

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І.І. МЕЧНІКОВА**

ДІХТЯРЕНКО Юлія Володимирівна



УДК 539.375

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БІЛЯ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ
НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ
З УРАХУВАННЯМ ЗОН ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Уманському державному педагогічному університеті імені Павла Тичини Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Дудик Михайло Володимирович,
Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини, професор кафедри
фізики і астрономії та методики їх викладання.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Кривий Олександр Федорович,
Національний університет «Одеська морська академія»,
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Острик Володимир Іванович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач науково-дослідного сектору
«Механіка спряжених хвильових полів».

Захист відбудеться «24» червня 2016 року о 15⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 41.051.05 при Одеському національному університеті імені І.І. Мечнікова за адресою: 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2, Інститут математики, економіки і механіки, ауд. 73.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Одеського національного університету імені І.І. Мечнікова (65082, м. Одеса, вул. Преображенська, 24).

Автореферат розісланий «18» травня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Н.Д. Вайсфельд

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Наявність або зародження і розвиток у твердих тілах дефектів структури типу тріщин, дислокацій, пор, включень істотно впливають на міцність конструкцій, оскільки призводять до високого рівня концентрації напружень в їх околі. Навантаження тіла супроводжується появою біля вершин гострокінцевих дефектів областей незворотних деформацій – зон передруйнування. Це вимагає детального дослідження впливу зон передруйнування на напружено-деформований стан біля концентраторів та умови зародження і поширення з їх вершин тріщин чи інших дефектів. Розв'язання даного класу задач складає предмет механіки руйнування, основи якої були започатковані у роботах А.А. Griffith, G.R. Irvin, E.O. Gowan і отримали подальший розвиток в працях А.Г.Акопяна, В.М. Александрова, О.Є. Андрейківа, Г.І. Баренблатта, Л.Т. Бережницького, П.М. Витвицького, Р.В. Гольдштейна, О.М. Гузя, О.Ю. Ішлінського, С.О. Калоєрова, А.О. Камінського, Л.А. Кіпніса, Г.С. Кіта, О.С. Космодаміанського, О.Ф. Кривого, Р.М. Кушніра, М.Я. Леонова, О.М. Лінькова, В.В. Лободи, Р.М. Мартиняка, В.В. Мелешка, Є.М. Морозова, Н.Ф. Морозова, М.І. Моссаковського, М.І. Мусхелішвілі, В.М. Назаренка, М.М. Николишина, В.В. Новожилова, В.І. Острика, В.В. Панасюка, В.З. Партона, П.І. Перліна, Г.С. Писаренка, Я.С. Підстригача, Ю.М. Подільчука, В.Г. Попова, Г.Я. Попова, Ю.М. Работнова, Г.М. Савіна, М.П. Саврука, Л.І. Сєдова, Б.І. Сметаніна, Л.Й. Слепяна, Г.Т. Сулима, А.Т. Улітко, Л.П. Хорошуна, А.О. Храпкова, Р.А. Христиановича, Л.А. Фільштинського, Г.П. Черепанова, В.П. Шевченка, С.Я. Яреми, M. Isida, W.T. Koiter, H. Liebowitz, P.C. Paris, I.R. Rice, G.C. Sih, P.S. Theocaris, M.L. Williams, M. Wnuk, T. Yokobori, A.R. Zak.

Завершеної теорії утворення і розвитку зон передруйнування досі не побудовано через складний, суттєво нелінійний характер фізичних процесів у зонах. Це обумовило запровадження рядом авторів різного роду моделей для вивчення зон передруйнування (Г.І. Баренблатт, Р.В. Гольдштейн, А.О. Камінський, М.Я. Леонов, В.В. Панасюк, Р.Л. Салганик, Г.П. Черепанов, F. Erdogan, D.S. Dugdale, I.W. Hutchinson, J.R. Rice, K.K. Lo, A. Tvergaard, M. Wnuk та ін.). Проте, дослідження зон передруйнування виконувались переважно біля вершин тріщини в однорідних тілах. В той же час актуальним для механіки руйнування композитів, зварних і клеєних з'єднань, гірських порід тощо є визначення зон передруйнування та відповідного напружено-деформованого стану в околі концентраторів напружень у кусково-однорідних тілах. У зв'язку з цим в даній роботі в рамках лінійної механіки руйнування розглядаються задачі про розрахунок в умовах плоскої деформації маломасштабних зон передруйнування, які виникають у кусково-однорідному тілі в кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох однорідних ізотропних матеріалів, та досліджується вплив зон передруйнування на напружено-деформований стан в привершинній області.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетних тем Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини "Математичне дослідження початкового етапу

руйнування ізотропних пружних і пружнопластичних тіл біля гострокінцевих концентраторів напружень" (2009-2011р.р., реєстраційний номер 0109U000006) та "Побудова розв'язків задач про тріщини та пластичні смуги біля кутових точок пружних і пружнопластичних тіл" (2013-2015р.р., реєстраційний номер 0113U000329).

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є встановлення закономірностей напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини нормального відриву у кутовій точці межі поділу матеріалів з урахуванням утворення біля вершини маломасштабної зони передруйнування.

Досягнення поставленої мети передбачає виконання наступних завдань:

1) здійснення аналізу локального поля напружень в околі вершини тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу матеріалів у точці зламу вздовж бісектриси кута зламу;

2) побудова аналітичних розв'язків задач про розрахунок маломасштабних зон передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох різних крихких матеріалів, та дослідження напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини після утворення зон передруйнування;

3) отримання розв'язків задач про розрахунок маломасштабних бічних пластичних зон-смуг у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох квазікрихких матеріалів, та дослідження напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини після утворення бічних пластичних смуг;

4) формулювання та розв'язання в рамках моделі "тризубець" задач про розрахунок вторинної пластичної зони передруйнування на продовженні тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу матеріалів у точці зламу, та визначення змін напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини внаслідок утворення в її околі вторинної зони передруйнування;

5) виконання числових розрахунків лінійних розмірів зон передруйнування і розкриття тріщини та здійснення якісного аналізу їх залежності від параметрів з'єднаних матеріалів і конфігурації кусково-однорідного тіла.

Об'єктом дослідження є кусково-однорідне тіло з тріщиною нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів у точці зламу.

Предметом дослідження є напружено-деформований стан в околі вершини тріщини нормального відриву, яка співпадає з кутовою точкою ламаної межі поділу матеріалів при наявності маломасштабних зон передруйнування.

Методи дослідження, які використовувалися в даній роботі:

- загальні методи механіки деформівного твердого тіла;
- методи теорії функцій комплексної змінної (метод Вінера-Хопфа, принцип аналітичного продовження, теорема Ліувілля, інтеграли типу Коші, формула Гахова);

- інтегральне перетворення Мелліна;

- числові методи.

Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів забезпечується:

коректністю та строгістю математичних постановок задач в рамках лінійної механіки руйнування, використанням для побудови розв'язків сформульованих задач апробованих строгих аналітичних методів, фізичною інтерпретацією результатів числових розрахунків задач. Отримані результати в цілому узгоджуються з відомими у літературі результатами теоретичних та експериментальних досліджень.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у наступному:

- знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, при симетричному навантаженні її берегів відривним напруженням довільного виду з інтегрованими особливостями;

- в рамках моделі Леонова-Панасюка побудовано аналітичні розв'язки задач механіки руйнування про розрахунок маломасштабних зон передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох різних крихких матеріалів. Визначено умови зрушення і напрямок поширення тріщини та досліджено напружено-деформований стан в околі вершини тріщини після утворення зон передруйнування;

- в рамках моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла отримано розв'язки задач механіки руйнування про розрахунок бічних маломасштабних пластичних зон-смуг у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох квазікрихких матеріалів, та досліджено напружено-деформований стан в околі вершини тріщини після утворення бічних пластичних смуг. Встановлено умови, за яких точка зламу межі поділу залишається концентратором напружень;

- в рамках моделі "тризубець" сформульовано та розв'язано задачу про розрахунок вторинної пластичної зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу поділу матеріалів. Досліджено вплив пластичних складових композиту на міцність з'єднання. Показано, що поява вторинної пластичної зони передруйнування на продовженні тріщини усуває концентрацію напружень у точці зламу межі поділу.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані результати можуть бути використані для інженерних розрахунків напружено-деформованого стану композитних матеріалів з тріщинами нормального відриву у кутовій точці ламаної межі поділу та передбачення граничних навантажень в них.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У працях [1, 3-7, 11-13, 15] науковому керівнику належать участь у постановках задач, в обговоренні основних ідей розв'язування, формулюванні висновків за результатами досліджень. Іншим співавторам у працях [1, 4, 6, 7, 9-11, 13-16] належить участь у формулюванні задач та обговоренні результатів. Дисертанту належать усі аналітичні перетворення та числові розрахунки, а також участь у формулюванні постановок задач і висновків за результатами досліджень, підготовці статей.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що увійшли до дисертаційної роботи, доповідались і обговорювались на: Конференції молодих вчених "Механіка деформівного твердого тіла – 2008" (Київ, 2008); Міжнародній

науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 2008, 2013); Міжнародній конференції "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (Київ, 2013, 2015); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь" (Одеса, 2013); Міжнародній науковій школі "Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках" (Алушта, 2013); Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 2013); Міжнародній конференції "Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій" (Львів, 2014); Міжнародній науковій конференції "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур" (Львів, 2014), Міжнародному інтернет-симпозиумі "Сучасні проблеми інженерної механіки" (Луцьк, 2015). У повному обсязі робота доповідалася на науковому семінарі кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Н.Д. Вайсфельд; науковому семінарі кафедри теоретичної і прикладної механіки Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара під керівництвом д.ф.-м.н., проф. В.В. Лободи; міжкафедральному семінарі кафедр вищої математики та методики навчання математики, фізики і астрономії та методики їх викладання, техніко-технологічних дисциплін, охорони праці та безпеки життєдіяльності Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини під керівництвом д.т.н., проф. Т.Н. Азізова.

Публікації. Основні наукові положення дисертаційного дослідження відображено в шістнадцяти публікаціях, із яких: п'ять наукових статей, опублікованих в провідних фахових виданнях України [1-5], дві статті опубліковані в інших наукових виданнях [6, 7], тези дев'яти виступів на науково-практичних конференціях та симпозиумах [8-16]. Статті [1, 5] прореферовані у міжнародній наукометричній базі Scopus.

Структура і обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаної літератури, що включає 152 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 175 сторінки, із них 157 сторінок основного тексту. Робота містить 32 рисунка та 7 таблиць.

Подяка. Дисертант висловлює щире подяку своєму науковому керівникові - кандидату фізико-математичних наук, доценту Михайлу Володимировичу Дудіку за постійну увагу до роботи, цінні наукові поради та тісну співпрацю, що сприяли успішному проведенню досліджень.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, її зв'язок з науковими програмами; сформульовано мету та завдання дослідження; вказано методи розв'язання поставлених задач; висвітлено новизну і достовірність одержаних результатів, їх практичне значення; подано відомості про апробацію роботи, публікації та особистий внесок в них здобувача.

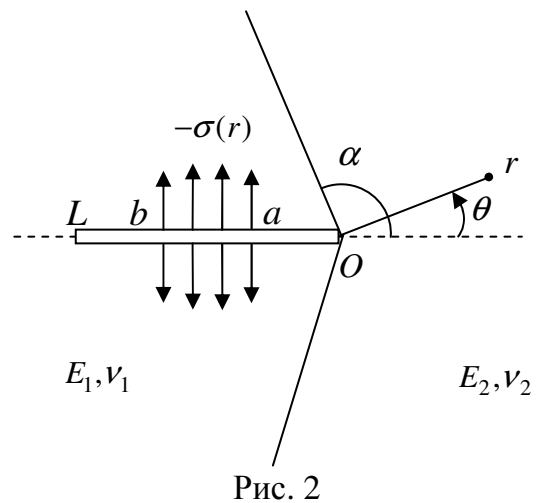
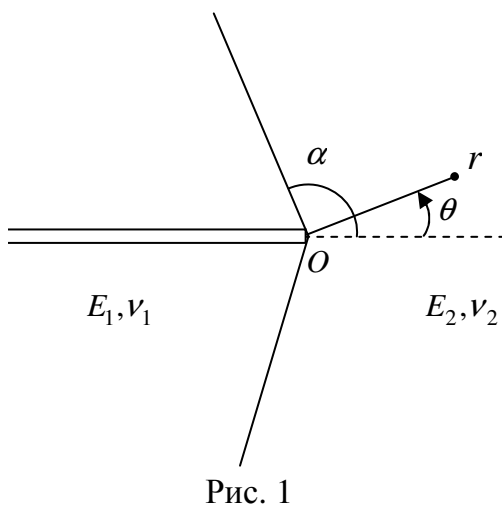
Перший розділ присвячений аналізу літератури за темою дисертації. У п. 1.1 розглянуто аналітичні і числові дослідження напружено-деформованого

стану кусково-однорідних тіл з ламаною межею поділу матеріалів та споріднених до них кусково-однорідних тіл з тріщиною, що виходить на плоску межу поділу під довільним кутом, кусково-однорідних клинових систем, які моделюють область біля вершини з'єднання кількох матеріалів, однорідних тіл з ламаною межею (клинів) і внутрішньою тріщиною тощо. У п. 1.2 проаналізовано основні математичні моделі, що описують початковий процес передруйнування біля гострокінцевих концентраторів напружень і допускають аналітичний розв'язок задач про розрахунок зон передруйнування. На підставі здійсненого огляду сформульовано невирішені задачі, які розглядаються у дисертації.

Другий розділ містить відомості, які використовуються у наступних розділах дисертації. У п. 2.1 на основі відомого розв'язку (Л.А. Кіпніс, 1986 р.) задачі про тріщину нормального відриву, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 (рис. 1) здійснено аналіз асимптотичного поля напружень в околі вершини тріщини. Напружений стан подається формулами:

$$\sigma_\theta = CF_1^i(\lambda_0, \theta)r^{\lambda_0}, \quad \tau_{r\theta} = CF_2^i(\lambda_0, \theta)r^{\lambda_0}, \quad \sigma_r = CF_3^i(\lambda_0, \theta)r^{\lambda_0}, \quad (1)$$

де C – пов'язана з коефіцієнтом інтенсивності стала, що залежить від будови тіла, величини і конфігурації зовнішнього навантаження та визначається з розв'язку відповідної зовнішньої задачі; λ_0 – найменший на інтервалі $(-1, 0)$ корінь характеристичного рівняння $D_0(-1-x)=0$; $F_j^i(\lambda_0, \theta)$ ($j=1, 2, 3$), $D_0(p)$ – функції, що приводяться в роботі; індекс $i=1$ або 2 вказує на матеріал, в якому визначаються напруження.



Виявлено, що вершина тріщини є концентратором напружень зі степеневою особливістю, причому концентрація напружень сильніша за кореневу при $E_1 > E_2$ ($\lambda_0 < -0,5$) і слабша при $E_1 < E_2$ ($\lambda_0 > -0,5$).

У п. 2.2 подано аналітичний розв'язок симетричної задачі про визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщини нормального відриву скінченної довжини, що виходить з кутової точки межі поділу, при навантаженні її берегів відривним нормальним напруженням (рис. 2). Розв'язок задачі отримано за допомогою методу Вінера-Хопфа із використанням інтегрального перетворення

Мелліна. Для коефіцієнтів інтенсивності напружень біля лівої і правої вершин відповідно отримані вирази у вигляді:

$$K_I = \sqrt{2L} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\tilde{\sigma}(z) dz}{K^+(z) G^+(z)},$$

$$\tilde{K}_I = \frac{2(1+\kappa_1)(2\pi L)^{-\lambda_0}}{D'_0(-1-\lambda_0)} \left[K^+(-1-\lambda_0) G^+(-1-\lambda_0) \tilde{\sigma}^+(-1-\lambda_0) - \tilde{\sigma}(-1-\lambda_0) \right], \quad (2)$$

де $\tilde{\sigma}(p) = \int_{a/L}^{b/L} \sigma(\rho L) \rho^p d\rho$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\tilde{\sigma}(z) dz}{K^+(z) G^+(z)(z-p)} = \begin{cases} \tilde{\sigma}^+(p) & (\text{Re } p < 0), \\ \tilde{\sigma}^-(p) & (\text{Re } p > 0), \end{cases}$ $D'_0(p) = \frac{dD_0(p)}{dp}$,

$$G^+(p) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] \quad (\text{Re } p < 0), \quad G(p) = \frac{D_0(p) \sin p\pi}{2D(p) \cos p\pi}, \quad K^+(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(0,5-p)},$$

$D(p)$ - функція визначена у роботі. Коефіцієнт C у формулах (1) пропорційний коефіцієнту інтенсивності напружень у вершині тріщини (2) і має розмірність сили, поділеної на довжину в степені $2 + \lambda_0$.

