Дудик М.В.

Діхтяренко Ю.В.

КЛАСИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

для студентів вищих навчальних закладів

фізико-математичних спеціальностей

Умань 2015

УДК 531/534 (075.8)

ББК 22.21я73

К47

Рецензенти:
Краснобокий Ю.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент
Дякон В.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до друку Вченою радою фізико-математичного факультету Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол № 5 від 18.12.2014 р.)

Укладачі: Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В.

К47 Класична механіка (курс лекцій): навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей. – Умань: ПП «Жовтий», 2015. – 160 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Класична механіка є складовою частиною курсу теоретичної фізики, що складає основу всього природознавства і відіграє в педагогічному вузі визначальну роль у завершенні підготовки майбутнього вчителя фізики, формуванні у нього в процесі навчання цілісних уявлень про сучасну фізичну картину світу.

В навчальному плані підготовки вчителя фізики курс класичної механіки стоїть після вивчення розділу „Механіка" курсу загальної фізики, математичного аналізу, аналітичної геометрії, методів математичної фізики.

Курс класичної механіки розроблений для студентів 3-го року навчання, володіючих диференціальним та інтегральним численням і векторною алгеброю, основами векторного аналізу. Програмою курсу передбачається вивчення основних понять і положень механіки Ньютона, лагранжевого і гамільтонового формалізму, механіки суцільних середовищ і релятивістської динаміки.

Даний посібник призначений для самостійної роботи студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. Посібник розроблено відповідно до вимог кредитно-модульної системи навчання і базується на багаторічному досвіді викладання дисципліни «Класична механіка» на фізико-математичному факультеті Уманського державного педагогічного університету. Він складений відповідно до діючого державного стандарту напряму підготовки 6.040203 Фізика* і узгоджений з навчальною програмою курсу теоретичної фізики.

Посібник містить загальну інформацію про зміст курсу класичної механіки, вимоги до знань і вмінь, які мають набути студенти по завершенню вивчення курсу, відомості про структуру залікового кредиту, теми навчально-дослідних завдань тощо.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета та завдання навчальної дисципліни

У викладанні класичної механіки необхідно зосередити увагу студентів на найбільш загальних її поняттях, принципах і законах, навчити студентів застосовувати ці принципи і закони для аналізу конкретних фізичних процесів і явищ, добиватися при цьому засвоєння студентами конкретних фізичних теорій. Слід ознайомити студентів з основними методами класичної механіки, звертаючи увагу на методологічні узагальнення і її зв’язок з конкретними прикладними задачами.

По завершенню вивчення класичної механіки студенти повинні:

знати: основні поняття і закони класичної механіки, спеціальної і загальної теорії відносності, основи механіки суцільних середовищ.

вміти: знаходити та інтегрувати рівняння руху частинки, що перебуває під дією заданих сил; складати функції Лагранжа для заданої системи матеріальних точок; інтегрувати рівняння Лагранжа у простих випадках; застосовувати формули і закони класичної механіки для розв’язання задач механіки твердого тіла і рідини.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1. Основи класичної механіки
Розділ 1. Простір і час в сучасній фізиці
Розділ 2. Закони класичної механіки
Модуль 2. Застосування класичної механіки
Розділ 3. Деякі задачі класичної механіки
Розділ 4. Механічні коливання
Модуль 3. Основи механіки суцільних середовищ
Розділ 5. Основи динаміки абсолютно твердого тіла
Розділ 6. Гідродинаміка
Розділ 7. Теорія пружності
Модуль 4. Релятивістська механіка
Розділ 8. Спеціальна теорія відносності
Розділ 9. Простір і час в загальній теорії відносності

ІНДИВІДУАЛЬНЕ НАВЧАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теми ІНД:

1. Теорема Ліувілля
2. Варіаційний принцип Мопертюї-Лагранжа
3. Побудова Ньютоном класичної механіки
4. Рівняння Ейлера руху твердого тіла.
5. Рух рідини по трубі
6. Принципи подібності в гідродинаміці
7. Ламінарний рух рідини
8. Турбулентний рух рідини
9. Підйомна сила крила
10. Звукові хвилі
11. Ударні хвилі
12. Деформації пластинок
13. Деформації оболонок
14. Деформації стержнів
15. Коливання стержнів і пластинок
16. Дислокації в кристалах
17. Механічні властивості рідких кристалів
18. Гіроскопи у науці та техніці
19. Теорія гіроскопа
20. Закон збереження енергії-імпульсу в ядерній фізиці
21. Теорія зіткнень релятивістських частинок
22. Дослід Фізо і його пояснення теорією відносності
23. Явище аберації зірок і його пояснення теорією відносності
24. Зміна частоти світла при відбиванні від рухомого дзеркала
25. Геометрична інтерпретація відносності довжини і проміжків часу
26. Експериментальні основи спеціальної теорії відносності
27. Парадокси теорії відносності
28. Експериментальні основи загальної теорії відносності
29. Постійне гравітаційне поле
30. Гравітаційний колапс
31. Гравітаційні хвилі

МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ: поточне оцінювання розв’язування задач на практичному занятті; модульний тестовий контроль; оцінка за ІНД (реферат); оцінка за індивідуальні домашні завдання, підсумковий контроль.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Модульний контроль (МК) здійснюється у вигляді аудиторних письмових робіт з кожного модулю, кожна з яких передбачає відповіді на 10 коротких теоретичних питань. Вірна відповідь на питання оцінюється у 1 бал, неточна або неповна відповідь – 0,5 бала, невірна відповідь – 0 балів.

Оцінка за кожну роботу дорівнює сумі набраних балів.

Індивідуальне навчально-дослідне завдання (ІНДЗ) полягає у домашньому розв’язанні задач з класичної механіки і основ механіки суцільних середовищ по варіантам та виконанні індивідуального навчального дослідження. Кожна задача оцінюється за 2-бальною системою:

2 б. – вірний розв’язок з поясненням, точними ілюстраціями,без похибок;

1,5 б. – вірний розв’язок, у якому допущені несуттєві похибки;

1 б.– вірний в цілому розв’язок, який містить грубі похибки;

0,5 б.– розв’язок невірний, але містить вірні вихідні рівняння до розв’язання.

0 б.- розв’язок невірний або відсутній.

Індивідуальне навчальне дослідження виконується за запропонованими нижче темами і стосується питань класичної механіки і основ механіки суцільних середовищ, які не ввійшли до лекційного курсу дисципліни. Результати дослідження подаються студентом у формі реферату і оцінюється за 10-бальною шкалою, яка враховує науковість, повноту розкриття теми, наявність посилань на першоджерела, у тому в числі в тексті, логічність і послідовність викладення матеріалу, наявність вступу і висновків, грамотність, якість оформлення.

Оцінка з ІНДЗ складається з суми балів, набраних за кожну задачу та за індивідуальне навчальне дослідження.

Підсумковий контроль проводиться у формі усного екзамену по білетам.

РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

<table>
<tr><td colspan="4">Модульний контроль</td><td rowspan="2">ІНДЗ</td><td rowspan="2">Підсумк. контроль</td><td rowspan="2">Сума балів</td></tr>
<tr><td>Модуль 1</td><td>Модуль 2</td><td>Модуль 3</td><td>Модуль 4</td></tr>
<tr><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>40</td><td>20</td><td>100</td></tr>
</table>

ШКАЛА ОЦІНЮВАННЯ: НАЦІОНАЛЬНА ТА ЄКТС

<table>
<tr><td rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності</td><td colspan="2">Оцінка за національною шкалою</td></tr>
<tr><td>для екзамену, курсового проекту (роботи), практики</td><td>для заліку</td></tr>
<tr><td>90-100</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>82-89</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>75-81</td></tr>
<tr><td>69-74</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60-68</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td>незадовільно з можливістю повторного складання</td><td>не зараховано з можливістю повторного складання</td></tr>
<tr><td>1-34</td><td>незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td><td>не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td></tr>
</table>

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – Издание 4-е, исправленное. – М.: Наука, 1988. – 215 с. – («Теоретическая физика», том I). – ISBN 5-02-013850-9.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – Издание 7-е, исправленное. – М.: Наука, 1988. – 512 с. – («Теоретическая физика», том II). – ISBN 5-02-014420-7.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. – Издание 4-е, стереотипное. – М.: Наука, 1988. – Т. VI. Гидродинамика. – 736 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1987. – Т. VII. Теория упругости. – 248 с.
5. Гречко Л. Г., Сугаков В. И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. М.: Высшая школа, 1984. – 319 с.
6. Мултановский В.В. Курс теоретической физики. Т. 1. Классическая механика. СТО. – М. : Просвещение, 1988. – 304 с.
7. Павловський М.А. Теоретична механіка. Київ: Техніка, 2002. – 510 с. – Для студентів ВНЗ.
8. Кушниренко А.Н. Теоретическая физика. Т.1, ч.1.
9. Айзерман М.А. Классическая механика. 2-е изд. – М.: Наука, 1980. – 368 с.
10. Вейнберг С. Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности. Пер. с англ. В.М. Дубовика и Э.А. Тагирова. Под ред. Я.А. Смородинского. – М.: "Мир", 1975. – 696 с.: ил.
11. Владимиров Ю.С., Мицкевич Н.В., Хорски Я. Пространство, время, гравитация. М: Наука, 1984. – 208 с.
12. Иваненко Д.Д., Сардинашвили Г.А. Гравитация. 5-е изд. - М.: Изд-во ЛКИ, 2012. – 200 с.
13. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1. М.: Издательство Наука, 1969г. – 911 стр.
14. Мостепаненко А.М. Пространство и время в макро-, мега- и микрофизике. – М.: Политиздат, 1974. – 240 с. (серия "Над чем работают, о чём спорят философы")
15. Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит. , 1986, – 328 с.
16. Ольховський И.И. Курс теоретической механики для физиков. 4-е изд. – Спб.: Лань, 2009. – 576 с.
17. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т.1. Учеб. руководство для вузов. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит., 1991. – 496 с.
18. Угаров В.А. Специальная теория относительности. М. «Наука» Главная редакция физико-математической литературы. 1977 – 384 с.

МОДУЛЬ І. ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

§1. Вступ. Предмет і методи теоретичної фізики

Фізика – наука перш за все експериментальна. Але вже в роботах Ньютона та інших засновників сучасної фізики для отримання кількісних формулювань закономірностей успішно використовувались математичні методи.

До 19 ст. експериментальні і математичні методи у фізиці не розділялись, фізики добре володіли одночасно обома засобами досліджень. Проте, їх розвиток і ускладнення привели до того, що приблизно з другої половини 19 ст. відбулася диференціація фізичної науки на експериментальну і теоретичну. Виникли спеціалізації: фізик-теоретик і фізик-експериментатор.

Теоретична фізика – це фізична за змістом наука, яка користується в своїх дослідженнях математичними методами. Вона розв'язує такі задачі:

1. Пошук фізичних закономірностей та кількісних співвідношень на основі експериментальних результатів. Приклад: досліди Ома узагальнює закон Ома $I = U / R$.

2. Передбачення нових фізичних явищ і закономірностей, які ще не спостерігались в експериментах. Приклад: передбачення античастинок і їх наступне відкриття.

3. Створення узагальнюючих теорій, об'єднуючих дедалі більше коло фізичних явищ. Приклад: всі електромагнітні явища містяться в рівняннях Максвела.

Отже, саме в теоретичній фізиці зосереджуються і остаточно відшліфовуються загальні теоретичні уявлення про суть різноманітних фізичних явищ.

Основою загальних фізичних законів можуть служити тільки дослідні факти. Тому найбільш загальні принципи теоретичної фізики не виводяться, а являють собою узагальнене формулювання спостережених фізичних закономірностей. Але в деяких випадках кількісні вирази фізичних законів з'явились як результат наукових передбачень. Володіючи кількісними формулюваннями загальних фізичних законів, теоретична фізика може перейти до виконання другої частини своєї програми – передбачення нових фізичних явищ і встановлення нових закономірностей з допомогою математичних методів досліджень. На цьому шляху теоретична фізика досягла значних успіхів. Як приклади можна вказати відкриття Максвелом струму зміщення, встановлення електромагнітної природи світла, створення Ейнштейном теорії відносності і, зокрема, встановлення співвідношення між масою і енергією, передбачення квантовою механікою існування хвильових властивостей у мікрочастинок і т.п. Фізична теорія, яка тільки пояснює відомі, але не передбачає нові факти, завжди вважається незадовільною.

В свою чергу, вивчення нових явищ, виявлених дослідним шляхом, служить стимулом для подальшого розвитку теоретичної фізики. Отже, теоретична і експериментальна фізика складають єдине і нерозривне ціле – фізичну науку.

Виникнення і розвиток нових фізичних теорій часто вкладається в таку, хоч і не обов’язкову, схему:

1) накопичення емпіричних фактів, які суперечать сучасним їм уявленням фізичних теорій або не знаходять в них пояснення;
2) висунення і відбір робочих гіпотез, які пояснюють окремі факти;
3) розробка нової узагальненої теорії, яка пояснює вказані фізичні явища;
4) передбачення нових фізичних явищ в рамках новоствореної теорії та їх експериментальне підтвердження.

Саме такими історичними етапами пройшло становлення квантової механіки, спеціальної теорії відносності. Так, на початку 20 ст. у фізиці існували проблеми з поясненням явища фотоефекту, закономірностей рівноважного теплового випромінювання, дискретності спектрів випромінювання атомів, стійкості атомів. Для їх розв’язання були висунуті гіпотеза квантів М.Планка, корпускулярна гіпотеза А.Ейнштейна, теорія атома водню Н.Бора, гіпотеза де Бройля про корпускулярно-хвильовий дуалізм матерії. Їх узагальненням стала квантова механіка, започаткована в працях Е.Шредінгера, В.Гейзенберга і Н.Бора. Прикладом передбачень квантової механіки є, зокрема, тунельний ефект.

Проте, жодна теорія не може вважатись найзагальнішою, такою, що охоплює всі явища фізики, хоч фізики і прагнуть до цього. Настає час, коли експериментатори виявляють нові явища, які не пояснюються існуючими теоріями, і все повторюється знову.

РОЗДІЛ 1. ПРОСТІР І ЧАС У СУЧАСНІЙ ФІЗИЦІ

§2. Сучасні наукові уявлення про простір і час (НСО)

Уявлення про простір і час є складовою частиною світогляду в цілому. Вони є необхідним елементом наукової картини світу і повинні бути узгоджені з загальними науковими уявленнями про матерію, рух, взаємодію. Крім того, властивості простору і часу важливі при розв'язанні багатьох фундаментальних питань сучасної фізики і космології. Це пояснює інтерес різних наук до проблем простору і часу.

Простір і час визначаються як об'єктивні форми існування матерії, наділені певними властивостями.

В математиці властивості простору досліджуються в геометрії. Геометрія плоского простору задовольняє аксіомам Евкліда, серед яких виділяється аксіома про паралельні лінії. Ознакою плоского простору є рівність суми всіх кутів трикутника 180° ($\alpha+\beta+\gamma=180°$). З 19 ст. в математиці, а з 20 ст. і у фізиці стали розглядати і викривлені простори, які описуються неевклідовою геометрією. Наприклад, в геометрії Лобачевського паралельні лінії розходяться, а $\alpha+\beta+\gamma<180°$. Навпаки, у сферичному світі Рімана паралельні лінії перетинаються, а $\alpha+\beta+\gamma>180°$.

У фізиці простір виражає порядок співіснування окремих об'єктів, а час - послідовність зміни явищ. З цими категоріями пов'язано поняття руху, тобто зміни положення тіл у просторі з часом. У макроскопічній фізиці з цього випливає неможливість уявити рух матерії поза простором і часом.

Принципове значення властивості простору і часу мають в астрономії. Зокрема, структура простору і часу в космічних масштабах вивчається у розділі астрономії космології – вченні про Всесвіт як єдине ціле.

Вивчення простору і часу було закладено ще в древні часи при виникненні емпіричної геометрії та астрономії в Єгипті, Вавилоні, Греції. Це було необхідно для розв'язання практичних задач – вимірювання відстаней, площ, об'ємів, визначення термінів сільськогосподарських робіт (календар). Наслідком багатовікових спостережень за кількісними співвідношеннями між видимими, безпосередньо досліджуваними об'єктами стала створена в 3 ст. до н.е. геометрія Евкліда, яка майже у незмінному вигляді дійшла до нашого часу, що свідчить про її відповідність оточуючому нас локальному простору. Евклідова геометрія лягла в основу класичної фізики.

В 17 столітті виникли два напрямки уявлень про простір і час в зв'язку з різними фізичними підходами. На початку одного з них лежали ідеї Демокріта, який приписував пустоті особливий рід буття. Вони знайшли найбільше втілення в ньютонівських поняттях абсолютного простору і абсолютного часу. Згідно Ньютону, абсолютний простір і абсолютний час являють собою самостійні сутності, які не залежать ні один від одного, ні від матеріальних об'єктів і протікаючих в природі процесів. Поняття абсолютного простору і абсолютного часу були необхідні Ньютону для формулювання законів механіки, адже у механіці Ньютона інерціальні системи відліку визначаються як такі, що рухаються прямолінійно і рівномірно відносно абсолютного простору. Абсолютні простір і час у Ньютона є ніби ареною руху фізичних об'єктів і не залежать від останніх. Вони також, по Ньютону, не залежать один від одного, що проявляється перш за все у тому, що відстань між двома точками і проміжок часу між двома подіями зберігають свої значення в різних ІСВ. Ідея абсолютного простору і абсолютного часу склалась в класичній механіці Ньютона і відповідала фізичній картині світу до середини 19 ст., після чого вступила у протиріччя з дослідними фактами.

Другий напрямок розвитку уявлень про простір і час, започаткований Арістотелем, був розроблений у філософських працях Лейбніца як вчення про певні типи відношень між об'єктами і їх змінами. По Лейбніцу, простір - це порядок взаємного розташування тіл, а час - це порядок чергування явищ або станів тіл. Важливою особливістю концепції Лейбніца є те, що протяжність тіл і тривалість подій не вважаються первинними властивостями, не залежними ні від чого. По Лейбніцу, тіло має довжину тому, що воно перешкоджає іншим тілам проникати в область свого перебування, тому що воно непроникне. Час у Лейбніца пов'язаний з причинністю: оскільки причина завжди повинна передувати наслідку, то час є умовою причинної залежності подій одна від одної.

Успіхи механіки Ньютона затримали розвиток концепції Лейбніца. Тільки відкриття у другій половині 19 ст. властивостей електромагнітних хвиль привели до перегляду уявлень про простір і час і звернення до ідей Лейбніца. Вони були розвинуті в створеній у 1905 році Ейнштейном спеціальній теорії відносності (СТВ). СТВ виявила залежність просторових і часових характеристик об'єктів від їх швидкостей. У 1908 р. Г.Мінковський в рамках СТВ об'єднав простір і час в єдиний чотирьохвимірний просторово-часовий многовид – Простір-Час.

Загальна теорія відносності (ЗТВ), створена Ейнштейном у 1914-1917 роках, відкрила залежність властивостей Простору-Часу від розподілу гравітаційних мас, наявність яких призводить до викривлення Простору-Часу. В ЗТВ від характеру розподілу мас залежать і такі фундаментальні властивості Простору-Часу, як скінченість і нескінченість, які теж виявили свою відносність.

Особлива увага до проблем Простору-Часу приділяється у сучасну епоху, коли розвиток різних розділів фізики приводить деколи до прямо протилежних тверджень про природу і статус Простору-Часу. В уявленнях про простір і час чекають відповіді питання, які мають вже давню історію: 1) Чому простір має три виміри, а час - один? 2) Чи можливе існування багатовимірних світів? 3) Чи може час пливти в зворотному напрямку? 4) Чи можливе існування матерії поза простором і часом? 5) Чи зберігаються властивості простору і часу в мікросвіті?

Розвиток сучасної фізики призводить до появи нових ідей щодо простору і часу, зокрема, про їх дискретність, про наявність сингулярних (особливих) точок тощо. Але більшість фізиків залишаються впевненими в універсальності властивостей простору і часу від мікро- до макросвіту.

§3. Метризація простору і часу. Системи координат і відліку (НСО)

Властивості простору і часу поділяються на топологічні і метричні. До топологічних відносяться розмірність, яка дорівнює 3 для простору і 1 для часу; неперервність (у строгому математичному розумінні) і зв'язність як відсутність областей простору і часу, які не можна зв'язати між собою неперервною лінією. До топологічних властивостей відноситься також напрямок часу, який тече лише з минулого в майбутнє. Природа тих чи інших топологічних властивостей Простору-Часу не розгадана, хоч є спроби пояснити їх в рамках сучасних космологічних інфляційних моделей.

Метричні властивості простору і часу пов'язані з протяжністю просторових відрізків і проміжків часу. Метричність Простору-Часу означає можливість введення поняття точки, тобто, можливість розглядати Простір-Час як точковий многовид, а також існування в Просторі-Часі відстаней між точками. Розмітка Простору-Часу і визначення відстаней у ньому називається метризацією простору і часу. Розглянемо ці поняття детальніше.

Щоб охарактеризувати точку простору, де наступила деяка подія, треба придати кожній точці свою мітку. Для розмітки простору використовують матеріальні тіла, що в ньому знаходяться. З одним із таких тіл зв'язується точка, яку умовно називають початком відліку О. Для вимірювання відстаней до точки О необхідні особливі матеріальні тіла – лінійки або масштаби, які служитимуть еталонами довжини.

Найпростішим способом розмітки простору є використання Декартової системи координат, в якій кожній точці простору ставиться у відповідність 3 числа – 3 декартові координати x, y, z. За допомогою Декартової системи координат можна розмітити всі точки простору. Побудова декартової системи координат базується на припущенні про те, що в реальному фізичному просторі справедливі постулати геометрії Евкліда.

Розмітку простору можна змінити шляхом переходу до іншої системи координат. Такий перехід називається перетворенням системи координат. При ньому змінюються координати точок, змінюється вид рівнянь, що описують той чи інший геометричний об'єкт. Але геометричні властивості об'єктів не змінюються, в тому числі незмінними залишаються відстані між будь-якими двома точками. Але чи дійсно фізичний простір має властивості Евклідового? Відповідь на це може дати лише дослід.

Фізика не може знехтувати плином часу. Розгляд руху – це основа фізики. Тому крім систем координат, які забезпечують розмітку простору, необхідно використовувати годинник для розмітки часу. Система координат разом із годинниками, розміщеними в кожній точці простору, називається системою відліку. Для узгодження ходу годинників необхідно припустити існування стандартного годинника, на який накладається вимога жорсткості – вимога постійності періоду, його незалежності від місця і моменту часу. Таким чином метризація (розмітка) простору і часу передбачає існування жорстких лінійок і жорстких годинників. Жорсткість лінійок означає сталість їх довжини в усіх точках і напрямах простору. Незалежність довжини лінійки від напрямку відповідає ізотропності простору, тобто рівноправності всіх напрямків у просторі. Жорсткість годинника передбачає рівномірність його ходу і відповідає однорідності часу - рівноправності всіх моментів часу.

РОЗДІЛ 2. ЗАКОНИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

§4. Основні положення класичної механіки

Механіка – це розділ фізики, що вивчає рух матеріальних об’єктів у просторі і часі. Класична механіка виходить із припущення, що властивості простору і часу не залежать від того, які матеріальні об’єкти приймають участь у русі, і як вони рухаються (абсолютний простір, абсолютний час). Припускається, що простір однорідний і ізотропний, а час однорідний. Однорідність та ізотропність простору означають відсутність у просторі чимось виділених точок та напрямків відповідно. Однорідність часу означає, що у плині часу немає виділених моментів, і тому байдуже, з якого моменту починати його відлік.

Для опису руху в механіці вводиться поняття системи відліку, яка пов’язується з певним тілом відліку, вибором системи координат у просторі і способом відліку часу в кожній точці простору. Внаслідок однорідності і ізотропності простору та однорідності часу всі системи відліку рівноправні. Механічний рух визначається як зміна з часом взаємного положення тіл або частин тіла. Для опису руху використовуються різні способи, зокрема, векторний, координатний і природний.

