УДК 371.398+37.012.7

К. С. Ільніцька, Ю. М. Краснобокий
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МОДЕЛЮВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ АСТРОФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

Анотація. У статті на прикладі астрофізичної задачі про гравітаційний вплив на Землю Сонця і Місяця продемонстрована ефективність застосування методу моделювання щодо її розв'язання та аналізу одержаних результатів.

Внаслідок сплюснутості Землі на полюсах Сонце і Місяць у результаті гравітаційного впливу на неї створюють певні механічні обертові моменти сил. Створивши уявну модель розглядуваного явища з визначення гравітаційного впливу тіла масою *M* на два жорстко зв'язаних між собою і різновіддалених від нього тіла з однаковими масами *m*, виведено формулу обертового моменту. Застосувавши цю формулу до двох точок на поверхні Землі на відстанях екваторіального і полярного її радіусів, визначено відношення моментів сил, які створюють на Землю Сонце і Місяць (воно становить~0,47).

За зроблених припущень, що Земля складається з однорідної і нестисливої речовини та за умови сталості атмосферного тиску на її поверхні, визначено величину сплюснутості Землі, викликану її осьовим обертанням. Створена модель дає величину сплюснутості рівну ~1/580 (за сучасними даними вона становить ~1/232).

Ключові слова: Земля, Сонце, Місяць, метод моделювання, сплюснутість Землі, момент обертання.

Постановка проблеми. Загальновідомий ефект від застосування методу моделювання в науці і зокрема у фізиці, а також від застосування математичних методів опису модельованих фізичних явищ і процесів. Використання цих методів є особливо продуктивним при вивченні астрофізичних явищ, які, враховуючи масштаби їх протікання, неможливо відтворити в лабораторних умовах шляхом прямого фізичного експерименту [1, С.103-104].

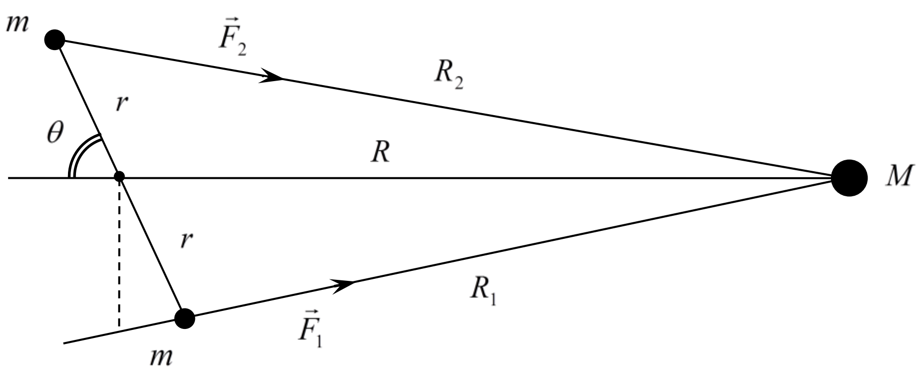
Посилання на наявні публікації. Різним застосуванням методу моделювання у фізиці присвячено багато публікацій і дисертаційних досліджень. Ми ж при підготовці пропонованого матеріалу скористалися в основному виданнями таких авторів як Д.В.Сивухін [2, С.323-325], Р.Фейнман [3, С.53-54], І.О.Яковлєв та ін. [4, С.92-104], а також авторськими збірниками задач [5, С.106-107; 6, С.116-117].

Мета статті. На прикладі розв'язання конкретної задачі продемонструвати ефективність методу моделювання астрофізичних явищ, пов'язаних з гравітаційним впливом на Землю Сонця і Місяця.

Завдання: на основі припущень умови задачі, покладених в основу моделі розглядуваного явища, визначити відношення обертових моментів, які чинять на Землю Сонце і Місяць; виходячи із створеної уявної моделі, визначити величину сплюснутості Землі, викликану її осьовим обертанням; порівняти отримані результати з результатами, отриманими іншими методами та з'ясувати причини їх розбіжностей.