Для коефіцієнтів інтенсивності напружень знайдені кінцеві аналітичні вирази в частинних випадках сталого напруження, напруження з поліноміальною залежністю від відстані до кутової точки та при симетричній дії на береги тріщини відривних зосереджених сил однакової інтенсивності P . Для останнього випадку залежність нормованих коефіцієнтів інтенсивності напружень $K_I \sqrt{L}/P$ та $\tilde{K}_I L^{1+\lambda_0}/P$ у вершинах тріщини від кута зламу 2α межі поділу матеріалів і відносної відстані a/L від вершини тріщини до точки прикладання сили P для $E_1/E_2 = 0,2$ і $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$ приведена на рис.3.

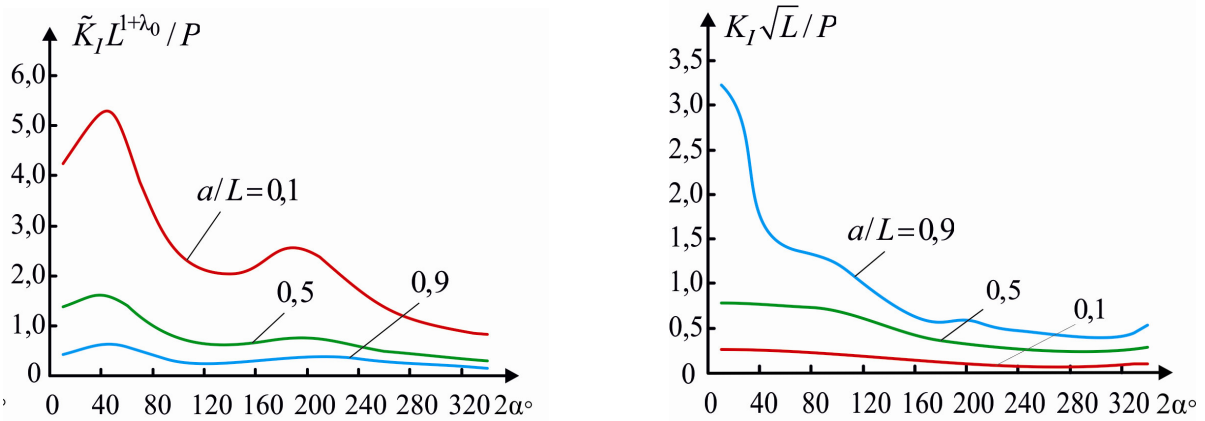


Рис. 3

У **третьому розділі** розглянуто задачу про початковий етап зрушення тріщини нормального відриву, що в умовах плоскої деформації виходить на ламану межу поділу двох різних однорідних ізотропних крихких матеріалів у її кутовій точці. Даний етап полягає в утворенні в кінці тріщини маломасштабної зони передруйнування у формі двох вузьких смуг, що симетрично поширюються з вершини кута в одному з матеріалів. Смуги моделюються лініями розриву нормального переміщення, на яких нормальне напруження дорівнює опору відриву i -го матеріалу σ_i ($i=1, 2$).

Оскільки розміри зони передруйнування вважаються значно меншими від

довжини L тріщини і всіх інших розмірів тіла, тому тіло розглядається як кусково-однорідна площина з межею поділу матеріалів у формі сторін кута, з вершини якого вздовж бісектриси виходить півнескінченна прямолінійна тріщина, а по обидві сторони симетрично відносно початкового напрямку поширення тріщини під кутом β_i - дві лінії розриву однакової довжини l_i (рис. 4).

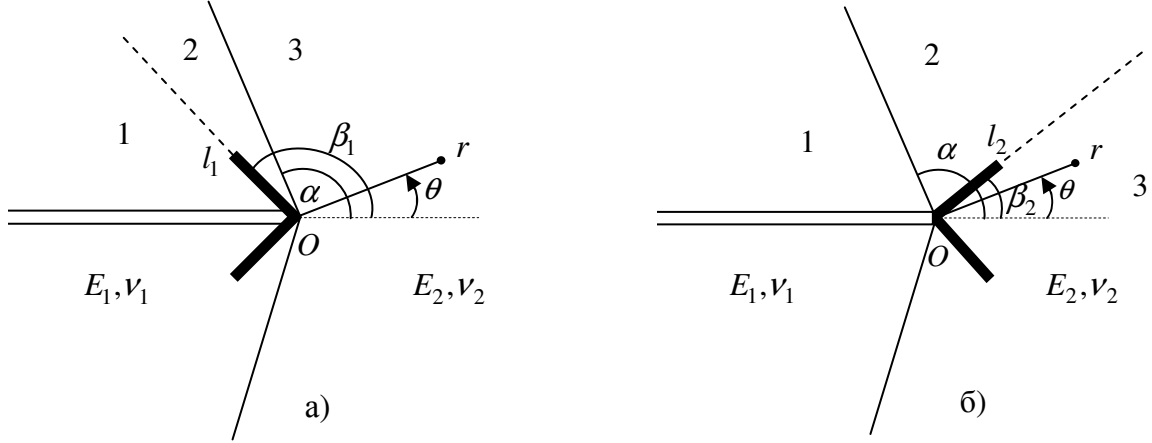


Рис. 4

Симетрія задачі дозволяє обмежитись розглядом верхньої частини кусково-однорідної площини і виконати розрахунок лише однієї смуги в області $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Таким чином отримано дві однотипні статичні задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta|_{\theta=\pi} = \tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = 0; \quad \langle \sigma_\theta \rangle|_{\theta=\alpha} = \langle \tau_{r\theta} \rangle|_{\theta=\alpha} = 0, \quad \langle u_r \rangle|_{\theta=\alpha} = \langle u_\theta \rangle|_{\theta=\alpha} = 0; \\ \langle \sigma_\theta \rangle|_{\theta=\beta_i} = \langle \tau_{r\theta} \rangle|_{\theta=\beta_i} = 0, \quad \langle u_r \rangle|_{\theta=\beta_i} = 0; \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=0} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=0} = 0; \\ \sigma_\theta|_{\theta=\beta_i} = \sigma_i \quad (r \leq l_i); \quad \langle u_\theta \rangle|_{\theta=\beta_i} = 0 \quad (r > l_i). \end{aligned} \quad (3)$$

Розв'язок задачі на відстанях, значно більших за довжину зони переддруйнування, але значно менших ніж довжина тріщини, переходить у асимптотичний розв'язок біля вершини тріщини аналогічної задачі без зони переддруйнування (рис. 1), досліджений у розділі 2. Це визначає асимптотику для нормального напруження σ_θ :

$$\sigma_\theta|_{\theta=\beta_i} = CF_1^i(\lambda_0, \beta_i)r^{\lambda_0} + o(1/r) \quad (r \rightarrow \infty); \quad F_1^i(\lambda_0, \beta_i) = \begin{cases} F_1^1(\lambda_0, \beta_1) & (\beta_i = \beta_1 \in [\alpha, \pi]), \\ F_1^2(\lambda_0, \beta_2) & (\beta_i = \beta_2 \in [0, \alpha]), \end{cases} \quad (4)$$

де функції $F_1^i(\lambda_0, \beta_i)$ визначаються з розв'язку задачі без зони переддруйнування (1), в якому слід покласти θ рівним β_i . У відповідності із загальними положеннями про поведінку напружень в околі гострокінцевих концентраторів біля кінця лінії розриву має місце асимптотика:

$$\sigma_\theta \sim \frac{k_i}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (5)$$

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна сформульовану крайову задачу (3)-(4) зведено до функціонального рівняння Вінера-Хопфа:

$$\Phi_i^+(p, \beta_i) + \frac{\sigma_i}{p+1} - \frac{CF_1^i(\lambda_0, \beta_i)l_i^{\lambda_0}}{p+\lambda_0+1} = -\operatorname{tg} p\pi G_i(p, \beta_i)\Phi_i^-(p, \beta_i) \quad (-\delta_2 < \operatorname{Re} p < \delta_1), \quad (6)$$

$$\Phi_i^-(p, \beta_i) = \frac{E_i}{4(1-\nu_i^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r=\rho l_i \\ \theta=\beta_i}} \rho^p d\rho, \quad \Phi_i^+(p, \beta_i) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l_i, \beta_i) \rho^p d\rho,$$

$$G_i(p, \beta_i) = -\frac{D_i(p, \beta_i) \cos p\pi}{D_0(p) \sin p\pi},$$

$D_i(p, \beta_i)$ - функції, визначені в роботі, δ_1, δ_2 - достатньо малі додатні числа.

