

А. А. Каминский, М. В. Дудик, Л. А. Кипнис

**Влияние трения между берегами межфазной трещины на угол ее начального поворота при сдвиге***(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Л. Богдановым)*

*В условиях плоской деформации методом Винера–Хопфа исследован начальный поворот тонкой зоны предразрушения в конце межфазной трещины в кусочно-однородном изотропном упругом теле, берега которой контактируют с трением. Зона предразрушения моделировалась линией разрыва нормального смещения, исходящей из конца трещины под углом к границе раздела сред. Угол наклона зоны предразрушения к границе раздела определялся из условия максимума накопленной в зоне потенциальной энергии. Исследованы зависимости длины зоны и угла ее наклона от упругих параметров тела и коэффициента трения.*

Теоретические исследования межфазной трещины предсказывают существование в окрестности ее вершины физически некорректных пространственных осцилляций напряжений и смещений. В модели Комниноу [1] они устраняются благодаря учету контакта берегов вблизи вершины, при этом сохраняется степенная сингулярность напряжений. В различных версиях модели Комниноу предполагается как гладкий контакт берегов, так и наличие трения между ними [1–4].

Контакт берегов трещины изменяет характер напряженно-деформированного состояния вблизи вершины, что влияет на направление ее распространения. В данной работе направление начального поворота межфазной трещины определено по углу наклона зоны предразрушения, образующейся в конце трещины. Расчет зоны на начальном этапе ее развития в условиях плоской деформации с учетом трения берегов трещины выполнен с помощью метода Винера–Хопфа в рамках модели Леонова–Панасюка–Дагдейла. Ранее аналогичное исследование было проведено в случае гладкого контакта берегов [5].

**Постановка задачи.** В условиях плоской деформации при сдвиге рассмотрим задачу о начальном этапе поворота межфазной трещины, расположенной на плоской границе раздела двух различных упруго-хрупких однородных изотропных материалов с модулями сдвига  $G_1$ ,  $G_2$  и коэффициентами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ . На этом этапе предполагается образование боковой зоны предразрушения, которая распространяется из вершины трещины в тонком слое менее трещиностойкого из материалов композитного соединения, например, первого. Вследствие отрывного характера развития зоны предразрушения будем моделировать ее наклоненной под углом  $\alpha$  к границе раздела сред линией разрыва нормального перемещения, на которой нормальное напряжение равно сопротивлению отрыва первого материала  $\sigma_1$ . Как показали дальнейшие численные расчеты, ее ориентация близка к направлению максимума отрывного окружного напряжения вблизи вершины трещины в задаче без зоны предразрушения, что оправдывает пренебрежение скачком касательных перемещений. Длина линии разрыва  $l$  и угол ее наклона определяются в ходе решения задачи.

На начальном этапе длина зоны предразрушения значительно меньше длины трещины и всех других размеров тела, поэтому исходная задача сводится к задаче о линии разрыва

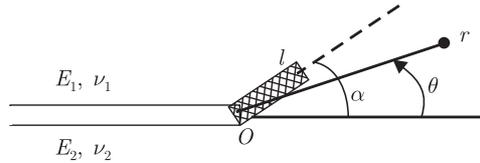


Рис. 1

конечной длины, которая выходит из вершины полубесконечной межфазной трещины сдвига в кусочно-однородной плоскости (рис. 1).

Учитывая трение берегов трещины по закону Кулона и полное сцепление на остальной части границы раздела сред, граничные условия в полярной системе координат с центром  $O$  в вершине трещины запишем в виде

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = \pm\pi, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\theta = \alpha, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = \sigma_1; \quad \theta = \alpha, \quad r > l, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad (2)$$

где  $\langle f \rangle$  — скачок величины  $f$ ;  $\mu$  — коэффициент трения.

