

**УДК 624.012.45**

**Азізов Т.Н., д.т.н., професор, Мельник О.В., викладач, Мельник О.С., викладач** (Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини)

## **ИНЖЕНЕРНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НДС ЗАЛІЗОБЕТОННИХ БАЛОК ПОРОЖНИСТОГО ПЕРЕРІЗУ З НОРМАЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ**

У статті наведена методика визначення внутрішніх зусиль в балках порожнистого перерізу, в яких крутний момент прикладений до верхньої полиці елемента. Методика передбачає стрижньову апроксимацію. Наведені переваги методики в порівнянні з методом скінчених елементів.

В статье приведена методика определения внутренних усилий в балках пустотного сечения, в которых крутящий момент приложен к верхней полке элемента. Методика предполагает стержневую аппроксимацию. Приведены преимущества методики по сравнению с методом конечных элементов.

The article describes methods of determining the internal forces in beams hollow section in which the torque applied to the upper shelf element. The method assumes a pivotal approximation. Techniques are advantages in comparison with the finite element method.

### **Ключові слова:**

Міцність, жорсткість, кручення, нормальні тріщини.  
Прочность, жесткость, кручение, нормальные трещины.  
Strength, hardness, torsion, normal cracks.

### **Постановка проблеми.**

Відомо, що важливою відмінністю залізобетонних елементів є утворення нормальних тріщин. У працях [1,2] показано, що крутильна жорсткість залізобетонних елементів значною мірою впливає на величину згинальних та крутних моментів в системах, що деформуються просторово. Тому під час інженерних розрахунків одним із завдань є визначення крутильної жорсткості елементів. Існуючі методи розрахунку елементів при складних навантаженнях передбачають наявність просторових тріщин [3]. Як показано

в [2,4-5] нормальні тріщини також можуть суттєво впливати на зміну крутильних жорсткостей елементів. В даний час для визначення НДС різних елементів при складних навантаженнях використовуються як правило числові методи, насамперед метод скінчених елементів (МСЕ), що не завжди є зручним, особливо при врахуванні впливу різного виду тріщин. У зв'язку з вищевикладеним метою даної статті є розроблення інженерного методу визначення НДС залізобетонних балок порожнистого перерізу з нормальними тріщинами за дії крутних моментів.

### **Викладення основного матеріалу.**

Розглянемо залізобетонні балки, коробчастого та трикутного перерізу, до верхніх полицок яких прикладений крутний момент  $M_r$ . В працях [4-5] зазначено, що для визначення жорсткості елементів прямокутного та трикутного полого перерізу за наявності нормальних тріщин використовується схема, за якою арматура у тріщині уявно розтинається і з умов сумісності переміщень зліва та з права від лінії розтину визначається невідома нагельна сила. Для визначення нагельної сили основною складністю є визначення переміщень берегів тріщини [4]. Ці переміщення можуть бути визначеними за допомогою МСЕ. Але при розрахунках з врахуванням нелінійних властивостей бетону застосування програмних комплексів (таких, як «Ліра», «Скад» та ін) дуже ускладнює рішення такої задачі.

Для спрощення вирішення задачі застосуємо підхід, прийнятий в [5], де для визначення напружено-деформованого стану плитних конструкцій приймається стрижньова апроксимація.

Розділимо коробчасту та трикутну балки горизонтальними паралельними площинами, вздовж осі X на окремі пластини (рис. 1).

У загальному випадку по лінії розтину  $A-A$ ,  $B-B$  діятимуть чотири невідомі функції зусиль (рис. 2). Це дотичні зусилля  $T_i(x)$  (зусилля, діючі вздовж осі X), вертикальні погонні зусилля  $S_i(x)$  (вздовж осі Z), погонні поперечні згинальні моменти  $m_i(x)$  (поворот відносно осі X), погонні горизонтальні сили розпору  $H_i(x)$  (зусилля, діючі вздовж осі Y), індекс вказує порядковий номер перерізу балки.