Точний розв'язок рівняння (6), знайдений шляхом факторизації коефіцієнта $G_i(p, \beta)$ за формулою Гахова, використання принципу аналітичного продовження, теореми Ліувілля та деяких положень теорії функцій комплексної змінної, має вигляд:

$$\Phi_i^+(p, \beta_i) = -\frac{pG_i^+(p, \beta_i)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\sigma_i}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} \right] - \right. \quad (7)$$

$$\left. - \frac{CF_1^i(\lambda_0, \beta_i) l_i^{\lambda_0}}{p + \lambda_0 + 1} \left[\frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 + 1)G_i^+(-\lambda_0 - 1, \beta_i)} \right] \right\} \quad (\text{Re } p < 0),$$

$$\Phi_i^-(p, \beta_i) = K^-(p) G_i^-(p, \beta_i) \left\{ \frac{\sigma_i K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)(p+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{CF_1^i(\lambda_0, \beta_i) l_i^{\lambda_0} K^+(-\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 + 1)(p + \lambda_0 + 1)G_i^+(-\lambda_0 - 1, \beta_i)} \right\} \quad (\text{Re } p > 0),$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G_i(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G_i^+(p, \beta), & \text{Re } p < 0, \\ G_i^-(p, \beta), & \text{Re } p > 0, \end{cases} \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0,5 \mp p)}.$$

Застосувавши до (5) теорему абелева типа і порівнявши її результат з асимптотикою розв'язку (7) при $p \rightarrow \infty$, знайдено коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву:

$$k_i = -\sqrt{2} l_i \left\{ \frac{\sigma_i K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} - \frac{CF_1^i(\lambda_0, \beta_i) l_i^{\lambda_0} K^+(-\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 + 1)G_i^+(-\lambda_0 - 1, \beta_i)} \right\}.$$

Приймаючи умову обмеженості напружень в кінці рівноважної зони передруйнування та поклавши $k_i = 0$, отримано вираз для визначення відносної довжини зони передруйнування $x_i = l_i / L$:

$$x_i = \left(\frac{|C| L^{\lambda_0}}{\sigma_i} \right)^{\frac{1}{\lambda_0}} R_i(\beta_i), \quad (8)$$

$$R_i(\beta) = \left[\frac{\sqrt{\pi} |F_1^i(\lambda_0, \beta)| \Gamma(1 + \lambda_0) I_i(0, \beta)}{2\Gamma(1,5 + \lambda_0) I_i(\lambda_0, \beta)} \right]^{\frac{1}{\lambda_0}}, \quad I_i(x, \beta) = \exp \left[\frac{x+1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G_i(it, \beta)}{t^2 + (x+1)^2} dt \right].$$

Напрямок розвитку зони передруйнування визначався з критерію максимуму накопиченої в ній потенціальної енергії:

$$W_i = -\frac{16\sigma_i^2(1-\nu_i^2)\lambda_0}{\pi E_i(2+\lambda_0)} \left(\frac{|C|\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda_0+1)}{2\sigma_i\Gamma(1,5+\lambda_0)} \right)^{\frac{2}{\lambda_0}} w_i(\beta_i), \quad w_i(\beta) = \left[\frac{|F_1^i(\lambda_0, \beta)| I_i(0, \beta)^{1+\lambda_0}}{I_i(\lambda_0, \beta)} \right]^{\frac{2}{\lambda_0}}. \quad (9)$$

Умова визначення передбачуваного напрямку поширення зони передруйнування:

$$w_i(\beta_i) = \max.$$

У таблиці 1 приведені окремі результати числових розрахунків орієнтації зон передруйнування β_i в залежності від кута зламу межі поділу матеріалів 2α . Розрахунки виконані для відношення модулів Юнга $E_1/E_2 = 0,2$ та коефіцієнтів Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$.

Таблиця 1

$2\alpha^\circ$	20	40	60	80	100	120	140	160	180
β_1°	38	53,7	59,2	60,2	60,6	62	70	80	90
β_2°	10	20	30	40	50	60	49,8	25,1	2,4
$2\alpha^\circ$	200	220	240	260	280	300	320	340	
β_1°	100	110	120	130	140	150	160	170	
β_2°	0	0	0	0	0	0	0	0	

Досліджено залежність довжини і орієнтації зони передруйнування від величини навантаження, пружних характеристик і опорів відриву з'єднаних матеріалів кусково-однорідного тіла та кута зламу межі поділу. Встановлено умови, при яких зона передруйнування може розгалужуватись в одному з матеріалів, поширюватись вздовж межі поділу або перетинати її без розгалуження. Орієнтацію зони передруйнування запропоновано розглядати як напрямок подальшого поширення тріщини при досягненні умов зрушення. Використовуючи розв'язок рівняння Вінера-Хопфа, знайдено розкриття тріщини у вершині:

$$\delta_i = -\frac{16(1-\nu_i^2)\sigma_i x_i L}{E_i \pi \sqrt{G_i(0, \beta_i)} I_i(0, \beta_i)} \frac{\lambda_0}{1 + \lambda_0} \cos \beta_i \quad (10)$$

Розрахунки зведеного розкриття тріщини $\delta'_i = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)\sigma_2} \frac{\delta_i}{L}$ в залежності від кута зламу межі поділу 2α та відношення модулів Юнга при $\sigma = |C|L^{\lambda_0} / \sigma_2 = 0,02$ і $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$ представлені на рис. 5 і рис. 6.

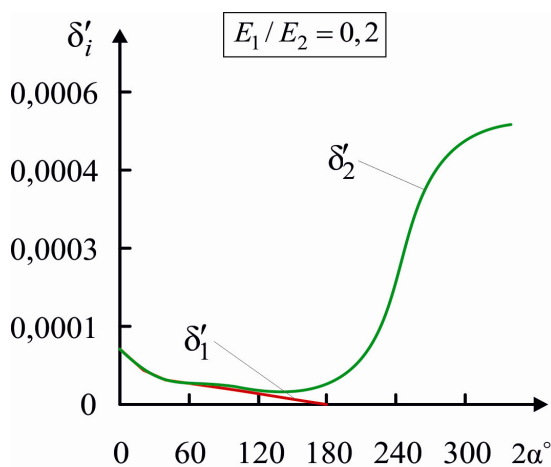


Рис. 5

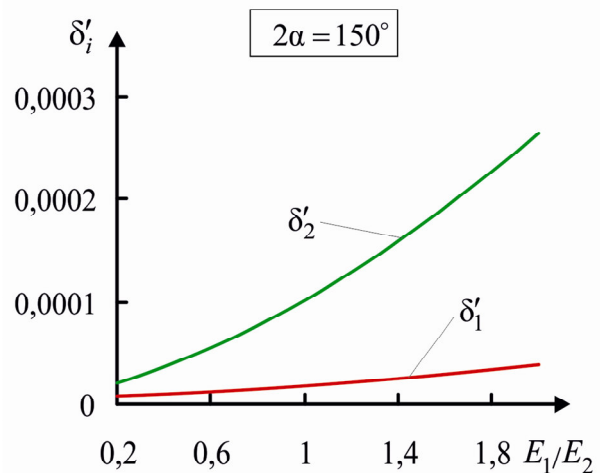


Рис. 6

На основі числових розрахунків встановлено кореляцію між довжиною зони

передруйнування і розкриттям тріщини при невеликій відмінності кутів, на які припадають їх максимуми.

Знайдене розкриття тріщини у відповідності з КРТ-критерієм використовується для визначення граничного навантаження $\sigma_{i,c}$, при якому відбувається зрушення тріщини. На рис. 7 і рис. 8 представлені результати розрахунку залежності нормованого граничного навантаження $\sigma_{i,c} = |C_c| L^{\lambda_0} / \sigma_i$ від зведеної довжини тріщини

$$L' = \frac{4(1-\nu_1^2)\sigma_2 L}{E_1 \delta_{i,c}} \text{ для } 2\alpha = 150^\circ \text{ і від кута зламу межі поділу матеріалів при } L' = 8000$$

($E_1/E_2 = 0,2, \nu_1 = \nu_2 = 0,25$).