Граничное условие на бесконечности следует из решения аналогичной задачи без зоны предразрушения [4]

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty, \quad \sigma_\theta = k_{II}F(\alpha)r^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (3)$$

где

$$F(\alpha) = \frac{(2\pi)^\lambda}{4} \frac{1 + e\chi_2 + e + \chi_1}{1 + e\chi_2} \{(2 + \lambda)(1 + \beta) \sin \lambda\alpha - [2 + \lambda(1 + \beta)] \sin(2 + \lambda)\alpha\},$$

$$\beta = \frac{(1 + e\chi_2) - (e + \chi_1)}{(1 + e\chi_2) + (e + \chi_1)}, \quad e = \frac{G_1}{G_2}, \quad \chi_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}$$

( $\beta$  — параметр Дундурса,  $|\beta| \leq 0,5$ );  $\lambda$  — корень уравнения  $\operatorname{ctg} \lambda\pi + \mu\beta = 0$  на интервале  $(-1, 0)$ ;  $k_{II}$  — коэффициент интенсивности напряжений в конце межфазной трещины сдвига, который считаем известным.

Предполагается, что в задаче, соответствующей тому этапу процесса деформирования, когда зона предразрушения еще не появилась, при  $\theta = \alpha$  вблизи конца трещины нормальные напряжения являются растягивающими ( $\theta = \alpha, \sigma_\theta > 0$ ). Это требует выполнения условия  $k_{II}F(\alpha) > 0$  дополнительно к требованию сжимающих напряжений на берегах трещины, которое необходимо для контакта берегов и формулируется в виде неравенства  $\beta k_{II} > 0$  [4].

**Расчет параметров зоны предразрушения.** Решение сформулированной краевой задачи теории упругости с граничными условиями (1)–(3) строится с помощью метода Винера–Хопфа аналогично решению задачи [5]. Из него получаем выражение для длины зоны предразрушения

$$l = R(\alpha)l_0, \quad l_0 = \left(\frac{|k_{II}|}{\sigma_1}\right)^{-1/\lambda}, \quad R(\alpha) = \left[\frac{2\Gamma(1,5 + \lambda)|F(\alpha)|J_1}{\sqrt{\pi}\Gamma(2 + \lambda)J_2}\right]^{-1/\lambda}, \quad (4)$$

$$J_1 = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |G(it)| + t \arg(G(it))}{t^2 + 1} dt \right],$$

$$J_2 = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda + 1) \ln |G(it)| + t \arg(G(it))}{t^2 + (\lambda + 1)^2} dt \right],$$

$$G(p) = \frac{D_1(p)}{\cos(p\pi)D_0(p)}, \quad D_1(p) = D_{10}(p) - \mu D_{11}(p),$$

$$D_{10}(p) = (1 + \chi_1)[(e + \chi_1)^2 \Delta_1(p) + (e + \chi_1)(1 + e\chi_2)\Delta_2(p) + (1 + e\chi_2)^2 \Delta_3(p)] + \\ + e(1 + \chi_2)(e + \chi_1)(1 + e\chi_2)\Delta_4(p),$$

$$\Delta_1(p) = \cos^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha), \quad \Delta_2(p) = p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha + \cos 2\alpha \cos 2p\alpha + \cos 2p\pi,$$

$$\Delta_3(p) = \Delta_1(p) + 4p^2 \sin^2 \alpha \cos^2 p\alpha - p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha - 4 \sin p\alpha \cos p\pi \sin p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_4(p) = 2 \cos p\pi [2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - 2 \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha)],$$

$$D_{11}(p) = (e + \chi_1)\bar{D}_{11}(p) + 2(1 - e)[\bar{D}_{11}(p) - \tilde{D}_{11}(p)],$$

$$\bar{D}_{11}(p) = (e + \chi_1)^2 \bar{\Delta}_1 + (1 + e\chi_2)^2 \bar{\Delta}_2 + (e + \chi_1)(1 + e\chi_2)\bar{\Delta}_3 + (1 - e)(e + \chi_1)\bar{\Delta}_4 + \\ + (1 - e)(1 + e\chi_2)\bar{\Delta}_5,$$

$$\tilde{D}_{11}(p) = (e + \chi_1)^2 \tilde{\Delta}_1 + (1 + e\chi_2)^2 \tilde{\Delta}_2 + (e + \chi_1)(1 + e\chi_2)\tilde{\Delta}_3 + (1 - e)(e + \chi_1)\tilde{\Delta}_4 + \\ + (1 - e)(1 + e\chi_2)\tilde{\Delta}_5,$$

