони, а отже, подальшому поширенню тріщини. Якісне порівняння на рис. 2 графіків b, e з c, f вказує на очевидну кореляцію між довжиною і розкриттям зони.

Параметри зони передруйнування залежать від відношення модулів Юнга матеріалів з'єднаних частин тіла (рис. 1), проте ця залежність є менша порівняно із залежністю від кута розхилу та навантаження. Це зрозуміло, оскільки зона передруйнування виникає у одному із з'єднаних матеріалів і у більшій мірі визначена його властивостями, а залежності від відношення модулів Юнга пов'язані з різною деформованістю з'єднаних матеріалів.

Оскільки орієнтація зони передруйнування мало залежить від навантаження, то можна очікувати, що екстраполяція значень кута нахилу зони відносно межі поділу середовищ для великих навантажень дасть кут повороту тріщини за досягнення критичного навантаження  $\sigma_c$ . Припускаючи, що аж до зрушення тріщини довжина зони передруйнування залишається малою порівняно з довжиною трі-

щини, що є необхідною умовою застосування формул (2) і (3), можна знайти  $\sigma_c$  після досягнення розкриттям зони деякого критичного значення  $\delta_1$ , яке є характеристикою тріщиностійкості першого матеріалу. Розраховано залежності граничного параметра навантаження  $\sigma'_c = C_{1c} L^{\lambda_1} / \sigma_1$  ( $\sigma'_c = |K_c| L^{\lambda_r} / \sqrt{2\pi} \sigma_1$  – для комплексних коренів характеристичного рівняння) від довжини тріщини та кута розхилу межі поділу середовищ.

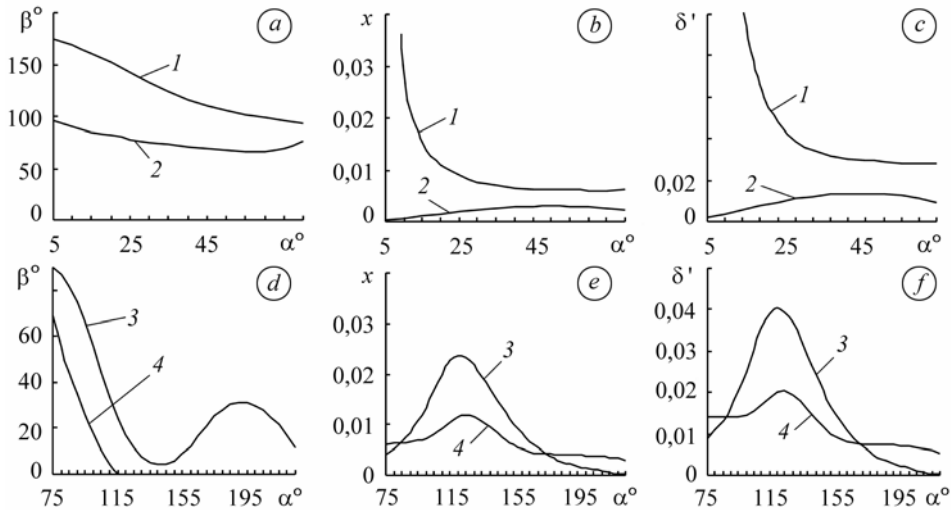


Рис. 2. Залежність кута нахилу зони передруйнування (a, d), відносних довжини (b, e) та розкриття (c, f) зони передруйнування від кута розхилу межі поділу середовищ  $\alpha$  ( $E_1/E_2 = 0,25$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $\sigma = 0,2$ ;  $n_3 = 0$ ) для дійсних (a–c) та комплексних (d–f) коренів характеристичного рівняння: 1 –  $n_2 = 1$ ; 2 –  $n_2 = 0$ ; 3 –  $n = 1$ ; 4 –  $n = 0$ .

Fig. 2. Dependences of a slope angle of the process zone to the interface (a, d); relative length (b, e) and relative opening of the process zone (c, f) on the angle spread of the interface  $\alpha$  ( $E_1/E_2 = 0,25$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $\sigma = 0,2$ ;  $n_3 = 0$ ) for the case of real (a–c) and of complex (d–f) roots of a characteristic equation: 1 –  $n_2 = 1$ ; 2 –  $n_2 = 0$ ; 3 –  $n = 1$ ; 4 –  $n = 0$ .

Встановлено, що граничне навантаження спадає зі збільшенням довжини тріщини; воно тим нижче, що менше критичне розкриття зони передруйнування  $\delta_1$ . На граничне навантаження впливає кут розхилу межі поділу середовищ (рис. 3), особливо за значень, близьких до  $\alpha_{\min}$  і  $\alpha_{\max}$ . З обчислень  $\sigma'_c$  бачимо, що нехтування в рівняннях (2) доданком з  $n_2$  може призвести до значної похибки в значенні граничного навантаження, водночас вплив на  $\sigma'_c$  доданків з  $n_3$  незначний.

