

УДК 539.375

Кіпніс Л. А.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Дудик М. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Дякон В. М.², к. ф.-м. н., доц.

Особенности структуры пластичной зоны близ вершины межфазной трещины при преобладающих растягивающих навантажениях

¹Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини, 20300, Черкаська обл., м. Умань, вул. Садова, 2
e-mail: dudik_m@hotmail.com

²Уманська філія ПВНЗ «Європейський університет», 20300, Черкаська обл., м. Умань, вул. Шевченка, 15-а

L. A. Kipnis¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
M. V. Dudyk¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
V. M. Diakon², Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

Peculiarities of the structure of the plastic zone near the tip of an interfacial crack at the prevailing tensile loading

¹Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, 20300, Cherkassy Region, Uman, Sadova str., 2
e-mail: dudik_m@hotmail.com

²Uman Affiliate of European University, 20300, Cherkassy region, Uman, Shevchenko str., 15-a

Досліджено комплексну модель пластичної зони біля вершини міжфазної тріщини в умовах переважаючих розтягуючих навантажень, яка передбачає утворення зони деструкції у прилеглий до вершини частині пластичної зони та маломасштабної області контакту берегів. В умовах плоскої деформації методом Вінера – Гонфа розв'язано задачу про розрахунок довжини зони деструкції і розкриття тріщини у вершині. Виконано чисельний аналіз параметрів пластичної зони.

Ключові слова: міжфазна тріщина, пластична зона, зона деструкції, розкриття тріщини.

It is investigated the complex model of the plastic zone near the tip of the interfacial crack in an elastic-plastic piecewise homogeneous body under conditions of the prevailing tensile loading that foresees the formation of the fracture process zone in the part of plastic zone adjoining to the tip and a small scale area of the contact of lips. The plastic zone going out of the crack tip in more plastic material at an angle to the flat interface is modeled as a straight line of a displacement discontinuity, which consists of two parts. In the plastic zone, the part adjacent to the crack tip modeling a fracture process zone of the tangential and normal displacement discontinuity is assumed, and the tangential and normal stresses are equal to the shear yield strength and to the resistance of the material to separation accordingly. In the rest part of it that corresponds to the plastic zone only a tangential displacement discontinuity takes place and the tangential stress is equal to the shear yield strength.

The problem of the calculation of the plastic zone parameters near the crack tip is solved by the Wiener–Hopf method for the plane strain conditions at ignoring the lips contact. The equations for the calculations of the length of a fracture process zone and of the singularity index of the stresses is obtained. Expression for the crack opening in its tip is found. On the basis of the numerical calculations the dependences of the zone parameters on the configuration of the external loading and the elastic characteristics of the joined materials is studied. The conditions of the absence of the lips contact near the tip are determined.

Key Words: Interfacial Crack, Plastic Zone, Fracture Process Zone, Crack Opening.

1. Вступ

Напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини залежить від багатьох факторів, у тому числі від можливого контакту берегів та утворення маломасштабної пластичної зони. Останні враховані у комплексній моделі зони передруйнування [1, 2], використання якої дозволяє уникнути передбачуваних класичною моделлю міжфазної тріщини фізично некорект-

них просторових осциляцій берегів.

Структура привершинної області суттєво залежить від конфігурації зовнішнього навантаження. Зокрема, при переважанні у навантаженні розтягуючих зусиль у перпендикулярному до площини тріщини напрямку розміри області контакту берегів передбачаються екстремально малими [3], тому при дослідженні структури привершинної області, у першу чергу, слід враховувати розвиток з вершини тріщини бічної пластичної

зони у більш пластичному матеріалі з'єднання, розрахунок якої в рамках моделі Леонова-Панасюка – Дагдейла виконано в [4]. Проте, поява пластичної зони не усуває концентрацію напружень біля вершини, що у відповідності з висновками експериментальних досліджень [5] передбачає утворення зони деструкції матеріалу з високим рівнем деформацій у прилеглий до вершини частині пластичної зони. В даній статті виконується розрахунок параметрів зони деструкції в рамках комплексної моделі зони передруйнування [1, 2] при нехтуванні контактом берегів.