$$\bar{\Delta}_1(p) = -\sin[p(\pi - \alpha) + \alpha] \cos[p(\pi - \alpha) - \alpha],$$

$$\bar{\Delta}_2(p) = 2p^2 \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha \cos 2p\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \\ + \sin p(\pi - \alpha)[\cos p(\pi + \alpha) - 2 \sin p\pi \sin p\alpha],$$

$$\bar{\Delta}_3(p) = 2[p \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha \sin 2p\alpha) - \sin \alpha \cos \alpha \cos 2p\alpha + 2 \sin p\pi \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha)],$$

$$\bar{\Delta}_4(p) = -2(p + 1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin[p(\pi - \alpha) + \alpha],$$

$$\bar{\Delta}_5(p) = 2p^2 \sin^2 \alpha [\sin 2p(\pi - \alpha) + \sin 2p\pi] + 2p \sin \alpha [2 \cos \alpha \sin^2 p(\pi - \alpha) + \\ + \sin p(\pi + \alpha) \sin(p(\pi - \alpha) - \alpha)] - 2 \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin(p(\pi + \alpha) + \alpha),$$

$$\tilde{\Delta}_1(p) = -(p + 1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin(p(\pi - \alpha) + \alpha),$$

$$\tilde{\Delta}_2(p) = [p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin \alpha \cos \alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \sin p\alpha] 2 \sin p\pi,$$

$$\tilde{\Delta}_3(p) = 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi + \alpha) \sin p(\pi - \alpha) + p \sin \alpha [\cos \alpha - \cos p(\pi - \alpha) \cos(p(\pi + \alpha) - \alpha)] + \\ + \sin p(\pi - \alpha) [2 \sin p\pi \sin p\alpha - \sin \alpha \cos(p(\pi + \alpha) + \alpha)],$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_4(p) &= -(p+1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin[p(\pi - \alpha) + \alpha], \\ \tilde{\Delta}_5(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p\alpha \sin p(2\pi - \alpha) - \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin(p(\pi + \alpha) + \alpha) + \\ &\quad + p \sin \alpha [2 \cos \alpha \sin^2 p(\pi - \alpha) + \sin p(\pi + \alpha) \sin(p(\pi - \alpha) - \alpha)], \\ D_0(p) &= 2(e + \chi_1)(1 + e\chi_2) \{ [(e + \chi_1) + (1 + e\chi_2)] \cos p\pi - \mu [(1 + e\chi_2) - (e + \chi_1)] \sin(p\pi) \}.\end{aligned}$$

Угол наклона начальной зоны предразрушения будем определять из условия максимума потенциальной энергии, накопленной в зоне. Учитывая определение потенциальной энергии упругой деформации и граничные условия (2), получим

$$\begin{aligned}W(\alpha) &= \frac{\sigma_1}{2} \int_0^l \langle u_\theta \rangle |_{\theta=\alpha} dr = -\frac{\pi(1 - \nu_1^2)\sigma_1^2}{2E_1} \frac{\lambda}{\lambda + 2} \left( \frac{|k_{II}|}{\sigma_1} \right)^{-2/\lambda} w(\alpha), \\ w(\alpha) &= \left| \frac{\sqrt{\pi} F(\alpha) |\Gamma(\lambda + 1) J_1(\alpha)|}{2\Gamma(\lambda + 1,5) J_2(\alpha)} \right|^{-2/\lambda} \frac{1}{[J_1(\alpha)]^2}.\end{aligned}\tag{5}$$

Таким образом, критерий выбора угла наклона зоны предразрушения сводится к выполнению условия  $w(\alpha) \rightarrow \max$ . Значение этих углов сравним с ориентировочным направлением дальнейшего распространения трещины, определяемым из условия максимума растягивающего нормального напряжения  $\sigma_\theta(r, \theta)|_{\theta=\alpha} \rightarrow \max$ , которое, как следует из (3), эквивалентно уравнению

$$\frac{\cos \lambda \alpha}{\cos(\lambda + 2)\alpha} = \frac{2 + \lambda(1 + \beta)}{\lambda(1 + \beta)}.\tag{6}$$

**Результаты расчетов и их анализ.** Согласно (4), длина зоны предразрушения нелинейно растет с увеличением внешней нагрузки, входящей в коэффициент интенсивности напряжений  $k_{II}$ . Кроме того, длина тем больше, чем меньше сопротивление отрыва материала, в котором происходит ее развитие.

