

УДК 539.375

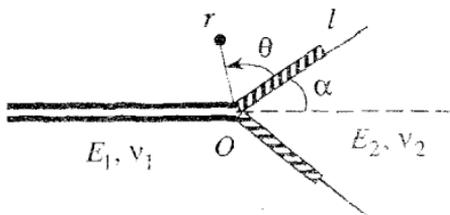
Л. А. КИПНИС, д-р физ.-мат. наук,
 Г. А. ХАЗИН, канд. физ.-мат. наук,
 В. Н. ДЯКОН, канд. физ.-мат. наук, В. А. КОЛМАКОВА

О РАСЧЕТЕ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ В КОНЦЕ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ

За последние 30 лет было опубликовано большое число работ, посвященных плоским задачам по расчетам зон предразрушения вблизи концов трещин и других угловых точек в однородных средах при условии, что эти зоны моделируются линиями разрыва смещения [1]. Значительно меньше работ для случая, когда тело является кусочно-однородным. В данной статье для плоской симметричной задачи в рамках модели с линиями разрыва нормального смещения рассчитываются зоны предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела двух различных изотропных сред.

1. Постановка задачи. В условиях плоской деформации рассмотрим кусочно-однородную изотропную упругую область с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащую трещину, исходящую из вершины. Материал связующего слоя является изотропным упругим, более хрупким, чем материалы частей, составляющих область. Уже при сколь угодно малых внешних нагрузках вблизи конца трещины появляется зона предразрушения. Будем изучать начальную стадию ее развития, считая внешние нагрузки достаточно малыми. В силу свойства материала связующего слоя зона предразрушения будет развиваться вдоль границы раздела сред в виде пары узких полосок, исходящих из конца трещины. Связующий слой предполагается настолько тонким, что его можно считать линией, на которой формулируются соответствующие граничные условия. Поскольку в зоне предразрушения преимущественные деформации развиваются по механизму отрыва, полоску-зону будем моделировать линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной материала связующего слоя σ .

Учитывая, что зона предразрушения мала, получаем соответствующую статическую задачу теории упругости для плоскости с полубесконечной трещиной (рисунок). При этом граничные условия задачи будут иметь следующий вид:



$$\sigma_{\theta} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (\theta = \pi - \alpha), \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_{\theta} = 0 \quad (\theta = -\alpha)$$

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0 \quad (\theta = 0).$$

$$\sigma_\theta = \sigma, \quad (\theta = 0, r < l), \quad \langle u_\theta \rangle = 0 \quad (\theta = 0, r > l). \quad (1.1)$$

Здесь $0 < \alpha < \pi$; $-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$; $\langle a \rangle$ – скачок a .

На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой известное решение аналогичной задачи без линий разрыва на границе раздела сред, порождаемое наименьшим в интервале $(-1; 0)$ корнем $\lambda_0(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)$, где $e_0 = E_1/E_2$, ее характеристического уравнения. Произвольная постоянная C , входящая в это решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и определяется из решения внешней задачи.

2. Построение решения и определение длины зоны предразрушения. Для построения решения задачи теории упругости с граничными условиями (1.1) используем метод Винера-Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [2, 3]. Рассматриваемая задача сводится к функциональному уравнению Винера-Хопфа вида

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma}{p+1} + \frac{\sigma_1}{p+\lambda_0+1} = -A \operatorname{tg}(p\pi) G(p) \Phi^-(p),$$

где

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l, 0) \rho^p d\rho,$$

$$\Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho,$$

$$A = \frac{(1+\alpha_1)[1+\alpha_1+(1+\alpha_2)e]}{2[\alpha_1+(1+\alpha_1\alpha_2)e+\alpha_2e^2]}, \quad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

$$\sigma_1 = -C g l^{\lambda_0}, \quad \alpha_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}, \quad e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} e_0,$$

$$G_1(p) = 2[\alpha_1 + (1+\alpha_1\alpha_2)e + \alpha_2e^2] [a_0(p) + a_1(p)e] \cos p\pi;$$

$$G_2(p) = [1 + \alpha_1 + (1 + \alpha_2)e] [b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \sin p\pi;$$

$$a_0(p) = (1 + \alpha_1)(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)(\sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha).$$

$$\begin{aligned}
a_1(p) &= 2(1+x_2)(\cos 2p\alpha + \cos 2\alpha) \left(\sin^2 p(\pi - \alpha) - p^2 \sin^2 \alpha \right), \\
b_0(p) &= (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \left[(1+x_1)^2 - 4(x_1 \sin^2 p(\pi - \alpha) + p^2 \sin^2 \alpha) \right], \\
b_1(p) &= (1+x_1)(1+x_2) \sin 2p\pi + 4(x_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \times \\
&\quad \times \left(\sin^2 p(\pi - \alpha) - p^2 \sin^2 \alpha \right) - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\
&\quad \times \left[(1+x_1)(1+x_2) - 4(x_1 \sin^2 p(\pi - \alpha) + p^2 \sin^2 \alpha) \right], \\
b_2(p) &= -4(x_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \left(\sin^2 p(\pi - \alpha) - p^2 \sin^2 \alpha \right); \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$g(\alpha, e_0, v_1, v_2)$ – известная функция; $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достаточно малые положительные числа.

После решения уравнения (2.1) известными подходами [4, 5] определяется длина зон предразрушения. Она выражается формулой

$$l = L(\alpha, e_0, v_1, v_2) \left(\frac{C}{\sigma} \right)^{-1/\lambda_0}, \quad (2.2)$$

где L – известная функция. Эта формула устанавливает закон развития начальной зоны предразрушения вблизи конца рассматриваемой трещины.