2. Постановка задачі та її розв'язання

В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок зони деструкції у прилеглий до вершини міжфазної тріщини частині маломасштабної бічної пластичної зони. Тріщина розташована на плоскій межі поділу двох однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 . Відповідно до експериментальних даних [5] довжина області деструкції d передбачається набагато меншою від довжини l всієї пластичної зони. Це дозволяє розглядати тіло як кусково-однорідну площину, що містить на межі поділу півнескінченну тріщину з вільними від навантаження берегами, з вершини O якої під кутом α до межі поділу у перший матеріал, який для визначеності вважаємо більш пластичним, виходить півнескінченна пряма лінія розриву, що складається з двох ділянок (рис. 1). На ділянці OO' , яка примикає до вершини тріщини і відповідає зоні деструкції, зазнають розриву дотичне і нормальне переміщення, а дотичне і нормальне напруження дорівнюють межі текучості τ_1 і опору відриву σ_1 матеріалу. На другій ділянці зазнає розриву лише дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює τ_1 .

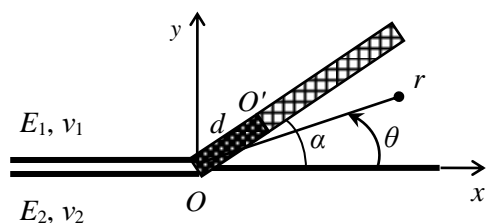


Рис.1. Розрахункова схема задачі

Умову на нескінченності формулюємо на основі вимоги, щоб розв'язок задачі на відстанях, значно більших за розміри зони деструкції, але

значно менших від розмірів пластичної зони, переходив у асимптотичний розв'язок аналогічної задачі про пластичну зону без зони деструкції, отриманий в [4]. Даній моделі відповідає статична задача теорії пружності з крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \theta = 0, & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \\ \theta = \pm\pi, & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \\ \theta = \alpha, & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \theta = \alpha, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1; \\ & \quad \theta = \alpha, \quad r < d, \quad \sigma_\theta = \sigma_1; \\ & \quad \theta = \alpha, \quad r > d, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty, \quad \sigma_\theta = \tau_1 \left[C_0 + \sum_k C_k r^{\lambda_k} \right] + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

де $C_0 = \frac{2u'(-1)}{\pi D_1(-1)}$, $u'(p) = du(p)/dp$,

$$C_k = \frac{4(1+\lambda_k)u(-1-\lambda_k)G^+(-1-\lambda_k)I^{-\lambda_k} \times}{\tau_1 \lambda_k D_1'(-1-\lambda_k)K^+(-1-\lambda_k)} \times \operatorname{Re} \left[\frac{F(\alpha)l^{-0.5+i\omega} K^+(-0.5-i\omega)}{(0.5+i\omega)G^+(-0.5-i\omega)} \frac{1-2\omega}{1+2\lambda_k-2\omega} \right],$$

$$\begin{aligned} u(p) &= (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)u_1(p) + \\ &+ [e^2(1+\kappa_2)^2 + 4(1-e)(1+\kappa_2)\sin^2 p\pi]u_2(p) + \\ &+ (1+\kappa_1)[(1+\kappa_1)u_3(p) + 2(1-e)u_4(p)]\sin p\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(p) &= p \sin^2 \alpha [p \sin p(\pi+2\alpha) - \\ &- 2\sin p\alpha \cos p(\pi+\alpha)] - \sin p\pi \sin^2 p(\pi-\alpha), \end{aligned}$$

$$u_2(p) = -p(p-1)\sin^2 \alpha \sin p(\pi-2\alpha),$$

$$u_3(p) = \sin^2 p(\pi-\alpha) - p \sin^2 \alpha,$$

$$\begin{aligned} u_4(p) &= p \sin^2 \alpha [p \cos 2p\alpha + 2\sin^2 p\alpha] - \\ &- \sin^2 p(\pi-\alpha); \quad D_1'(p) = dD_1(p)/dp; \end{aligned}$$

$$e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}, \quad \omega = \frac{1}{2} \ln \frac{e+\kappa_1}{1+\kappa_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3-4\nu_{1(2)};$$

λ_k – корені рівняння $D_1(-1-x)=0$, що задовольняють умову $\operatorname{Re} \lambda_k > -1$, найменший з яких, λ_1 , є показником сингулярності напружень; функції $D_1(p)$, $G^+(p)$, $K^+(p)$ визначені в [4]. Передбачається, що конфігурація зовнішнього навантаження, заданого комплексним КІН $K = K_1 + iK_2$, забезпечує відривний характер нормального напруження у зоні деструкції.

У вершині O' області деструкції має місце коренева особливість напружень

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow d+0, \quad \sigma_\theta \approx \frac{k}{\sqrt{2\pi(r-d)}}$$

з коефіцієнтом інтенсивності k , що визначається в ході розв'язання задачі.

