КРАСНОБОКИЙ Ю. М.,

Уманський державний педагогічний
університет імені Павла Тичини,
к.ф.-м.н., доцент

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ІНСТРУМЕНТАРІЮ ДЛЯ ОПИСУ МОДЕЛЕЙ АСТРОФІЗИЧНИХ ЯВИЩ

Активне освоєння космічного простору, з'ясування можливих шляхів еволюції Всесвіту, вироблення варіантів колонізації інших планет висунули астрофізику за кількістю сучасних відкриттів на чільне місце серед природничих наук. Враховуючи космічні масштаби «лабораторії», в якій проводить дослідження астрофізика, основним її методом є моделювання космічних процесів та застосування для їх опису сучасного математичного апарату, чим і пояснюється актуальність пропонованого матеріалу.

Одними з найбільш поширених задач з астрофізичним змістом є задачі, в яких доводиться визначати значення різних параметрів, що стосуються гравітаційної взаємодії Землі з тілами, що знаходяться на її поверхні або поблизу неї, Землі і Місяця, Землі і Сонця та Землі, Сонця і Місяця. В якості прикладів можна навести такі задачі [1, С.23-27]:

1. Відомо, що Сонце притягує тіла, які знаходяться на поверхні Землі, з деякою силою, яка вночі спрямована в ту ж сторону, що й сила притягання цих тіл Землею, а вдень спрямована у протилежну сторону. Необхідно з'ясувати, чи викликає ця зміна напряму сили притягання Сонцем зміну ваги тіл на Землі протягом доби.

2. Пояснити механізм походження припливів і відпливів води в морях і океанах Землі, які спричинюються притяганням Місяця. Обрахувати величину припливоутворюючої сили, або зменшення сили ваги тіла, коли воно знаходиться поблизу лінії, яка з'єднує центри Землі і Місяця.

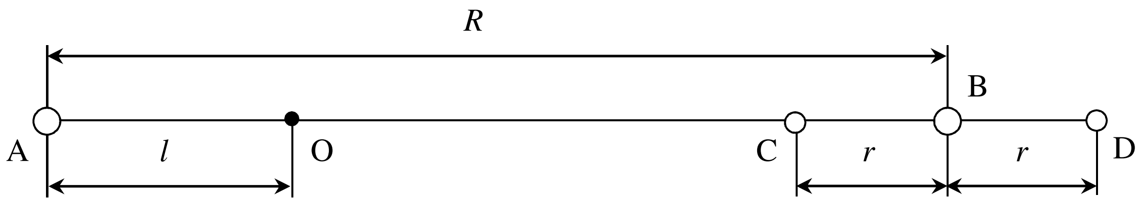
3. Визначити положення точки на прямій лінії, яка з'єднує Землю і Місяць, в якій напруженість результуючого поля тяжіння Землі і Місяця дорівнює нулю.

4. Тіло на екваторі Землі зважується за допомогою пружинних терезів опівдні, коли гравітаційні сили Землі і Сонця тягнуть його у протилежні сторони. Одночасно таке ж тіло зважується опівночі у діаметрально протилежній точці земної кулі, коли обидві ці сили спрямовані в одну сторону.

Встановити, вага якого тіла буде більшою у випадках: а) коли неоднорідністю гравітаційного поля Сонця поблизу Землі можна знехтувати; б) коли неоднорідність гравітаційного поля Сонця враховується за умови, що крім Землі і Сонця інших небесних тіл немає; в) коли враховується неоднорідність гравітаційного поля Місяця за умови нехтування гравітаційним впливом Сонця та інших небесних тіл.

Подібні задачі розв'язуються відносно просто, якщо змоделювати описані в них явища і застосувати для їх аналізу відповідний математичний апарат.

Створимо таку уявну модель з чотирьох тіл A, B, C і D (див. мал.), які вважатимемо матеріальними точками, що обертаються навколо деякого центра, залишаючись весь час на одній прямій і зберігаючи незмінною відстань одне від одного. Між усіма тілами діють сили притягання за законом всесвітнього тяжіння. Маси тіл C (M_C) і D (M_D) однакові і набагато менші за маси тіл A (M_A) і B (M_B), а відстань *r* дуже мала порівняно з *R*. За допомогою розрахунків на цій моделі з'ясуємо, які ще сили (крім сил тяжіння) повинні діяти з боку тіла B на тіла C і D, щоб відстані між всіма тілами залишалися незмінними. Потім одержані результати застосуємо до розв'язання задач 1, 2, 3, 4.



Нехай центр мас тіл A і B знаходиться в точці O. Постійна відстань *R* між тілами A і B буде зберігатися лише за умови їх обертання з кутовою швидкістю $\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{G(M_A + M_B)}{R}}$ навколо точки O. Умови рівноваги тіл C і D в обертовій (зв'язаній з тілами A і B) системі координат запишуться наступним чином:

$$M_C\left[-\frac{GM_A}{(R-r)^2} + \omega^2(R-l-r) + \frac{GM_B}{r^2}\right] + F_C = 0\,,$$
$$M_D\left[-\frac{GM_A}{(R+r)^2} + \omega^2(R-l+r) - \frac{GM_B}{r^2}\right] + F_D = 0\,, \qquad (1)$$

де додатній напрям обрано від A до B; F_C і F_D – шукані сили; G – стала тяжіння. Виключивши ω та взявши до уваги, що $l\omega^2 = GM_B/R^2$, а також нехтуючи членами вищих порядків відносно r/R , остаточно отримуємо:

$$F_C = GM_C\left[-\frac{M_B}{r^2} + \frac{r}{R^3}(3M_A + M_B)\right],$$
$$F_D = GM_D\left[\frac{M_B}{r^2} - \frac{r}{R^3}(3M_A + M_B)\right], \qquad (2)$$

тобто, за умови, що M_C=M_D обидві сили менші від сили притягання цих мас тілом B на однакову величину.