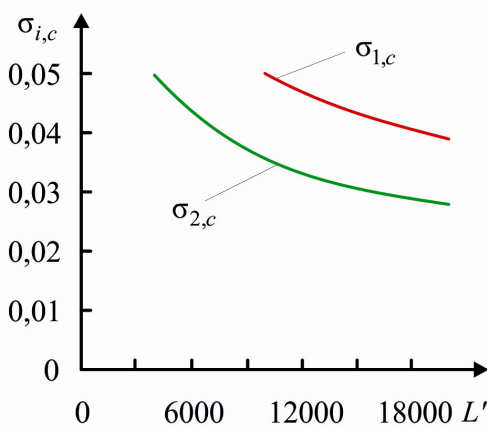


Рис. 7

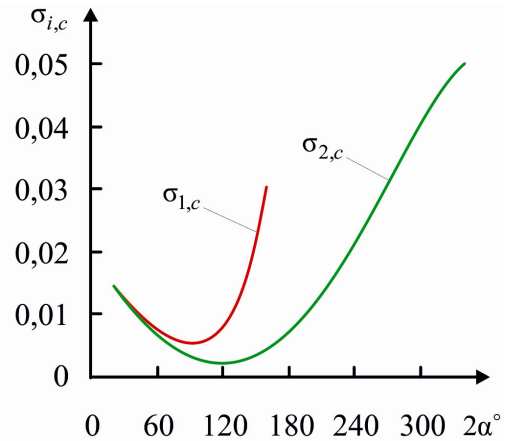


Рис. 8

За допомогою зворотного перетворення Мелінна з використанням теореми про лишки отримано вирази для локального поля напружень на відстанях до вершини тріщини, менших за розміри зони передруйнування. Зокрема, формула для нормального напруження має наступну структуру:

$$\sigma_{\theta}^k(r, \theta) = C_1 + C_2 r^{\lambda_i}, \quad (11)$$

$$C_1 = \frac{\sigma_{0i}^*(-1) f_1^k(-1, \theta)}{D_i(-1, \beta_i)}, \quad C_2 = \frac{f_1^k(-1 - \lambda_i, \theta)}{D_i'(-1 - \lambda_i, \beta_i)} \left[-\frac{\sigma_{0i}^*(-1 - \lambda_i)}{\lambda_i} + \frac{\sigma_{li}^*(-1 - \lambda_i)}{\lambda_0 - \lambda_i} \right],$$

$$D_i'(p, \beta_i) = \frac{dD_i(p, \beta_i)}{dp},$$

$$\sigma_{0i}^*(p) = -\frac{p l_i^{p+1} G_i^+(p, \beta_i) \sigma_i K^+(-1)}{K^+(p) G_i^+(-1, \beta_i)}, \quad \sigma_{li}^*(p) = \frac{p l_i^{p+1} G_i^+(p, \beta_i) C F_1^i(\lambda_0, \beta_i) l_1^{\lambda_0} K^+(-1 - \lambda_0)}{K^+(p) (\lambda_0 + 1) G_i^+(-1 - \lambda_0, \beta_i)},$$

де $f_1^k(p, \theta)$ - функції, визначені у роботі; λ_i - корені характеристичного рівняння задачі $D_i(-\lambda_i - 1, \beta_i) = 0$, що лежать у смузі $-1 < \lambda_i < 0$.

У таблиці 2 приведені результати числових розрахунків показників сингулярності напружень від кута зламу межі поділу 2α при відсутності зони передруйнування (λ_0) та після утворення бічної зони у першому матеріалі (λ_1) і після утворення бічної зони у другому матеріалі (λ_2) для композитного з'єднання з $E_1/E_2 = 0,2, \nu_1 = \nu_2 = 0,25$.

$2\alpha^\circ$	20	40	60	80	100	120	140	160	180
$-\lambda_0$	0,4638	0,4302	0,4113	0,4035	0,3964	0,3868	0,3744	0,361	0,3521
$-\lambda_1$	0,2163	0,2514	0,2236	0,1592	0,0685	0	0	0	0,1282
$-\lambda_2$	0,2174	0,2336	0,1934	0,1246	0,0389	0	0	0,0309	0,1137
$2\alpha^\circ$	200	220	240	260	280	300	320	340	
$-\lambda_0$	0,3592	0,3880	0,4245	0,4556	0,4774	0,4906	0,4973	0,4997	
$-\lambda_1$	0,2497	0,3410	0,4051	0,4479	0,4746	0,4897	0,497	0,4996	
$-\lambda_2$	0,1058	0,0687	0	0	0	0	0	0	

У четвертому розділі наведено аналітичні розв'язки симетричних задач про розрахунки маломасштабних бічних пластичних смуг у кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу двох квазікрихких матеріалів (рис. 9), та обумовлених їх появою змін напружено-деформованого стану в околі вершини. У відповідності з гіпотезою локалізації та моделлю Леонова-Панасюка-Дагдейла зону представлено двома відрізками розриву дотичного переміщення, на яких дотичне напруження дорівнює границі текучості матеріалу при зсуві.

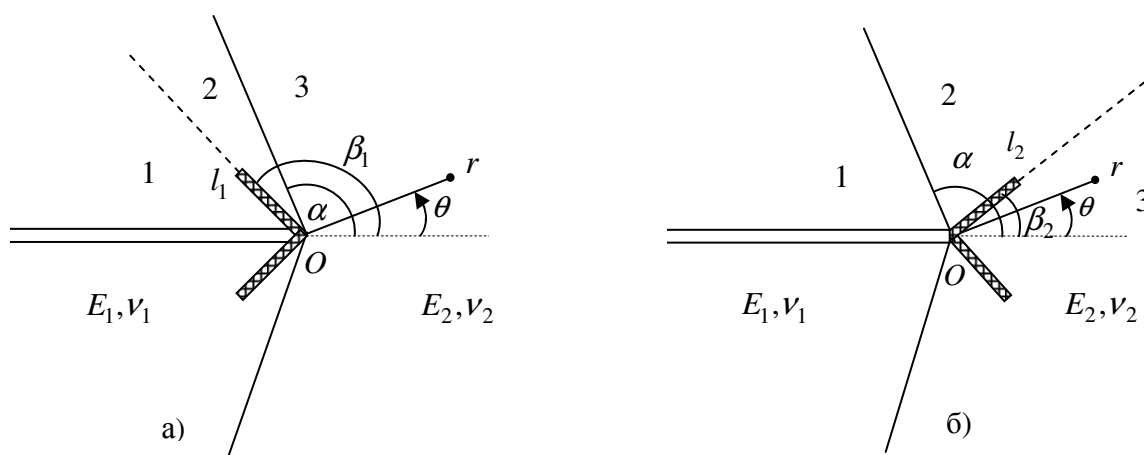


Рис. 9

Вважаючи розміри пластичної зони значно меншими від довжини тріщини L і всіх інших суттєвих розмірів тіла, а береги тріщини вільними від навантаження, задачу зведено до статичної крайової задачі теорії пружності про розрахунок бічної лінії розриву переміщення з граничними умовами:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta|_{\theta=\pi} = \tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = 0; \quad \langle \sigma_\theta \rangle|_{\theta=\alpha} = \langle \tau_{r\theta} \rangle|_{\theta=\alpha} = 0, \quad \langle u_r \rangle|_{\theta=\alpha} = \langle u_\theta \rangle|_{\theta=\alpha} = 0; \\ \langle \sigma_\theta \rangle|_{\theta=\beta_i} = \langle \tau_{r\theta} \rangle|_{\theta=\beta_i} = 0, \quad \langle u_\theta \rangle|_{\theta=\beta_i} = 0; \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=0} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=0} = 0; \\ \tau_{r\theta}|_{\theta=\beta_i} = \tau_i \quad (r \leq l_i); \quad \langle u_r \rangle|_{\theta=\beta_i} = 0 \quad (r > l_i). \end{aligned}$$

Розв'язок задачі отримано за допомогою методу Вінера – Хопфа, як і подібної задачі у розділі 3. Знайдено вирази для визначення довжини пластичної смуги та її розкриття у вершині тріщини, аналогічні (8), (10). Для вибору напрямку поширення смуги використана умова максимуму швидкості дисипації енергії в ній. Здійснено числовий аналіз залежності орієнтації зони, її довжини та розкриття тріщини від кута зламу межі поділу середовищ, пружних параметрів з'єднаних матеріалів і навантаження. За допомогою зворотного перетворення Мелліна отримано вирази для

поля напружень біля кутової точки після утворення бічних пластичних зон-смуг та рівняння для визначення показників сингулярності напружень. На основі числових розрахунків показано, що концентрація напружень у кутовій точці після утворення бічних пластичних смуг зберігається, послаблюючись порівняно зі станом без пластичної зони. У таблиці 3 приведені окремі результати розрахунків показників сингулярності напружень від кута зламу межі поділу середовищ 2α при відсутності пластичної зони (λ_0) та після утворення пластичної зони у першому матеріалі (λ_1) і після утворення пластичної зони у другому матеріалі (λ_2), а також орієнтації смуг пластичності β_i у відповідних матеріалах. Числові розрахунки виконані для відношення модулів Юнга $E_1/E_2=0,2$ та коефіцієнтів Пуассона $\nu_1=\nu_2=0,25$. При з'єднанні однакових матеріалів ($E_1/E_2=1$) знайдено кут нахилу пластичних смуг $75,8^\circ$, близький до визначеного Г.П. Черепановим (1976 р.) значення $\approx 72^\circ$; їх відмінність обумовлена використанням різних критеріїв вибору орієнтації пластичної зони.