За допомогою перетворення Мелліна розв'язання сформульованої крайової задачі зводиться до функціонального рівняння Вінера – Гопфа:

$$\Phi_1^+(p) + \frac{\sigma_1 - C_0 \tau_1}{p+1} - \tau_1 \sum_k \frac{C_k d^{\lambda_k}}{p + \lambda_k + 1} = -\operatorname{tg} p\pi \cdot G_1(p) \Phi_1^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2),$$

$$\Phi_1^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho d, \alpha) \rho^p d\rho,$$

$$\Phi_1^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle_{r=\rho d, \theta=\alpha} \rho^p d\rho;$$

$$G_1(p) = \frac{4 \cos p\pi d_1(p) D_2(p)}{\sin^2 p\pi D_1(p)},$$

$$D_2(p) = (1 + \kappa_1)^2 \sin^2 p\pi - D_{21}(p) d_2(p) + \sin p\alpha [D_{22}(p) \cos p\alpha - D_{23}(p) \sin p\alpha],$$

$$D_{21}(p) = e^2 (1 + \kappa_2)^2 + 4(1-e)(1 + e\kappa_2) \sin^2 p\pi,$$

$$D_{22}(p) = (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2) \sin 2p\pi,$$

$$D_{23}(p) = 2(1 + \kappa_1)[e(1 + \kappa_2) + 2(1-e)] \sin^2 p\pi,$$

$$d_1(p) = \sin^2 p(\pi - \alpha) - p^2 \sin^2 \alpha,$$

$$d_2(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha;$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа. Його розв'язок знайдено аналогічно розв'язку рівняння Вінера-Гопфа в задачі про бічну пластичну зону в [4]. З нього отримано рівняння для визначення довжини зони деструкції:

$$\sum_k \frac{C_k d^{\lambda_k} K^+(-1 - \lambda_k)}{(1 + \lambda_k) I(\lambda_k)} = \left(\frac{\sigma_1 - C_0}{\tau_1} - C_0 \right) \frac{K^+(-1)}{I(0)},$$

$$I(x) = \exp \left[\frac{x+1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G_1(it)}{t^2 + (x+1)^2} dt \right]$$

та вираз для розкриття тріщини в її вершині, обумовленого появою зони:

$$\delta = \frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} \tau_1 d \sqrt{\pi G_1(0)} \sum_k \frac{C_k d^{\lambda_k} \lambda_k K^+(-1 - \lambda_k)}{(1 + \lambda_k)^2 I(\lambda_k)} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin \alpha - (\pi - \alpha) \cos \alpha}{(\pi - \alpha)^2 - \sin \alpha} - \frac{e(1 + \kappa_2) \delta_1}{\delta_2} \right],$$

$$\delta_1 = e(1 + \kappa_2)(\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) + (1 + \kappa_1) \pi \cos \alpha,$$

$$\delta_2 = (1 + \kappa_1)^2 \pi^2 + (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2) \pi \alpha + e^2 (1 + \kappa_2)^2 (\alpha^2 - \sin^2 \alpha).$$

Поява зони деструкції змінює НДС біля вершини тріщини, який на відстанях, значно менших ніж зона, визначатиметься показником сингулярності λ_{d1} – найменшим на інтервалі $(-1, 0)$ коренем рівняння $D_2(-1-x)=0$.

3. Числовий аналіз результатів і висновки

Дослідження отриманого розв'язку задачі здійснено на прикладі кусково-однорідної площини з міжфазною тріщиною довжини L , навантаженої на нескінченості однорідними нормальним і дотичним напруженнями ($\sigma_x=p>0, \tau_{xy}=q$ при $x, y \rightarrow \infty$). КІН обраховувався за формулою [6]

$$K = \frac{\sqrt{\pi L/2}}{\operatorname{ch} \pi \omega} (1 + 2i\omega)(q + ip).$$

Результати числових розрахунків при $\sigma_1=5\tau_1, \nu_1=\nu_2=0.3$ приведені в табл.1 для окремих параметрів задачі, які відповідають вимогам маломасштабності пластичної зони і зони деструкції. Зовнішнє навантаження задавали безрозмірним модулем $f = \sqrt{p^2 + q^2} / \tau_1$ та відношенням q/p , що визначав його конфігурацію.

Таблиця 1.