1. Для розв'язання цієї задачі точку A можна розглядати як центр Сонця і M_A як його масу, B – як центр Землі і M_B – як її масу, C і D – як два положення одного й того ж тіла масою M_C=M_D на поверхні Землі (C – вдень, D – вночі). Із розрахунків на моделі випливає, що всі тіла опівдні і опівночі будуть важити дещо менше, ніж вранці і увечері. Але ця різниця у вазі, як легко бачити з рівностей (2), набагато менша, ніж сила притягання Сонця, оскільки сила притягання Сонця $GM_C M_A/R^2$ множиться на дуже малу величину $3r/R$ (звичайно, що масою Землі M_B порівняно з $3M_A$, де M_A – маса Сонця, при оцінці зміни ваги тіла, можна знехтувати).

2. Результати, отримані на нашій моделі, можна застосувати до пояснення походження припливів, які спричинюються Місяцем.

Будемо міркувати так: Місяць A і Земля B обертаються навколо спільного центра O. У точках C і D на поверхні Землі, де вода «важить» менше, ніж у всіх інших точках, утворюються водяні «горби». Для розрахунку припливоутворюючої сили підставимо замість M_A і M_B відповідно маси Місяця і Землі. Тоді з формул (2) (нехтуючи масою Місяця порівняно з масою Землі) знаходимо наближено вагу тіла масою m ($P=mg$) у найближчій до Місяця і у найбільш віддаленій від нього точках земної поверхні (де g, зрозуміло, буде мати дещо різні значення):

$$P \approx mg_0\left[1-3\left(\frac{r}{R}\right)^3\frac{M_М}{M_З}\right], \tag{3}$$

де g_0 – прискорення вільного падіння на поверхні Землі, r – радіус Землі, R – відстань між центрами Землі і Місяця.

3. Вимога умови цієї задачі співпадає з розташуванням на прямій лінії тіл A, B, C, D нашої моделі. Використавши відомі дані, що маса Землі приблизно у 81 раз більша за масу Місяця, а середня відстань між цими тілами складає 384 000 км, знаходимо, що точка, в якій g=0, ділить відрізок прямої лінії між центрами Землі і Місяця у відношенні 9:1, а отже, знаходиться на відстані ≈$36{,}7\cdot10^3$ км від поверхні Місяця.

4. а) Зважаючи на величезну різницю в масах Сонця і Землі ($M_С>>M_З$), вага обох тіл практично буде однаковою.

4. б) Згідно нашої моделі вага тіл у діаметрально протилежних точках екватора земної кулі 1 (день) і 2 (ніч) буде відповідно рівна:

$$\begin{aligned} P_1 &\approx F_З - F_C(R-r) - m\omega^2 r + ma_0, \\ P_2 &\approx F_З + F_C(R+r) - m\omega^2 r - ma_0, \end{aligned} \tag{4}$$

де F_C і $F_З$ – сили гравітаційного притягання Сонця і Землі відповідно, R – відстань між їх центрами, r – радіус Землі, a_0 – прискорення центра Землі під дією гравітаційного притягання Сонця. Очевидно, що $ma_0=F(R)$. Віднімаючи перше рівняння від другого у (4), знаходимо:

$$P_2 - P_1 = \left[F_C(R+r) - F_C(R)\right] + \left[F_C(R-r) - F_C(R)\right]. \qquad (5)$$

Розклавши обидві різниці в квадратних дужках (5) за формулою Тейлора і обмежившись членами другого степеня по r, отримаємо:

$$P_2 - P_1 = r^2 d^2 F_C / dR^2 \,. \qquad (6)$$

Перетворимо вираз (6), використавши відомі співвідношення

$$F_C = GMm/R^2 = 4\pi^2 R/T^2 m \;\text{ і }\; P = mg\,,$$

де M – маса Сонця, T – період обертання Землі навколо Сонця, m – маса тіла.

Після нескладних перетворень знаходимо:

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{24\pi^2 r^2}{gT^2 R} = \frac{12\pi^2 r^2}{sR}\,, \qquad (7)$$

де $s=gT^2/2$ – відстань, яку проходила б Земля протягом року, якби вона рухалася рівноприскорено з прискоренням g. Підрахунок цієї відстані дає значення $s \approx 5\cdot 10^{12}$ км, а $(P_2 - P_1)/P \approx 6{,}5\cdot 10^{-12}$ відповідно.

4. в) З метою встановлення впливу гравітаційного поля Місяця у співвідношення (7), яке є одним з аналітичних наслідків опису обраної моделі, необхідно ввести відношення мас Місяця і Землі – ($M_М / M_З$):

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{M_М}{M_З}\frac{24\pi^2 r^2}{RgT^2} \approx 8\cdot 10^{-10}\,,$$

де R – відстань між центрами Землі і Місяця, T – період обертання Місяця навколо Землі, r – радіус Землі.

Таким чином, вплив Місяця на різницю у вазі тіл P_2 – P_1 приблизно на два порядки більший, ніж вплив Сонця.

Висновок. У результаті запропонованого підходу до розв'язання астрофізичних задач є можливість продемонструвати студентам продуктивність застосування методу моделювання, закріпити і поглибити знання основних законів динаміки та інших розділів фізики, відповідних тем математичного аналізу та формул наближених обчислень, розвивати уяву та абстрактне мислення студентів.

Список використаних джерел

1. Краснобокий Ю.М. Збірник задач з астрофізичним змістом / Ю.М. Краснобокий, І.А. Ткаченко, В.І. Хитрук. – Умань: ФОП Жовтий О.О., 2013. – 168 с.