Виклад основного матеріалу. Один з варіантів описуваної задачі може бути сформульований наступним чином: відомо, що Земля являє собою дещо сплюснуте тіло. Тому і Сонце, і Місяць у результаті гравітаційного впливу на неї створюють певні механічні обертові моменти сил. Визначити, яке з цих небесних тіл створює більший обертовий момент і приблизно у скільки разів. Визначити також величину сплюснутості Землі, вважаючи, що вона складається з однорідної і нестисливої речовини.

Щоб дати відповідь на питання задачі, розглянемо спочатку модель описуваного в ній явища: нехай два тіла з однаковими масами m, які з'єднані жорстким стержнем (що не має маси) на відстані $2r$ одне від одного, притягуються тілом з масою M, розташованим на відстані $R>>r$ від центра стержня O (див. мал.). Стержень складає кут θ з напрямом R. Визначити (приблизно) величину обертового моменту, який створює тіло M відносно центра стержня.



Зробимо розрахунок описаної моделі. Сили притягання тіл масами m до тіла масою M визначаються за законом всесвітнього тяжіння. Для обраної моделі він матиме вигляд:

$$F_1 = \frac{GmM}{R_1^2} = \frac{GmM}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta} \approx \frac{GmM}{R^2\left(1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta\right)} \approx \frac{GmM}{R^2}\left(1 + 2\frac{r}{R}\cos\theta\right);$$

$$F_2 = \frac{GmM}{R_2^2} = \frac{GmM}{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta} \approx \frac{GmM}{R^2}\left(1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta\right).$$

У процесі отримання цих наближених виразів ми знехтували r^2 порівняно з R^2 та, скориставшись співвідношенням $1/(1 \pm x) \approx 1 \mp x$ при $x << 1$ врахували, що $(r/R)\cos\theta << 1$. Обертовий момент τ дорівнює різниці моментів сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ відносно точки O, тобто $\tau = F_1 r \sin\theta - F_2 r \sin\theta$ (плечі обох сил приблизно рівні $r\sin\theta$). Підставивши замість $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ їхні значення, отримуємо

$$\tau = \frac{2GmMr^2}{R^3}\sin 2\theta.$$

Звертаємо увагу, що момент дорівнює нулю при двох положеннях мас: коли $\theta = 0$ (а, отже, й момент сили притягання кожної маси m дорівнює нулю) і коли $\theta = \pi/2$, тобто коли модулі сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ дорівнюють один одному і їх моменти взаємно компенсуються.

Тепер власне щодо самої задачі. Сплюснутість Землі при обчисленні діючого на неї моменту сил можна приблизно врахувати, замінивши Землю двома точковими масами, які знаходяться на деякій відстані одна від одної. Далі, скориставшись результатами розрахунків на моделі, знайти відношення обертових моментів, створюваних Сонцем і Місяцем. Воно рівне

$$\frac{\tau_C}{\tau_M} = \frac{M_C}{M_M}\left(\frac{R_M}{R_C}\right)^3 \approx 0{,}47\,,$$

де $\tau_С$ і $\tau_М$ – обертові моменти, які чинять на Землю Сонце і Місяць; M_M і M_C – маси Місяця і Сонця; R_M і R_C – відстані від Землі до Місяця і Сонця відповідно.

Для розв'язання другого завдання задачі зробимо ще одне припущення: вважатимемо, що фігура Землі мало відрізняється від кулястої. Тоді, за умови, що вона однорідна і нестислива, можна вважати прискорення вільного падіння всередині земної кулі спрямованим до центра Землі і пропорційним відстані до її центра. Розмістимо початок координат у центрі Землі, а вісь Z спрямуємо уздовж осі її обертання. За зроблених наближень та з врахуванням відцентрової сили рівняння гідростатики у проекціях на осі координат набувають вигляду

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g\frac{x}{R_0} + \rho\omega^2 x;\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g\frac{y}{R_0} + \rho\omega^2 y;\quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g\frac{z}{R_0},$$

де R_0 – радіус Землі, ω – кутова швидкість її обертання.