Параметри пластичної зони і напружено-деформованого стану біля вершини тріщини

E_1	q/p	0		0.1	
E_2	f	0.1	0.2	0.1	0.2
0.5	α°	86.8	83.4	78.4	74.4
	l/L	$1.10 \cdot 10^{-3}$	$4.25 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$4.12 \cdot 10^{-3}$
	d/L	$4.90 \cdot 10^{-5}$	$2.06 \cdot 10^{-4}$	$5.44 \cdot 10^{-5}$	$2.25 \cdot 10^{-4}$
	λ_1	-0.4828	-0.4851	-0.4892	-0.4931
	λ_{d1}	-0.4064	-0.3974	-0.3829	-0.3701
	$\tilde{\delta}$	$-1.51 \cdot 10^{-4}$	$-5.54 \cdot 10^{-4}$	$-1.05 \cdot 10^{-4}$	$-2.77 \cdot 10^{-4}$
0.8	α°	78.1	76.7	67.9	66.4
	l/L	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$4.02 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$4.06 \cdot 10^{-3}$
	d/L	$4.97 \cdot 10^{-5}$	$2.02 \cdot 10^{-4}$	$5.38 \cdot 10^{-5}$	$2.17 \cdot 10^{-4}$
	λ_1	-0.4971	-0.4975	-0.5005	-0.5010
	λ_{d1}	-0.4174	-0.4139	-0.3892	-0.3845
	$\tilde{\delta}$	$-6.80 \cdot 10^{-5}$	$-2.32 \cdot 10^{-4}$	$2.38 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-4}$

Згідно з розрахунками, кут нахилу пластичної зони зменшується, а довжина зони деструкції зростає при збільшенні величини навантаження і його дотичної складової. Розміри зони деструкції виявляються значно меншими від розмірів пластичної зони, що відповідає прийнятому при розв'язанні задачі наближенню.

Якщо утворення пластичної зони усуває просторові осциляції переміщень і напружень при наближенні до вершини тріщини, залишаючи показник сингулярності на рівні $\lambda_1 \approx -0.5$, то з появою в ній зони деструкції концентрація напружень ще й послаблюється ($\lambda_{d1} > \lambda_1$).

З аналізу знаку безрозмірного розкриття $\tilde{\delta} = (1 + \nu_1)\tau_1\delta / LE_1$ випливає, що у випадку чистого розтягу ($q=0$) або при значній відмінності

пружних характеристик матеріалів після появи зони деструкції залишається можливим контакт берегів біля вершини тріщини ($\tilde{\delta} < 0$), тоді як при близьких модулях Юнга ($E_1 \rightarrow E_2$) і наявності вкладу дотичного навантаження ($q > 0$) тріщина у вершині буде відкритою.

Список використаних джерел

1. Каминский А. А. О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис // Доповіді НАН України. – 2010. – № 2. – С. 59–63.
2. Каминский А. А. О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис // Доповіді НАН України. – 2011. – № 1. – С. 38–43.
3. Comninou M. The interface crack / M. Comninou // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44, № 4. – P. 631–636.
4. Каминский А. А. О направлении развития тонкой пластической зоны в вершине трещины на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, М. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 14–23.
5. Каминский А. А. Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении / А. А. Каминский, Г. И. Усикова, Е. А. Дмитриева // Прикл. механика. – 1994. – Т. 30, № 11. – С. 69–75.
6. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks / J. R. Rice // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55, № 1. – P. 98–103.

References

1. KAMINSKII, A. A. & KIPNIS, L. A. (2010) O kompleksnoy modeli zony predrazrusheniia v kontse treshchiny na granitse razdela uprugikh sred. *Dopovidi NAN Ukrainy*. (2). p. 59–63.
2. KAMINSKII, A. A. & KIPNIS, L. A. (2011) O stragivanii treshchiny, raspolozhennoy na granitse razdela uprugikh sred. *Dopovidi NAN Ukrainy*. (1). p. 38–43.
3. COMNINO, M. (1977) The interface crack. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 44 (4). p. 631–636.
4. KAMINSKY, A. A., DUDIK, M. V., & KIPNIS, L. A. (2006) On the direction of development of a thin fracture process zones at the tip of an interfacial crack between dissimilar media. *Int. Appl. Mech.* 42 (2). p. 136–144.
5. KAMINSKII, A. A., USIKOVA, G. I., & DMITRIEVA, E. A. (1994) Experimental study of the distribution of plastic strains near a crack tip during static loading. *Int. Appl. Mech.* 30 (11). p. 892–897.
6. RICE, J. R. (1988) Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 55 (1). p. 98–103.

Надійшла до редколегії 28.09.15