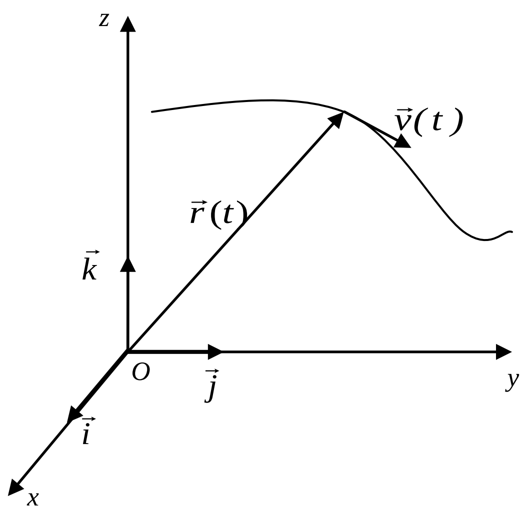
a) *Векторний* спосіб опису руху оснований на заданні радіус-вектора $\vec{r}(t)$ частинки як функції часу. Залежність $\vec{r}(t)$ виражає закон руху частинки. Кінець радіус-вектора описує в просторі траєкторію - криву, вздовж якої рухається точка. Характеристиками руху є швидкість частинки:

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\dot{\vec{r}}(t) \tag{1}$$

і прискорення:

$$\vec{w}(t)=\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}=\dot{\vec{\upsilon}}(t)=\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}(t). \tag{2}$$

b) *Координатний* спосіб задає рух за допомогою трьох скалярних функцій - координат точки $x(t), y(t), z(t)$. Зв'язок між векторними і скалярними характеристиками руху: радіус-вектор частинки



$$\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot x(t)+\vec{j}\cdot y(t)+\vec{k}\cdot z(t); \tag{3}$$

швидкість:

$$\begin{aligned}\vec{\upsilon}(t)&=\dot{\vec{r}}(t)=\vec{i}\cdot\dot{x}(t)+\vec{j}\cdot\dot{y}(t)+\vec{k}\cdot\dot{z}(t)=\\&=\vec{i}\cdot\upsilon_x(t)+\vec{j}\cdot\upsilon_y(t)+k\cdot\upsilon_z(t)\end{aligned} \tag{4}$$

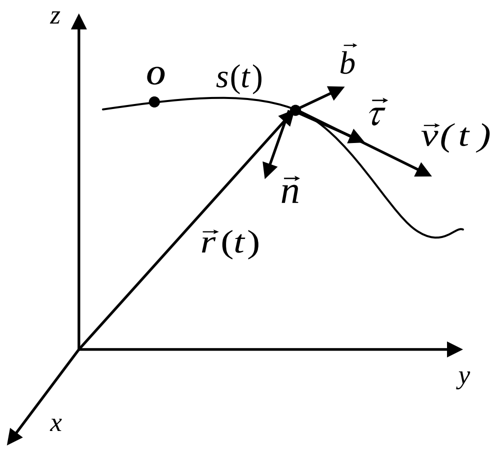
$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x},\upsilon_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y},\upsilon_z=\frac{dz}{dt}=\dot{z}\ ; \tag{5}$$

прискорення:

$$\begin{aligned}\vec{w}(t)&=\dot{\vec{\upsilon}}(t)=\vec{i}\cdot\dot{\upsilon}_x+\vec{j}\cdot\dot{\upsilon}_y+\vec{k}\cdot\dot{\upsilon}_z=\\&=\vec{i}\cdot\ddot{x}+\vec{j}\cdot\ddot{y}+\vec{k}\cdot\ddot{z}=\\&=\vec{i}\cdot w_x+\vec{j}\cdot w_y+\vec{k}\cdot w_z;\end{aligned} \tag{6}$$

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}, w = |\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}. \qquad (7)$$

c) *Природний* спосіб: у просторі задається траєкторія руху точки, на якій вказано початок, позитивний напрямок відліку і скалярна функція $s(t)$, яка дорівнює довжині дуги траєкторії від початку відліку. В кожній точці траєкторії вводиться супроводжуючий триганник, утворений ортами дотичної $\vec{\tau}$, нормалі $\vec{n}$, бінормалі $\vec{b}$. Тоді швидкість і прискорення визначаються формулами:



$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt}; \qquad (8)$$

$$\vec{w}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} =$$

$$= \vec{n} \cdot \frac{\upsilon}{\rho} \cdot \upsilon + \vec{\tau} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = \qquad (9)$$

$$= \vec{n} \cdot \frac{\upsilon^2}{\rho} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = w_n \cdot \vec{n} + w_\tau \cdot \vec{\tau};$$

$w_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho}$ - нормальне прискорення; ρ – радіус кривизни траєкторії; (10)

$$w_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \text{ - тангенціальне прискорення.} \qquad (11)$$

Для спрощення опису руху в механіці використовуються різні ідеалізації. Зокрема, вводиться поняття матеріальної точки – тіла, розмірами якого за даних умов руху можна знехтувати. Абсолютно тверде тіло – це тіло, деформацією якого нехтують. Важливою характеристикою тіла є його маса m – міра його інертності. Матеріальні об’єкти, що знаходяться у різних точках простору, взаємодіють між собою, тобто, рух однієї частини матерії залежить від наявності інших частин матерії і їх руху. Основною мірою взаємодії матеріальних об’єктів є сила $\vec{F}$. Основу класичної механіки складають три закони Ньютона. Припускається, що існують такі системи відліку, в яких ці закони справедливі. Такі системи називаються інерціальними системами відліку (ІСВ). Будь-яка система відліку, яка рухається рівномірно і прямолінійно відносно деякої ІСВ, також є ІСВ.

Перший закон Ньютона: якщо на частинку не діють ніякі сили, то вона буде зберігати стан свого руху, тобто продовжуватиме рухатись по прямій лінії зі сталою швидкістю. Інакше, якщо

$$\vec{F} = 0 \text{, то } \vec{\upsilon} = const . \qquad (12)$$

Другий закон Ньютона: якщо на частинку діють сили, то швидкість зміни її імпульсу дорівнює повній силі, діючій на неї:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} . \qquad (13)$$

Під **імпульсом** в класичній механіці розуміють добуток маси тіла на його швидкість:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}\,. \tag{14}$$

Вважаючи масу сталою (m = const), вираз (13) перепишемо у вигляді

$$m\vec{w} = \vec{F}\,, \tag{15}$$

де $\vec{w} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ - прискорення точки. На основі (15) другий закон Ньютона можна сформулювати так: прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має однаковий з нею напрям. Зазначимо, що таке формулювання другого закону Ньютона непридатне у динаміці тіла змінної маси.

Рівняння (15) називається основним рівнянням динаміки вільної матеріальної точки, або рівнянням Ньютона. Другий закон Ньютона виражає кількісне співвідношення між трьома фізичними величинами: силою, масою і прискоренням:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}). \tag{16}$$

Другий закон Ньютона у вигляді (16) є основним рівнянням динаміки. Рівнянню (16) у векторній формі відповідають три скалярних диференціальних рівняння в координатній формі

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}). \end{aligned} \tag{17}$$

Кожне з диференціальних рівнянь (17) є рівнянням другого порядку, система цих рівнянь має шостий порядок. Рівняння (17) називаються динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі.

Третій закон Ньютона: сили, з якими два тіла діють одне на одне, рівні за величиною і напрямлені в протилежні сторони вздовж прямої, що з'єднує два тіла:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}\,. \tag{18}$$

При дослідженні руху матеріальної точки зустрічаються дві основні задачі динаміки (пряма та обернена).

Пряма, або перша, основна задача: Визначити рівнодійну сил $\vec{F}$, що діють на матеріальну точку, якщо задано її масу m і кінематичні рівняння руху. Ця задача розв'язується так. Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, то двічі диференціюючи ці співвідношення за часом, одержимо проекції прискорення на осі координат, тобто

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Тоді на основі рівнянь (17) визначимо проекції сили $F_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$,

$F_y = m\dfrac{d^2 y}{dt^2}$, $F_z = m\dfrac{d^2 z}{dt^2}$, а модуль рівнодійної сили $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

Обернена, або друга, основна задача: Визначити кінематичні рівняння (закон) руху вільної матеріальної точки, якщо задано її масу m, прикладену до неї силу F і початкові умови руху.

Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (17). Знайдемо проекції сили $\vec{F}$ на осі координат, тобто F_x, F_y, F_z, потім проінтегруємо систему диференціальних рівнянь (17). Розв'язання цієї системи буде функцією часу і шести сталих інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, бо порядок системи диференціальних рівнянь дорівнює шести:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, ..., C_6), \\ y &= y(t, C_1, ..., C_6), \\ z &= z(t, C_1, ..., C_6). \end{aligned} \tag{19}$$

Щоб розв'язати конкретну динамічну задачу, треба задати початкові умови руху для визначення зазначених сталих інтегрування. Під початковими умовами руху матеріальної точки слід розуміти значення координат точки і проекції її швидкості в початковий момент часу $t = t_0$, тобто

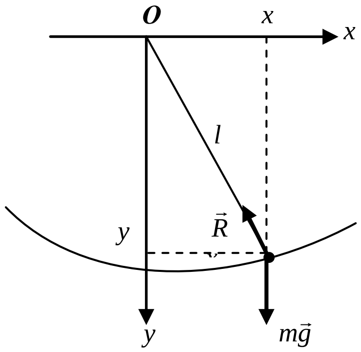
$$\begin{gathered} x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0,\ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0,\ \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \end{gathered}$$

Нарешті, підставивши знайдені значення сталих інтегрування у співвідношення (19), що виражають загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (17), одержимо закон руху точки.

§5. Поняття про в'язі. Рівняння Лагранжа І роду

Багато задач динаміки зводиться до розв'язання рівнянь руху - основних рівнянь динаміки. Якщо механічна система складається з n частинок, кожна з яких має масу m_a (a – номер частинки, $a = \overline{(1, n)}$), то рівняння руху утворять систему n диференційних рівнянь другого порядку виду

$$m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} = \vec{F}_a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n, \vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, ..., \vec{\upsilon}_n, t). \tag{1}$$



Задача полягає в тому щоб знайти $\vec{r}_a(t)$. Якщо права частина системи рівнянь (1) відома, то при заданих граничних умовах вона може бути розв'язана в простих випадках аналітично, а в складних чисельно. Але в механіці зустрічаються задачі, в яких поруч з відомими силами на частинки діють сили, які не відомі заздалегідь. Наприклад, в рівняння руху ідеального математичного маятника

$$m\frac{d^2\vec{r}^2}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{R}\,, \qquad (2)$$

крім сили тяжіння $m\vec{g}$, входить сила натягу нитки $\vec{R}$, значення якої невідоме, тому це рівняння не може бути розв'язане. Але при цьому відомо, що підвішена до нитки матеріальна частинка рухається по колу, радіус якого дорівнює довжині нитки, і отже, її координати задовольняють рівняння кола

$$x^2 + y^2 = l^2\,, \qquad (3)$$

так що на координати частинки накладаються певні обмеження.

Обмеження геометричного або кінематичного характеру, які можуть бути накладені на положення і швидкості частинок системи, називаються в'язями. В'язі реалізуються поверхнями різних тіл, нитками, стержнями і т.д. Аналітично в'язі виражаються рівняннями в'язів, тобто співвідношеннями між радіус–векторами точок, їх швидкостями і прискореннями. Рівняння (3) – рівняння в'язів для математичного маятника. Сили, з якими тіла, що здійснюють в'язі, діють на точки системи, називають силами реакцій R або R_i. В'язі напрямлені по нормалі до дотичних поверхонь, а якщо в'язі реалізуються через стержні і нитки, то вздовж них.

Якщо рівняння в'язі можна представити формулою, в яку не входять швидкості:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n, t) = 0\,, \qquad (4)$$

то така в'язь називається голономною. Якщо в рівняння в'язі входять і швидкості, то така в'язь називається неголономною. Якщо в рівняння в'язі не входить явно час, то така в'язь є стаціонарною, а якщо входить - то нестаціонарною. Наприклад, рівняння (3) показує, що відповідна в'язь є і голономною, і стаціонарною.

Кожна голономна в'язь зменшує число незалежних координат на одиницю. Число незалежних координат, необхідних для визначення положення системи у просторі, називається числом ступенів вільності системи. Якщо на систему n частинок накладено r в'язів, то така система матиме на r ступенів вільності менше:

$$\text{число ступенів вільності } s = 3n - r\,. \qquad (5)$$

Розглянемо систему n матеріальних точок, що обмежена r голономними в'язями. Диференціальні рівняння руху точок матеріальної системи в координатній формі, в проекціях на осі декартової системи координат мають вигляд:

$$\begin{aligned} m_a\ddot{x}_a &= F_{ax} + R_{ax}\,, \\ m_a\ddot{y}_a &= F_{ay} + R_{ay}\,, \qquad a = 1,2,...,n \\ m_a\ddot{z}_a &= F_{az} + R_{az}\,, \end{aligned} \qquad (6)$$

де m_a - маса a-ї точки, F_{ax}, F_{ay}, F_{az} - проекції головного вектора активних сил, прикладених до a-ї точки, R_{ax}, R_{ay}, R_{az} – проекції рівнодійних реакцій в'язей, діючих на a-ту точку. Якщо активні сили задані, то система рівнянь (6) є системою $3n$ рівнянь із $6n$ невідомими, оскільки $3n$ проекцій реакцій в'язей (R_{ax}, R_{ay}, R_{az}) також невідомі. Приєднаємо до цих рівнянь r рівнянь в'язей

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{7}$$

тоді матимемо $3n+r$ рівнянь.

У випадку ідеальних в'язів проекції реакцій в'язей задовольняють умову

$$R_{ax} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_a}, \quad R_{ay} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_a}, \quad R_{az} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_a}\ . \tag{8}$$

Підставляючи тепер (8) у рівняння (6), отримаємо

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_a &= F_{ax} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_a}, \\ m_a \ddot{y}_a &= F_{ay} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_a}, \quad a = 1,2,\ldots,n \\ m_a \ddot{z}_a &= F_{az} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_a}. \end{aligned} \tag{9}$$

Приєднуючи до цих $3n$ рівнянь r рівнянь в'язей (7), матимемо $3n+r$ рівнянь відносно $3n$ невідомих координат (x_a, y_a, z_a) і r множників Лагранжа $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$. Після розв'язання цієї системи реакції в'язей можуть бути знайдені за формулами (8). Рівняння (9) називають **рівняннями Лагранжа першого роду**.

Зазначимо, що для аналітичних досліджень у системах з великою кількістю точок рівняння (9) малоефективні. Навіть дослідження руху однієї невільної точки створює значні труднощі, тому бажаним є пошук інших підходів.

§6. Принцип найменшої дії. Рівняння Лагранжа II роду

Як було показано у §5, голономні в'язі зменшують число ступенів вільності до $s = 3n - r$, і в багатьох випадках більш зручно відразу ввести s незалежних змінних, задання яких повністю визначає стан системи, замість того, щоб користуватись $3n$ декартовими координатами разом з r рівняннями в'язів. Будь-які такі s величин $q_1, q_2, \ldots, q_s$, що повністю визначають положення системи з s ступенями вільності, будемо називати її узагальненими координатами. Відповідно, похідні від узагальнених координат по часу $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \ (i = \overline{1, s})$ назвемо узагальненими швидкостями.

Рівняння, яким задовольняють узагальнені координати $q_i(t)$ як функції часу, в загальному випадку відрізняються від рівнянь Ньютона і випливають з так званого принципу найменшої дії (принципу Гамільтона).У відповідності з цим принципом, кожна механічна система характеризується певною функцією узагальнених координат і швидкостей та часу

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_s;\ \dot{q}_1, q_2, \ldots, \dot{q}_s; t), \text{ або скорочено } L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

яку називають функцією Лагранжа, причому рух системи задовольняє такій умові:

Нехай в моменти часу $t = t_1$, і $t = t_2$ система займає певні положення, які характеризуються двома наборами узагальнених координат $q_i^{(1)}$ і $q_i^{(2)}$:

$$q_i(t_1) = q_i^{(1)}; q_i(t_2) = q_i^{(2)} \qquad (i = 1, 2, ..., 3). \tag{1}$$

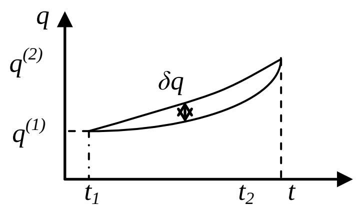
Тоді між цими положеннями система рухається так, щоб дія – інтеграл виду

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \quad - \tag{2}$$

мала найменше значення.

Цей принцип можна покласти в основу класичної механіки замість законів Ньютона. Перевага принципу найменшої дії полягає в тому, що його можна поширити на системи, які не є чисто механічними, наприклад, на пружні середовища, електромагнітні поля тощо.

Виведемо з принципу найменшої дії диференціальні рівняння руху.



Для простоти розглянемо систему з одним ступенем вільності, так що $L = L(q, \dot{q}, t)$, $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$. Порівняємо значення інтегралу дії для двох близьких законів руху $q(t)$ і $q(t) + \delta q(t)$, вважаючи, що $q(t)$ відповідає істинному закону руху, для якого дія приймає мінімальне значення. Умова мінімуму дії приводить до вимоги рівності нулю варіації дії: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q; \dot{q} + \delta\dot{q}; t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0$.

Задачі даного типу називають варіаційними. Вважаючи варіації $\delta q(t)$ координати малими, розкладемо функцію Лагранжа по $\delta q(t)$ і отримаємо

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) \approx L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}; \quad \delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt = 0.$$

Обчислимо останній інтеграл, використовуючи метод інтегрування по частинам:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\left(\frac{dq}{dt}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta q \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{d\dot{q}}dt = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q dt.$$

Тут враховано, що $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Тоді варіація дії дорівнюватиме $\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt = 0;$ звідки отримаємо рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \tag{3}$$

яке представляє розшукуване рівняння руху частинки з одним ступенем вільності.

Якщо механічна система має s ступенів вільності, то з принципу найменшої дії аналогічно випливає s рівнянь руху:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\ \ (i=\overline{1,s}) \qquad (4),$$

які називаються рівняннями Лагранжа II роду. Їх використання має ряд переваг перед рівняннями Ньютона: по-перше, кількість рівнянь Лагранжа дорівнює числу ступенів вільності і при наявності в'язів менша за кількість рівнянь Ньютона ($s<3N$); по-друге, в рівняння Лагранжа не входять невідомі сили реакції в'язів.

§ 7. Функція Лагранжа механічної системи та її властивості

Нехай на частинку з одним ступенем вільності діє зовнішня сила F, яку, припустимо, можна представити у вигляді

$$F=-\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad (1)$$

де $U=U(x,t)$ - функція координат і часу, яку називають потенціалом системи. Якщо U не залежить явно від часу, то ця функція $U(x)$ є просто потенціальною енергією. Сили, які можна представити у вигляді (1), називаються потенціальними.

Знайдемо, при якому вигляді функції Лагранжа $L=L(x,\dot{x},t)$ рівняння Лагранжа співпадатимуть з рівняннями Ньютона. Рівняння Лагранжа в декартових координатах в одновимірному випадку мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0, \qquad (2)$$

а рівняння Ньютона, відповідно, $$m\frac{d^2x}{dt^2}=F=-\frac{\partial U}{\partial x}. \qquad (3)$$

Безпосередньо перевіркою можна показати, що вказана вимога виконується, якщо функцію Лагранжа частинки взяти у вигляді різниці кінетичної енергії частинки $T=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{m}{2}\dot{x}^2$ і її потенціалу $U(x,t)$:

$$L=T-U=\frac{m\upsilon^2}{2}-U=\frac{m}{2}\dot{x}^2-U(x,t). \qquad (4)$$

Дійсно, у випадку (4) рівняння (2) справді переходить в (3):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{m}{2}\cdot 2\dot{x}=m\dot{x};\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{d}{dt}m\dot{x}=m\frac{d}{dt}\dot{x}=m\ddot{x};\ \frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial x};\ m\ddot{x}+\frac{\partial U}{\partial x}=0\Rightarrow m\ddot{x}=-\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Отже, функція Лагранжа у вигляді (4) може бути використана для простих систем. Якщо ж система складається з багатьох частинок, то слід припустити існування потенціалу системи U, який залежить від координат всіх частинок $U=U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n;t)$, такого, що сила, яка діє на a-ту частинку, обчислюється за формулою, аналогічною (1):

$$\vec{F}_a=-grad_a U=-(\vec{i}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_a}+\vec{j}\cdot\frac{\partial U}{\partial y_a}+\vec{k}\cdot\frac{\partial U}{\partial z_a}). \qquad (5)$$

Відповідно, функцію Лагранжа (4) в декартових координатах у випадку системи багатьох частинок також визначимо як різницю повної кінетичної енергії і потенціалу системи:

$$L = T - U = \sum_{a=1}^{n} \frac{m_a}{2} \vec{\upsilon}_a^2 - U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n;t) = \sum_{a=1}^{n} \frac{m_a}{2} (\upsilon_{ax}^2 + \upsilon_{ay}^2 + \upsilon_{az}^2) - U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n;t). \qquad (6)$$

В цьому випадку також можна показати, що рівняння Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_{ax}} - \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0$ і рівняння Ньютона $m\ddot{x}_a = -\frac{\partial U}{\partial x_a}$ співпадають.

Для системи із в'язями, яка описується узагальненими координатами q_i і швидкостями $\dot{q}_i$, функцію Лагранжа теж будемо представляти як різницю кінетичної $T = T(\dot{q}_i, q_i, t)$ і потенціальної $U = U(q_i, t)$ енергій системи, тобто

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i, q_i, t) - U(q_i, t). \qquad (7)$$

Це є загальний вираз для функції Лагранжа.

В декартовій системі координат похідна $-\frac{\partial U}{\partial x_a} = F_{ax} = \frac{\partial L}{\partial x_a}$ дорівнює проекції сили. По аналогії введемо поняття узагальненої сили:

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \qquad (8)$$

Оскільки похідна $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} = \frac{\partial L}{\partial \upsilon_{ax}} = m_a \upsilon_{ax} = p_{ax}$ дорівнює проекції імпульсу частинки у декартовій системі координат, у випадку узагальнених координат визначимо аналогічно узагальнений імпульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \qquad (9)$$

Відзначимо наступні властивості функцій Лагранжа:

1. Множення функції Лагранжа на довільну сталу не впливає на рівняння руху, але при цьому на одну і ту ж сталу повинні бути помножені функції Лагранжа всіх частин системи.
2. Нехай дві функції Лагранжа L' і L відрізняються на повну похідну по часу від деякої функції часу

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(t). \qquad (10)$$

При умові (10) дії системи, обчислені для функцій L' і L, будуть відрізнятись сталим доданком. Оскільки його варіація при варіюванні дій обертається в 0, вигляд відповідних рівнянь руху співпадатиме. Отже, функція Лагранжа визначена з точністю до добавлення до неї повної похідної по часу від довільної функції узагальнених координат і часу.

§8. Інваріантність і коваріантність законів механіки. Принцип відносності Галілея

В класичній механіці вважається, що всі інерціальні системи відліку рівноправні. Це означає, що всі закони і рівняння механіки, які встановлюються для замкненої системи в деякій ІСВ, не змінюються при переході до будь-якої іншої ІСВ. Це твердження називають принципом відносності Галілея.

Серед ІСВ є системи, які покояться одна відносно іншої, при цьому початки координат цих систем можуть бути довільно зміщені, а вісі координат можуть бути довільно повернуті одна відносно другої. Крім того, серед ІСВ є системи, що рухаються одна відносно іншої поступально зі сталими швидкостями. Тому твердження про те, що закони механіки не змінюються при переході від однієї ІСВ до іншої, фактично містить такі 4 твердження:

1) Закони і рівняння механіки не змінюються при зсувах систем координат, тобто, при перетвореннях виду:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a},\; t = t'\,. \tag{1}$$

Це твердження можна трактувати як наслідок припущення про однорідність простору – відсутності в ньому виділених точок і, отже, виділених ІСВ.

2) Закони і рівняння механіки не змінюються при поворотах осей системи координат, наприклад, при повороті навколо вісі z на кут ψ:

$$\begin{cases} x = x'\cos\psi + y'\sin\psi \\ y = -x'\sin\psi + y'\cos\psi \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \tag{2}$$

Це твердження – наслідок припущення про ізотропність простору.

3) Закони і рівняння механіки не змінюються при зсуві по вісі часу, тобто, при перетвореннях виду

$$\vec{r} = \vec{r}\,',\; t = t' + \tau\,. \tag{3}$$

Це є наслідком однорідності часу.

4) Закони і рівняння механіки не змінюються також при перетвореннях, що відповідають рівномірному поступальному руху систем відліку, тобто, при перетвореннях виду:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}t,\; t = t',\;\; \vec{u} = const. \tag{4}$$

Ці перетворення називають перетвореннями Галілея. Продиференціювавши (4) по часу, знайдемо класичний закон додавання швидкостей Галілея:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{u}\,, \tag{5}$$

де υ і υ' - швидкості частинки відносно двох ІСВ, що рухаються з швидкістю $\vec{u}$ одна відносно іншої.

В цілому закони і рівняння механіки не повинні змінюватися і при будь-якій комбінації цих перетворень, тобто, при виконанні їх послідовно одне за одним.

Що означає твердження, що закони і рівняння не змінюються при деякому перетворенні ІСВ? Відомо, що закони механіки записуються у вигляді рівнянь. В них як змінні входять координати, швидкості і прискорення матеріальних точок, обчислені по відношенню до деякої системи відліку, а також і функції цих змінних, наприклад, енергія, імпульс тощо. Говорять, що закони і рівняння механіки не змінюються при деяких перетвореннях систем відліку, або, що вони **інваріантні** по відношенню до цих перетворень, якщо рівняння, що виражають закони механіки, задовольняють таким двом умовам:

1. Після виконання перетворень, пов'язаних з переходом до нової системи відліку, структура рівнянь у нових змінних має абсолютно той же вигляд, що і в старих координатах.
2. Всі функції координат, швидкостей і прискорень, які містяться в цих рівняннях, в результаті перетворень не міняються, тобто, як функції нових змінних вони мають абсолютно такий же вигляд , який вони мали у старих змінних.