В соответствии с (5), в рамках исследуемой модели величина и конфигурация нагрузки кусочно-однородного тела с межфазной трещиной не влияет на ориентацию зоны предразрушения, а следовательно, и на направление начального поворота трещины, которое, таким образом, будет зависеть лишь от упругих параметров материалов композита и коэффициента трения между берегами трещины. В независимости угла поворота трещины от внешней нагрузки заключается принципиальное отличие выводов рассмотренного решения от результатов аналогичного исследования в рамках модели межфазной трещины без контакта берегов [7, 8].

Результаты расчетов угла наклона  $\alpha$  зоны предразрушения к границе раздела сред и соответствующая ему длина в единицах  $l_0$  (множителя с размерностью длины, который определяется величиной коэффициента интенсивности напряжений в конце трещины и сопротивлением отрыва первого материала), полученные по формулам (4) с использованием условия максимума потенциальной энергии, накопленной в зоне, представлены в табл. 1 для разных отношений модулей сдвига соединенных материалов и коэффициентов Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . Здесь же приведены значения угла  $\alpha_1$ , определенного из условия максимума растягивающего нормального напряжения (6).

Как видно из приведенной таблицы, найденные значения углов  $\alpha$  и  $\alpha_1$  хорошо согласуются между собой. Из анализа таблицы можно сделать вывод, что образование зоны предразрушения при наличии трения приводит к значениям углов наклона зоны на несколько градусов меньше, чем это ожидается из условия максимума нормального напряжения в упругой краевой задаче без зоны.

Угол наклона зоны предразрушения определяет направление, в котором происходит дальнейшее продвижение исходной межфазной трещины после достижения граничной нагрузки, вызывающей разрыв межатомных связей в зоне. Найденные значения угла наклона близки по величине к углам, которые были получены в [7, 8] при использовании модели трещины без контактирующих берегов и при сдвиговых нагрузках составляли  $\approx 78^\circ$  при отношении модулей сдвига соединенных материалов  $G_1/G_2 = 0,5$ . Более детальное сравнение сложно сделать из-за зависимости угла наклона зоны предразрушения в рамках моделей работ [7, 8] от величины и конфигурации прилагаемой нагрузки.

Угол наклона и длина зоны растут с увеличением коэффициента трения. Следовательно, большее трение (обусловленное большей шероховатостью поверхностей берегов трещины) способствует большему отклонению трещины от границы раздела.

Исследование поворота трещины в рамках модели Комниноу с трением берегов в условиях чистого сдвига было выполнено также в [6] численными методами. Полученные в [6] углы поворота трещины  $\alpha_L$  при тех же параметрах задачи также приведены в табл. 1 для сравнения. Из таблицы видно, что зависимость  $\alpha_L$  от коэффициента трения является незначительной в отличие от аналогичной зависимости  $\alpha$ . Кроме того,  $\alpha_L$  при небольших значениях коэффициента трения весьма отличаются от прогнозируемых значений  $\alpha_1$ . Наоборот, при большом трении ( $\mu \geq 5$ ) значения  $\alpha_L$  ближе к  $\alpha_1$ , чем найденные углы наклона зоны  $\alpha$ .

Таким образом, полученные в рамках исследуемой модели зоны предразрушения результаты указывают на существование более выраженной зависимости угла поворота трещины от коэффициента трения берегов, чем по результатам исследований [6]. Однако очевидна корреляция зависимостей углов  $\alpha$  и  $\alpha_L$  от коэффициента трения: чем он больше, тем большим оказывается угол поворота трещины.