Дотичні зусилля  $T(x)$  є сумарними зусиллями зсуву, пов'язаними з погонними дотичними зусиллями,  $\tau(x)$  залежністю :

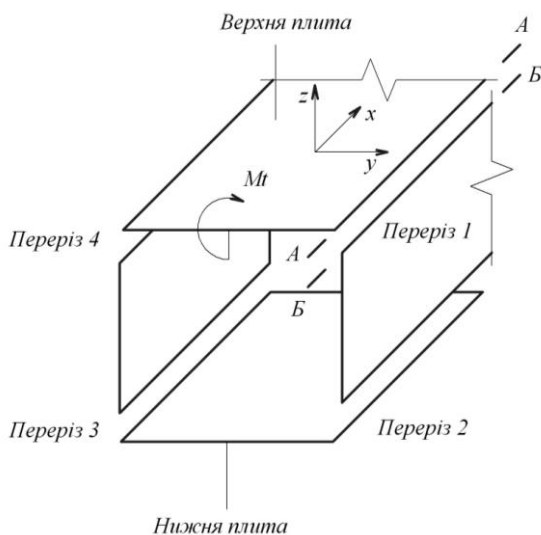
$$T(x) = \int_0^x \tau(x) \cdot dx \quad (1)$$

Погонні вертикальні зусилля  $S(x)$  можуть бути замінені згинальними моментами від цих зусиль  $MS(x)$ , зв'язаними відомою диференціальною залежністю опору матеріалів:

$$S(x) = \pm MS'' \quad (2)$$

Для бокової плити балки трикутного перерізу вертикальні погонні зусилля  $S$  та погонні горизонтальні зусилля  $H$  розкладаються на нормальні  $H_n$  і  $S_n$  та дотичні  $H_\tau$  і  $S_\tau$  складові (рис. 3), через наступну геометричну залежність:

$$\begin{cases} S_n = S \cdot \cos \alpha; \\ S_\tau = S \cdot \sin \alpha; \\ H_n = S \cdot \sin \alpha; \\ H_\tau = S \cdot \cos \alpha; \end{cases} \quad (3)$$



а)

б)

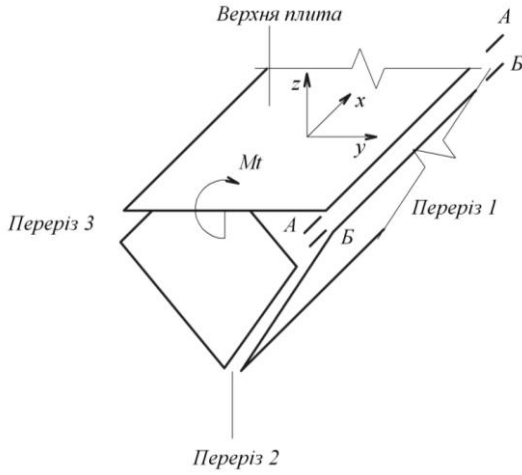
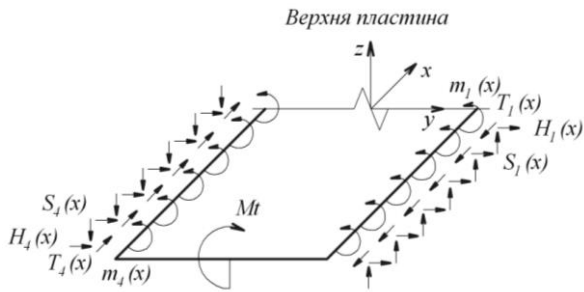


Рис. 1. Схема розділення балок на окремі пластини:  
а) коробчастої б) трикутної

а)



б)

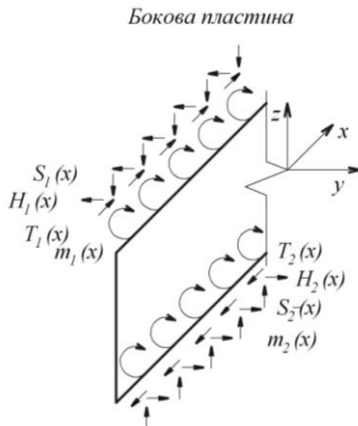


Рис. 2. Схема зусиль, які діють по лініях розтину:  
 а) – верхня пластина; б) – бокова пластина.