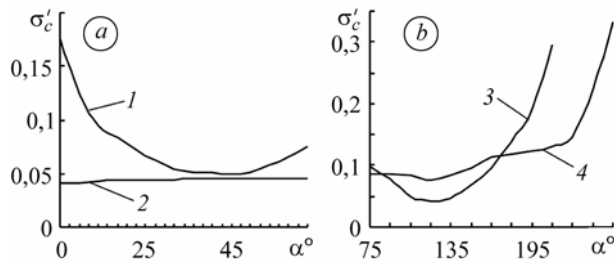


Рис. 3. Залежність граничного навантаження  $\sigma'_c$  від кута розхилу  $\alpha$  межі поділу середовищ ( $E_1/E_2 = 0,25$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $n_3 = 0$ ) для дійсних (a) та комплексних (b) коренів характеристичного рівняння (1): 1 –  $n_2 = 0$ ; 2 –  $n_2 = 1$ ; 3 –  $n = 1$ ; 4 –  $n = 0$ .

Fig. 3. Dependence of the ultimate load,  $\sigma'_c$ , on the angle spread  $\alpha$  of the interface ( $E_1/E_2 = 0,25$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $n_3 = 0$ ) for the case of real (a) and complex (b) roots of a characteristic equation (1): 1 –  $n_2 = 0$ ; 2 –  $n_2 = 1$ ; 3 –  $n = 1$ ; 4 –  $n = 0$ .

## ВИСНОВКИ

Отримані результати показують ефективність пропонованого методу дослідження початкового етапу повороту тріщини в кусково-однорідних тілах. Розглянутий підхід дає змогу врахувати вплив утворення зони передруйнування на напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини і може застосовуватися для розрахунку напрямку і умов зрушення тріщини біля довільних концентраторів напружень. Він допускає також дослідну перевірку вірогідності результатів за кутами повороту тріщини у кутовій точці межі з'єднання клиновидних тіл з міжфазною тріщиною.

*РЕЗЮМЕ.* Наведено решение задачи о начальной зоне предразрушения в условиях плоской деформации вблизи угловой точки границы раздела двух различных упругих материалов, из которой выходит межфазная трещина. Исследованы зависимости ориентации, длины зоны и ее раскрытия от нагрузки, угла раствора границы раздела и упругих параметров соединенных материалов. На основе деформационного критерия рассмотрены условия сдвига трещины.

*SUMMARY.* The solution of a problem on the initial process zone for the plain strain conditions at the corner point of the interface of two dissimilar elastic media from which the interfacial crack goes out is presented. The dependences of the length and the orientation of the zone and its opening on the external load and other parameters of the problem are investigated. Crack moving conditions on the basis of a deformation criterion are considered.

1. *Kinking out of a mixed mode interface crack* / T. Ikeda, Y. Komohara, A. Nakamura, and N. Miyaza // *Key Engineering Materials*. – 2000. – **183**. – P. 73–78.
2. *Kotoul M. and Urbi R. On the stability of cracks with bridged kinks* // *Engng Fract. Mech.* – 2000. – **68**, № 1. – P. 89–105.
3. *Leblond J.-B. and Frelat J. Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips* // *European J. of Mechanics – A/Solids*. – 2001. – **20**, № 6. – P. 937–951.
4. *Leblond J.-B. and Frelat J. Crack kinking from an initially closed, ordinary or interface crack, in the presence of friction* // *Engng Fract. Mech.* – 2004. – **71**, № 3. – P. 289–307.
5. *Veljković J. M. The crack kinking out of an interface* // *Theoret. Appl. Mech.* – 2005. – **32**, № 3. – P. 209–221.
6. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред* // *Прикл. механика*. – 2007. – **43**, № 10. – С. 28–41.  
(*Kaminsky A. A., Dudik M. V., and Kipnis L. A. Initial kinking of an interface crack between two elastic media* // *Int. Applied Mechanics*. – 2007. – **43**, № 10. – P. 1090–1099.)
7. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. Исследование процесса начального поворота трещины на границе раздела двух упругих сред при растяжении и сдвиге* // *Там же*. – 2009. – **45**, № 6. – С. 71–79.  
(*Kaminsky A. A., Dudik M. V., and Kipnis L. A. Initial kinking of an interface crack between two elastic media under tension and shear* // *Int. Applied Mechanics*. – 2009. – **45**, № 6. – P. 635–642.)
8. *Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. Т. 1. Основы механики разрушения материалов* / В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, З. В. Партон. – К.: Наук. думка, 1998. – 488 с.
9. *Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування* // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 1992. – № 1. – С. 49–68.  
(*Panasjuk V. V. and Savruk M. P., Model for Plasticity Bands in Elastoplastic Failure Mechanics* // *Soviet Materials Science*. – 1992. – № 1. – P. 41–57.)
10. *Діхтяренко Ю. В. Особливості напруженого стану в околі кутової точки межі поділу середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина* // *Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: Материалы XIX Международ. науч. школы. – Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2009. – С. 98–100.*
11. *Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В. Развитие зоны передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі поділу двох пружних середовищ* // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2011. – **54**, № 2. – С. 103–114.

Одержано 29.06.2011