Таблиця 3

$2\alpha^\circ$	20	40	60	80	100	120	140	160	180
$-\lambda_0$	0,4638	0,4302	0,4113	0,4035	0,3964	0,3868	0,3744	0,361	0,3521
$-\lambda_1$	0,2346	0,2977	0,2805	0,2314	0,1626	0,081	0,0109	0,0252	0,1244
β_1°	99,1	110,6	114,5	115,3	115,6	116,1	116,8	117,5	117,6
$-\lambda_2$	0,4915	0,4809	0,4656	0,4427	0,4061	0,3575	0,2829	0,2723	0,2641
β_2°	10	20	30	40	50	60	70	80	65,1
$2\alpha^\circ$	200	220	240	260	280	300	320	340	
$-\lambda_0$	0,3592	0,388	0,4245	0,4556	0,4774	0,4906	0,4973	0,4997	
$-\lambda_1$	0,2274	0,304	0,3859	0,4386	0,4706	0,4883	0,4967	0,4996	
β_1°	115,9	110	120	130	140	150	160	170	
$-\lambda_2$	0,2311	0,1768	0,1019	0,0045	0	0	0	0	
β_2°	61,2	61,6	63,9	66,7	69,5	72,1	74,1	75,4	

Для випадків збереження концентрації напружень біля вершини тріщини після утворення бічних пластичних смуг передбачено виникнення вторинної області переддруйнування – пластичної зони переддруйнування на продовженні тріщини з відривним характером деформацій.

У п'ятому розділі методом Вінера – Хопфа побудовано аналітичні розв'язки симетричних задач про розрахунок вторинної пластичної зони переддруйнування в рамках моделі "тризубець" та здійснено аналіз поля напружень в околі вершини тріщини після утворення зони. У відповідності з моделлю "тризубець" початкова пластична зона утворена сукупністю двох бічних пластичних зон-смуг та вторинної пластичної зони переддруйнування на продовженні тріщини, довжина якої вважається набагато меншою, ніж довжина бічних пластичних смуг. Припускаючи, що вторинна зона через малість розмірів не впливає суттєво на розміри і орієнтацію більш розвинутих бічних пластичних смуг, розрахунок яких здійснено у попередньому розділі, тому, моделюючи її лінією розриву нормального переміщення, на якій

нормальне напруження дорівнює межі текучості другого матеріалу при відриві, задачі зведено до статичних задач теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі прямолінійних сторін кута, з вершини якого виходить півнескінченна тріщина, дві півнескінченні бічні лінії розриву дотичного переміщення та скінченних розмірів лінія розриву нормального переміщення (рис.10).

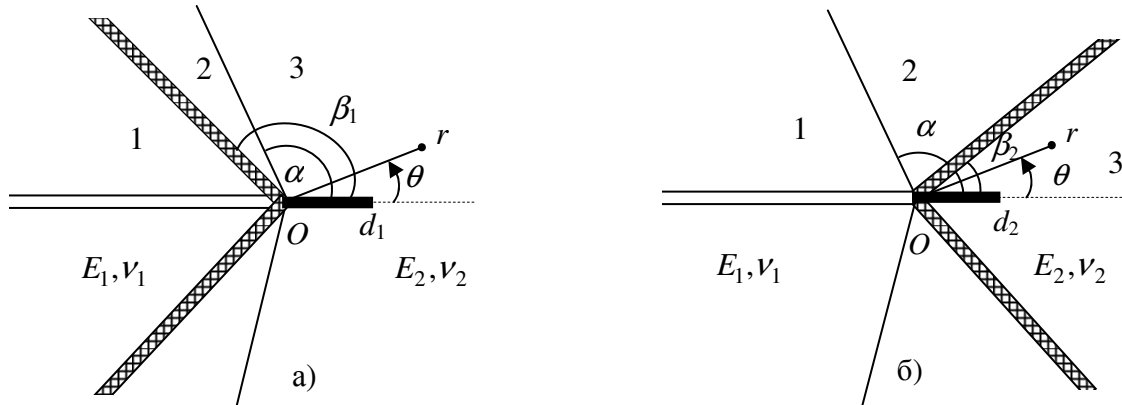


Рис. 10

На нескінченності задано умову, що відповідає можливості зшивання розшукуваного розв'язку задачі зі знайденим на попередньому етапі асимптотичним розв'язком в околі кутової точки аналогічної задачі без вторинної пластичної зони переддруйнування. Розв'язок задачі отримано за допомогою методу Вінера-Хопфа. Знайдено аналітичні вирази для визначення довжини пластичної зони переддруйнування та її розкриття у вершині тріщини. Встановлено, що поява вторинної пластичної зони переддруйнування усуває концентрацію напружень у кутовій точці. На основі числових розрахунків проаналізовані залежності параметрів вторинної зони від кута зламу межі поділу та пружних характеристик матеріалів. Знайдено загальне розкриття тріщини внаслідок утворення бічних пластичних смуг і вторинної зони переддруйнування на продовженні тріщини: $\delta_i = \delta_i^{pl} + \delta_i^{pf}$. Розрахунки зведеного розкриття тріщини $\delta'_i = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)\sigma_2} \frac{\delta_i}{L}$ в залежності від кута зламу межі

поділу 2α та відношення модулів Юнга при $\sigma = |C|L^{\lambda_0} / \sigma_2 = 0,02$ та $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$ представлені на рис. 11 і рис. 12.

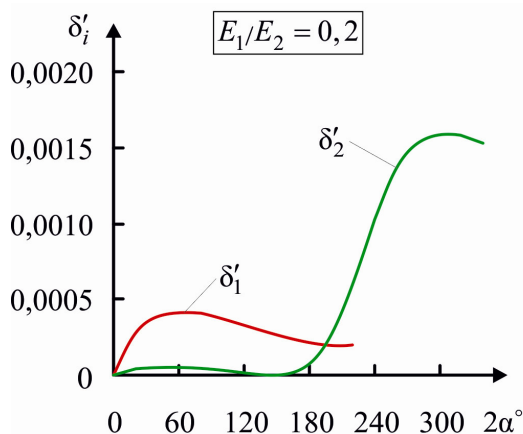


Рис. 11

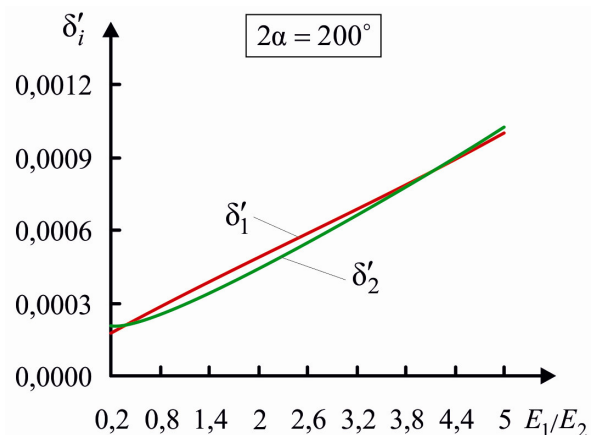


Рис. 12

Виявлено, що залежності зведеного розкриття тріщини від параметрів композитного з'єднання і навантаження за наявності вторинної пластичної зони передруйнування подібні знайденим у розділі 4 за її відсутності, при цьому числові значення δ_i' при деяких параметрах значно більші за δ_i^{pl} . Це пов'язано з тим, що поява вторинної пластичної зони передруйнування приводить до суттєвого збільшення розкриття тріщини за рахунок δ_i^{pl} внаслідок розвантаження матеріалів в околі вершини тріщини і зникнення концентрації напружень. Досліджено вплив утворення пластичної зони на умови зрушення тріщини. На рис. 13 і рис. 14 представлені результати розрахунків залежності граничного параметра навантаження $\sigma_{i,c} = |C_c| L^{\lambda_0} / \sigma_2$ від зведеної довжини тріщини $L' = \frac{4(1-\nu_1^2)\sigma_2 L}{E_1 \delta_{i,c}}$ при $2\alpha = 200^\circ$ і кута зламу межі поділу матеріалів при $L' = 1500$ ($E_1/E_2 = 0,2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$).