Таблица 1. Результаты расчетов угла начального поворота межфазной трещины

$G_1/G_2$	$\mu$	0	1	2	5	10
1	$l/l_0$	0,3994	0,3994	0,3994	0,3994	0,3994
	$\alpha^\circ$	68,3	68,3	68,3	68,3	68,3
	$\alpha_1^\circ$	70,5	70,5	70,5	70,5	70,5
	$\alpha_L^\circ$	77,8	77,8	77,8	77,8	77,8
0,5	$l/l_0$	0,3681	0,3699	0,3714	0,3745	0,3768
	$\alpha^\circ$	67,0	68,5	69,9	73,5	76,9
	$\alpha_1^\circ$	69,3	71,1	72,8	77,5	82,7
	$\alpha_L^\circ$	81,2	81,3	81,4	81,4	81,4
0,2	$l/l_0$	0,3415	0,3439	0,3455	0,3472	0,3476
	$\alpha^\circ$	65,8	68,6	71,0	75,5	77,4
	$\alpha_1^\circ$	68,1	71,5	74,7	81,3	85,8
	$\alpha_L^\circ$	81,5	81,5	81,5	81,5	81,6
0,1	$l/l_0$	0,3304	0,3328	0,3342	0,3351	0,3351
	$\alpha^\circ$	65,3	68,6	71,3	75,8	77,1
	$\alpha_1^\circ$	67,6	71,7	75,3	82,2	86,3
	$\alpha_L^\circ$	81,6	81,6	81,6	81,6	81,6

1. *Comninou M.* The interface crack // *J. Appl. Mech.* – 1977. – **44**. – P. 631–636.
2. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // *J. Appl. Mech. Brief Notes.* – 1977. – **44**. – P. 780–781.
3. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in a combined tension-compression and shear field // *J. Appl. Mech.* – 1979. – **46**. – P. 345–348.
4. *Comninou M., Dundurs J.* Effect of friction on the interface crack loaded in shear // *J. of Elasticity.* – 1980. – **10**, No 2. – P. 203–212.
5. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* Начальная зона предразрушения в конце межфазной трещины с гладким контактом ее берегов // *Теорет. и прикл. механика.* – 2007. – **43**. – С. 63–68.
6. *Leblond J.-B., Frelat J.* Crack kinking from an initially closed, ordinary on interface crack, in the presence of friction // *Eng. Fracture Mechanics.* – 2004. – **71**. – P. 289–307.
7. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // *Прикл. механика.* – 2007. – **43**, № 10. – С. 28–41.
8. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* Исследование процесса начального поворота трещины на границе раздела двух упругих сред при растяжении и сдвиге // *Там же.* – 2009. – **45**, № 6. – С. 71–79.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев  
Уманский государственный педагогический  
университет*

*Поступило в редакцию 16.10.2012*

**А. О. Камінський, М. В. Дудик, Л. А. Кіпніс**

### **Вплив тертя між берегами міжфазної тріщини на кут її початкового повороту при зсуві**

*В умовах плоскої деформації методом Вінера–Хопфа досліджено початковий поворот тонкої зони передруйнування в кінці міжфазної тріщини в кусково-однорідному ізотропному пружному тілі, береги якої контактують з тертям. Зона передруйнування моделювалася лінією розриву нормального переміщення, що виходить з кінця тріщини під кутом до межі розділу середовищ. Кут нахилу зони передруйнування до межі розділу визначався з умови максимуму накопиченої в зоні потенціальної енергії. Досліджено залежності довжини зони і кута її нахилу від пружних параметрів тіла і коефіцієнта тертя.*

**A. A. Kaminsky, M. V. Dudyk, L. A. Kipnis**

### **Influence of friction between interfacial crack lips on the angle of its initial kinking under shear**

*The initial kinking of a thin prefracture zone at the end of an interface crack with friction between its lips in a piece-homogeneous isotropic elastic body under plane strain is studied using the Wiener–Hopf method. The zone is modeled by a line of normal displacement fracture. This line is assumed to emerge from the crack tip at an angle to the interface. The angle between the prefracture zone and the interface is determined from the condition that the potential energy is maximum in the zone. The dependences of the length of the zone and its angle of the slope on the elastic parameters of the body and on the friction coefficient are investigated.*