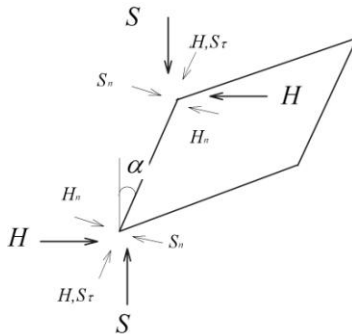


Рис.3 Зусилля, що діють на бокову плиту балки трикутного перерізу

Розглянемо балку коробчастого перерізу, яка розділена на чотири частини горизонтальними паралельними площинами. У кожному із чотирьох перерізів будуть діяти чотири невідомі функції зусиль, які підлягають визначенню. Таким чином, для розглянутої балки ставиться завдання у визначенні шістнадцяти невідомих функцій зусиль. Для рішення цієї задачі необхідною і достатньою умовою буде складання шістнадцяти диференціальних рівнянь із шістнадцятьма функціональними невідомими з подальшим їх розв'язанням.

Для скорочення об'ємних викладок розглянемо для прикладу лише верхній правий переріз (переріз №1) і складемо перші чотири диференціальних рівняння. Прийняті наступні знаки переміщень:

- позитивні переміщення для осей X, Y – за напрямом осі; для осі Z – проти напрямку осі;

- позитивні кутові переміщення - за годинниковою стрілкою.

Спільна лінія для верхньої та бокової пластини верхнього правого перерізу (перерізу №1) від зазначених вище зусиль  $S_1(x)$ ,  $H_1(x)$ ,  $m_1(x)$ ,  $T_1(x)$  зазнає відповідних вертикальних, горизонтальних, кутових та поздовжніх переміщень.

1. Кривизни в вертикальному напрямку (друга похідна вертикального переміщення) для верхньої плити (див. рис. 2,а):

а) від зовнішнього крутного моменту  $M$ ,

$$z'' = \frac{M_1^I}{GI t_1} \cdot b \tag{4}$$

б) від кручення силами  $S_1$  та  $S_4$

$$z'' = -\frac{b^2 \cdot MS_1''}{GI_{t_1}} - \frac{b^2 \cdot MS_4''}{GI_{t_1}} \quad (5)$$

в) від кручення моментами  $m_1$  та  $m_4$

$$z'' = -\frac{b \cdot m_1}{GI_{t_1}} + \frac{b \cdot m_4}{GI_{t_1}} \quad (6)$$

г) від згину плити (умовних стрижнів одиничної ширини) в поперечному напрямку силою  $S_1$

$$z'' = -\frac{b^3 \cdot MS_1^{IV}}{3D_{z,1}} \quad (7)$$

д) від згину плити (умовних стрижнів одиничної ширини) в поперечному напрямку моментами  $m_1$

$$z'' = -\frac{b^2 \cdot m_1''}{2D_{z,1}} \quad (8)$$

е) від згину плити в вертикальному напрямку (як балки) силами  $S_1, S_4$

$$z'' = -\frac{MS_1}{EI_{z_1}} + \frac{MS_4}{EI_{z_1}} \quad (9)$$

2. Другі похідні вертикальних переміщень для бокової плити (рис. 2,б):

а) від згину плити в вертикальному напрямку силами  $S_1, S_2$

$$z'' = \frac{MS_1}{EI_{z_2}} - \frac{MS_2}{EI_{z_2}} \quad (10)$$

б) від згину плити дотичними силами  $T_1, T_2$

$$z'' = -\frac{h \cdot T_1}{EI_{z_2}} - \frac{h \cdot T_2}{EI_{z_2}} \quad (11)$$