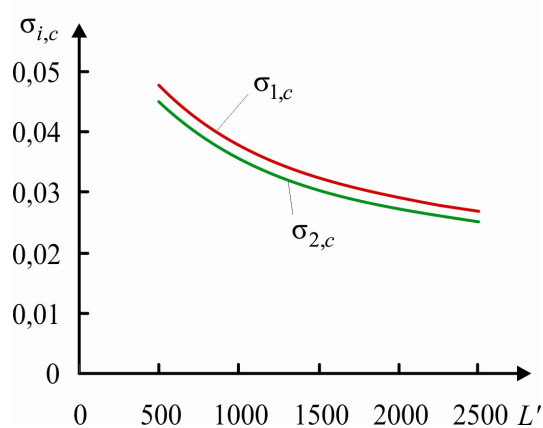


Рис. 13

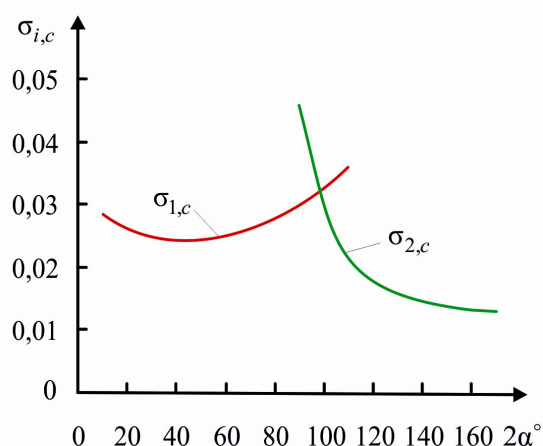


Рис. 14

Згідно з рис. 13, величина граничного навантаження спадає при збільшенні довжини тріщини; воно виявляється тим менше, чим менше критичне розкриття тріщини $\delta_{i,c}$. Крім того, граничне навантаження суттєво залежить від кута зламу межі поділу матеріалів (рис.14).

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі за допомогою методу Вінера – Хопфа отримані аналітичні розв'язки задач про розрахунки маломасштабних зон передруйнування в кінці тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох крихких або квазікрихких матеріалів у точці зламу, та досліджено вплив зон передруйнування на напружено-деформований стан в околі вершини тріщини.

Отримано такі основні результати:

1. Здійснено аналіз локального поля напружень в околі вершини тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу матеріалів у її кутовій точці вздовж бісектриси кута зламу. Виявлено, що вершина тріщини є концентратором напружень зі степеневу особливістю. Досліджено залежності показника сингулярності напружень від кута зламу межі поділу і відношення модулів Юнга матеріалів. Розв'язано задачу про визначення коефіцієнтів інтенсивності

напружень у вершинах тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, при симетричному навантаженні її берегів відривним напруженням довільного виду з інтегрованими особливостями. Показано, що вершина, яка співпадає з кутовою точкою, є концентратором напружень зі степеневою особливістю, показник сингулярності якої залежить від кута зламу межі поділу та пружних параметрів з'єднаних матеріалів, тоді як в іншій вершині має місце коренева особливість. Для коефіцієнтів інтенсивності напружень біля обох вершин отримані вирази у вигляді двохкратних інтегралів, які обчислені в частинних випадках навантаження берегів сталим напруженням, напруженням з поліноміальною залежністю від відстані до кутової точки та при симетричній дії на береги тріщини відривних зосереджених сил однакової інтенсивності.

2. В рамках моделі Леонова-Панасюка побудовано розв'язки задач про визначення маломасштабних зон передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох крихких матеріалів у точці зламу. Пов'язуючи напрямок поширення тріщини з орієнтацією зони передруйнування, за допомогою енергетичного критерію сформульовано умови, за яких тріщина поширюється вздовж межі поділу, розгалужується в одному з матеріалів або ж перетинає межу поділу без розгалуження. Здійснено аналіз поля напружень в околі вершини тріщини після утворення зон передруйнування та виявлено зниження рівня концентрації напружень.

3. В рамках моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла побудовано розв'язки задач про розрахунок маломасштабних пластичних зон у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на ламану межу поділу двох квазікрихких матеріалів у точці її зламу. Досліджено напружено-деформований стан в околі вершини тріщини після утворення маломасштабних бічних пластичних смуг та встановлено умови, за яких точка зламу межі поділу залишається концентратором напружень.

4. В рамках моделі "тризубець" побудовано розв'язки задач про розрахунок вторинної пластичної зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу поділу квазікрихких матеріалів. Показано, що поява вторинної пластичної зони передруйнування на продовженні тріщини усуває концентрацію напружень.

5. Виконано числові розрахунки орієнтацій і довжин зон передруйнування, розкриття тріщини у вершині і граничних навантажень та здійснено якісний аналіз їх залежностей від параметрів з'єднаних матеріалів і конфігурації кусково-однорідного тіла. Зокрема, виявлено, що

- розміри маломасштабних зон передруйнування пропорційні відношенню опору відриву крихкого матеріалу або межі текучості при зсуві квазікрихкого матеріалу до коефіцієнта інтенсивності напружень у вершині тріщини в степені, оберненій показнику сингулярності напружень;

- в залежності від кута зламу, пружних параметрів з'єднаних матеріалів та опорів відриву (меж текучості) зона крихкого передруйнування (пластична зона)

розгалужується, поширюючись в одному з матеріалів або по межі поділу, або поширюється у напрямку тріщини;

- розкриття тріщини в її вершині при певних кутах зламу, що залежать від відношення модулів Юнга і опорів відриву крихких або меж текучості квазікрихких матеріалів, набуває максимальних значень, що значно знижує рівень граничних навантажень.

- граничне навантаження нелінійно залежить від кута зламу межі поділу матеріалів, знижуючись при збільшенні довжини тріщини та зменшенні критичного розкриття тріщини.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Камінський А.О. Дослідження зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу розділу пружних середовищ / А.О. Камінський, Л.А. Кіпніс, М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 111-119.

[The same: Kamins'kyi A.O. Investigation of the prefracture zone at the tip of a mode I crack reaching a nonsmooth interface of an elastic media / A.O. Kamins'kyi, L.A. Kipnis, M.V. Dudyk, Yu.V. Dikhtyarenko // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2010. – V. 167, No 1. – P. 128-139.]

2. Діхтяренко Ю.В. Дослідження моделі пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу поділу середовищ / Ю.В. Діхтяренко // *Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.* – 2012. – Т. 17, вип. 4 (16). – С. 104–114.

3. Дудик М.В. Разветвление трещин нормального отрыва в угловой точке границы раздела сред / М.В. Дудик, Ю.В. Дихтяренко // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2012. – Вып. 5 (51). – С. 101–111.

4. Дудик М.В. Напряженно-деформированное состояние у вершин трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела сред / М.В. Дудик, Ю.В. Дихтяренко, Г.А. Хазин // *Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.* – 2013. – Т. 19, вип. 3 (19). – С. 59-68.

5. Дудик М.В. Модель "тризубець" пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу поділу матеріалів / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* – 2014. – № 4. – С. 41-48.

[The same: Dudyk M.V. "Trident" model of plastic zone at the end of a mode I crack appearing on the nonsmooth interface of materials / M.V. Dudyk, Yu.V. Dikhtyarenko // *Materials Science.* – 2015. – V. 50, No 4. – P. 516-526.]

6. Діхтяренко Ю.В. Дослідження напруженого стану біля вершин тріщини нормального відриву у кутовій точці межі поділу матеріалів / Ю.В. Діхтяренко, М.В. Дудик, В.М. Дякон // *Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: Материалы XXIII Международ. науч. школы.* – Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2013. – С. 102-105.

7. Діхтяренко Ю.В. Розгалуження тріщини нормального відриву у кутовій точці ламаної межі поділу середовищ / Ю.В. Діхтяренко, М.В. Дудик, В.М. Дякон //

Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: збірник наукових праць / Під заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2014. – С. 343-348.

8. Діхтяренко Ю.В. О зоне предразрушения в конце трещины нормального отрыва, выходящей на негладкую границу раздела сред / Ю.В. Діхтяренко // Прикл. механіка. – 2009. – Т. 45, № 3. – С. 138.

9. Діхтяренко Ю.В. Розрахунок зон передруйнування в кінці тріщини нормального відриву в кусково-однорідних тілах з кутовими точками / Ю.В. Діхтяренко, В.М. Дякон, Г.А. Хазін // Dynamical system modeling and stability investigation / Thesis of conference reports (May 29-31, 2013) / Kyiv. – 2013. – P. 277.

10. Діхтяренко Ю.В. Про моделі зон передруйнування в кінці тріщини нормального відриву в кусково-однорідних тілах з кутовими точками / Ю.В. Діхтяренко, В.М. Дякон, Г.А. Хазін // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 2. – С. 37-38.

11. Діхтяренко Ю.В. Про модель "тризубець" зони передруйнування у вершині тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу різних матеріалів / Ю.В. Діхтяренко, М.В. Дудик, В.М. Дякон // Одинадцятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2013. – С. 34-35.

12. Дудик М.В. Деякі задачі про розрахунок напружено-деформованого стану біля вершин тріщини у кусково-однорідних тілах / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // Одинадцятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2013. – С. 35-36.

13. Діхтяренко Ю.В. Розрахунок зони передруйнування в кінці тріщини нормального відриву у кутовій точці межі поділу двох середовищ в рамках моделі "тризубець" / Ю.В. Діхтяренко, М.В. Дудик, В.М. Дякон // Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь: Тези доповідей. – Одеса: Астропринт. – 2013. – С. 55.