Але, якщо механічна система не замкнута, тобто, існує вплив на неї других матеріальних об'єктів, які не входять до неї, то в загальному випадку при переході від однієї ІСВ до іншої структура її рівнянь руху може змінитись. Проте, часто вдається цим рівнянням придати такий вигляд, щоб при переході від однієї ІСВ до будь-якої іншої структура цих рівнянь зберігалась, хоч вид функцій в цих рівняннях може змінюватись. В цих випадках говорять, що форма запису законів чи рівнянь механіки **коваріантна** по відношенню до перетворень ІСВ. Таким же чином можна говорити про коваріантність законів і рівнянь механіки по відношенню до інших класів перетворень систем відліку.

Наприклад, рівняння руху в полі тяжіння $m\ddot{\vec{r}} = -G\dfrac{mM}{r^2}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r} = \vec{F}(\vec{r})$ інваріантне відносно зсуву по вісі часу (3), але при зсуві системи координат (1) $(\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a})$ отримується рівняння

$$m\ddot{\vec{r}}\,' = \vec{F}\,'(\vec{r}\,'),\ \text{де}\ \vec{F}\,'(\vec{r}\,') = -G\frac{mM}{|\vec{r}\,' + \vec{a}|^2}\cdot\frac{\vec{r}\,' + \vec{a}}{|\vec{r}\,' + \vec{a}|},$$

тобто, форма рівняння не змінилась, а функція $\vec{F}\,'(\vec{r}\,')$ відрізняється від $\vec{F}(\vec{r})$. В цьому випадку ми маємо справу з коваріантною формою запису рівнянь.

§9. Зв'язок законів збереження з властивостями простору і часу. Теорема Е. Ньотер

При русі механічної системи $2s$ величин $q_i(t)$ і $\dot{q}_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,s)$, що визначають її стан, змінюються з часом. Проте, існують такі функції цих величин, які зберігають при русі постійні значення, що залежать тільки від початкових умов. Ці функції називають інтегралами руху.

Число незалежних інтегралів руху для замкнутої механічної системи з s ступенями вільності дорівнює $2s\text{-}1$. Це випливає з того, що рівняння Лагранжа являють собою систему s диференційних рівнянь другого порядку і при їх інтегруванні з'являється $2s$ довільних сталих інтегрування, серед яких одна може бути вибрана у вигляді сталої t_0 (початку відліку часу):

$C_1, C_2, ..., C_{2s-1}; t_0$. Узагальнені координати і узагальнені швидкості виражаються через сталі і час

$$\begin{cases} q_i = q_i(t+t_0, C_1, C_2, ..., C_{2s-1}), \\ \dot{q}_i = \dot{q}_i(t+t_0, C_1, C_2, ..., C_{2s-1}). \end{cases} \quad i = \overline{1, s} \tag{1}$$

Систему рівнянь (1) можна розв'язати відносно невідомих C_i, виключивши з них час і представивши їх як функції узагальнених координат і швидкостей

$$C_\alpha = C_\alpha(q_1, q_2, ..., q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s).$$

При русі механічної системи ці $2s-1$ функції узагальнених координат і швидкостей $C_\alpha(q_i, \dot{q}_i)$, $\alpha = 1, 2, ..., 2s-1$ зберігають постійне значення і тому є інтегралами руху. Існування інтегралів руху відповідає існуванню законів збереження у механіці, адже інтеграли руху зберігають свої сталі значення.

Але далеко не всі інтеграли руху відіграють однаково важливу роль в механіці. Серед інтегралів руху особливе значення мають адитивні інтеграли руху. Це такі величини, що їх значення для системи, яка складається з частин, взаємодією яких можна знехтувати, дорівнює сумі значень для кожної з частин окремо. Саме адитивність придає їм особливо важливу роль. Нехай, наприклад, два тіла взаємодіють протягом деякого часу. Оскільки як до, так і після взаємодії кожен із адитивних інтегралів руху всієї системи дорівнює сумі їх значень для обох тіл окремо, то закони збереження цих величин дають можливість зробити ряд висновків про стан тіл після взаємодії, якщо їх стани до взаємодії відомі. Іншими словами, *закони збереження встановлюють рівності між певними комбінаціями величин, що характеризують початковий і кінцевий стан. При цьому для використання того чи іншого закону збереження зовсім несуттєві деталі поведінки системи в проміжні моменти часу*.

Адитивні закони збереження виявляються пов'язаними з властивостями симетрії простору і часу. Це випливає з доведеної в математиці **теореми Емми Ньотер (**1918 р.), яку для потреб механіки можна сформулювати наступним чином:

Будь-якому оборотному неперервному перетворенню координат, при якому функція дії або лагранжіан механічної системи залишається інваріантною величиною, відповідає адитивний інтеграл руху цієї системи.

Отже, закони збереження пов'язані з принципами інваріантності (§8), в яких знаходять своє вираження геометричні симетрії простору і часу або ж внутрішні симетрії взаємодії. Звідси випливає важливість законів збереження як з практичної, так і з точки зору світогляду.

В класичній механіці розглядаються геометричні симетрії, які пов'язані з такими властивостями простору і часу, як однорідність і ізотропність простору та однорідність часу. Оскільки інших властивостей простору і часу немає, це привело Анрі Пуанкаре до формулювання теореми, згідно з якою в механіці існує лише сім аналітичних адитивних інтегралів руху:

1) енергія E, якає наслідком однорідності часу;

2) 3 проекції імпульсу p_x, p_y, p_z, які є наслідком однорідності простору;

3) 3 проекції моменту імпульсу M_x, M_y, M_z, які є наслідком ізотропності простору.

Оскільки властивості симетрії простору і часу є точними, то відповідні закони збереження є строгими. Збереження електричного, лептонного, баріонного та інших зарядів, що зустрічаються у фізиці елементарних частинок, є наслідком властивостей симетрії електромагнітної, слабкої і сильної взаємодій. Деякі із симетрій взаємодій не є точними, тому у фізиці елементарних частинок зустрічаються і наближені закони збереження.

§10. Закон збереження енергії

Збереження енергії пов'язане з однорідністю часу. Однорідність часу означає, що стан системи не залежить від вибору початку відліку часу. Це можливо, якщо система є замкнутою або перебуває у стаціонарному зовнішньому полі з потенціальною енергією $U(\vec{r})$. Внаслідок цього час не входить явно у функцію Лагранжа, тобто, $L = L(q_i, \dot{q}_i)$, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Тоді $L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$, і повна похідна функції Лагранжа по часу дорівнюватиме

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d\dot{q}_i}{dt}. \qquad (1)$$

Скористаємось рівняннями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (2)$$

і підставимо (2) в (1):

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt}\dot{q}_i \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i - L \right) = 0. \qquad (3)$$

Величину, що стоїть в (3) у дужках, називають енергією системи:

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \qquad (4)$$

Таким чином, ми прийшли до результату $\frac{dE}{dt} = 0$, звідки випливає $E = const$. Отже, з однорідності часу ми вивели **закон збереження енергії**: "Енергія замкнутої системи або системи в стаціонарному зовнішньому силовому полі залишається сталою". Механічні системи, енергія яких зберігається, називають **консервативними**. З (4) випливає, що E є адитивною величиною внаслідок адитивності L.

В декартових координатах функція Лагранжа системи частинок має вигляд: $L=\sum_{a=1}^{N}\frac{m_a\vec{\upsilon}_a^2}{2}-U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)$. Звідси знаходимо, що енергія системи дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій:

$$E=\sum_a\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}_a}\vec{\upsilon}_a-L=\sum_a m_a\vec{\upsilon}_a^2-\sum_a\frac{m_a\vec{\upsilon}_a^2}{2}+U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)=\sum_a\frac{m_a\vec{\upsilon}_a^2}{2}+U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)=T+U\,.(4)$$

§11. Закон збереження імпульсу

Другий закон збереження випливає з однорідності простору. Внаслідок цієї однорідності механічні властивості замкнутої системи не змінюються при довільному паралельному переносі системи як цілого у просторі. В зв'язку з цим розглянемо паралельний перенос системи на нескінченно малий відрізок $\vec{\varepsilon}$, вимагаючи, щоб функція Лагранжа залишалась незмінною. Паралельний перенос означає перетворення, при якому радіус-вектори усіх точок системи змінюються однаковим чином: $\vec{r}_a\to\vec{r}_a+\vec{\varepsilon}$. Стан системи не змінюється, тому і її функція Лагранжа не змінюється, тобто $\delta L=0$ З другого боку, зміна функції Лагранжа в результаті нескінчено малої зміни координат при незмінних швидкостях частинок дорівнює

$$\delta L=L(\vec{r}_a+\vec{\varepsilon},\vec{\upsilon}_a)-L(\vec{r}_a,\vec{\upsilon}_a)=L(\vec{r}_a,\vec{\upsilon}_a)+\sum_a\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_a}\cdot\vec{\varepsilon}-L(\vec{r}_a,\vec{\upsilon}_a)=\vec{\varepsilon}\cdot\sum_a\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_a}=0\,.$$

Тут сума береться по всім частинкам. Внаслідок довільності вектора $\vec{\varepsilon}\neq 0$ умова незмінності функції Лагранжа еквівалентна вимозі

$$\sum_a\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_a}=0\,. \qquad (1)$$

В силу рівнянь Лагранжа отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}_a}-\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_a}=0\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_a}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}_a}\,. \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1): $\frac{d}{dt}\sum_a\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}_a}=0$, звідки $\sum_a\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}_a}=const$. (3)

Як було показано в §7, величина

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}_a}=m_a\vec{\upsilon}_a=\vec{p}_a \qquad (4)$$

представляє собою імпульс a-ї частинки, тому сума (3) визначає повний імпульс системи частинок, який у випадку замкнутої системи зберігається:

$$\vec{p}=\sum_a\vec{p}_a=\sum m_a\vec{\upsilon}_a=const\,. \qquad (5)$$

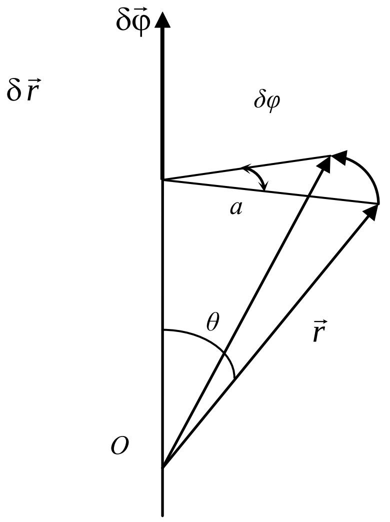
Отже, із однорідності простору ми вивели **закон збереження імпульсу**: *В замкнутій механічній системі повний імпульс частинок залишається при русі незмінним.* Формула (5) показує, що імпульс системи є адитивним, тобто дорівнює сумі імпульсів частинок не залежно від їх взаємодії.

Закон збереження всіх трьох компонентів імпульсу має місце лише при відсутності зовнішніх полів. Але окремі компоненти імпульсу можуть зберігатись і при наявності поля, якщо потенціальна енергія в ньому не залежить від якоїсь з декартових координат. Так, в однорідному полі, напрямленому вздовж вісі *z*, зберігаються компоненти імпульсу вздовж осей *x* і *y*.

§12. Збереження моменту імпульсу

Закон збереження моменту імпульсу випливає з ізотропності простору, згідно з якою механічні властивості замкнутої системи не змінюються при довільному повороті системи як цілого в просторі. У відповідності з цим розглянемо нескінченно малий поворот системи на кут $\delta\varphi$ відносно деякої вісі, вимагаючи, щоб функція Лагранжа системи не змінилась($\delta L = 0$). Внаслідок такого повороту модуль радіус-вектора довільної частинки зміниться на величину (див. мал.)

$$\delta r = \left|\delta\vec{r}\right| = a\cdot\delta\varphi = r\,sin\,\theta\cdot\delta\varphi;\ a = r\,sin\,\theta\,. \tag{1}$$



Введемо вектор нескінченно малого повороту $\delta\vec{\varphi}$, абсолютна величина якого дорівнює куту повороту, а напрямок співпадає з напрямком осі обертання, причому поворот відповідає правилу гвинта. Тоді (1) можна представити у вигляді модуля векторного добутку двох векторів:

$$\left|\delta\vec{r}\right| = \left|\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}\right| = \delta\varphi\cdot r\cdot sin\,\theta,\ \text{звідки}\ \delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi}\times\vec{r}\,. \tag{2}$$

Аналогічна зміна відбувається з кожним вектором, у тому числі з радіус-векторами і швидкостями всіх частинок:

$$\begin{cases}\delta\vec{r}_a = \delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_a\\ \delta\vec{\upsilon}_a = \delta\vec{\varphi}\times\vec{\upsilon}_a\end{cases},\ a = \overline{1,N} \tag{3}$$

Внаслідок зміни радіус-векторів і швидкостей частинок на величину (3) функція Лагранжа змінюється на величину

$$\delta L = L(\vec{r}_a + \delta\vec{r}_a, \vec{\upsilon}_a + \delta\vec{\upsilon}_a) - L(\vec{r}_a, \vec{\upsilon}_a) = L(\vec{r}_a, \vec{\upsilon}_a) + \sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_a}\cdot\delta\vec{r}_a + \sum_{a=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}_a}\cdot\delta\vec{\upsilon}_a - L(\vec{r}_a, \vec{\upsilon}_a) = 0\,. \tag{4}$$

Підставимо в (4) визначення імпульсу і скористаємось рівнянням Лагранжа: $\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}_a} = m_a\vec{\upsilon}_a = \vec{p}_a$ і $\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}_a} = \frac{d}{dt}\vec{p}_a = \dot{\vec{p}}_a$. Тоді

$$\delta L = \sum_{a=1}^{n}\dot{\vec{p}}_a\cdot\left[\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_a\right] + \sum_{a=1}^{n}\vec{p}_a\cdot\left[\delta\vec{\varphi}\times\vec{\upsilon}_a\right] = \sum_{a=1}^{n}\delta\vec{\varphi}\left[\vec{r}_a\times\dot{\vec{p}}_a\right] + \sum_{a=1}^{n}\delta\vec{\varphi}\left[\vec{\upsilon}_a\times\vec{p}_a\right] =$$

$$=\left[\vec{\upsilon}_a=\frac{d\vec{r}_a}{dt}=\dot{\vec{r}}_a\quad\right]=\delta\vec{\varphi}\cdot\sum_{a=1}^{n}\left[\vec{r}_a\times\dot{\vec{p}}_a\right]+\delta\vec{\varphi}\sum_{a=1}^{n}\left[\dot{\vec{r}}_a\times\vec{p}_a\right]=\delta\vec{\varphi}\cdot\sum_{a=1}^{n}\left(\left[\vec{r}_a\times\dot{\vec{p}}_a\right]+\left[\dot{\vec{r}}_a\times\vec{p}_a\right]\right)=0,$$

$$\delta\vec{\varphi}\neq 0\Rightarrow\sum_{a=1}^{n}\left(\left[\vec{r}_a\times\frac{d\vec{p}_a}{dt}\right]+\left[\frac{d\vec{r}_a}{dt}\times\vec{p}_a\right]\right)=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{n}\left[\vec{r}_a\times\vec{p}_a\right]=0.$$

Отже, ми довели, що величина

$$\vec{M}=\sum_a\left[\vec{r}_a\times\vec{p}_a\right]=const. \tag{5}$$

Вектор $\vec{M}$ називають моментом імпульсу системи. Він є адитивною величиною, тому що дорівнює сумі моментів імпульсів окремих частинок. Момент імпульсу окремої частинки дорівнює:

$$\vec{M}_a=\vec{r}_a\times\vec{p}_a. \tag{6}$$

Отже, із ізотропності простору виведено **закон збереження моменту імпульсу**: *Повний момент імпульсу замкнутої системи частинок зберігається.*

Момент імпульсу системи частинок у довільному зовнішньому силовому полі у загальному випадку не зберігається. Виняток складають центрально-симетричні поля. У такому полі сила, яка діє на кожну частинку, має напрямок, що проходить через одну і ту ж саму нерухому точку O, яка називається центром поля, а модуль сили залежить від відстані r частинки до цієї точки. Потенціальна енергія в такому полі залежить тільки від відстані $U=U(r)$. Тому довільний поворот системи в просторі навколо точки O не змінює механічні властивості системи. Отже, хоч в даному випадку система і не замкнута, її повний момент імпульсу все ж залишатиметься сталим, але тільки відносно точки O. Для замкнутої системи момент імпульсу зберігається відносно будь-якої точки.

§13. Рівняння Гамільтона

Рівняння Лагранжа для системи з s ступенями вільності є системою s диференціальних рівнянь 2-го порядку. Незалежними змінними у цих рівняннях є узагальнені координати q_i і узагальнені швидкості $\dot{q}_i$. Гамільтон отримав рівняння руху, в яких незалежними змінними є узагальнені координати q_i і узагальнені імпульси p_i, а в якості функції, що характеризує механічну систему, служить енергія. Запишемо загальний вираз енергії системи (§10):

$$E=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\cdot\dot{q}_i-L(q_i,\dot{q}_i,t). \tag{1}$$

Зробимо в (1): заміну $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=p_i$ і перейдемо до змінних q_i і p_i. Енергія (1), представлена як функція узагальнених координат та імпульсів, називається функцією Гамільтона (або гамільтоніаном) і позначається H; за визначенням:

$$H(q_i,p_i,t)=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i-L(q_i,\dot{q}_i,t). \tag{2}$$

Виведемо рівняння Гамільтона, використовуючи рівняння Лагранжа. Для цього знайдемо повні диференціали правої і лівої частини формули (2) і прирівняємо їх:

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \cancel{\sum_i p_i \cdot d\dot{q}_i} + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \cancel{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових диференціалах, отримаємо:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i};\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i};\ i = \overline{1,s}\ ; \tag{3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{4}$$

Систему рівнянь (3) називають рівняннями Гамільтона. На відміну від рівнянь Лагранжа, це є система $2s$ диференціальних рівнянь 1-го порядку. В механіці рівняння Гамільтона принципово нового нічого не дають, але вони є більш симетричними за рівняння Лагранжа і відкривають великі можливості для узагальнень в електродинаміці, квантовій механіці і статистичній фізиці.

В якості прикладу розглянемо функцію і рівняння Гамільтона однієї частинки в потенціальному полі:

$$H = \frac{m\upsilon^2}{2} + U = \frac{m}{2}\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right) + U = \left[\upsilon_x = \frac{p_x}{m}; \upsilon_y = \frac{p_y}{m}; \upsilon_z = \frac{p_z}{m}\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) + U = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U \quad \Rightarrow$$

Отже, гамільтоніан
$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x,y,z,t)\,, \tag{5}$$

а рівняння Гамільтона частинки в силовому полі в декартових координатах є:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \upsilon_x;\ \dot{y} = \frac{p_y}{m} = \upsilon_y; \dot{z} = \frac{p_z}{m} = \upsilon_z;\ \ \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} = \vec{\upsilon};$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x;\ \dot{p}_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y;\ \dot{p}_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z \ \Rightarrow\ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\ .$$

Таким чином, для однієї частинки в потенціальному полі перша група рівнянь Гамільтона звелась до звичайного зв'язку між швидкістю та імпульсом, а друга – до рівнянь динаміки Ньютона.

Знайдемо повну похідну функції Гамільтона по часу:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt}\right) = \left[\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\right] =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Отже, повна похідна функції Гамільтона по часу дорівнює її частинній похідній:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}. \qquad (6)$$

З цієї рівності робимо висновок: якщо функція Гамільтона не залежить явно від часу (тобто $\frac{\partial H}{\partial t}=0$), то вона зберігає своє значення, оскільки, згідно (6), $\frac{dH}{dt}=0$, що означає сталість цієї функції з часом і збереження енергії: $H=const=E$.

Назвемо циклічною координатою q_i таку координату, яка не входить явно у функцію Гамільтона H. Тоді для неї з рівнянь Гамільтона випливає:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=0 \Rightarrow \dot{p}_i=0 \Rightarrow p_i=const. \qquad (6)$$

Таким чином, узагальнений імпульс, який відповідає циклічній координаті, зберігається під час руху системи. Із визначення узагальненого імпульсу $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ і рівняння Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ випливає, що якщо q_i є циклічною координатою функції Гамільтона, то вона буде також циклічною координатою функції Лагранжа, тобто також не входить у функцію Лагранжа L.

§14. Дужки Пуассона (НСО)

Візьмемо деяку функцію узагальнених координат, імпульсу і часу $f(q_i,p_i,t)$ і вияснимо умови, при яких вона буде інтегралом руху, тобто зберігатиме стале значення при русі системи :

$$\frac{df}{dt}=0, \quad f(q_i,p_i,t)=const. \qquad (1)$$

Знайдемо повну похідну функції $f(q_i,p_i,t)$ по часу, використовуючи рівняння Гамільтона:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\dot{p}_i\right)=\left[\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i};\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right]=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i}\right). \qquad (2)$$

Розглянемо дві довільні функції узагальнених координат і імпульсів:

$$U=U(q_i,p_i,t), V=V(q_i,p_i,t).$$

Вираз виду

$$\{U,V\}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial p_i}-\frac{\partial U}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) \qquad (3)$$

називають дужками Пуассона для функцій *U* і *V*. За допомогою дужок Пуассона повна похідна по часу довільної функції f може бути представлена у вигляді:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}. \qquad (4)$$

Тоді умова (1) того, що функція f буде інтегралом руху, набуде вигляду:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\{ f,H \}=0\,. \qquad (5)$$

Зокрема, якщо функція f не залежить явно від часу, її дужки Пуассона з функцією Гамільтона дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0 \Rightarrow \{ f,H \}=0\,. \qquad (6)$$

Приведемо деякі очевидні властивості дужок Пуассона:

1. $\{U,V\}=-\{V,U\}$;
2. $\{U,U\}=0$;
3. $\{U+V,g\}=\{U,g\}+\{V,g\}$;
4. $\{UV,g\}=U\{V,g\}+V\{U,g\}$;
5. $\frac{\partial}{\partial t}\{U,V\}=\left\{\frac{\partial U}{\partial t},V\right\}+\left\{U,\frac{\partial V}{\partial t}\right\}$.

Можна також отримати ряд співвідношень, якщо в якості функцій U і V взяти узагальнені координати або імпульси:

1) $\{ q_i,U \}=\frac{\partial U}{\partial p_i}$;

2) $\{ p_i,U\}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}$;

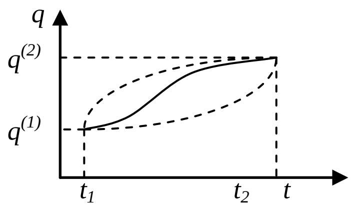
3) $\{ q_i,q_k \}=0$;

4) $\{ p_i,p_k \}=0$

5) $\{ q_i,p_k \}=\delta_{ik}=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}$; де δ_{ik} називають символом Кронекера.

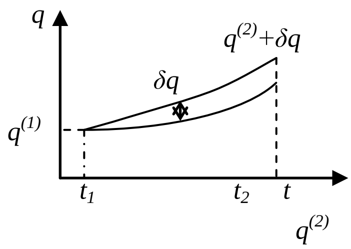
§15. Рівняння Гамільтона-Якобі (НСО)

При одержанні рівнянь Лагранжа здійснювалось варіювання дії $S=\int_{t_1}^{t_2} L(q_i,\dot{q}_i,t)\,dt$, яке полягало у порівнянні значень S для близьких траєкторій із закріпленими кінцями, тобто з однаковими значеннями $q_i(t_1)=q_i^{(1)}$ і $q_i(t_2)=q_i^{(2)}$. Лише той закон руху $q_i(t)$, для якого дія S мінімальна, відповідає дійсному руху (суцільна лінія).



У цьому параграфі розглянемо дію S як величину, що характеризує рух по істинним траєкторіям і дослідимо, як ця величина веде себе при змінах точки $q_i^{(2)}$ (при $t_2=const$), а також при змінах t_2, тобто розглядатимемо S як функцію

$$S=S(q_i,t), \qquad (1)$$



де q_i - координата кінцевого положення системи, t – момент часу, в який це положення досягається.