Інтегруючи ці рівняння, отримуємо

$$P = \frac{\rho}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right)\left(x^2 + y^2\right) - \frac{\rho g}{2R_0}z^2 + C\,,$$

де C – стала інтегрування, яка визначає значення тиску P на земній поверхні (його можна вважати рівним нулю, оскільки атмосферний тиск незрівнянно малий). Сплюснутість Землі визначиться з умови сталості тиску на земній поверхні. Обравши спочатку точку на екваторі, а потім на полюсі, запишемо: $P(R_e,0,0) = P(0,0,R_n)$, де R_e і R_n – екваторіальний і полярний радіуси Землі. З урахуванням явного виду тиску отримуємо:

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right)R_e^2 = -\frac{g}{R_0}R_n^2, \text{ або } R_e - R_n = \frac{\omega^2}{g}\frac{R_e^2 R_0}{R_e + R_n} \approx \frac{\omega^2 R_0^2}{2g}.$$

Отже, для сплюснутості ε земної кулі отримуємо значення

$$\varepsilon = \frac{R_e - R_n}{R_0} = \frac{\omega^2 R_0}{2g} \approx \frac{1}{580}.$$

Насправді, сплюснутість Землі майже удвічі більша, а саме 1/297. Розбіжність пояснюється, напевне, некоректністю зроблених нами в умові задачі припущень і міркувань, покладених в основу моделі, що й виявилося в її неповній відповідності щодо перебігу розглядуваного явища в природі, а також недосконалістю методу розрахунку. За умови точнішої постановки задачі необхідно враховувати, що поле тяжіння сплюснутої кулі не є центральним (з урахуванням цієї обставини розрахунок дає значення $\varepsilon = 5/4\omega^2 R_0 / g \approx 1/232$). Тим самим задача надто ускладнюється, оскільки саме гравітаційне поле завчасно невідоме, а залежить від невідомої форми поверхні Землі. Детальні дослідження показують, що задача, сформульована таким чином, не має однозначного вирішення. Можливі варіанти декількох різних форм рівноважної поверхні, у тому числі й еліпсоїду обертання з певним ступенем стиснення.

Висновок. У результаті запропонованого підходу до розв'язання астрофізичних задач є можливість продемонструвати студентам продуктивність застосування методу моделювання, закріпити і поглибити знання основних законів динаміки та інших розділів фізики, відповідних тем математичного аналізу та формул наближених обчислень, розвивати уяву та абстрактне мислення студентів.

Перспективним і корисним у цьому напрямі була б розробка системи задач, розв'язання яких вимагало б створення відповідних моделей на основі інтеграції знань з різних галузей.

Список використаних джерел:

1. Краснобокий Ю.Н. Компьютерное моделирование фундаментальных экспериментов в атомной физике / Ю.Н.Краснобокий, И.А.Ткаченко // Современный физический практикум: сб. трудов XII Междунар. учебно-методич. конф.; [под ред. Н.В.Калачова и М.Б.Шапочкина; г.Москва, 25-27 сентября 2012 г.]. – М.: Издательский дом МФО, 2012. – 208 с.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика / Д.В.Сивухин . – М.: «Наука», 1974. – 520 с.
3. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями / Р.Фейнман, Д.Лейтон, М.Сэндс; пер. с англ. А.П.Леванюка. – [3-е изд., перераб.]. – М.: Мир, 1978. – 542 с.
4. Сборник задач по общему курсу физики. Механика / С.П.Стрелков, Д.В.Сивухин, В.А.Угаров, И.А.Яковлев; [под. ред. И.А.Яковлева]. – [издание 4-е, перераб. и допол.]. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
5. Краснобокий Ю.М. Збірник задач з астрофізичним змістом / Ю.М.Краснобокий, І.А.Ткаченко, В.І.Хитрук. – Умань: ФОП Жовтий О.О., 2013. – 168 с.
6. Краснобокий Ю.М. Механіка небесних тіл: збірник задач / Ю.М.Краснобокий, І.А.Ткаченко. – Умань: ФОП Жовтий О.О., 2014. – 174 с.