в) від стиску - розтягу силами  $S_1$

$$z'' = \frac{h \cdot MS_1^{IV}}{EF_{z,2}} \quad (12)$$

Умову сумісності переміщень будь-якої точки, що лежить на лінії перерізу №1, отримуємо прирівнявши вирази переміщень (їх других похідних) для верхньої та бокової пластин. Таким чином отримуємо перше диференціальне рівняння системи:

$$\frac{b \cdot M_1^I}{GI_1} - \frac{b^2 \cdot MS_1''}{GI_{t_1}} - \frac{b^2 \cdot MS_4''}{GI_{t_1}} - \frac{b \cdot m_1}{GI_{t_1}} + \frac{b \cdot m_4}{GI_{t_1}} - \frac{b^3 \cdot MS_1^{IV}}{3D_{z,1}} - \frac{b^2 \cdot m_1''}{2D_{z,1}} \quad (13)$$

$$-\frac{MS_1}{EIz_1} + \frac{MS_4}{EIz_1} = \frac{MS_1}{EIz_2} - \frac{MS_2}{EIz_2} - \frac{h \cdot T_1}{EIz_2} - \frac{h \cdot T_2}{EIz_2} + \frac{h \cdot MS_1^{IV}}{EF_{z,2}}$$

В виразах 4-13 позначено:

$Z$  – вертикальні переміщення в напрямку осі  $z$ ;

$M_t$  – зовнішній крутний момент;

$GI_{t1}$  – крутильна жорсткість верхньої плити (плити №1);

$b, h$  – половина ширини відповідно верхньої та бокової плит;

$MS_1, MS_4$  – згинальні моменти, що виникають від погонних вертикальних зусиль  $S_1$  та  $S_4$  відповідно в перерізах № 1 та №4;

$m_1, m_4$  – погонні поперечні згинальні моменти відповідно в перерізах № 1 та №4;

$D_{z1}$  – згинальна жорсткість в напрямку осі  $Z$  умовного поперечного стрижня одиничної ширини для верхньої плити;

$EIZ_1, EIZ_2$  – згинальна жорсткість відповідно верхньої та бокової плити в напрямку осі  $Z$ ;

$EFZ_2$  – осьова жорсткість умовного стрижня одиничної ширини для бокової плити при розтягу-стиску в напрямку осі  $Z$ .

Аналогічно склавши вирази для горизонтальних, вертикальних та повздовжніх переміщень зазначеного вище перерізу, а також для інших перерізів ми отримуємо ще п'ятнадцять рівнянь системи.

Розв'язок системи за аналогією з [5] зручно здійснювати за допомогою розкладання невідомих зусиль у ряди Фур'є по косинусах:

$$\begin{cases} S(x) = \sum_{n=1}^m \alpha_n^2 \cdot MS_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ m(x) = \sum_{n=1}^m m_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ H(x) = \sum_{n=1}^m \alpha_n^2 \cdot MH_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ T(x) = \sum_{n=1}^m \alpha_n \cdot T_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{cases} \quad (14)$$

де позначено:  $\alpha = \frac{\pi \cdot n}{l}$ ;  $MS_n, m_n, MH_n, T_n$  – коефіцієнти Фур'є

відповідних функцій зусиль, які підлягають визначенню.

Зовнішній момент  $M_t$  розкладається в ряд Фур'є по синусах.

Після підстановки (14) у систему диференціальних рівнянь та скорочення на  $\cos(\alpha \cdot x)$  отримуємо систему лінійних рівнянь, де невідомими будуть

коефіцієнти Фур'є  $MS_n, m_n, MH_n, T_n$ . Система без особливої складності вирішується за допомогою програми Mathcad.