Візьмемо поблизу т. $q^{(2)}$ точку з координатою

$q^{(2)}+\delta q$, в яку система попадає в той же момент часу t_2, в який вона приходить в т. $q^{(2)}$. Дія для траєкторії, яка приводить систему в т. $q^{(2)}+\delta q$, відрізняється від дії для траєкторії, що приводить систему в т. $q^{(2)}$, на величину

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i\right)dt\,. \qquad (2)$$

Тут δq_i є різниця значень q_i, взятих для обох траєкторій в один і той же момент часу t; аналогічно $\delta\dot q_i$ - різниця $\dot q_i$ в момент t. Проінтегруємо другий доданок в (2) по частинам:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{d}{dt}\delta q_i dt = \left[\int UV'dt = UV - \int VU'dt\right] = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta q_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}dt\,. \qquad (3)$$

Але для істинної траєкторії $\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = p_i$, а початки обох траєкторій співпадають: $\delta q_i(t_1) = 0$. Величину $\delta q_i(t_2)$ позначимо δq_i. Отже, з урахуванням (3) та рівняння Ланграмжа рівність (2) набуває вигляду:

$$\delta S = \sum_i p_i\delta q_i + \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i dt = \sum_i p_i\delta q_i \qquad (4)$$

(в останній рівності враховано рівняння Лагранжа). Звідси випливає

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1,s})\,. \qquad (5)$$

Припустимо, що верхня межа в інтегралі дії не фіксована:

$$S = \int_{t_1}^{t} L dt = S(t, q_i(t))\,. \qquad (6)$$

Знайдемо повну похідну цієї функції по часу, врахувавши визначення функції Гамільтона і рівність (5):

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i\dot q_i; \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i\dot q_i - L = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, p_i.t) = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0\,. \qquad (7)$$

(7) є диференціальним рівнянням в частинних похідних першого порядку, якому повинна задовольняти функція $S(q_i,t)$, і називається рівнянням Гамільтона-Якобі.

У випадку консервативної системи зі стаціонарними в'язями час не входить явно в гамільтоніан: $H = E = const$. Тому з (7) випливає, що залежність S від t виражається доданком $-Et$, що дозволяє дію записати у вигляді:

$$S = -Et + S_0(q_i)\,. \qquad (8)$$

Функцію $S_0(q_i)$ називають укороченою дією. Підставимо (8) в (7) і отримаємо рівняння Гамільтона-Якобі для укороченої дії:

$$H\left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\right) = E\,. \qquad (9)$$

Приклад: рівняння Гамільтона-Якобі для частинки в нестаціонарному потенціальному полі:

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+U(x,y,z,t)=-\frac{\partial S}{\partial t}\,, \tag{10}$$

а якщо частинка рухається у стаціонарному полі, то рівняння Гамільтона-Якобі для укороченої дії

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+U(x,y,z)=E\,. \tag{11}$$

МОДУЛЬ ІІ. ЗАСТОСУВАННЯ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

РОЗДІЛ 3. ДЕЯКІ ЗАДАЧІ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

§16. Одновимірний рух

Одновимірним називають рух системи з одним ступенем вільності. Якщо спрямувати вісь *Ох* по прямій, вздовж якої рухається дана матеріальна точка, в такій декартовій системі координат її функція Лагранжа дорівнюватиме:

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{1}$$

Рівняння Лагранжа в одновимірному випадку $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ зводиться до рівняння Ньютона:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = X, \tag{2}$$

де m – маса матеріальної точки, $\ddot{x}$ – її прискорення, X – рівнодійна всіх сил, прикладених до точки. Рівняння руху (2) інтегрується в загальному вигляді, але є декілька частинних випадків, коли пошук закону руху спрощується.

Випадок 1. Знайти закон руху матеріальної точки маси m, якщо до неї прикладена сила $X(t)$, що залежить тільки від часу t.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки можна записати в такому вигляді:

$$m\ddot{x} = X(t).$$

Запроваджуючи нову змінну $\dot{x} = v$, можна це рівняння переписати так: $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}X(t)$, звідки, інтегруючи, дістанемо:

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int X(t)dt + C_1. \tag{3}$$

Подальше інтегрування дає остаточну відповідь:

$$x = \frac{1}{m}\int\left[\int X(t)dt\right]dt + C_1 t + C_2. \tag{4}$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 знаходять з початкових умов задачі.

Випадок 2. Знайти закон руху матеріальної точки масою m, на яку діє сила $X(x)$, що є функцією тільки координати x цієї точки.

Щоб визначити закон руху точки, застосуємо диференціальне рівняння її руху:

$$m\ddot{x} = X(x). \tag{5}$$

Виконавши в (5) перетворення $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\dot{x}$ (6) з наступною заміною $\dot{x} = v$, рівняння руху точки перепишемо так: $vdv = \frac{1}{m}X(x)dx$. Безпосереднім інтегруванням дістанемо:

$$v^2=\frac{2}{m}\int X(x)dx+C_1,\quad v=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\int X(x)dx+C_1},\qquad dt=\pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int X(x)dx+C_1}}\ . \tag{7}$$

Подальше інтегрування дає: $$t=\pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int X(x)dx+C_1}}+C_2\,. \tag{8}$$

Якщо позначити $$\pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int X(x)dx+C_1}}+C_2=\Phi(x,C_1,C_2),$$

то можна написати залежність між часом та координатою рухомої точки у вигляді:

$$t=\Phi(x,C_1,C_2).$$

Закон руху матеріальної точки дістанемо, якщо розв'яжемо останнє рівняння відносно *x*:

$$x=f(t,C_1,C_2)$$

<u>Випадок 3.</u> Визначити закон руху матеріальної точки масою *m*, що рухається прямолінійно під впливом сили *X(v)*, яка є функцією швидкості *v*.

Застосовуємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки

$$m\ddot{x}=X(\dot{x}). \tag{9}$$

Після підстановки $\dot{x}=v$ це рівняння перетвориться в таке: $\frac{dv}{X(v)}=\frac{1}{m}dt$, звідки

після інтегрування дістанемо: $$\int\frac{dv}{X(v)}+C_1=\frac{1}{m}t\,. \tag{10}$$

Якщо запровадити нове позначення: $m\left[\int\frac{dv}{X(v)}+C_1\right]=\Phi(v,C_1)$, то останнє рівняння матиме вигляд: $\Phi(v,C_1)=t$ або $\Phi(\dot{x},C_1)=t$. Розв'язуючи це рівняння відносно $\dot{x}$, знайдемо: $\dot{x}=f(t,C_1)$, звідки $x=\int f(t,C_1)dt+C_2$. (11)

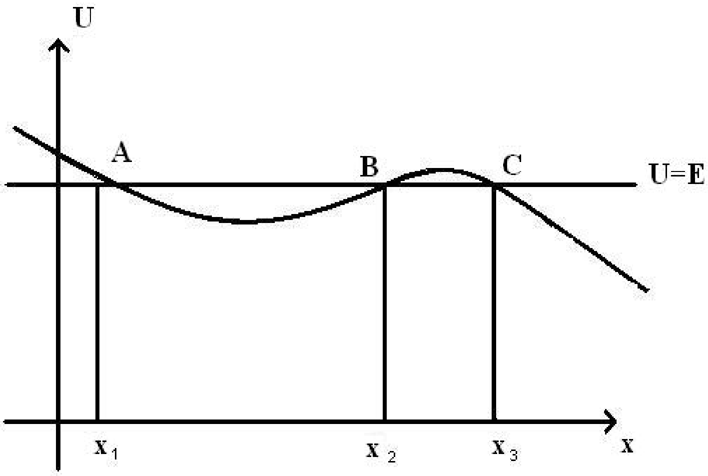
Якщо рівняння $\Phi(v,\ C_1)=t$ відносно *v* розв'язати не можна, то слід зробити так. Користуючись перетворенням (6), рівняння руху матеріальної точки (9) можна записати у вигляді: $\frac{m\dot{x}d\dot{x}}{X(\dot{x})}=dx$. Після інтегрування знайдемо: $x=m\int\frac{\dot{x}d\dot{x}}{X(\dot{x})}+C_2$. Розв'язуючи це рівняння відносно *x*, дістанемо: $\dot{x}=\varphi(x,C_2)$. Інтегруючи, знайдемо:

$$t=\int\frac{dx}{\varphi(x,C_3)}+C_4\,. \tag{12}$$

Часто замість розв’язування рівнянь руху доцільно скористатись їх першим інтегралом руху, який виражає закон збереження енергії. Так, для функції Лагранжа (1) маємо:

$$T+U=\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=E=const\ . \tag{13}$$

Це є диференціальне рівняння першого порядку, яке інтегрується методом



розділення змінних. З формули (13) знайдемо:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\left(E - U\left(x\right)\right)}{m}};$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U\left(x\right)\right)}} = dt,$$ звідки

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E - U\left(x\right)}} + const. \quad (14)$$

Роль двох довільних сталих в розв'язку рівняння руху відіграють тут повна енергія *E* і стала інтегрування *const*.

Оскільки кінетична енергія – величина суттєво додатна, то при русі повна енергія завжди більше потенціальної, тобто рух може відбуватись тільки в тих областях простору, де $U(x) < E$. Нехай, наприклад, залежність $U(x)$ має вигляд, зображений на малюнку. Провівши на цьому ж графіку горизонтальну пряму $U(x) = E$, що відповідає заданому значенню повної енергії, ми відразу ж виясними можливі області руху. Так, у зображеному випадку рух може відбуватися лише в області АВ або в області справа від С. Точки x_1, x_2, x_3, в яких потенціальна енергія дорівнює повній:

$$U(x) = E \,, \quad (15)$$

визначають межі руху. Вони є точками зупинки, оскільки в них швидкість обертається в 0. Якщо область руху обмежена двома такими точками (x_1, x_2), то рух відбувається в обмеженій області простору і є, як кажуть, фінітним. Якщо ж область руху не обмежена або обмежена лише з одного боку (x_3) - рух інфінітний і частинка йде на нескінченність.

Одновимірний фінітний рух є коливальним - частинка здійснює періодично повторюваний рух між двома межами (на малюнку – в потенціальній ямі між точками x_1 і x_2). Внаслідок ізотропності часу в рівняннях механіки (незмінності рівнянь руху при заміні t на $-t$) час руху від x_1 до x_2 дорівнює часу зворотного руху від x_2 до x_1. Тому період коливань *T*, за який точка пройде від x_1 до x_2 і назад, дорівнює подвоєному часу проходження відрізку $x_1 x_2$, або згідно з (13):

$$T\left(E\right) = \sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U\left(x\right)}}, \quad (16)$$

причому межі x_1 і x_2 є коренями рівняння (15) при даному значенні *E*. Ця формула визначає період руху в залежності від повної енергії частинки.

§ 17. Центр інерції

Імпульс замкнутої механічної системи має різні значення по відношенню до різних ІСВ. Якщо ІСВ K' рухається відносно ІСВ K зі швидкістю $\vec{u}$, то швидкість $\vec{\upsilon}_a{}'$ і $\vec{\upsilon}_a$ частинок по підношенню до цих систем зв'язані класичним законом додавання швидкостей Галілея (8.5) $\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_a{}' + \vec{u}$. Тому зв'язок між значеннями $\vec{P}$ і $\vec{P}'$ імпульсу в цих системах дається формулою

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{\upsilon}_a = \sum_a m_a \vec{\upsilon}\,' + \vec{u}\sum_a m_a \text{, або } \vec{P} = \vec{P}' + \vec{u}\sum_a m_a . \tag{1}$$

Зокрема, завжди існує така ІСВ K', в якій повний імпульс $\vec{P}' = 0$. З (1) знайдемо, що швидкість цієї ІСВ дорівнює:

$$\vec{u} = \frac{\vec{P}}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \vec{\upsilon}_a}{\sum_a m_a} . \tag{2}$$

Якщо повний імпульс механічної системи дорівнює 0, то говорять, що вона покоїться відносно відповідної ІСВ. Відповідно швидкість $\vec{u}$ в (2) означає «швидкість як цілого» механічної системи з відмінним від 0 імпульсом. Отже, закон збереження імпульсу дозволяє сформулювати поняття спокою і швидкості механічної системи як цілого.

Формула (2) показує, що зв'язок між імпульсом $\vec{P}$ і швидкістю $\vec{u}$ системи як цілого такий же, який був би між імпульсом і швидкістю однієї матеріальної точки з масою $\mu = \sum m_a$, що дорівнює сумі мас всіх частинок.

Права сторона формули (2) може розглядатися як повна похідна по часу від виразу

$$\vec{R}_C = \sum m_a \vec{r}_a \Big/ \sum m_a . \tag{3}$$

Отже, швидкість системи як цілого є швидкість переміщення в просторі точки, радіус–вектор якої дається формулою (3). Таку точку називають центром інерції системи. Закон збереження імпульсу замкнутої системи можна тоді сформулювати як твердження, що її центр інерції рухається прямолінійно і рівномірно.

Для тіла з неперервним розподілом маси з густиною $\rho(\vec{r})$, зробивши в (3) заміну $m_a \to \rho dV$ і перейшовши від підсумовування до інтегрування, отримаємо формулу для центру інерції

$$\vec{R}_C = \frac{\int_V \rho \vec{r} dV}{\int_V \rho dV} . \tag{3$'$}$$

При вивченні механічних властивостей замкнутої системи зручно користуватися тією ІСВ, в якій центр інерції перебуває у стані спокою. Тим самим з розгляду виключається рівномірний і прямолінійний рух системи як цілого.

Енергію нерухомої як ціле механічної системи називають її внутрішньою енергію $E_{вн.}$. Вона включає в себе кінетичну енергію відносного руху частинок в системі і потенціальну енергію їх взаємодії. Повна ж енергія системи, яка рухається ціле зі швидкістю $\vec{u}$, може бути представлена у

вигляді
$$E = \frac{\mu\vec{u}^2}{2} + E_{вн}. \quad (4)$$

Дійсно, енергії E і E' механічної системи в двох ІСВ K і K' зв'язані співвідношенням:

$$E = \frac{1}{2}\sum_a m_a\vec{\upsilon}_a^{\,2} + U = \frac{1}{2}\sum_a m_a\left(\vec{\upsilon}_a' + \vec{u}\right)^2 + U = \frac{\mu\vec{u}^2}{2} + \vec{u}\sum_a m_a\vec{\upsilon}_a' + \frac{1}{2}\sum_a m_a\vec{\upsilon}_a'^2 + U$$

або
$$E = \frac{\mu\vec{u}^2}{2} + \vec{u}\vec{P}' + E'. \quad (5)$$

Цією формулою визначається закон перетворення енергії при переході від однієї ІСВ до іншої. Якщо в ІСВ центр інерції нерухомий, то $\vec{P}' = 0, E' = E_{вн}$ і ми приходимо до формули (4).

§18. Задача двох тіл

Розглянемо систему, яка складається з двох взаємодіючих тіл масами m_1 і m_2. Потенціальна енергія їх взаємодії залежить лише від відстані між ними, тобто від модуля різниці їх радіус – векторів. Тому функція Лагранжа такої системи дорівнює
$$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right). \quad (1)$$
Введемо вектор взаємної відстані обох точок
$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2)$$
і помістимо початок координат в центр інерції, що дає:
$$\vec{R} = \left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)\Big/\left(m_1 + m_2\right) = 0 \Rightarrow m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0. \quad (3)$$
Із рівностей (2) і (3) знаходимо:
$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \quad (4)$$
Підставляючи ці вирази в (1), отримаємо:
$$L = \frac{m}{2}\cdot\frac{m_2^{\,2}}{\left(m_1 + m_2\right)}\dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{m_2}{2}\cdot\frac{m_1^{\,2}}{\left(m_1 + m_2\right)^2} - U(r) = \frac{m_1 m_2\left(m_1 + m_2\right)}{2\left(m_1 + m_2\right)^2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r)$$
або
$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - U(r), \quad (5)$$
де позначено
$$m = m_1 m_2\Big/\left(m_1 + m_2\right). \quad (6)$$
Величина m називається зведеною масою системи двох частинок. Функція (5) формально співпадає з формулою Лагранжа для однієї матеріальної точки із зведеною масою m, що рухається у зовнішньому потенціальному полі $U(r)$, симетричному відносно нерухомого початку координат. Таке поле називається центральним. Таким чином, задача про рух двох взаємодіючих матеріальних точок зводиться до розв'язку задачі про рух однієї точки в

зовнішньому полі $U(r)$. По розв'язку $\vec{r} = \vec{r}(t)$ цієї задачі за формулами (4) визначаються траєкторії $\vec{r}_1(t)$ та $\vec{r}_2(t)$ кожної з частинок m_1 і m_2 окремо (по відношенню до їх спільного центру інерції).

§19. Рух частинки в центральному полі

Згідно з результатами попереднього параграфа, задача про рух двох тіл зводиться до задачі про визначення руху однієї частинки у зовнішньому полі, в якому потенціальна енергія залежить лише від її відстані r до певної нерухомої точки. Таке поле називають центральним, а відповідну точку – центром поля. Таким чином, ми прийшли до задачі про визначення руху частинки у центральному силовому полі. При цьому сила, що діє на частинку в центральному полі:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

по абсолютній величині залежить теж тільки від r і напрямлена в кожній точці вздовж радіус-вектора $\vec{r}$. Як було вже показано в §12, при русі в центральному полі зберігається момент імпульсу системи відносно центра поля. Для однієї частинки це є $\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}] = const$. Оскільки вектори $\vec{M}$ і $\vec{r}$ взаємно перпендикулярні, сталість $\vec{M}$ означає, що при русі частинки її радіус-вектор $\vec{r}$ весь час залишається в одній площині – тій, яка перпендикулярно $\vec{M}$. Отже, траєкторія руху частинки в центральному полі лежить цілком в одній площині. Такий рух прийнято називати плоским. Будемо визначати положення частинки за допомогою полярних координат r і φ, помістивши початок координат в центрі поля. В цих координатах функція Лагранжа прийме вигляд:

$$L = \frac{m\upsilon^2}{2} - U(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r). \qquad (1)$$

Тут враховано вираз для квадрата швидкості при в полярних координатах:

$$\upsilon^2 = \upsilon_r^2 + \upsilon_\perp^2 + = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

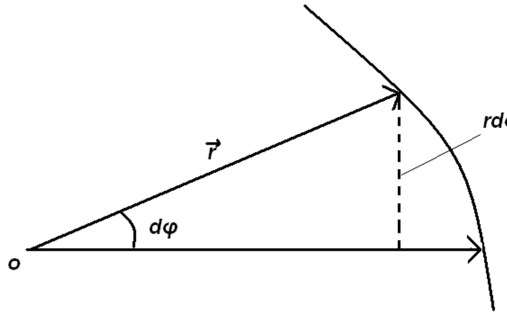
У функцію Лагранжа (1) не ввійшла явно координата φ. Як відзначалось у §13, узагальнені координати, які не входять явно у функцію Лагранжа, є циклічними, а відповідні їм узагальнені імпульси зберігаються – є інтегралами руху:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const.$$

У нашому випадку узагальнений імпульс $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = m\upsilon_\perp r$ співпадає з моментом імпульсу, так що ми повертаємось до відомого вже нам закону збереження моменту імпульсу:

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = mr \cdot r\dot{\varphi} = mr\upsilon_\perp = M \Rightarrow M = mr^2\dot{\varphi} = const. \qquad (2)$$

Відмітимо, що для плоского руху однієї частинки в центральному полі цей закон має просту геометричну інтерпретацію. Вираз $d\sigma = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi$ дорівнює площі сектора, утвореного двома нескінченно близькими радіус-векторами і елементом дуги траєкторії (див. мал. 1). Позначивши її як $d\sigma$, напишемо момент імпульсу частинки у вигляді:



Мал. 1

$$M = 2m\dot{\sigma}\,,\ M = const \ \Rightarrow\ \dot{\sigma} = const\,, \tag{3}$$

де похідну $\dot{\sigma} = \dfrac{d\sigma}{dt} = \upsilon_s$ називають секторіальною швидкістю. Тому збереження моменту імпульсу означає сталість секторіальної швидкості – за рівні проміжки часу радіус-вектор рухомої частинки описує рівні площі (це є так званий другий закон Кеплера).

Для знаходження траєкторії частинки краще виходити із законів збереження моменту імпульсу та енергії, ніж з рівнянь Лагранжа. Такий шлях простіше, оскільки в рівняння Лагранжа входять другі похідні координат, а в енергію і момент імпульсу – перші похідні координат по часу. Якщо виразити $\dot{\varphi}$ через M з (2) і підставити у вираз для енергії, отримаємо

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = M\big/mr^2 \Rightarrow E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U\left(r\right) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U\left(r\right). \tag{4}$$

Звідси

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}\,, \tag{5}$$

або розподіляючи змінні і інтегруючи:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left[E - U\left(r\right)\right] - \dfrac{M^2}{m^2r^2}}}\,,\quad t = \int\frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left[E - U\left(r\right)\right] - \dfrac{M^2}{m^2r^2}}} + const\,. \tag{6}$$

Далі, переписавши (2) у вигляді $d\varphi = \dfrac{M}{mr^2}dt$ і підставивши dt з (6) та інтегруючи, знаходимо:

$$\varphi = \int\frac{\dfrac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U\left(r\right)\right] - \dfrac{M^2}{r^2}}} + const\,. \tag{7}$$

Формули (6) і (7) розв'язують у загальному вигляді поставлену задачу. Формула (7) визначає зв'язок між r і φ, тобто рівняння траєкторії в полярних координатах. Формула (6) визначає у неявному вигляді відстань r рухомої точки від центру як функцію часу. Відмітимо, що кут φ завжди міняється з часом монотонно – з (2) видно, що $\dot{\varphi}$ ніколи не змінює знаку.

Вираз (4) показує, що радіальну частинку руху можна розглядати як одновимірний рух у полі з «ефективною» потенціальною енергією

$$U_{ef} = U\left(r\right) + \frac{M^2}{2mr^2}. \tag{8}$$

Величину $M^2\big/2mr^2$ називають відцентровою енергією. Значення r, при яких

$$U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}=E,\left(E\geq U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}\right). \qquad (9)$$

визначають межі області руху по відстані від центра. При виконанні рівності (9) радіальна швидкість $\dot{r}$ обертається в 0. Це не означає зупинки (як при істинно одновимірному русі), оскільки кутова швидкість $\dot{\varphi}$ не обертається в 0. При $\dot{r}=0$ відбувається перехід функції $r(t)$ від збільшення до зменшення і навпаки.

Якщо область допустимої зміни r визначена лише однією умовою $r\geq r_{\min}$, то рух частинки інфінітний – її траєкторія приходить з нескінченності і повертається до нескінченності.

Якщо область зміни r має дві межі $r_{\min}$ і $r_{\max}$, то рух є фінітним і траєкторія цілком лежить в середині кільця, обмеженого колами $r=r_{\max}$ і $r=r_{\min}$. Але це не означає, що траєкторія обов'язково є замкнутою кривою. За час, протягом якого r змінюється від $r_{\max}$ до $r_{\min}$, потім до $r_{\max}$, радіус-вектор повернеться на кут $\Delta\varphi$, який згідно з (7) дорівнює

$$\Delta\varphi=2\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}}. \qquad (10)$$

Умова замкнутості траєкторії полягає в тому, щоб цей кут був раціональною частиною від 2π, тобто $\Delta\varphi=2\pi\frac{m}{n}$, де m і n - цілі числа. Тоді через n повторень усього періоду радіус-вектор точки, зробивши m повних обертів, співпадає з своїм початковим значенням, тобто траєкторія замкнеться. Але такі випадки є винятковими, і при довільному $U(r)$ кут $\Delta\varphi$ не є раціональною частиною від 2π. Тому в загальному випадку траєкторія фінітного руху не замкнута. Вона нескінченне число раз проходить через мінімальну і максимальну відстань і за нескінченний час заповнює все кільце між двома граничними колами.

Виявляється, що існує лише 2 типи центральних полів, в яких всі траєкторії фінітних рухів замкнуті. Це поля, пропорційні r^2 - так званий просторовий осцилятор, і поля типу $U\sim\frac{1}{r}$. До таких полів, зокрема, відносяться, ньютонівське поле всесвітнього тяжіння та кулонівське поле точкового заряду; перші мають характер притягання, а другі можуть бути як полями притягання, так і відштовхування. У випадку поля притягання

$$U=-\frac{\alpha}{r}\quad\left(\alpha_{гр}=Gmm_1,\alpha_{Кул}=kq_1q_2\right).$$

§ 20. Формули Біне та закони Кеплера (НСО)

Рівняння руху частинки в центральному полі можна отримати з функції Лагранжа в полярних координатах

$$L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) = T - U = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - U(r)\,.$$

Відповідні рівняння Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0,\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ матимуть вигляд:

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} = F_r = F(r)\,, \qquad (1)$$

$$m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = F_\varphi = 0\,. \qquad (2)$$

З рівняння (2) випливає, що $r^2\dot\varphi = C = const\,.$ (3)

Цей результат відповідає формулі (19.3), згідно з яким секторіальна швидкість матеріальної точки залишається сталою при русі в центральному полі:

$$\dot\sigma = \upsilon_s = \frac{1}{2}r^2\dot\varphi = \frac{1}{2}C = const\,. \qquad (4)$$

Рівняння (4) виражає <u>другий закон Кеплера:</u>

Радіус-вектор будь-якої планети, проведений від Сонця, за однакові проміжки часу описує однакові площі.