14. Діхтяренко Ю.В. Вплив пластичності матеріалів на умови зрушення тріщини нормального відриву у кутовій точці межі поділу двох середовищ / Ю.В. Діхтяренко, В.М. Дякон // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. – С. 253-254.

15. Діхтяренко Ю.В. Про зрушення тріщини нормального відриву з вершиною у кутовій точці ламаної межі поділу двох матеріалів / Ю.В. Діхтяренко, М.В. Дудик, В.М. Дякон // Dynamical system modeling and stability investigation / Thesis of conference reports (May 27-29, 2015) / Kyiv. – 2015. – P. 98.

16. Діхтяренко Ю.В. Вплив зони передруйнування на НДС у кутовій точці межі поділу матеріалів, з якої виходить тріщина нормального відриву / Ю.В. Діхтяренко, В.М. Дякон // Міжнародний інтернет-симпозіум "Сучасні проблеми інженерної

механіки", Луцьк-2015 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://konf2015.kl.com.ua/zbirnyk.pdf>

АНОТАЦІЯ

Діхтяренко Ю.В. Напружено-деформований стан біля вершини тріщини нормального відриву у кутовій точці межі поділу матеріалів з урахуванням зон передруйнування. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Одеський національний університет імені І.І. Мечнікова, Одеса, 2016.

В умовах плоскої деформації в рамках моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла методом Вінера-Хопфа побудовані аналітичні розв'язки статичних симетричних задач про розрахунки маломасштабних зон передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох крихких або квазікрихких матеріалів, та досліджено напружено-деформований стан в околі вершини тріщини після утворення зон. Виведено формули для довжин зон передруйнування та встановлено напрямки їх розвитку. Для випадку утворення зони передруйнування у крихкому матеріалі здійснено аналіз умов, за яких тріщина поширюється вздовж межі поділу, розгалужується в одному з матеріалів або ж перетинає межу поділу без розгалуження. Знайдено вирази для розкриття тріщини у її вершині, поля напружень після утворення бічних зон передруйнування та встановлено граничні навантаження, при яких відбувається зрушення тріщини. Для випадку розвитку зони передруйнування у квазікрихкому матеріалі здійснено аналіз напруженого стану у вершині тріщини після утворення бічних пластичних смуг. На основі числового аналізу показано, що при певних параметрах задачі концентрація напружень у кутовій точці зберігається, тому після появи двох бічних пластичних смуг з вершини тріщини нормального відриву, що співпадає з кутовою точкою межі поділу, передбачено появу вторинної пластичної зони передруйнування на продовженні тріщини. Розрахунок розмірів пластичної зони передруйнування і пов'язаного з нею розкриття тріщини виконано в рамках моделі "тризубець". Отримано вирази для повного розкриття тріщини внаслідок розвитку бічних пластичних смуг і смуги на продовженні тріщини та поля напружень після утворення пластичної зони передруйнування.

Ключові слова: кусково-однорідне тіло, ламана межа поділу, кутова точка, тріщина нормального відриву, зона передруйнування, напружено-деформований стан, метод Вінера – Хопфа.

АННОТАЦИЯ

Дихтяренко Ю.В. Напряженно-деформированное состояние у вершины трещины нормального отрыва в угловой точке границы раздела материалов с учетом зон предразрушения. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, 2016.

В диссертационной работе исследовано влияние зон предразрушения на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки ломаной границы раздела двух разных материалов вдоль биссектрисы угла излома в один из материалов. С этой целью, в условиях плоской деформации дана постановка статических симметричных задач о расчетах маломасштабных зон предразрушения в конце трещины нормального отрыва, выходящей на негладкую границу раздела двух хрупких или квазихрупких материалов. Задачи о развитии зон предразрушения на основе их модельного представления поверхностями разрывов смещений приведены к краевым задачам теории упругости для кусочно-однородной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, из вершины которого вдоль биссектрисы выходят полубесконечная трещина и две или три линии разрыва смещений. На бесконечности формулируется условие совпадения искомого решения с асимптотическим решением у вершины трещины аналогичной задачи без зоны предразрушения, которое позволяет учесть влияние внешнего силового поля на параметры зоны. С помощью метода Винера-Хопфа с использованием интегрального преобразования Меллина в замкнутом аналитическом виде построены общие решения сформулированных задач. Выведены формулы для длин зон предразрушения и установлены направления их развития из условий максимума потенциальной энергии и скорости диссипации энергии в ней.

Для случая образования зоны предразрушения в хрупком материале осуществлен анализ условий, при которых трещина распространяется вдоль границы раздела, разветвляется в одном из материалов или пересекает границу раздела без ветвления. Найдены выражения для раскрытия трещины в ее вершине и поля напряжений после образования боковых зон предразрушения. Установлен характер изменения уровня концентрации напряжений вблизи вершины трещины в зависимости от угла и упругих постоянных, а также предельные нагрузки, при которых происходит страгивание трещины.

Для случая развития зоны предразрушения в квазихрупком материале исследована зависимость ориентации зоны, ее длины и раскрытия трещины от угла излома границы раздела сред, упругих параметров соединенных материалов и нагрузки, а также осуществлен анализ напряженного состояния в вершине трещины после образования боковых пластических полос. На основе численного анализа показано, что при определенных параметрах задачи концентрация напряжений в угловой точке сохраняется, поэтому после появления двух боковых пластических полос из вершины трещины нормального отрыва, которая совпадает с угловой точкой границы раздела, происходит развитие вторичной пластической зоны предразрушения на продолжении трещины. Расчет размеров пластической зоны предразрушения и связанного с ней раскрытия трещины выполнен в рамках модели "трезубец". В соответствии с данной моделью начальная пластическая зона

образована совокупностью двух боковых пластических зон-полос и вторичной пластической зоны предразрушения на продолжении трещины значительно меньшей длины. Получены выражения для полного раскрытия трещины в результате развития боковых пластических полос и полосы на продолжении трещины и поля напряжений после образования вторичной пластической зоны. Установлено, что появление вторичной пластической зоны устраняет концентрацию напряжений в угловой точке. На основе результатов численных расчетов проанализированы зависимости параметров зоны и полного раскрытия трещины от угла излома границы раздела и упругих характеристик материалов. Исследовано влияние образования вторичной пластической зоны на условия срагивания трещины.

Ключевые слова: кусочно-однородное тело, ломаная граница раздела, угловая точка, трещина нормального отрыва, зона предразрушения, напряженно-деформированное состояние, метод Винера – Хопфа.

ABSTRACT

Dikhtyarenko Yu.V. Stress-strain state near tip of a mode I crack in angular point of the interface materials with considering of the prefracture zones. – Manuscript.

Thesis for the Candidate's Degree in Physics and Mathematics by speciality: 01.02.04 – mechanics of deformable bodies. – Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, 2016.

Analytical solutions of the static symmetric problems of computing of small-scale prefracture zones at the end of a mode I crack which comes out from angular point of the broken interface of two brittle or quasi-brittle materials were built under the conditions of plane strain by the Wiener-Hopf method in the model Leonov-Panasyuk-Dugdale. Stress-strain state in the tip of crack after the formation of the prefracture zones were investigated. Expressions for the determination of the length of the prefracture zones and the direction of these lines were found. The conditions under which a crack propagates along the interface, branches in one of the materials or crosses the line of the interface without branching for the elastic material were analyzed. The opening of the crack in its tip and stress field after the formation of the prefracture zones and the ultimate load at which is the crack shift was determined. The stress-strain state in the crack tip for the quasi-brittle material after the formation of the plastic strips was investigated. Based on these results, it shows that the stress concentration at the corner point remains, so after the appearance of the two side plastic strips from a mode I crack tip you should expect new areas - plastic zones on continuing of the crack. Calculation of plastic zone prefracture and crack opening we should use the model "trident". The expressions of the full crack opening due to the development of the side plastic strips and plastic strip on the continuation of the crack and stress field after the formation of the plastic zone are obtained.

Key words: piecewise homogeneous bodies, the broken interface, angular point, a mode I crack, the prefracture zone, stress-strain state, Wiener-Hopf method.

Підписано до друку 16.05.2016 р. Формат 60x90 1/32
Папір офсет.
Обл.-вид. арк. 1,2. Ум. друк. арк. 0,9.
Тираж 150. Зам. № 1201.

**Видавець та виготовлювач
ФОП Жовтий О.О.**

20300, м. Умань, вул. Садова, 2
(УДПУ, навчальний корпус № 1)
Тел. 097 255 65 07
047 44 3 51 33
093 540 78 82

e-mail: nastek@meta.ua
www.foto-na.net.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК, № 2444 від 22.03.2006 р.