С помощью решения уравнения (2.1) и формулы обращения Меллина определяются напряжения в рассматриваемой среде.

3. Анализ поведения напряжений в области деструкции материала.

Применяя к интегралам от функций комплексной переменной, через которые выражаются напряжения, теорему о вычетах, находим главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды при $r \rightarrow 0$. В частности, имеет место формула

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} &= r^{\lambda_1} f_1(\theta, \alpha, e_0, v_1, v_2) C_1 + f_2(\theta, \alpha, e_0, v_1, v_2) \sigma + \\
&\quad + f(r, \theta, \alpha, e_0, v_1, v_2, l, \sigma, C), \\
C_1 &= \phi_1(\alpha, e_0, v_1, v_2) \sigma l^{-\lambda_1} + \phi_2(\alpha, e_0, v_1, v_2) C l^{\lambda_0 - \lambda_1}. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Здесь f_1, f_2, ϕ_1, ϕ_2 – известные функции; f – функция, стремящаяся к нулю при $r \rightarrow 0$; λ_1 – единственный на интервале $(-1; 0)$ корень уравнения

$$\begin{aligned}
(1+x_1) \left[\sin 2(\lambda+1)\alpha + (\lambda+1) \sin 2\alpha \right] \left[\sin 2(\lambda+1)(\pi - \alpha) + \right. \\
\left. + (\lambda+1) \sin 2\alpha \right] + 2(1+x_2) e \left[\cos 2(\lambda+1)\alpha + \cos 2\alpha \right] \times
\end{aligned}$$

$$\times \left[\sin^2(\lambda+1)(\pi-\alpha) - (\lambda+1)^2 \sin^2 \alpha \right] = 0. \quad (3.2)$$

При тех значениях параметров задачи, для которых уравнение (3.2) такого корня не имеет, в первой формуле (3.1) отсутствует первое слагаемое.

Из анализа полученных результатов следует, что в определенных промежутках изменения параметров угловая точка O является особой точкой рассматриваемой задачи теории упругости. Она представляет собой концентратор напряжений со степенной особенностью. Стремление напряжений к бесконечности при $r \rightarrow 0$ соответствует тому, что часть зоны предразрушения, находящаяся вблизи конца трещины, является областью деструкции материала, уровень напряжений в которой чрезвычайно высок. Показатель степени сингулярности напряжений $\lambda_1 \in (-1; 0)$ зависит от угла α , отношения модулей Юнга $e_0 = E_1/E_2$ и коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 . Существуют промежутки изменения параметров, в которых угловая точка O не является концентратором напряжений. Например, если $e_0 \leq 1/3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,333$, то с увеличением угла α от нуля до $\alpha_{\min}(e_0)$ концентрация напряжений в области деструкции материала усиливается, а с увеличением его от $\alpha_{\min}(e_0)$ до $\alpha_1(e_0)$ — ослабевает ($\lambda_1(\alpha_1) = 0$). При $\alpha_1(e_0) < \alpha < \alpha_2(e_0)$ ($\lambda_1(\alpha_2) = 0$) угловая точка O не является концентратором напряжений. С уменьшением e_0 угол α_2 увеличивается и стремится к $\pi/2$ при $e_0 \rightarrow 0$, а угол α_1 уменьшается и при $e_0 \rightarrow 0$ стремится к единственному корню уравнения $2(\pi-\alpha)\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 0$, приблизительно равному $51,3^\circ$. Угол α_{\min} и $\lambda_1(\alpha_{\min})$ уменьшаются с уменьшением e_0 , при-

Величина	e_0					
	1/3	1/5	1/7	1/10	1/100	1/1000
α_1°	61,20	54,80	54,60	54,50	51,90	51,60
α_2°	69,10	84,40	84,90	85,10	88,50	89,40
α_{\min}°	18,60	14,80	11,90	10,40	3,20	2,30
$-\lambda_1(\alpha_{\min})$	0,17	0,24	0,27	0,31	0,46	0,49

чем $\alpha_{\min} \rightarrow 0$, а $\lambda_1(\alpha_{\min}) \rightarrow -1/2$ при $e_0 \rightarrow 0$. Значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{\min}, \lambda_1(\alpha_{\min})$ при некоторых значениях e_0 приведены в таблице. Как следует

из данных таблицы, с ростом угла α от $\alpha_2(e_0)$ до π концентрация напряжений в области деструкции материала усиливается, причем $\lambda_1(\pi) = -1/2$.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто плоску симетричну задачу про розрахунок зони передруйнування у кінці тріщини, яка виходить на межу розділу ізотропних пружних середовищ. Зона передруйнування моделюється лініями розриву нормального переміщення, що розташовані на цій межі. Розв'язок відповідної задачі теорії пружності побудовано методом Вінера-Хопфа.

SUMMARY. The plane symmetrical problem on calculation of the prefracture zone at the end of a crack outlimiting the interface of isotropic elastic media is considered. The prefracture zone is modeled by lines of rupture of normal displacement located on the interface. The solution of the corresponding problem of the theory of elasticity is constructed by the Wiener-Hopf method.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 49–68. 2. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с. 3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – 2-е изд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с. 4. Кипнис Л. А. Краевая трещина на границе различных сред // Прикладная математика и механика. – 1978. – Т. 42, № 2. – С. 350–354. 5. Кипнис Л. А. Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины // Там же. – 1986. – Т. 50, № 2. – С. 334–336.

Уманский государственный
педагогический университет

Поступила 04.05.2006