Виразивши з (4) $C = 2\upsilon_S$ та підставивши в (3), отримаємо:

$$\dot\varphi = \frac{2\upsilon_S}{r^2}\,. \qquad (5)$$

Оскільки функція $\varphi = \varphi(t)$ є монотонною, то це дає змогу виключити час з рівняння (1), взявши за незалежну змінну полярний кут φ:

$$\dot r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\upsilon_S}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -2\upsilon_S\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (6)$$

$$\ddot r = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \left[(5),(6)\right] = -\frac{4\upsilon_S^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (7)$$

Підставляючи (5) і (7) в (1), отримаємо <u>другу формулу Біне:</u>

$$F_r = m\left[-\frac{4\upsilon_S^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) - r\frac{4\upsilon_S^2}{r^4}\right] = -\frac{m4\upsilon_S^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]. \qquad (8)$$

(8) є диференціальним рівнянням траєкторії матеріальної точки, що рухається в центральному полі. З цього рівняння можна знайти траєкторію точки в полярних координатах $r = r(\varphi)$, якщо відома центральна сила $F = F(r)$, або центральну силу, якщо задана траєкторія руху точки.

Якщо ввести позначення $u = 1/r$, то диференційне рівняння траєкторії тіла, що рухається під дією центральної сили, в полярних координатах (r,φ) можна замість (8) представити у вигляді: $mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = \pm F$, де F - величина центральної сили (знак «+» відповідає притягуючій силі, «-» - відштовхувальній силі), $C = 2\upsilon_S$, яка дорівнює подвоєній секторіальній швидкості центра мас. Це інша форма запису другої формули Біне.

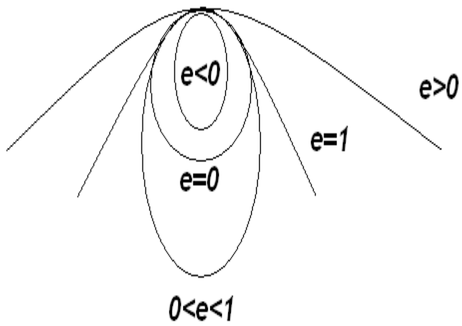
Формула Біне, якщо відоме рівняння траєкторії, тобто $r = f(\varphi)$, дозволяє визначити силу, під дією якої описується ця траєкторія, і, навпаки, знаючи силу, і проінтегрувавши рівняння, знайти траєкторію тіла. Закон руху тіла вздовж його траєкторії можна потім знайти, проінтегрувавши рівняння $C = r^2 \dfrac{d\varphi}{dt}$. Зокрема, форма траєкторії матеріальної точки в полі тяжіння сферичної маси отримується з формули (8) після інтегрування, якщо в неї підставити вираз для сили тяжіння $F = G\dfrac{mm_1}{r^2} = \dfrac{\alpha}{r^2}$:

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi \ , \tag{9}$$

де $p = \dfrac{M^2}{m\alpha}$ і $e = \sqrt{1 + \dfrac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ - так звані параметр і ексцентриситет орбіти. Рівняння (9) є рівнянням конічного перерізу з фокусом в початку координат. З (9) випливає, що

1) при $E < 0$ ексцентриситет $e < 1$ і орбіта є еліпсом радіуса $r = p$. При $e = 0$ рівняння (9) – рівняння кола радіуса $r = p$;
2) при $e = 1$ рівняння (9) визначає параболу $(E = 0)$;
3) при $E > 0$ маємо $e > 0$; рівняння (9) визначає гіперболу.

Отже, ми встановили, що рух в полі всесвітнього тяжіння є фінітним при $e < 1$ і інфінітним при $e \geq 1$. Тіла, що здійснюють фінітні рухи, називають планетами або супутниками. Проведений аналіз приводить до трьох наслідків, які були вперше виявлені Кеплером при обробці спостережень за рухом планет сонячної системи і називається законами Кеплера:



1) Траєкторіями всіх планет служать еліпси, в спільному фокусі яких розташовані Сонце;

2) Всі планети сонячної системи здійснюють плоский рух з сталою секторіальною швидкістю;

3) Відношення квадратів періодів T обертання планет до кубів великих піввісей їх еліптичних траєкторій однакове для всіх планет: $\dfrac{T^2}{a^3} = const$.

Для знаходження першої формули Біне запишемо квадрат модуля швидкості матеріальної точки в полярних координатах:

$$\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 . \tag{10}$$

Підставляючи (5) і (6) в (10), отримаємо <u>першу формулу Біне</u>:

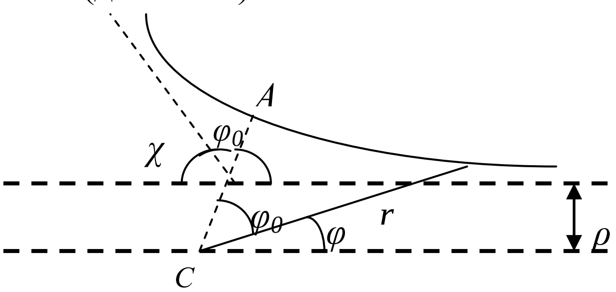
$$\upsilon^2 = 4\upsilon_S^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right\}. \tag{11}$$

§21. Розсіяння частинок

В § 19 було показано, що задача про рух двох взаємодіючих частинок зводиться до задачі про рух частинки з приведеною масою $m = {m_1 m_2}/{(m_1 + m_2)}$ в центральному полі сил, причому відстань цієї частинки від центра сил дорівнює відстані між взаємодіючими частинками. Знайшовши траєкторію уявної частинки маси m, легко знайти траєкторію обох частинок.

Скористаємося цим прийомом для вивчення процесу розсіяння частинки маси m_1 частинкою маси m_2, яка спочатку була нерухома в лабораторній системі відліку. Перейдемо в систему відліку, пов'язану з центром інерції частинок і розглянемо частинку маси m, що рухається в силовому полі, центр якого співпадає з центром інерції C. На великих відстанях від центру поле будемо вважати таким слабким, що рух частинки далеко від центру можна вважати прямолінійним.

При вивченні розсіяння частинок нас цікавить не стільки сам процес розсіяння при проходженні однієї частинки поблизу другої, скільки кінцевий результат процесу розсіяння, тобто нас цікавлять такі величини, як кут розсіяння або ж ймовірність того, що розсіяння відбудеться на певний кут. Початкові умови задаються енергією і моментом імпульсу падаючих частинок. Нехай υ_∞ - швидкість налітаючих частинок на нескінченості. Введемо в розгляд прицільну відстань ρ - найкоротшу відстань, на якій падаюча частинка пройшла б біля розсіюючого центру, якби поле не діяло б на неї (див. мал.).



Траєкторія частинки в центральному полі симетрична по відношенню до прямої, проведеної в найближчу до центра точку орбіти (CA). Тому обидві асимптоти орбіти перетинають пряму CA під однаковими кутами φ_0. Якщо позначити ці кути φ_0, то кут χ розсіяння (відхилення) частинки при її про літанні мимо центру є, як видно з малюнку, $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$. (1)

Кут же φ_0 визначається, згідно з (19.7), інтегралом

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{{M}/{r^2}\, dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - {M^2}/{r^2}}}\ , \tag{2}$$

взятим між найближчим до центра $(r_{\min} = CA)$ і нескінченно віддаленим положенням частинки. Пригадаємо, що $r_{\min}$ є коренем виразу, що стоїть під знаком радикала.

При інфінітному русі, з яким ми маємо тут справу, зручно перейти від сталих E і M до υ_∞ і ρ згідно з формулами:

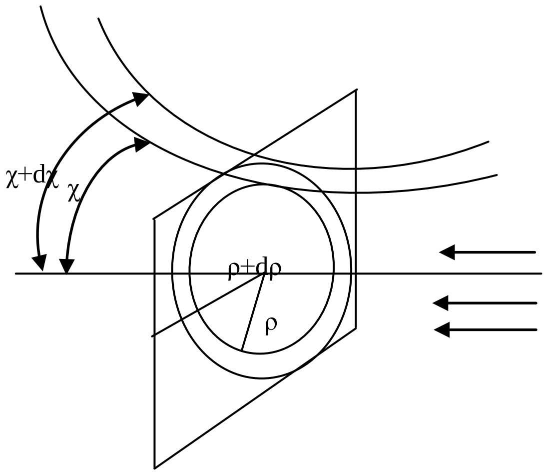
$$E = {m\upsilon_\infty^2}/{2}\ ;\ \ M = m\upsilon_\infty \cdot \rho\ , \tag{3}$$

так що формула (2) набуде вигляду:
$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{m\upsilon_\infty^2}}}. \qquad (4)$$

Разом з (1) вона виражає залежність χ від ρ.

У фізичних застосуваннях доводиться, як правило, мати справу не з індивідуальним відхиленням частинки, а, як кажуть, з розсіянням цілого пучка однакових частинок, які падають на розсіюючий центр з однаковою швидкістю $\vec{\upsilon}_\infty$. Різні частинки в пучку мають різні прицільні відстані і тому розсіюються під різними кутами χ. Нехай dN - число частинок, що розсіяні за одиницю часу на кути, які лежать в інтервалі між χ і $\chi + d\chi$. Відношення
$$d\sigma = {dN}/{n}, \qquad (5)$$
де n - число частинок, які проходять за одиницю часу через одиницю площі поперечного перерізу пучка, називається поперечним або ефективним перерізом розсіяння. Воно має розмірність площі і є важливою характеристикою процесу розсіяння, тому що визначається тільки видом розсіюючого поля.

Якщо пучок однорідний по перерізу ($n = const$), то потік частинок, прицільна відстань яких лежить в межах від ρ до $\rho + d\rho$, дорівнює $dN = n \cdot 2\pi\rho d\rho$ (потік = густина потоку $\times$ площа). Цей потік розсіюється під кутами від χ до $\chi + d\chi$. Отже, ефективний переріз у випадку однорідного потоку дорівнює:
$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho, \qquad (6)$$



або, враховуючи залежність $\rho(\chi)$, обернену до $\chi(\rho)$,
$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\chi \qquad (7)$$
(ми взяли модуль $\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|$, тому що зазвичай ${d\rho}/{d\chi} < 0$).

Часто $d\sigma$ відносять не до елемента плоского кута $d\chi$, а до елемента тілесного кута $d\Omega$. Тілесний кут між конусами з кутами розхилу χ і $\chi + d\chi$ є $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$. Тому маємо з (7)
$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\Omega. \qquad (8)$$

Повертаючись до фактичної задачі про розсіяння пучка частинок не на нерухомому силовому центрі, а на інших початково нерухомих частинках, ми можемо сказати, що формула (7) визначає ефективний переріз в залежності від кута розсіяння в системі центра інерції. Для знаходження ж ефективного перерізу в залежності від кута розсіяння θ в лабораторній СВ необхідно виразити в цій формулі χ через θ. Але це не входить до питань даного розгляду.

§22. Формула Резерфорда

Одним з важливих застосувань отриманих в § 21 формул є розсіяння заряджених частинок у кулонівському полі: $U = \frac{\alpha}{r}$. Підставивши U в (21.4), отримаємо після елементарного інтегрування

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\alpha / m\vartheta_\infty \rho}{\sqrt{1 + \left(\alpha / m\upsilon_\infty{}^2 \rho \right)^2}} \Rightarrow ctg\varphi_0 = \frac{\alpha}{m\upsilon_\infty{}^2 \rho},$$

звідки

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 \upsilon_\infty{}^4} tg^2 \varphi_0$$

або, вводячи згідно з (21.1) $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$; $\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 \upsilon_\infty{}^4} ctg^2 \frac{\chi}{2}$. (1)

Диференціюючи цей вираз по χ і підставляючи в (21.7), знайдемо:

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi = \pi \left| \frac{d\rho^2}{d\chi} \right| d\chi = \pi \left(\frac{\alpha}{m\upsilon_\infty{}^2} \right)^2 \frac{\cos \chi/2}{\sin^3 \chi/2} d\chi \tag{2}$$

або

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m\upsilon_\infty{}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \tag{3}$$

Це є так звана формула Резерфорда. Відмітимо, що ефективний переріз не залежить від знаку α, так що отриманий результат відноситься в рівній мірі до кулонівського поля відштовхування і притягання.

Отримана формула годиться для перерізу розсіяння у випадку, коли центри розсіяння - центри інерції - нерухомі, тоді як в реальних експериментах по розсіянню нерухомими є частинки мішені, а тому центр інерції системи буде рухатись, і дані по розсіянню, отримані в лабораторній системі відліку, повинні бути перераховані до системи центра інерції, перш ніж можна буде користуватись отриманими формулами.

Проте у випадку, коли $m_1 << m_2$ (розсіювані частинки набагато легше розсіюючих), наближено кут розсіяння першої частинки $\theta_1 \approx \chi$ і формули (2) та (3) залишаються вірними і в лабораторній системі. В дослідах Резерфорда спостерігалось розсіяння α-частинок (ядер He^{++}) масою m_α кулонівським полем важкого ядра з зарядом Z і масою $m_я >> m_\alpha$. Тоді $\alpha = 2Ze^2$,

$m = \dfrac{m_\alpha m_я}{m_\alpha + m_я} \approx m_\alpha$, і з (2) та (3) матимемо

$$d\sigma = \pi \left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha \upsilon_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos\left(\theta/2\right)}{\sin^3\left(\theta/2\right)} d\theta,$$

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{m_\alpha \upsilon_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\left(\theta/2\right)}.$$

§23. Рух тіла змінної маси

В сучасній техніці велике практичне значення має задача про рух тіла змінної маси. Нехай зміна маси тіла відбувається за рахунок неперервного відділення від тіла деяких його частин, причому за нескінченно малий проміжок часу відділяється частинка нескінченно малої маси. Але швидкість частинки, що відділяється, від швидкості тіла відрізняється на скінчену величину. Знайдемо рівняння руху тіла, припустивши, що тіло і частинку можна вважати матеріальними точками.

Відділення частинок від тіла відбувається за рахунок внутрішніх сил системи тіло-частинка. Отже, зміна імпульсу задовольняє закону Ньютона

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{зовн}. \tag{1}$$

Підрахуємо цю зміну. В момент часу t (до відділення частинки від тіла) імпульс частинки дорівнював: $\vec{P}(t) = m\vec{\upsilon}$, (2)

де m - маса тіла в момент t, $\vec{\upsilon}$ - швидкість тіла в той же момент часу відносно деякої ІСВ. В момент часу $t + dt$ (після відділення частинки) імпульс системи дорівнює сумі імпульсу тіла і імпульсу частинки, тобто:

$$\vec{P}(t + dt) = (m - |dm|)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) + |dm| \cdot \vec{\upsilon}_1, \tag{3}$$

де $d\vec{\upsilon}$ - зміна швидкості за час dt, dm - зменшення маси тіла, відповідно $|dm|$ - маса частинки, що відділяється, $\vec{\upsilon}_1$ - швидкість цієї частинки відносно ІСВ. Отже, зміна імпульсу системи з точністю до нескінчено малих другого порядку дорівнює

$$d\vec{P} = md\vec{\upsilon} + |dm| \cdot (\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}). \tag{4}$$

Підставляючи цей вираз в (1), отримаємо рівняння руху точки зі змінною масою, так зване рівняння Мещерського:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_{зовн} + \frac{dm}{dt}\vec{u}, \tag{5}$$

де $\vec{u} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}$ - швидкість частинок, що віддаляються, відносно тіла, $\vec{F}_{зовн}$ - зовнішня сила, що діє на тіло, а $\dfrac{dm}{dt} < 0$.

Для прикладу розглянемо рух ракети при відсутності зовнішнього поля. Нехай $\vec{u}$ - швидкості частинок – продуктів згорання палива – є сталою і напрямлена протилежно до $\vec{\upsilon}_0$ - швидкості тіла в початковий момент часу.

Помноживши праву і ліву частину рівняння (5) на dt і проектуючи їх на вісь, напрямлену вздовж вектора $\vec{\upsilon}_0$, отримаємо:

$$m d\upsilon = -u dm,$$

звідки знайдемо:

$$d\upsilon = -u\frac{dm}{m}; \quad \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = -u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m};$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = -u\ln\frac{m}{m_0} = u\ln\frac{m_0}{m},$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + u\ln\frac{m_0}{m}. \qquad (6)$$

Отже, швидкість, набута тілом залежить тільки від величини відносної швидкості частинок і від зміни маси тіла і не залежить від того, по якому закону змінювалась маса тіла. Формула (6) називається формулою Ціолковського.

§24. Теорема про віріал

На відміну від розглянутих раніше теорем і законів механіки у цьому параграфі ми введемо характеристику руху, яка має статистичний характер і пов'язана з усередненням механічних величин по часу. Нехай f - скалярна функція часу, і $\bar{f}_\tau$ - середнє значення f за час τ, яке визначається за формулою:

$$\bar{f}_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f dt. \qquad (1)$$

Введемо тепер в розгляд скалярну функцію $G = \sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{r}_a$. Її повна похідна по часу дорівнює: $\frac{dG}{dt} = \sum_a \dot{\vec{r}}_a \vec{p}_a + \vec{r}_a \dot{\vec{p}}_a$. Але $\sum_a \dot{\vec{r}}_a \vec{p}_a = \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \dot{\vec{r}}_a = \sum_a m_a \vec{\upsilon}_a^2 = 2T$, а $\sum_a \dot{\vec{p}}_a \vec{r}_a = \sum_a m_a \ddot{\vec{r}}_a \vec{r}_a = \sum_a \vec{F}_a \cdot \vec{r}_a$, тому $\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_a \vec{F}_a \vec{r}_a$.

Усереднимо цей вираз, тобто проінтегруємо його праву і ліву частини по t від 0 до τ і розділимо на τ, і отримаємо:

$$2\bar{T} + \sum_a \overline{\vec{F}_a \cdot \vec{r}_a} = \frac{1}{\tau}\left[G(\tau) - G(0)\right]. \qquad (2)$$

Права частина цієї рівності обертається в 0, якщо виконується одна з наступних умов:

1) Рух періодичний з періодом τ; в цьому випадку для всіх a $\vec{p}_a(\tau) = \vec{p}_a(0)$; $\vec{r}_a(\tau) = \vec{r}_a(0)$, так що $G(\tau) = G(0)$.

2) Інтервал τ необмежений, а функція $G(\tau)$ - обмежена.

Отже, якщо виконується умова 1) або 2), то

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\sum_a \overline{\vec{F}_a \cdot \vec{r}_a} = \upsilon, \qquad (3)$$

де $$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\sum_a \overline{\vec{F}_a \cdot \vec{r}_a} \quad (4)$$

називається віріалом системи. Таким чином, ми прийшли до теореми про віріал: при виконанні умов 1) або 2) середнє за час τ значення кінетичної енергії системи дорівнює її віріалу.

Теорема про віріал використовується в статистичній фізиці при умові 2), тобто при $\tau \to \infty$; зустрічається вона і в квантовій механіці.

Якщо система консервативна, тобто якщо рух відбувається в стаціонарному потенціальному полі з потенціальною енергією $U(\vec{r}_a)$, то можна в віріалі замінити сили $\vec{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}\left(= -\vec{\nabla}_a U\right)$, так що в (3) матимемо

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\sum_a \overline{\vec{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}} = \frac{1}{2}\sum_a \overline{\left(x_a \frac{\partial U}{\partial x_a} + y_a \frac{\partial U}{\partial y_a} + z_a \frac{\partial U}{\partial z_a}\right)}. \quad (5)$$

Розглянемо тепер окремий, але досить поширений випадок коли U - однорідна функція координат, тобто функція, що задовольняє умові

$$U\left(\lambda\vec{r}_1, \lambda\vec{r}_2, ..., \lambda\vec{r}_N\right) = \lambda^k U\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N\right),$$

де λ - довільна стала, а число k – ступінь однорідності функції. Диференціюючи ліву і праву частини цієї рівності по λ, отримаємо:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial(\lambda\vec{r}_1)}\vec{r}_1 + \frac{\partial U}{\partial(\lambda\vec{r}_2)}\vec{r}_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial(\lambda\vec{r}_N)}\vec{r}_N = k\lambda^{k-1}U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N).$$

Якщо тепер покласти тут $\lambda = 1$, то прийдемо до теореми Ейлера:

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}\vec{r}_1 + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}\vec{r}_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_N}\vec{r}_N = kU(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) \quad (6)$$

Використовуючи тепер теорему Ейлера до віріалу в (5), отримаємо:

$$\overline{T} = \frac{k}{2}\overline{U}. \quad (7)$$

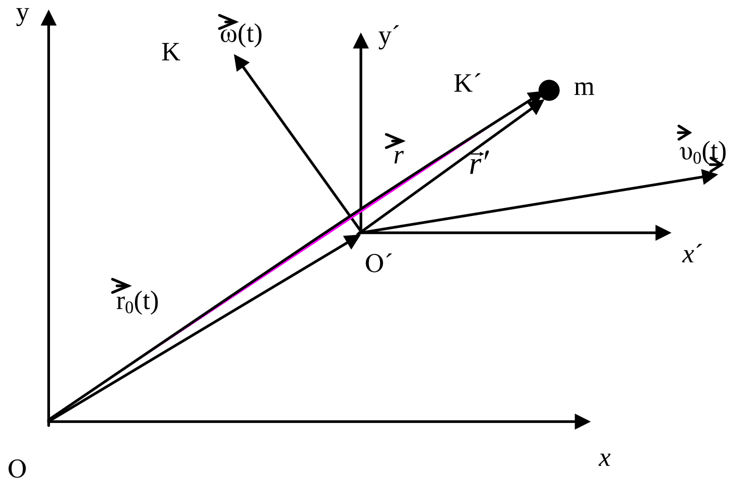
З іншого боку $\overline{T} + \overline{U} = \overline{E} = E$, і таким чином (7) можна представити в еквівалентних формах: $$\overline{T} = \frac{k}{k+2}E; \quad \overline{U} = \frac{2}{k+2}E, \quad (8)$$

які виражають $\overline{U}$ і $\overline{T}$ через повну енергію системи E.

Зокрема, для малих коливань $\left(U \sim \vec{r}_a^{\,2} \Rightarrow k = 2\right)$ маємо: $\overline{T} = \overline{U}$, тобто середні значення кінетичної і потенціальної енергії гармонічних коливальних систем співпадають.

Для гравітаційної взаємодії за законом Ньютона $U = -G\frac{mM}{r}$, тобто $k = -1$, тому $\overline{T} = -\frac{\overline{U}}{2}$. При цьому $E = -\overline{T}$ у відповідності з тим, що при такій взаємодії рух відбувається в скінченій області простору лише при від’ємній повній енергії.

§25. Рух у неінерціальних системах відліку (НСО)



Функція Лагранжа однієї частинки має вигляд

$$L = \frac{m\vec{\upsilon}^2}{2} - U(\vec{r}) \qquad (1)$$

тільки в ІСВ. Знайдемо її вигляд L в довільній неінерціальній СВ. На малюнку зображені ІСВ К і неінерціальна система відліку (НСВ) К´, початок якої О´ рухається в системі К зі швидкістю $\vec{\upsilon}_0(t)$, а сама система К´, крім того, обертається відносно системи К з кутовою швидкістю $\vec{\omega}(t)$. Якщо в системі К´ деяка частинка рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}'$, то відносно ІСВ К вона має швидкість

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0(t) + \vec{\upsilon}' + [\vec{\omega}\vec{r}'] \; . \qquad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо:

$$L = \frac{m}{2}\vec{\upsilon}_0^{\,2}(t) + \frac{m}{2}\vec{\upsilon}'^2 + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}']^2 + m\vec{\upsilon}_0(t)\vec{\upsilon}' + m\vec{\upsilon}_0(t)[\vec{\omega}\vec{r}'] + m\vec{\upsilon}'[\vec{\omega}\vec{r}'] - U(\vec{r}). \qquad (3)$$

Перший доданок в (3) можна опустити, оскільки він може бути представлений як повна похідна по t від деякої функції (див. §7). Розглянемо четвертий і п’ятий доданки у формулі (3):

$$m_0\vec{\upsilon}_0(t)\vec{\upsilon}' + m\vec{\upsilon}_0(t)[\vec{\omega}\vec{r}'] = m\vec{\upsilon}_0(t)\{\vec{\upsilon}' + [\vec{\omega}\vec{r}']\} = m\vec{\upsilon}_0(t)\frac{d'\vec{r}' + [d\vec{\varphi}, \vec{r}']}{dt}, \qquad (4)$$

де $d'\vec{r}'$ - приріст $\vec{r}'$ за час dt в системі К´, $d\vec{\varphi}$ - кут на який повертається система К´ за час dt. Але

$$d'\vec{r}' + [d\vec{\varphi}, \vec{r}'] = d\vec{r}'$$

є приріст вектора $\vec{r}'$ відносно системи К, причому добавка $[d\vec{\varphi}, \vec{r}']$ з’являється внаслідок повороту НСВ К´, що аналогічно виводу формули для $\vec{r}$ в §12. Отже, сумі четвертого і п’ятого доданків можна придати вигляд:

$$m\vec{\upsilon}_0(t)\frac{d\vec{r}'}{dt} = [\text{або}] = \frac{d}{dt}\{m\vec{\upsilon}_0(t)\vec{r}'\} - m\vec{r}'\frac{d\vec{\upsilon}_0}{dt}.$$

Перший доданок тут, як повну похідну по t від функції координат і часу, можна відкинути. В другому доданку $\frac{d\vec{\upsilon}_0}{dt} = \vec{w}_0(t)$ є прискоренням початку координат системи К´ відносно ІСВ К. Отже, ми приходимо до наступного виразу для функції Лагранжа в змінних $\vec{r}'$ і $\vec{\upsilon}'$:

$$L' = \frac{m\vec{\upsilon}'^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}']^2 - m\vec{r}'\vec{w}_0(t) + m\vec{\upsilon}'[\vec{\omega}\vec{r}'] - U(\vec{r}'). \qquad (5)$$

Ми отримали загальний вигляд функції Лагранжа частинки в довільній НСВ. Функцію U слід тепер вважати заданою в змінних $\vec{r}'$, перехід до яких від змінної $\vec{r}$ здійснюється за формулою $\vec{r} = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'$, де $\vec{r}_0(t)$ - радіус-вектор початку координат системи K′ в системі K. Завдяки $\vec{r}_0(t)$ функція $U(\vec{r}\,')$ залежатиме від t.