Annotation. Ilnitskaya E., Krasnoboky Y. Application of modeling to solving astrophysical task.

In the article on the example of astrophysical task of the gravitational influence of the Earth Moon and the Sun. Demonstrated the effectiveness of a method of modeling to its solution and analyze the results.

Due to the flattening of the Earth at the poles of the Sun and the Moon as a result of the gravitational influence it creates certain mechanical rotational torques. By creating an imaginary model of the phenomenon to determine the gravitational influence of the body mass M in the two bodies with the same mass m, which are rigidly connected to each other and removed from the body M on different distances, a formula torque. Applying this formula to the two points on the Earth's surface at distances of the equatorial and polar radii of it, determined the ratio of moments of forces that create the Earth and the Sun Moon (it is equal to ~ 0.47). Under these assumptions, that the Earth consists of a homogeneous and incompressible substance, and subject to the constancy of atmospheric pressure on the surface, determined by the amount of flattening of the Earth caused by its axial rotation. The created model gives a value of flattening is ~ 1/580.

In fact, almost flattening the Earth twice, namely 1/297. The discrepancy is due probably impropriety made by us in the problem assumptions and considerations on the basis of the model, which was in compliance with its incomplete on the proposed course of phenomena in nature and imperfect method of calculation. With the more precise formulation of the problem, be aware that the gravitational field oblate balls is not the central (in view of the circumstances giving value calculation $\varepsilon = 5/4\omega^2 R_0/g \approx 1/232$). Thus, the problem is too complicated, because the gravitational field is unknown beforehand, but depends on an unknown form Earth's surface. Detailed studies show that the problem is formulated thus no clear solution. The options are several different forms of equilibrium surface, including the ellipsoid of revolution with a certain degree of compression.

Key words: Earth, Sun, Moon, modeling method, flattened Earth, moment of rotation.

Аннотация. В статье на примере астрофизической задачи о гравитационном влиянии на Землю Солнца и Луны продемонстрирована эффективность применения метода моделирования к ее решению и анализа полученных результатов.

Вследствие сплющенности Земли на полюсах Солнце и Луна в результате гравитационного влияния на нее создают определенные механические вращательные моменты сил. Создав воображаемую модель рассматриваемого явления по определению гравитационного влияния тела массой *M* на два тела с одинаковыми массами *m*, которые жестко связаны между собой и удалены от тела *M* на разные расстояния, выведена формула вращательного момента. Применив эту формулу к двум точкам на поверхности Земли на расстояниях экваториального и полярного ее радиусов, определено отношение моментов сил, которые создают на Землю Солнце и Луна (оно равно~0,47). При сделанных предположениях, что Земля состоит из однородного и несжимаемого вещества и при условии постоянства атмосферного давления на ее поверхности, определено величину сплющенности Земли, вызванную ее осевым вращением. Созданная модель дает величину сплющенности равную ~1/580 (согласно современным данным она равна ~1/232).

Ключевые слова: Земля, Солнце, Луна, метод моделирования, сплющенность Земли, момент сил вращения.

Ilnitskaya E., Krasnoboky Y. Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University. Application of modeling to solving astrophysical task.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Ільніцька Катерина Сергіївна – викладач кафедри фізики і астрономії та методики їх викладання Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Коло наукових інтересів: проблеми методики навчання фізики.

Краснобокий Юрій Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики і астрономії та методики їх викладання Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Коло наукових інтересів: проблеми методики навчання фізики.