На рис. 4 показані епюри внутрішніх зусиль в першому перерізі коробчастої балки з розмірами поперечного перерізу 20x20см. Довжина 40см. Товщина стінки – 1 см. Величина крутного моменту  $M_T=10$  кН·см. На рис. 4 одиниці для зусиль  $H_I, T_I$  та  $S_I$  – в кН/см; для моментів  $m_I$  – в кН·см/см.

Схема визначення НДС елементів порожнистого трикутного перерізу виконується методикою, аналогічною викладеній, але з врахуванням виразу (3) та рис. 3 подібно [6].

Наведена методика відрізняється від методу скінчених елементів тим, що ця методика є чисельно-аналітичною (МСЕ – це чисельний метод). Методика передбачає стрижньову апроксимацію, тобто кожна з пластин, з яких складається коробчата балка, розглядається як набір поздовжнього та поперечних стрижнів [5]. Перевагою такої апроксимації є можливість врахування впливу тріщиноутворення на поверхні розглядуваних пластин без застосування програмних комплексів. Вплив тріщиноутворення враховується за методикою [5].

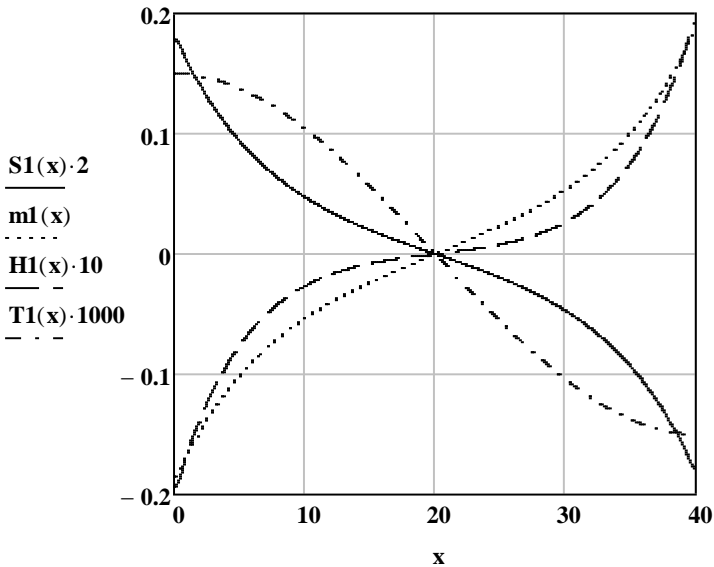


Рис.4 Епюри зусиль в першому перерізі коробчастої балки.

**Висновки та перспективи досліджень.** Наведена методика дозволяє розраховувати залізобетонні балки порожнистого перерізу з врахуванням зміни жорсткості від тріщиноутворення без застосування програмних



комплексів. У перспективі передбачається експериментальна перевірка розробленої методики.

1. Азизов Т.Н., Мельник О.В., Мельник О.С. К расчету железобетонных элементов полого сечения с нормальными трещинами при кручении // Вісник дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В.Лазаряна. – Вип. 33 Дніпропетровськ, 2010 – С.10 – 14.
2. Азизов Т.Н. Теория пространственной работы перекрытий. – Киев: Науковий світ, 2001. – 276 с.
3. Расчет железобетонных конструкций при сложных деформациях / [М.С. Торяник, П.Ф. Вахненко, Л.В. Фалеев и др.] под ред. М.С. Торяника. – М.: Стройиздат, 1974. – 297 с.
4. Азизов Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами // Дороги і мости. Збірник наукових праць. Вип. 7.Том 1. - Київ: ДерждорНДІ, 2007. - С. 3-8.
5. Азизов Т.Н. Пространственная работа железобетонных перекрытий. Теория и методы расчета: Дисс. ... докт. техн. наук: 05.23.01 / Полтавский национальный технический университет. – Полтава, 2006. – 406 с.
6. Азізов Т.Н., Мельник О.С. Залізобетонні балки з підвищеною жорсткістю при крученні // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 19., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2009. – С. 55-60.