Здійснимо циклічну перестановку векторів в четвертому доданку в (5): $\vec{\upsilon}\,'[\vec{\omega}\vec{r}\,'] = \vec{r}\,'[\vec{\upsilon}\,'\vec{\omega}]$ та перетворимо вираз $[\vec{\omega}\vec{r}\,']^2$ в (5):

$$[\vec{\omega}\vec{r}\,']^2 = \omega^2 r'^2 \sin^2\theta = \omega^2 r'^2 \left(1-\cos^2\theta\right) = \vec{\omega}^2\vec{r}\,'^2 - \left(\vec{\omega}\vec{r}\,'^2\right)^2,$$

тоді отримаємо

$$L' = \frac{m\vec{\upsilon}\,'^2}{2} + \frac{m\vec{\omega}^2\vec{r}\,'^2}{2} - \frac{m\left(\vec{\omega}\vec{r}\,'\right)^2}{2} - m\vec{r}\,'\vec{w}_0(t) + m\vec{r}\,'[\vec{\upsilon}\,'\vec{\omega}] - U(\vec{r}\,') \quad . \tag{7}$$

Рівняння Лагранжа в системі K′ $\frac{d}{m}\frac{\partial L'}{\partial \vec{\upsilon}\,'} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}\,'}$ з функцією Лагранжа (7) має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{\upsilon}\,' + m[\vec{\omega}\vec{r}\,']\right) = m\omega^2\vec{r}\,' - m(\vec{\omega}\vec{r}\,')\cdot\vec{\omega} - m\vec{w}_0(t) + m[\vec{\upsilon}\,'\vec{\omega}] - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}\,'},$$

або

$$m\vec{w}\,' + m\left[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}\,'\right] + m[\vec{\omega}\vec{\upsilon}\,'] = m\left[\vec{\omega},[\vec{r}\,'\vec{\omega}]\right] - m\vec{w}_0(t) + m[\vec{\upsilon}\,'\vec{\omega}] - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}\,'}. \tag{8}$$

Звідси отримаємо рівняння руху в системі K′:

$$m\vec{w}\,' = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}\,'} - m\vec{w}_0(t) + m\left[\vec{r}\,'\dot{\vec{\omega}}\right] + m\left[\vec{\omega},[\vec{r}\,'\vec{\omega}]\right] + 2m[\vec{\upsilon}\,'\vec{\omega}]. \tag{9}$$

Ми бачимо, що прискорення частинки в системі K' визначається, крім обумовленої зовнішнім полем сили - $\partial U / \partial \vec{r}\,'$, рядом додаткових сил, які називаються силами інерції. Доданок $m[\vec{\omega}[\vec{r}\,'\omega]]$ дає відцентрову силу інерції, а доданок $2m[\vec{\upsilon}\,'\vec{\omega}]$ - коріолісову силу. Сила $m\left[\vec{r}\,'\dot{\vec{\omega}}\right]$ пов'язана з нерівномірністю обертання і спеціальної назви не має.

1) Якщо система K′ рухається відносно системи K поступально, отже, $\vec{\omega} = 0$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$, в рівняння руху входить тільки одна сила інерції

$$\vec{f}_{ін} = -m\vec{w}_0(t). \tag{10}$$

Важливим є те, що ця сила, як і сила тяжіння $m\vec{g}$, пропорційна масі частинки. Ця обставина лежить в основі принципу еквівалентності загальної теорії відносності.

2) Розглянемо окремий випадок системи відліку, яка рівномірно обертається і не має поступального прискорення: $\vec{w}_0(t) = 0$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Тоді функція Лагранжа (7) має вигляд:

$$L' = \frac{m\vec{\upsilon}\,'^2}{2} + \frac{m[\vec{\omega}\vec{r}\,']^2}{2} + m\vec{\upsilon}\,'[\vec{\omega}\vec{r}\,'] - U \quad . \tag{11}$$

Знайдемо імпульс, момент імпульсу і енергію частинки для цього випадку.
Імпульс

$$\vec{p}\,' = \frac{\partial L'}{\partial \vec{\upsilon}\,'} = m\vec{\upsilon}\,' + m[\vec{\omega}\vec{r}\,'] = m\{\vec{\upsilon}\,' + [\vec{\omega}\vec{r}\,']\}. \tag{12}$$

2а) Якщо система K′ не має не тільки поступального прискорення, але й поступальної швидкості $(\vec{\upsilon}_0 = 0)$, то як видно з (2), вираз, що входить в

(12) в фігурних дужках, є швидкість частини $\vec{\upsilon}$ відносно ІСВ К. Таким чином, $\vec{p}' = m\vec{\upsilon}$, тобто співпадає з імпульсом $\vec{p}$ частинки в ІСВ:

$$\vec{p}' = \vec{p}\,. \qquad (13)$$

2б) Далі, якщо початки систем K і K' співпадають, то співпадають і радіус-вектори $\vec{r}$ і $\vec{r}'$. Звідси, з урахуванням (13), отримаємо, що момент імпульсу $\vec{M}' = \left[\vec{r}'\vec{p}'\right]$ в системі К′ співпадає з моментом імпульсу $\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right]$ в системі К:

$$\vec{M}' = \vec{M}\,. \qquad (14)$$

Як ми встановили в §10, енергія частинки в системі К′ визначається формулою: $E' = \sum \frac{\partial L'}{\partial \vec{\upsilon}'}\vec{\upsilon}' - L' = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i'}\dot{x}_i' - L'$, де x_i' - декартові координати частинки в системі К′. Але $\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i'} = p'_i$ - проекція імпульсу $\vec{p}'$ на i - ту координатну вісь; $\dot{x}_i'$- проекція на ту ж саму вісь швидкості $\vec{\upsilon}'$. Отже, вираз для енергії можна записати у вигляді:

$$E' = \vec{p}'\vec{\upsilon}' - L'\,. \qquad (15)$$

Підставивши сюди значення (12) для $\vec{p}'$ і вираз (11) для L', отримаємо наступну формулу:

$$E' = \frac{m\vec{\upsilon}'^2}{2} + U - \frac{m}{2}\left[\vec{\omega}\vec{r}'\right]^2. \qquad (16)$$

Отже, обертання системи відліку проявилось у появі у виразі для енергії додаткового, незалежного від швидкості частинки υ', доданку

$$U_{вц} = -\frac{m}{2}\left[\vec{\omega}\vec{r}'\right]^2. \qquad (17)$$

Цю додаткову «потенціальну» енергію називають відцентровою.

Замінимо у формулі (16) $\vec{\upsilon}'$ через $\vec{\upsilon} - \left[\vec{\omega}\vec{r}'\right]$ (формула (2) з $\vec{\upsilon}_0(t) = 0$). В результаті отримаємо:

$$E' = \frac{m\vec{\upsilon}^2}{2} + U - m\vec{\upsilon}\left[\vec{\omega}\vec{r}'\right] = E - m\vec{\upsilon}\left[\vec{\omega}\vec{r}'\right]. \qquad (18)$$

Перші два доданки дають енергію частинки E в системі К. Якщо початки системи К і К′ співпадають, то $\vec{r}'$ можна замінити на $\vec{r}$. Тоді останній доданок в (18) з допомогою циклічної перестановки можна привести до виду

$$m\vec{\upsilon}\left[\vec{\omega},\vec{r}\right] = \vec{\omega}\left[\vec{r}, m\vec{\upsilon}\right] = \vec{\omega}\vec{M}\,.$$

Отже, між енергіями частинки E в системі К і E' в системі К' існує співвідношення

$$E' = E - \vec{\omega}\vec{M}\,. \qquad (19)$$

Нагадаємо, що ця формула отримана в припущенні, що початки обох систем відліку співпадають. Таким чином, замість $\vec{M}$ у формулі (19) можна писати $\vec{M}'$ (див. (14)).

Отже, якщо система відліку К′ рівномірно обертається відносно ІСВ К і початки в обох системах співпадають, то імпульс і момент імпульсу частинки в обох системах співпадають, а енергія частинки в системі К′ менше енергії в системі К на величину $\vec{\omega}\vec{M}$.

РОЗДІЛ 4. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

§26. Вільні коливання системи без тертя

Розглянемо систему з одним ступенем вільності, в якій відсутні сили тертя. Потенціальна енергія такої системи має вигляд $U = U(q)$, де q - узагальнена координата. В положенні рівноваги $q = q_0$ діюча на систему сила $F = -\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q_0} = 0$, а потенціальна енергія має мінімум. Відхилення від такого положення приводить до виникнення сили $-\frac{dU}{dq}$, що намагається повернути систему назад. При малих відхиленнях від положення рівноваги в розкладанні різниці $U(q) - U(q_0)$ по степеням $q - q_0$ досить зберегти перші складові:

$$U(q) - U(q_0) = U'(q_0)(q - q_0) + \frac{1}{2}U''(q_0)(q - q_0)^2 + \dots .$$

Із умови рівноваги $U'(q_0) = 0$. Позначимо також $x = q - q_0$, і $k = U''(q_0) > 0$. Будемо надалі відраховувати потенціальну енергію від її мінімального значення, тобто покладемо $U(q_0) = 0$. Таким чином,

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \qquad (1)$$

Кінетична енергія системи з одним ступенем вільності має в загальному випадку вигляд: $T = \frac{1}{2}a(q)\cdot\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\cdot\dot{x}^2$. При проходженні через положення рівноваги кінетична енергія не обертається в *0*. Отже, $a(q_0) \neq 0$. Розклавши $a(q)$ в ряд і залишивши внаслідок малості $q - q_0$ тільки нульовий член розкладу, який позначимо через m:

$$a(q) = a(q_0) + a'(q_0)\cdot(q - q_0) + \dots \approx a(q_0) \equiv m,$$

отримаємо $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$. Складемо функцію Лагранжа системи поблизу положення рівноваги:

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \qquad (2)$$

Відповідні рівняння Лагранжа: $m\ddot{x} + kx = 0$ або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (3)$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (4)$$

Системи з таким рівнянням руху часто називають **осцилятором**. Двома незалежними розв‘язками лінійного диференційного рівняння (3) є $\cos\omega_0 t$ і $\sin\omega_0 t$, так що його загальний розв‘язок можна представити у вигляді:

$$x = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t. \qquad (5)$$

Цей вираз можна також переписати у вигляді:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (6)$$

Оскільки $\cos(\omega t + \alpha) = \cos\omega t \cdot \cos\alpha - \sin\omega t \cdot \sin\alpha$, то порівняння з (5) показує, що довільні сталі a і α пов‘язані зі сталими c_1 і c_2 співвідношеннями:

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\,,\ tg\alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \quad (7)$$

Отже, поблизу положення стійкої рівноваги система здійснює гармонійний коливальний рух. Коефіцієнт a при періодичному множнику в (6) називається *амплітудою коливань* і дорівнює максимальному зміщенню системи від положення рівноваги. Аргумент косинуса в (6) називають *фазою коливань*, а α – *початковою фазою,* значення якої залежить від вибору початку відліку коливань. Величина ω називається *циклічною частотою коливань*. Частота є основною характеристикою коливань, незалежною від початкових умов руху. Згідно з формулою (4) вона повністю визначається властивостями механічної системи. Ця властивість частоти пов‘язана з малістю коливань і зникає при переході до високих наближень. З математичної точки зору вона пов‘язана з квадратичною залежністю потенціальної енергії від координати. Період коливань – час, за який здійснюється одне повне коливання, пов'язаний з циклічною частотою формулою $T=2\pi/\omega$, а звичайна частота – число коливань за одиницю часу, є $\nu=1/T=\omega/2\pi$.

Повна енергія системи, яка здійснює малі коливання, дорівнює:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = [\text{підставимо (6)}] = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot a^2 = const. \quad (8)$$

Вона пропорційна квадрату амплітуди коливань.

Залежність координати коливальної системи від часу часто виявляється зручно представити у вигляді дійсної частини комплексного виразу:

$$x = \mathrm{Re}\left\{A \cdot e^{i\omega t}\right\}, \quad (9)$$

де A – комплексна амплітуда, яку можна записати у вигляді:

$$A = a \cdot e^{i\alpha}, \quad (10)$$

щоб прийти до виразу (6). Модуль комплексної амплітуди співпадає зі звичайною амплітудою, а аргумент – з початковою фазою.

Оперування з експоненціальними множниками в математичному відношенні простіше, ніж з тригонометричними, тому що диференціювання не міняє їх вигляду. При цьому, поки виконується лише лінійні операції (додавання, множення на сталі коефіцієнти, диференціювання, інтегрування), можна взагалі опускати знак взяття дійсної частини, переходячи до нього лише в кінці обчислень.

§27. Затухаючі коливання

У всякій реальній коливальній системі діють сили, що гальмують рух системи і приводять до поступового зменшення розмахів коливань – до затухання. Механічна енергія системи при цьому переходить у внутрішню енергію системи і оточуючого середовища. Такий процес називають *дисипацією енергії*.

Ми обмежимося розглядом випадків, коли на систему діє сила тертя, яка пропорційна швидкості системи: $f_{тр} = -\alpha\dot{x}$, де α – позитивний коефіцієнт, а знак «–» вказує, що сила діє в сторону, протилежну швидкості. Підставляючи цю силу в рівняння руху (24.3), отримаємо: $m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$. Розділимо його на m і введемо позначення:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda, \tag{2}$$

де ω_0 є частотою вільних коливань системи при відсутності тертя; величина **λ** називається *коефіцієнтом затухання.* Отже, ми маємо рівняння руху:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{3}$$

У відповідності з загальними правилами розв‘язку лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами покладемо $x = e^{rt}$, $\dot{x} = re^{rt}$, $\ddot{x} = r^2 e^{rt}$ і знайдемо для r характеристичне рівняння $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$. Загальний розв‘язок рівняння (3) є:

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \tag{4}$$

Тут слід розрізняти 2 випадки.

Якщо $\lambda < \omega_0$ (мале тертя), то ми маємо 2 комплексно спряжених значення r. Загальний розв‘язок рівняння руху можна представити в цьому випадку так:

$$x = \mathrm{Re}\left\{A \cdot \exp(-\lambda t + it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})\right\} = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \tag{5}$$

де α і a – дійсні константи. Представлений цими формулами рух являє собою так звані затухаючі коливання. Його можна розглядати як гармонічні коливання з експоненціально спадаючою амплітудою. Швидкість спадання амплітуди визначається показником λ, а «частота» ω коливань менше частоти вільних коливань без тертя. Зменшення частоти і, відповідно, зростання періоду при терті можна було чекати заздалегідь, тому що тертя взагалі затримує рух.

Нехай тертя $\lambda > \omega_0$ (велике тертя). Тоді обидва значення r дійсні, причому від‘ємні. Загальний вигляд розв‘язку:

$$x = c_1 \cdot e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}. \tag{6}$$

Ми бачимо, що у цьому випадку, який виникає при досить великому терті, рух полягає в швидкому спаданні $|x|$, тобто в асимптотичному (при $t \to \infty$) наближенні до положення рівноваги. Цей тип руху називають *аперіодичним затуханням*.

В особливому випадку, коли $\lambda = \omega_0$, характеристичне рівняння має всього один подвійний корінь $r = -\lambda$. Як відомо, загальний розв‘язок диференційного рівняння має в цьому випадку вигляд:

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t}. \tag{7}$$

Це окремий випадок аперіодичного затухання. Воно теж не має коливального характеру.

§28. Вимушені коливання

Нехай на систему, яку ми розглядали в §27, додатково діє періодична зовнішня сила $f\cos\gamma t$. Прибавивши цю силу в праву частину рівнянь руху (24.3) і поділивши на *m*, отримаємо

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t\,. \qquad (1)$$

Розв‘язок цього рівняння зручно шукати в комплексній формі, для чого запишемо в правій частині $e^{i\gamma t}$ замість $\cos\gamma t$: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cdot e^{i\gamma t}$. Частинний інтеграл шукаємо у вигляді $x = B\cdot e^{i\gamma t}$ і знайдемо для *B*: $-\gamma^2 B\cdot e^{+i\gamma t} + 2\lambda i\gamma B e^{i\gamma t} + \omega_0^2 B e^{i\gamma t} = \frac{f}{m}e^{i\gamma t}$,

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)} = be^{i\delta} = b(\cos\delta + i\sin\delta)\cdot \qquad (2)$$

Представимо B у вигляді $be^{i\delta}$ $(B = b\cdot e^{i\delta})$, звідки маємо для b і δ:

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \qquad tg\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}\,. \qquad (3)$$

Виділивши дійсну частину від виразу $x = Be^{i\gamma t} = be^{i(\gamma t+\delta)} \Rightarrow \operatorname{Re} Be^{i\gamma t} = b\cos(\gamma t + \delta)$, отримаємо частинний інтеграл рівняння (1), а додавши до нього загальний розв‘язок рівняння без правої частини, отримаємо остаточно:

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta)\,. \qquad (4)$$

Перший доданок експоненціально спадає з часом, так що через достатньо великий проміжок часу залишається тільки другий доданок:

$$x = b\cos(\gamma t + \delta)\,. \qquad (5)$$

Це означає, що з часом в системі встановлюються вимушені коливання з частотою γ зовнішньої сили.

Згідно (3) амплітуда b вимушеного коливання суттєво зростає при наближенні частоти γ до ω_0. Це явище називається *резонансом*. При відсутності тертя ($\lambda = 0$) зростання виявляється нескінченим. Умову резонансу знайдемо, розшукавши частоту зовнішньої сили, яка при заданій амплітуді сили f дає максимальне значення амплітуди коливань b. Їй відповідає мінімум знаменника в b (3):

$$\frac{d}{d\gamma}\left[\left(\omega_0{}^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda^2\gamma^2\right] = 0 \Rightarrow 2\left(\omega_0{}^2 - \gamma^2\right)\left(-2\gamma\right) + 4\lambda^2\cdot 2\gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_0{}^2 - \gamma^2 = 2\lambda^2, \qquad \gamma^2 = \omega_0{}^2 - 2\lambda^2, \qquad \gamma_p = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\lambda^2}\,.$$

Отже, резонанс настає при частоті $\gamma_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$, яку називають резонансною частотою. При $\lambda << \omega_0$ значення резонансної частоти мало відрізняється від

ω_0.

§29. Ангармонічні коливання (НСО)

Вся викладена вище теорія малих коливань основана на розкладанні потенціальної енергії системи по координатам і швидкостям із збереженням лише членів другого порядку, при цьому рівняння руху лінійні, в зв’язку з чим у цьому наближенні говорять про лінійні коливання. Хоч таке розкладання цілком законне при умові достатньої малості амплітуд коливань, проте урахування наступних наближень (так званих ангармонічних або нелінійних членів) приводить до появи деяких, хоч і слабких, але якісно нових особливостей руху. Відповідно, коливання називають ангармонічними, або нелінійними.

Розглянемо ангармонічні коливання системи з одним ступенем вільності, написавши формулу Лагранжа у вигляді:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m{\omega_0}^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4. \tag{1}$$

Відповідне рівняння руху:

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3, \alpha << \beta. \tag{2}$$

Шукатимемо його розв’язок у вигляді ряду послідовних наближень:

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} \ldots, \text{ причому } x^{(1)} = a\cos\omega t \tag{3}$$

з точним значенням частоти ω, яку саму будемо шукати у вигляді ряду

$$\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots \quad . \tag{4}$$

Перепишемо для зручності (2) у вигляді:

$$\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}. \tag{5}$$

Поклавши тут

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} = a\cos\omega t + x^{(2)}, \ \omega = \omega_0 + \omega_1,$$

відкинемо члени вище другого порядку малості ($x^{(2)} << x^{(1)}; \omega_1 << \omega_0$). Тоді

$$\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\left(\ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)}\right) + {\omega_0}^2\left(x^{(1)} + x^{(2)}\right) = -\alpha\left(x^{(1)} + x^{(2)}\right)^2 - \left(1 - \frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\right)\left(\ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)}\right).$$

Але $\ddot{x}^{(1)} = -a\omega^2\cos\omega t$, тому

$$\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\left(\cancel{-a\omega^2\cos\omega t} + \ddot{x}^{(2)}\right) + {\omega_0}^2\left(\cancel{a\cos\omega t} + x^{(2)}\right) = -\alpha\left(a\cos\omega t + x^{(2)}\right)^2 - \left(1 - \frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\right)\left(-a\omega^2\cos\omega t + \ddot{x}^{(2)}\right)$$

$$\cancel{\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\ddot{x}^{(2)}} + {\omega_0}^2 x^{(2)} = -\alpha\left(a^2\cos^2\omega t + \cancel{2a\cos\omega t \cdot x^{(2)}} + \cancel{x^{(2)}}^2\right) + \left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)a\cos\omega t - \ddot{x}^{(2)} + \cancel{\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\ddot{x}^{(2)}}$$

$$\ddot{x}^{(2)} + {\omega_0}^2 x^{(2)} = -\alpha a^2\cos^2\omega t + \left(\cancel{{\omega_0}^2} + 2\omega_0\omega_1 + \cancel{{\omega_1}^2} - \cancel{{\omega_0}^2}\right)a\cos\omega t$$

$$\ddot{x}^{(2)} + {\omega_0}^2 x^{(2)} = -\alpha a^2\cos^2\omega t + 2a\omega_0\omega_1\cos\omega t$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1+\cos 2\omega t}{2} \Rightarrow \ddot{x}^{(2)} + \omega_0{}^2 = -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2}\cos 2\omega t + 2a\omega_0\omega_1 \cos\omega t \quad .$$

Умова відсутності резонансного члена $\cos\omega t$ в правій частині рівності вимагає, щоб $\omega^{(1)} = 0$, і останнє рівняння руху набуває вигляду:

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0{}^2 x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2}\cos 2\omega t \cdot$$

Після цього, розв'язуючи звичайним способом неоднорідне рівняння лінійне рівняння, отримуємо:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0{}^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0{}^2}\cos 2\omega t \,. \tag{6}$$

Далі, поклавши в (5) $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}, \omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$, отримаємо рівняння для $x^{(3)}$

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0{}^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0\omega^{(2)} x^{(1)}$$

або, підставивши у праву частину вирази (4) і (6), після простого перетворення:

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0{}^2 x^{(3)} = -a^3\left[\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0{}^2}\right]\cos 3\omega t + a\left[2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0{}^2} - \frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos\omega t \,.$$

Знову прирівнявши нулю коефіцієнт при резонансному множнику $\cos\omega t$, знайдемо поправку до основної частоти, яка виявляється пропорційною квадрату амплітуди коливання:

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0{}^3}\right)a^2 = \kappa a^2, \tag{7}$$

де κ - так званий коефіцієнт ангармонійності. Комбінаційне ж коливання третього порядку має вигляд:

$$x^{(3)} = \frac{a^2}{16\omega_0{}^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0{}^2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t \,. \tag{8}$$

§ 30. Резонанс в нелінійних коливаннях (НСО)

Врахування ангармонічних членів при вимушених коливаннях системи приводять до появи суттєво нових особливостей в резонансних явищах. Добавимо до правої частини рівняння руху (29.2) зовнішню періодичну з частотою γ силу, отримаємо:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0{}^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 \tag{1}$$

Нехай $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ (з малим ε), тобто ми знаходимось поблизу звичайного резонансу. В лінійному наближенні залежність амплітуди у вимушених коливань від амплітуди f і частоти γ зовнішніх сил дається формулою (26.3):

$$b=\frac{f/m}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\gamma^2\right)^2+4\lambda^2\gamma^2}}=\left[\left(\omega_0{}^2-\gamma^2\right)^2=(\omega_0-\gamma)^2(\omega_0+\gamma)^2\approx\varepsilon^2(2\omega_0)^2=4\varepsilon^2\omega_0{}^2\right]\approx$$

$$\approx\frac{f/m}{2\omega_0\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}}\Rightarrow b^2\left(\varepsilon^2+\lambda^2\right)=\frac{f^2}{4m^2\omega_0{}^2}. \tag{2}$$

Нелінійність коливань приводить до появи залежності їх власної частоти від амплітуди; напишемо її у вигляді

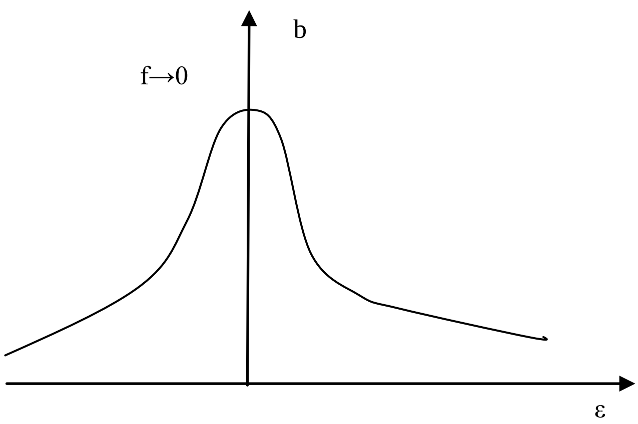
$$\omega=\omega_0+\kappa b^2, \tag{3}$$

де κ певним чином виражається через коефіцієнт ангармонічності (див. (29.7)). Тому замінимо в (2) ω_0 на $\omega_0+\kappa b^2$. Зберігши позначення $\varepsilon=\gamma-\omega_0$, замінимо $\varepsilon\to\varepsilon-\kappa b^2$, отримаємо

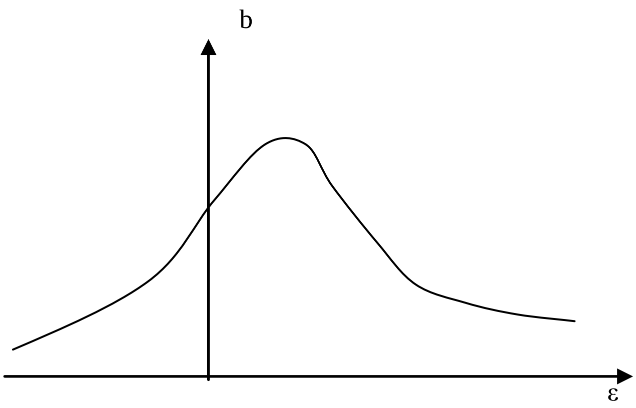
$$b^2\left[\left(\varepsilon-\kappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=f^2/4m^2\omega_0{}^2. \tag{4}$$

Рівняння (4) є кубічним по відношенню до b^2, його дійсні корені визначають амплітуду вимушених коливань. Розглянемо залежність цієї амплітуди від частоти зовнішньої сили при заданій амплітуді f.

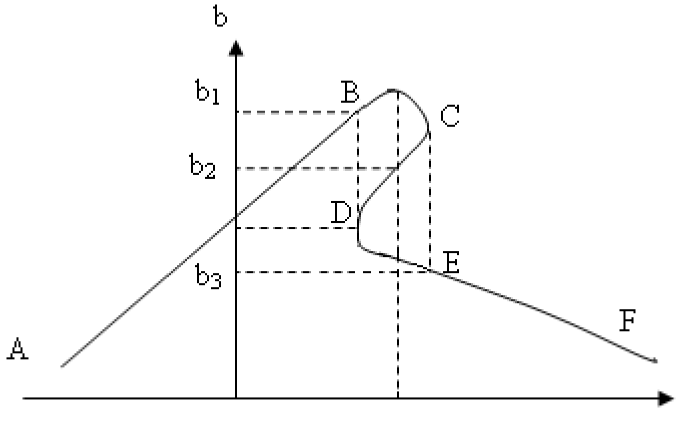
а)



б)



в)



При малих f амплітуда b теж мала, і нехтуючи в (4) степенем вище b^2, приходимо до залежності $b(\varepsilon)$ по формулі (2), яка зображається симетричною кривою з максимумом при $\varepsilon = 0$ (див. мал. а).

При збільшенні f крива $b(\varepsilon)$ деформується, максимум зміщується (при $\kappa > 0$) в сторону додатних ε. З трьох коренів (4) дійсним є лише 1 (мал. б).

Починаючи з деякого $f = f_{\hat{e}}$ характер кривої змінюється: з'являється область частот, в якому рівняння (4) має 3 дійсні корені; їй відповідає ділянка BCDE (мал. в). Границі цієї області визначаються умовою $\frac{db}{d\varepsilon} = \infty$. З рівняння (4) маємо:

$$b^2\left[\varepsilon^2 - 2\varepsilon\kappa b^2 + \kappa^2 b^4 + \lambda^2\right] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0{}^2}, \quad b^2\varepsilon^2 - 2\varepsilon\kappa b^4 + \kappa^2 b^6 + \lambda^2 b^2 = \frac{f^2}{4m^2\omega_0{}^2}.$$

Диференціюючи цей вираз по ε, отримаємо:

$$2b\frac{db}{d\varepsilon}\varepsilon^2 + 2\varepsilon b^2 - 2\kappa b^4 - 8\varepsilon\kappa b^3\frac{db}{d\varepsilon} + 6\kappa^2 b^5\frac{db}{d\varepsilon} + 2\lambda^2 b\frac{db}{d\varepsilon} = 0.$$

Скоротивши на *2b* і згрупувавши доданки з $\frac{db}{d\varepsilon}$, отримаємо

$$\frac{db}{d\varepsilon}\left(\varepsilon^2 - 4\varepsilon\kappa b^2 + 3\kappa^2 b^4 + \lambda^2\right) + \kappa b - \kappa b^3 = 0,$$

звідки $\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{\kappa b^3 - \kappa b}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\varepsilon\kappa b^2 + 3\kappa^2 b^4}$. Умова $\frac{db}{d\varepsilon} = \infty$ еквівалента умові

$$\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\varepsilon\kappa b^2 + 3\kappa^2 b^4 = 0. \tag{5}$$

Точки D і C на графіку в) визначаються спільним розв'язком рівняння (4) і (5).

З трьох дійсних коренів рівняння (4) середній (ділянка CD) відповідає нестійким коливанням системи: мале збурення переводить систему до коливань з більшим або меншим коренем. Отже, реальним коливанням відповідають ділянки ABC і DEF, причому існує область частот, що допускає дві різні амплітуди коливань. Так, при поступовому збільшенні частоти зовнішньої сили амплітуда коливань буде зростати (ABC). В т. C відбудеться «зрив» амплітуди, яка стрибком впаде до значення, що відповідає т. E і далі (при зростанні ε) буде мінятись по кривій EF. Якщо тепер знову понизити частоту, то амплітуда вимушених коливань буде мінятись по кривій FD, в т.D стрибком зросте до B і потім буде спадати вздовж BA.

§31. Параметричний резонанс

Параметричною коливальною системою називається така незамкнута система, в якій під дією зовнішньої сили змінюються з часом її параметри. При цьому джерело зовнішньої сили затрачає енергію на виконання роботи, пов'язаної із зміною параметрів системи. Прикладом такої системи є маятник, точка підвісу якого здійснює заданий періодичний рух у вертикальному напрямку; другий приклад – гойдалка, на якій людина періодично встає і присідає, то підіймаючи, то опускаючи центр ваги свого тіла (довжину фізичного маятника).

В рівнянні коливального руху матеріальної точки від часу можуть залежати коефіцієнти m і k. Тоді рівняння руху прийме вигляд:

$$m(t)\ddot{x} + \beta(t)\dot{x} + k(t)x = 0\,. \qquad (1)$$

Поділивши це рівняння на $m(t)$, отримаємо:

$$\ddot{x} + b(t)\dot{x} + \omega^2(t)x = 0\,, \qquad (2)$$

де $b(t) = \beta(t)/m(t), \omega^2(t) = k(t)/m(t)$.

Розглянемо приклад, коли $b(t) = b = const, \omega^2(t) = \omega_0{}^2 - h\cos\Omega t$, (3)

де стала $h << \omega_0{}^2, b^2 << 4\omega_0{}^2, h > 0$, Ω - циклічна частота зовнішнього джерела. Підставляючи (3) в (2), отримаємо:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0{}^2 x = hx\cos(\Omega t). \qquad (4)$$

Другий доданок у лівій частині і права частина – малі величини, що дозволяє представити x у вигляді $x=x_0+x_1$, де $x_0>>x_1$. В нульовому наближені, відкидаючи в (4) доданки 1-го порядку малості, отримаємо рівняння $\ddot{x}_0 + \omega_0{}^2 x_0 = 0$, розв'язок якого

$$x_0 = a\cos\omega_0 t\,. \qquad (5)$$

Підставивши (5) у праву частину (4), отримаємо рівняння 1-го порядку:

$$\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + \omega_0{}^2 x_1 = ha\cos\Omega t\cos\omega_0 t\,. \qquad (4а)$$

Використовуючи формулу $\cos\omega_0 t\cos\Omega t = \frac{1}{2}[\cos(\Omega+\omega_0)t + \cos(\Omega-\omega_0)]$,

перепишемо останнє рівняння так

$$\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + \omega_0{}^2 x_1 = \frac{ah}{2}\left[\cos(\Omega+\omega_0)t + \cos(\Omega-\omega_0)t\right]. \qquad (6)$$

Якщо не цікавитись коливаннями в околі частоти $\Omega+\omega_0$, то перший доданок в правій частині (6) можна відкинути. Тоді отримаємо:

$$\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + \omega_0{}^2 x_1 = \frac{ah}{2}\cos(\Omega-\omega_0)t\,.$$

Використовуючи результати §28 (вимушені коливання) з $\lambda = \frac{b}{2}; \frac{f}{m} = \frac{ah}{2}$; $\gamma = \Omega - \omega_0$, отримаємо для великих t

$$x(t) = A\cos\left((\Omega_0 - \omega)t + \delta\right), \; A = \frac{ah/2}{\sqrt{\left[\omega_0{}^2 - (\Omega-\omega_0)\right]^2 + b^2/2}}.$$

Якщо $b^2 << 2\omega_0$, то амплітуда цього коливання досягає максимуму при $\Omega \approx 2\omega_0$. Це явище називається параметричним резонансом. Отже, для параметричного резонансу необхідно, щоб частота збуджуючої сили мала вдвічі перевищувати власну частоту коливальної системи.

Відмітимо, що параметричний резонанс має місце і на частотах зміни параметра системи, рівних $\Omega = 2\omega_0/n$, де n - довільне ціле додатне число.

§32. Коливання системи з багатьма ступенями вільності (НСО)

Розглянемо консервативну систему з s ступенями вільності, яка має положення стійкої рівноваги. У цьому положенні потенціальна енергія системи $U=U(q_1,\ldots,q_s)$ має мінімум. Узагальнені координати q_i будемо відраховувати від положення рівноваги. Обмежуючись розглядом малих коливань, розкладемо потенціальну енергію в ряд по степеням q_i, нехтуючи членами більш високих порядків малості:

$$U = U_0 + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 q_i q_k .$$

В положенні рівноваги всі узагальнені сили $F_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0$. Покладемо також $U_0=0$. Тоді

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\kappa_{ik} q_i q_k , \tag{1}$$

де $\kappa_{ik} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 = \kappa_{ki} > 0$, тобто U – позитивно визначена квадратична форма.

У випадку стаціонарних в'язів кінетична енергія визначається квадратичною формою узагальнених швидкостей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\mu_{ik}\dot{q}_i \dot{q}_k > 0, \tag{1}$$

причому $\mu_{ik}=\mu_{ki}$. Отже, функція Лагранжа

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\mu_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k}\kappa_{ik} q_i q_k . \tag{3}$$

Знайдемо повний диференціал функції Лагранжа:

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\mu_{ik}\dot{q}_i d\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\mu_{ik} d\dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k}\kappa_{ik} q_i dq_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k}\kappa_{ik} dq_i q_k . \tag{4}$$

Індекси i та k є німими, тому кожен з них можна позначити любою буквою, тоді поміняємо їх місцями у 1-ій та 3-ій сумах та скористаємось симетрією ($\kappa_{ik} = \kappa_{ki}$ і $\mu_{ik}=\mu_{ki}$):

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\mu_{ki} d\dot{q}_i \dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\mu_{ik}\dot{q}_k d\dot{q}_i - \frac{1}{2}\sum_{i,k}\kappa_{ki} dq_i q_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k}\kappa_{ik} q_k dq_i =$$

$$= \sum_{i,k}\mu_{ik}\dot{q}_k d\dot{q}_i - \sum_{i,k}\kappa_{ki} dq_i q_k = \sum_i d\dot{q}_i\left(\sum_k \mu_{ik}\dot{q}_k\right) - \sum_i dq_i\left(\sum_k \kappa_{ki} q_k\right)$$

Звідси $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k \mu_{ik}\dot{q}_k$, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\sum_k \kappa_{ik} q_k$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k \mu_{ik}\ddot{q}_k$, і рівняння Лагранжа набувають вигляду

$$\sum_k \mu_{ik}\ddot{q}_k + \sum_k \kappa_{ik} q_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots s) . \tag{5}$$

Ми прийшли до системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (5) зі сталими коефіцієнтами. Будемо шукати невідомі функції $q_k(t)$ у вигляді

$$q_k(t) = C_k e^{i\omega t} , \tag{6}$$

де C_k - комплексні сталі, які потрібно визначити. Функції (6) – комплексні, тоді як узагальнені координати є дійсними. Тому, закінчивши обчислення, потрібно буде взяти дійсні частини функцій (6).

Підстановка (6) в (5) дає:

$$\sum_k \mu_{ik}(-\omega^2)C_k e^{i\omega t} + \sum_k \kappa_{ik} C_k e^{i\omega t} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots s)$$

$$\sum_k (\kappa_{ik} - \mu_{ik}\omega^2) C_k e^{i\omega t} = 0. \tag{7}$$

Ми прийшли до системи *s* лінійних однорідних рівнянь з невідомими $C_1, C_2, \ldots, C_s$. Для того, щоб ця система мала ненульовий розв'язок, необхідна і достатня рівність нулю її визначника:

$$\begin{vmatrix} \kappa_{11} - \omega^2\mu_{11} & \kappa_{12} - \omega^2\mu_{12} & \ldots & \kappa_{1s} - \omega^2\mu_{1s} \\ \kappa_{21} - \omega^2\mu_{21} & \kappa_{22} - \omega^2\mu_{22} & \ldots & \kappa_{2s} - \omega^2\mu_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \kappa_{s1} - \omega^2\mu_{s1} & \kappa_{s2} - \omega^2\mu_{s2} & \ldots & \kappa_{ss} - \omega^2\mu_{ss} \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) називають характеристичним. Воно являє собою рівняння *s*-го порядку відносно ω^2 і в загальному випадку має *s* різних дійсних додатних коренів $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_s^2$. Знайдені таким способом величини $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ називають власними частотами системи. Підставляючи по черзі ω_α^2 в систему рівнянь (7) і розв'язуючи її, знайдемо C_k, які відповідають різним ω_α. Якщо ранг матриці системи (7) буде рівним $s\text{-}1$ (що зазвичай має місце), то розв'язки системи мають вигляд:

$$C_k^{(\alpha)} = c_\alpha A_{mk}^{(\alpha)}, \tag{9}$$

де c_α – довільна комплексна стала, $A_{mk}^{(\alpha)}$ - алгебраїчне доповнення елемента $\kappa_{mk} - \omega_\alpha{}^2\mu_{mk}$ у визначнику системи (*m* вибирається довільно, так, щоб хоча б одне $A_{mk}^{(\alpha)}$ було відмінне від нуля). Оскільки всі елементи цього визначника дійсні, величини $A_{mk}^{(\alpha)}$ також будуть дійсними. Таким чином, для кожної узагальненої координати q_k маємо *s* різних розв'язків виду

$$q_k^{(\alpha)}(t) = c_\alpha A_{mk}^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s), \tag{10}$$

де $A_{mk}^{(\alpha)}$ - дійсні коефіцієнти, які визначаються значеннями коефіцієнтів κ_{ik} і μ_{ik} та частот ω_α. Загальний розв'язок є сумою всіх виразів (10):

$$q_k(t) = \sum_\alpha c_\alpha A_{mk}^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t} \quad .$$

Перейшовши до дійсної частини цього виразу, отримаємо:

$$q_k(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_\alpha c_\alpha A_{mk}^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t}\right\} = \sum_\alpha A_{mk}^{(\alpha)} \,\mathrm{Re}\left\{c_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\}.$$

Представивши c_α у вигляді $c_\alpha = a_\alpha e^{i\delta_\alpha}$, $a_\alpha = |c_\alpha|$, отримаємо

$$q_k(t) = \sum_\alpha A_{mk}^{(\alpha)} a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha). \tag{11}$$

Отже, зміна кожної узагальненої координати q_k з часом являє собою накладання s гармонічних коливань, частоти яких дорівнюють власним частотам системи. Величини a_α і δ_α визначаються з початкових умов.

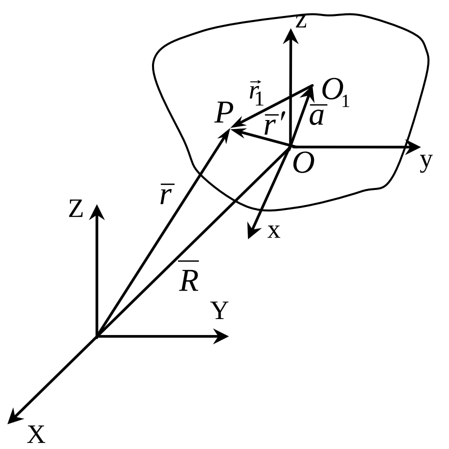
МОДУЛЬ III. ОСНОВИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

РОЗДІЛ 5. ОСНОВИ ДИНАМІКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

§ 33. Кінематика твердого тіла

Абсолютно тверде тіло в механіці визначають як систему матеріальних точок, відстані між якими незмінні. Реальні тверді тіла цій умові задовольняють наближено. Але більшість твердих тіл зазвичай мало міняють свою форму і розміри, так що цією зміною можна знехтувати.

Всякий довільний рух твердого тіла під дією зовнішніх сил можна представити як суму поступальних і обертальних рухів. Для опису цих рухів введемо дві системи відліку: ІСВ з координатами X,Y,Z і рухому СВ з координатами x,y,z, яка передбачається жорстко зв'язаною з твердим тілом і приймає участь у всіх її рухах. Початок рухомої системи координат помістимо в центр інерції тіла О.



Положення твердого тіла відносно нерухомої ІСВ цілком визначається положенням рухомої СВ, тобто її початку О (вектор $\vec{R}$). Орієнтація ж вісей цієї СВ відносно нерухомої ІСВ визначається трьома кутами, так що разом з трьома координатами вектора $\vec{R}(X,Y,Z)$ ми маємо всього 6 координат. Це означає, що тверде тіло являє собою механічну систему з шістьма ступенями вільності.

Нескінчено мале переміщення твердого тіла складається з нескінчено малого паралельного переносу тіла і нескінчено малого повороту навколо центру інерції. Враховуючи, що радіус-вектор довільної точки P твердого тіла відносно ІСВ дорівнює

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}', \tag{1}$$

де $\vec{r}'(x,y,z)$ - радіус-вектор цієї точки у рухомій СВ, жорстко зв'язаній з тілом, знайдемо нескінчено мале її переміщення точки як суму:

$$d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{r}' = d\vec{R} + d\vec{\varphi} \times \vec{r}'.$$

Поділивши цю рівність на час dt, протягом якого відбулось переміщення, і ввівши швидкості: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$ – швидкість точки P відносно даної ІСВ; $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ – швидкість центра інерції твердого тіла відносно ІСВ, яку ще називають швидкістю поступального руху твердого тіла; $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\Omega}$ – кутова швидкість обертання тіла, напрям якої співпадає з напрямком вісі обертання, отримаємо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}'; \text{ або } \vec{\upsilon} = \vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]. \tag{2}$$

Отже, швидкість $\vec{\upsilon}$ будь-якої точки може бути виражена через поступальну швидкість тіла і кутову швидкість його обертання.

Нехай тепер жорстко зв'язана з тілом система координат вибрана так, що її початок координат знаходиться не в центрі інерції O, а в іншій точці O_1, причому $\overrightarrow{OO_1} = \vec{a}$. Позначимо через $\vec{V}_1$ швидкість точки O_1, а кутову швидкість її обертання через $\vec{\Omega}_1$. Тоді відносно цього початку координат радіус-вектор точки P дорівнює

$$\vec{r}' = \vec{r}_1 + \vec{a}. \tag{3}$$

Підставимо (3) в (2):

$$\vec{\upsilon} = \vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{a}\right] + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}_1\right]. \tag{4}$$

З іншого боку, по визначенню $\vec{V}_1$ і $\vec{\Omega}_1$ аналогічно до (2) повинно бути:

$$\vec{\upsilon} = \vec{V}_1 + \left[\vec{\Omega}_1 \times \vec{r}_1'\right]. \tag{5}$$

Порівнюючи (4) і (5), знаходимо, що $\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}$ та

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{a}\right]. \tag{6}$$

Отже, кутова швидкість, з якою обертається жорстко зв'язана з тілом система координат, не залежить від вибору початку цієї СК. Всі такі системи обертаються в заданий момент часу навколо паралельних одна одній вісей з однаковою по величині кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$, що дозволяє назвати $\vec{\Omega}$ кутовою швидкістю обертання твердого тіла як цілого.

Із (6) випливає, що якщо $\vec{V}$ і $\vec{\Omega}$ (в даний момент часу) взаємно перпендикулярні при деякому виборі координат, то вони (тобто $\vec{V}_1$ і $\vec{\Omega}_1$) взаємно перпендикулярні і при визначенні по відношенню до любого іншого початку O_1 (*для доказу потрібно (6) скалярно помножити на* $\vec{\Omega}$). З (2) видно, що в цьому випадку швидкості $\vec{\upsilon}$ всіх точок тіла лежать в одній і тій же площині, яка перпендикулярна до $\vec{\Omega}$ (*для доказу потрібно (2) скалярно помножити на* $\vec{\Omega}$). При цьому завжди можна вибрати такий початок O_1, швидкість якого буде дорівнювати нулю ($\vec{V}_1 = 0$), так що рух твердого тіла (в даний момент) являтиме собою чисте обертання навколо вісі, що проходить через O_1. Цю вісь називають миттєвою віссю обертання.

§ 34. Кінетична енергія твердого тіла. Тензор інерції

Для обчислення кінетичної енергії твердого тіла представимо його як дискретну систему матеріальних точок. Тоді його кінетична енергія дорівнює

$$T = \sum \frac{m\vec{v}^2}{2}, \tag{1}$$

де підсумовування проводиться по всім точкам тіла. Тут і нижче ми опускаємо індекси, що нумерують ці точки, щоб спростити запис формул. Підставивши в (1) швидкість точки твердого тіла (33.2)

$$\vec{\upsilon} = \vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r'}\right], \tag{2}$$

отримаємо

$$T = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r'}\right]\right)^2 = \sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 + \sum m\vec{V} \cdot \left[\vec{\Omega} \times \vec{r'}\right] + \sum \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r'}\right]^2 = T_1 + T_2 + T_3. \tag{3}$$

Швидкості $\vec{V}$ і $\vec{\Omega}$ однакові для всіх точок твердого тіла, тому їх можна винести за знак суми в 1-му доданку (3):

$$T_1 = \sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 = \frac{1}{2}\vec{V}^2 \sum m = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} = T_{пост}, \tag{4}$$

де $\mu = \sum m$ - маса тіла; таким чином, T_1 являє собою кінетичну енергію поступального руху твердого тіла. Виконаємо в T_2 циклічні перестановки векторів у другому доданку:

$$T_2 = \sum m\vec{V}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r'}\right] = \sum m\vec{\Omega}\left[\vec{r'} \times \vec{V}\right] = \sum m\vec{r'}\left[\vec{V} \times \vec{\Omega}\right] = \left[\vec{V} \times \vec{\Omega}\right]\sum m\vec{r'}.$$

Якщо початок рухомої СК помістити в центр інерції, то з визначення радіус-вектора центра інерції випливає

$$\vec{R}_c = \frac{\sum m\vec{r'}}{\sum m} = 0 \Rightarrow \sum m\vec{r'} = 0 \Rightarrow T_2 = 0;$$

тобто, за такої умови другий доданок в (3) зникає. Нарешті, в 3-му доданку розкриємо квадрат векторного добутку:

$$\left[\vec{\Omega} \times \vec{r'}\right]^2 = \Omega^2 r'^2 \sin^2\theta = \Omega^2 r'^2\left(1 - \cos^2\theta\right) = \vec{\Omega}^2 \cdot \vec{r'}^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r'}\right)^2;$$

тоді 3-й доданок в (3), що є кінетичною енергією обертального руху, можна представити у вигляді:

$$T_3 = T_{оберт} = \sum \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r'}\right]^2 = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}^2 \cdot \vec{r'}^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r'}\right)^2\right). \tag{5}$$

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху та кінетичній енергії обертального руху з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ навколо вісі, що проходить через центр інерції:

$$T = T_{пост} + T_{оберт} = \sum \frac{m\vec{V}^2}{2} + \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}^2 \cdot \vec{r'}^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r'}\right)^2\right). \tag{6}$$

Перепишемо $T_{оберт}$ в тензорних позначеннях, тобто через компоненти векторів, що входять в (6), представляючи $\vec{r'}(x, y, z) = \vec{r'}(x_1, x_2, x_3) \to x_i$; $\vec{\Omega}\left(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right) = \vec{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \to \Omega_i$, $i = 1{,}2{,}3$. Тоді

$$\vec{r'}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sum_{e=1}^{3} x_e^2 = x_e^2; \quad \vec{\Omega}^2 = \Omega_i^2; \ \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r'}\right) = \Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2 + \Omega_3 x_3 = \Omega_i x_i;$$

тут і далі використовується домовленість про підсумовування: *по однаковим індексам, що повторюються у виразі двічі, здійснюється підсумовування, а знак суми опускається*. Тоді кінетична енергія обертального руху матиме вигляд:

$$T_{оберт} = \sum \frac{m}{2}\left(\Omega_i^2 x_e^2 - \Omega_i x_i \cdot \Omega_k x_k\right).$$

Використаємо далі тотожність $\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$, де $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases}$; δ_{ik} носить назву символу Кронекера. Тоді $T_{оберт} = \sum \frac{m}{2}\left(\Omega_i\Omega_k\delta_{ik} \cdot x_e^2 - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right) = \frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k \sum m\left(x_e^2\delta_{ik} - x_i x_k\right).$

Введемо так званий тензор моментів інерції або просто тензор інерції:

$$I_{ik} = \sum m\left(x_e^2\delta_{ik} - x_i x_k\right); \tag{7}$$

з його допомогою кінетична енергія обертального руху набуде вигляду:

$$T_{оберт} = \frac{I_{ik}}{2}\Omega_i\Omega_k. \tag{8}$$

Тензор інерції є симетричним: $I_{ik}=I_{ki}$. Його компоненти в явному вигляді дорівнюють:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum mxy & \sum m\left(x^2+z^2\right) & -\sum myz \\ -\sum mxz & -\sum myz & \sum m\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Компоненти I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} інколи називають моментами інерції відносно відповідних вісей. Тензор інерції є адитивною величиною – момент інерції тіла дорівнює сумі моментів інерції його частин.

Якщо тверде тіло розглядати як суцільне, то у визначенні (7) можна зробити заміну суми інтегралом по об'єму ($m \to \rho dV; \sum \to \int$):

$$I_{ik} = \int \rho\left(\vec{r}'\right)\left(x_e^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)dV. \tag{10}$$

Тензор інерції можна привести до діагонального вигляду шляхом відповідного вибору напрямків вісей координат. Ці напрямки називаються головними вісями інерції, а відповідні значення компонентів тензора – головними моментами інерції I_1, I_2, I_3. При такому виборі вісей обертальна кінетична енергія виражається дуже просто:

$$T_{оберт} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right). \tag{11}$$

Тіло, у якого всі три головні моменти інерції різні ($I_1 \neq I_2 \neq I_3$), називається асиметричною дзигою. Якщо два головних моменти інерції однакові: $I_1 = I_2 \neq I_3$, то тіло називають симетричною дзигою. В цьому випадку вибір напрямків головних вісей у площині x_1x_2 довільний. Якщо ж всі три головних моменти співпадають: $I_1 = I_2 = I_3$, то тіло називають кульовою дзигою. У цьому випадку довільним є вибір всіх трьох головних вісей інерції.

Знаходження головних вісей інерції дуже спрощується, якщо тіло має ту чи іншу симетрію. Наприклад, якщо система має площину симетрії, наприклад, частинки розташовані в одній площині, то, вибравши вісі x_1, x_2 в цій площині, а x_3 - перпендикулярно до неї, отримаємо (з урахуванням, що для всіх частинок x_3=0):

$$I_1 = \sum m x_2^2,\ I_2 = \sum m x_1^2,\ I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2),$$

так що $I_3 = I_1 + I_2$.

Якщо тіло має вісь симетрії, то центр інерції лежить на цій вісі. З нею співпадає одна з головних вісей інерції, а дві інші – перпендикулярні до неї. Прикладом є система частинок, розташованих вздовж однієї прямої лінії. Якщо вибрати цю пряму в якості вісі x_3, то для всіх частинок $x_1 = x_2 = 0$, і тому

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2,\ I_3 = 0.$$

Таку систему називають ротатором; вона має, на відміну від довільного тіла, лише 2 (а не 3) обертальних ступеня вільності, які відповідають обертанню навколо вісей x_1 і x_2; обертання ж прямої навколо самої себе, очевидно, не має змісту.

Вияснимо тепер, як відрізняються компоненти моменту інерції, обчисленого відносно іншого початку системи координат O_1, що знаходиться від O на відстані $\vec{a}$. Врахуємо, що $\vec{r}' = \vec{r}_1 + \vec{a},$ або $x_i = x_i^{(1)} + a_i,\ x_i^{(1)} = x_i - a_i.$ Тоді

$$I_{ik}^{(1)} = \sum m\left(x_e^{(1)^2}\delta_{ik} - x_i^{(1)}x_k^{(1)}\right) =$$

$$= \sum m\left\{\left(x_e - a_e\right)^2\delta_{ik} - \left(x_i - a_i\right)\left(x_k - a_k\right)\right\} =$$

$$= \sum m\left(x_e^2\delta_{ik} - \cancel{2x_e a_e \delta_{ik}} + a_e^2\delta_{ik} - x_i x_k - a_i a_k + \cancel{x_i a_k} + \cancel{x_k a_i}\right) =$$

$$= \left[\sum m x_i = \mu X_{ci} = 0 \text{ - центр інерції}\right] =$$

$$= \sum m\left(x_e^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) + \sum m\left(a_e^2\delta_{ik} - a_i a_k\right) =$$

$$= I_{ik} + \mu\left(a_e^2\delta_{ik} - a_i a_k\right).$$

Таким чином, ми прийшли до теореми Штейнера:

$$I_{ik}^{(1)} = I_{ik} + \mu\left(a_e^2\delta_{ik} - a_i a_k\right). \tag{12}$$

§ 35. Момент імпульсу твердого тіла

Величина моменту імпульсу залежить від вибору точки, відносно якої він визначений. В механіці твердого тіла найбільш раціональний вибір в якості цієї точки початку рухомої СК є центр інерції тіла. Нижче момент імпульсу тіла обчислюється саме відносно його центра інерції. В цьому випадку $\vec{V} = 0,$ швидкість точок $\vec{\upsilon} = \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]$, тому момент імпульсу $\vec{M} = \sum\left[\vec{r}' \times \vec{p}\right] = \sum m\left[\vec{r}' \times \vec{\upsilon}\right] = \sum m\left[\vec{r}' \times \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]\right]$, або

$$M = \sum m\left\{\vec{\Omega}\cdot\vec{r}'^2 - \vec{r}'\cdot\left[\vec{r}'\cdot\vec{\Omega}\right]\right\}. \tag{1}$$

В тензорних позначеннях ($\vec{\Omega} \to \Omega_i,\ \vec{r}'^2 = x_e^2,\ \vec{r}'\cdot\vec{\Omega} = x_k\Omega_k;$) маємо

$$M_i = \sum m\left\{\Omega_i x_e^2 - x_i x_k \Omega_k\right\} = \left[\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k\right] = \sum m\left\{\Omega_k\delta_{ik}x_e^2 - x_i x_k\Omega_k\right\} = \Omega_k \sum m\left(x_e^2\delta_{ik} - x_i x_k\right).$$

Враховуючи визначення тензора інерції, остання формула дає

$$M_i = I_{ik}\Omega_k . \qquad (2)$$

Якщо вісі координат напрямлені вздовж головних вісей, то з (2) отримуємо

$$M_1 = I_1\Omega_1, M_2 = I_2\Omega_2, M_3 = I_3\Omega_3 . \qquad (3)$$

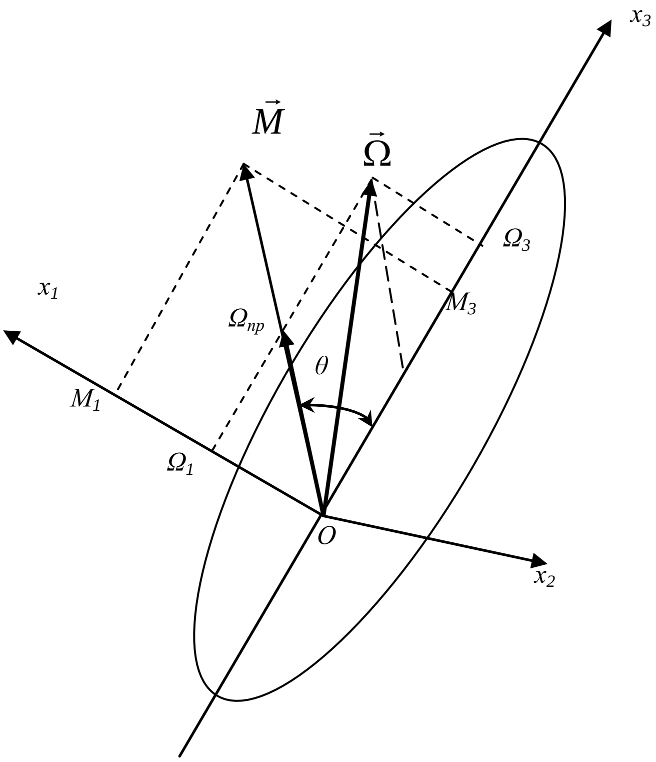
Ця формула показує, що в загальному випадку вектори $\vec{M}$ і $\vec{\Omega}$ не паралельні один одному. Виняток складає кульова дзига: так як $I_1 = I_2 = I_3 = I$, то звідси випливає

$$\overrightarrow{M} = I\overrightarrow{\Omega} . \qquad (4)$$

У випадку, коли відмінна від нуля тільки одна із компонент кутової швидкості, так що тіло здійснює обертальний рух навколо однієї з головних вісей твердого тіла (тоді $\overrightarrow{\Omega}(\Omega,O,O) \Rightarrow \overrightarrow{M}(I\cdot\Omega,O,O)$), також маємо $\overrightarrow{M} = I\overrightarrow{\Omega}$.

Розглянемо вільне обертання тіла при відсутності зовнішніх сил. У цьому випадку момент імпульсу твердого тіла зберігається: $\overrightarrow{M} = const$. Для кульової дзиги з формули (4) випливає, що в цьому випадку $\overrightarrow{\Omega} = const$. Отже, загальним випадком вільного обертання кульової дзиги є просто рівномірне обертання навколо постійної вісі.

Закон збереження імпульсу є достатнім і для визначення більш складного вільного обертання симетричної дзиги. Скориставшись довільністю у виборі напрямків головних вісей інерції x_1 і x_2 (перпендикулярних до вісі симетрії x_3), виберемо вісь x_2 перпендикулярною до площини, яка визначається постійним вектором $\overrightarrow{M} = const$ і миттєвим положенням вісі x_3 (див. мал.). Тоді M_2=0, а з формул (3) видно, що і Ω_2=0. Це означає, що напрямки $\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{\Omega}$ і вісі дзиги x_3 в кожен момент часу лежать в одній площині (див. мал.). Але звідси, у свою чергу, випливає, що швидкості $\vec{\upsilon} = \left[\overrightarrow{\Omega}\times\overrightarrow{r'}\right]$ всіх точок на вісі дзиги в кожен момент часу перпендикулярні до даної площини. Звідси випливає, що вісь дзиги рівномірно обертається навколо сталого напрямку $\overrightarrow{M}$, описуючи навколо нього конус. Це явище називається регулярною прецесією дзиги. Одночасно з прецесією сама дзига обертається навколо власної вісі з кутовою швидкістю Ω_3.



Кутові швидкості обох цих обертань легко виразити через величину моменту M і кут нахилу θ вісі дзиги до напрямку $\overrightarrow{M}$. Кутова швидкість обертання дзиги навколо своєї вісі є просто проекція Ω_3 вектора $\overrightarrow{\Omega}$ на цю вісь: $\Omega_3 = \dfrac{M_3}{I_3} = \dfrac{M\cos\theta}{I_3}$.

Для визначення ж кутової швидкості прецесії $\Omega_{пр}$ потрібно розкласти вектор $\vec{\Omega}$ по правилу паралелограма на складові вздовж x_3 і вздовж $\vec{M}$. З них перша не приводить ні до якого переміщення самої вісі дзиги, а тому друга і дає розшукувану кутову швидкість прецесії. Із побудови на малюнку ясно, що $\Omega_1 = \Omega_{пр}\sin\theta$, а оскільки $\Omega_1 = \dfrac{M_1}{I_1} = \dfrac{M\sin\theta}{I_1}$, то отримаємо $\Omega_{пр} = \dfrac{M}{I_1}$.

§ 36. Рівняння руху твердого тіла

Так як тверде тіло у загальному випадку має шість ступенів вільності, то загальна система рівнянь руху повинна складатись з 6 незалежних рівнянь. Їх можна представити у вигляді, що визначає похідні по часу від векторів імпульсу і моменту імпульсу тіла.

Перше з цих рівнянь отримується просто шляхом підсумовування рівнянь руху $\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ для кожної зі складових частинок тіла, де $\vec{p}$ – імпульс частинки, а $\vec{f}$ – діюча на неї сила. Ввівши повний імпульс тіла $\vec{P} = \sum\vec{p} = \mu\vec{V}$ і повну діючу на нього силу $\sum\vec{f} = \vec{F}$, отримаємо

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum\vec{f} = \vec{F}; \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \tag{1}$$

Отже, похідна повного імпульсу по часу дорівнює сумі всіх сил, що діють на кожну частинку тіла. Фактично ж у силу $\vec{F}$ входять тільки зовнішні сили, оскільки внутрішні сили взаємодії між частинами тіла у відповідності з ІІІ законом Ньютона взаємно скорочуються.

Для знаходження похідної $\dfrac{d\vec{M}}{dt}$ виберемо "нерухому" ІСВ так, щоб у даний момент часу центр інерції був у стані спокою відносно неї: $\vec{V} = 0,\ \vec{\upsilon} = \vec{\Omega}\times\vec{r}'$. Отримане таким чином рівняння буде тим самим в силу принципу відносності Галілея справедливе і у будь-якій іншій ІСВ. Тоді: $\vec{M} = \sum\vec{r}'\times\vec{p} = \sum m\left[\vec{r}'\times\vec{\upsilon}\right]$;

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m\left[\vec{r}'\times\vec{\upsilon}\right] = \sum m\left[\frac{d\vec{r}'}{dt}\times\vec{\upsilon}\right] + \sum m\left[\vec{r}'\times\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right] = \sum m\left[\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}\right] + \sum\left[\vec{r}'\times\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \sum\vec{r}'\times\vec{f}.$$

Величину $\left[\vec{r}'\times\vec{f}\right]$ називають моментом сили $\vec{f}$. Суму моментів всіх сил, що діють на тіло, позначимо:

$$\vec{K} = \sum\left[\vec{r}'\times\vec{f}\right]. \tag{2}$$

Отже, приходимо до рівняння для похідної повного моменту імпульсу по часу:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}. \tag{3}$$

Фактично в (3) слід враховувати тільки зовнішні сили, оскільки всі сили взаємодії частинок тіла між собою внаслідок ІІІ закону Ньютона дають моменти, що взаємно скорочуються.

Момент сили, як і момент імпульсу, залежить, взагалі кажучи, від вибору початку координат, відносно якого він визначений. В (2) і (3) моменти визначаються відносно центра інерції тіла. При переносі початку координат O на вектор $\vec{a}$ у т. O_1 (див. рис. у §33) в (2) треба зробити заміну $\vec{r'} = \vec{r}_1 + \vec{a}$. Тому

$$\vec{K}_1 = \sum\left[\vec{r'} \times \vec{f}\right] = \sum\left[\vec{r}_1 \times \vec{f}\right] + \sum\left[\vec{a} \times \vec{f}\right], \text{ або } \vec{K} = \vec{K}_1 + \left[\vec{a} \times \vec{F}\right] \tag{4}$$

Це є формула перетворення моменту сил при переході до іншого початку СК. Звідси, зокрема, видно, що якщо повна сила $\vec{F} = 0$, то $\vec{K} = \vec{K}_1$, тобто момент сил не залежить від вибору координат. У випадку $\vec{F} = 0$ говорять, що до тіла прикладена пара сил $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$ (див. мал.).

Якщо момент імпульсу можна представити у вигляді $\vec{M} = I\vec{\Omega}$ (умови такого представлення приведені у § 35), то (3) набуде вигляду

$$I\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{K}, \text{ або } I\vec{\varepsilon} = \vec{K}, \tag{5}$$

де $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}$ - кутове прискорення. У загальному випадку проекції моменту імпульсу зв'язані з проекціями кутової швидкості рівністю (35.2): $M_i = I_{ik}\Omega_k$, так що основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла набуде вигляду

$$I_{ik}\frac{d\Omega_k}{dt} = K_i \text{ або } I_{ik}\varepsilon_k = K_i \tag{6}$$

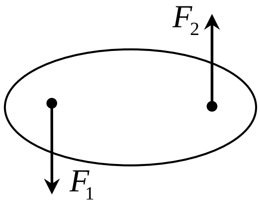
(по індексу *k* передбачається підсумовування).

§37. Умови рівноваги твердих тіл. Дотик твердих тіл

Із рівнянь руху твердого тіла (§36) випливають умови його рівноваги, які формуються у вигляді рівності нулю діючих на нього повної сили і повного моменту сил:

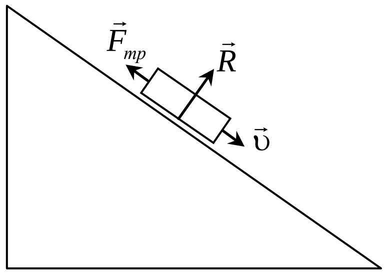
$$\vec{F} = \sum \vec{f} = 0, \; \vec{K} = \sum \vec{r} \times \vec{f} = 0, \tag{1}$$

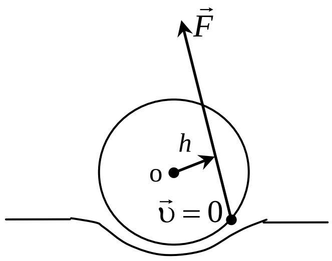
де підсумовування ведеться по всім прикладеним до тіла зовнішнім силам, а $\vec{r}$ - радіус-вектори точок прикладання сил; при цьому точка (початок координат), відносно якої визначаються моменти, може бути вибрана довільним чином: при $\vec{F} = 0$ значення $\vec{K}$ не залежить від цього вибору – див. (36.4).



Якщо ми маємо справу з системою твердих тіл, що дотикаються одне до одного, то у рівновазі умови (1) повинні виконуватись для кожного тіла окремо. При цьому в число сил повинні входити також і сили, що діють на дане тіло з боку інших дотичних з ним тіл. Ці сили прикладені у точках дотику і називаються силами реакції. Очевидно, що для кожних двох тіл взаємні сили реакції рівні за величиною і протилежні за напрямком відповідно до III закону Ньютона.

В загальному випадку величини і напрямки реакцій визначаються в результаті сумісного розв'язку системи рівнянь рівноваги (1) для всіх тіл. Але в деяких випадках напрямки сил реакції можна встановити з умов задачі. Так, при ковзанні одного тіла по поверхні іншого сили реакції напрямлені по нормалі до поверхні.





Якщо тіла, що дотикаються, рухаються одне відносно одного, то крім сил реакції з'являються також дисипативні сили – сили тертя. Можливі два типи руху тіл, що дотикаються – ковзання і кочення. При ковзанні реакції перпендикулярні до дотикаючих поверхонь, а сили тертя напрямлені по дотичним до них.

Чисте кочення характеризується тим, що в точках дотику немає відносного руху тіл; другими словами, тіло, що котиться, в кожен момент часу ніби закріплене у точці дотику. При цьому напрямок сили реакції довільний, тобто не обов'язково перпендикулярний до поверхонь дотику. Тертя ж при коченні проявляється у вигляді додаткового моменту сил, які перешкоджають коченню.

Якщо при ковзанні тертя настільки мале, що ним можна зовсім знехтувати, то поверхні тіл називають абсолютно гладкими. Навпаки, якщо властивості поверхні допускають лише чисте кочення тіл без ковзання, а тертям при коченні можна знехтувати, то поверхні називаються абсолютно шорсткими.

Дотик тіл зменшує число їх ступенів вільності. Раніше це враховувалося шляхом уведення узагальнених координат q_i, які відповідають реальному числу ступенів вільності. Проте, при коченні такий вибір координат може виявитись неможливим. Це пов'язано з тим, що при коченні тіла по нерухомій поверхні швидкість точки дотику поверхні дорівнює нулю. В загальному випадку ця умова виражається рівняннями в'язів виду

$$\sum_i C_{\alpha i}\dot{q}_i = 0, \tag{2}$$

де $C_{\alpha i}$ – функції тільки координат, а індекс α нумерує рівняння в'язів. Якщо ліві сторони умови (2) не є повними похідними по часу деяких функцій координат, то ці рівняння не можуть бути проінтегровані і тому не можуть бути зведені до співвідношень тільки між координатами. Такі в'язі називаються неголономними (§5), і ними не можна скористатись для зменшення числа незалежних координат.

Наявність в'язів виду (2) накладає певні обмеження на можливі значення варіацій координат. Дійсно, помноживши ці рівняння на δt, ми знайдемо, що варіації $\delta q_i = \dot{q}_i \cdot \delta t$ не незалежні, а зв'язані співвідношеннями:

$$\sum_i C_{\alpha i} \delta q_i = 0. \tag{3}$$

Ця обставина повинна бути врахована при варіюванні дій. Згідно із загальним методом Лагранжа для знаходження умовних екстремумів необхідно до підінтегрального виразу варіації дії

$$\delta S = \sum_i \int \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt$$

додати помножені на невизначені множники (функції координат) λ_α рівняння (3), після чого вимагати обернення інтеграла в 0. При цьому можна вже вважати всі варіації δq_i незалежними. Це дає для варіації дії наступний вираз:

$$\delta S = \sum_i \int \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_\alpha \lambda_\alpha C_{\alpha i} \right) \delta q_i dt = 0 \tag{4}$$

і приводить до рівнянь

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\sum_\alpha \lambda_\alpha C_{\alpha i}, \quad i = \overline{1, s}. \tag{5}$$

Рівняння (5) разом з рівняннями в'язів (2) складають повну систему рівнянь для визначення q_i і λ_α. В даному методі сили реакції взагалі не фігурують. Дотик тіл цілком враховується рівняннями в'язів.

Проте, існує і інший метод складання рівнянь руху дотичних тіл, в якому сили реакції вводяться явним чином. Суть цього методу, який складає зміст так званого принципу Даламбера, полягає в тому, що для кожного з дотичних тіл записуються рівняння руху

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{f}; \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \sum \vec{r} \times \vec{f}, \tag{6}$$

причому в число діючих сил $\vec{f}$ включаються також і сили реакції. Ці сили заздалегідь невідомі й самі визначаються разом з рухом тіла в результаті розв'язку рівнянь. Цей метод придатний як при голономних, так і при неголономних в'язах.

РОЗДІЛ 6. ГІДРОДИНАМІКА

§38. Вступ у гідродинаміку. Рівняння неперервності

Вивчення руху рідин (газів) складає зміст гідродинаміки (аеродинаміки). При цьому рідина або газ розглядається як суцільне середовище. Це означає, що будь-який малий елемент об’єму вважається все-таки досить великим, що містить ще дуже велике число молекул. В той-же час нескінченно малий об’єм, який називається точкою рідини, є малим порівняно з об’ємом тіла, але великим порівняно з середнім об'ємом, що припадає на одну молекулу.

Математичний опис стану рухомої речовини визначається за допомогою функцій, що задають розподіл швидкості рідини $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(\vec{r}, t)$ і деяких її термодинамічних величин, наприклад тиску $p = p(\vec{r}, t)$ і густини $\rho = \rho(\vec{r}, t)$. Цих двох термодинамічних величин достатньо, щоб визначити інші термодинамічні функції з рівняння стану. Відмітимо, що залежність $\vec{\upsilon}, p, \rho$ від вектора $\vec{r}$ відноситься до певних точок простору, а не до певних частинок рідини.

Виведемо рівняння, яке виражає закон збереження речовини в гідродинаміці. Для цього виділимо деякий об’єм V_0 простору. Кількість рідини (маса) в ньому дорівнює $\int\limits_{V_0} \rho dV\ (dm = \rho dV)$. Через елемент поверхні dS за час dt витікає маса

$$\rho dV = \rho \cdot \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dS \cdot dt = \left[d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS \right] = \rho \vec{\upsilon} \cdot d\vec{S} \cdot dt.$$

Тоді через всю поверхню з об’єму V_0 витікає кількість рідини $\oint\limits_S \rho \vec{\upsilon} d\vec{S} dt$, а за одиницю часу відповідно $\oint\limits_S \rho \vec{\upsilon} d\vec{S}$. З іншого боку, зміна маси в об’ємі V_0 за одиницю часу дорівнює $\frac{d}{dt} \int\limits_{V_0} \rho dV$. Прирівнюючи ці вирази, отримаємо закон збереження речовини в інтегральній формі

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V_0} \rho dV = -\oint\limits_S \rho \vec{\upsilon} d\vec{S}. \tag{1}$$

Знак „-” в (1) враховує, що при витіканні рідини через поверхню маса рідини зменшується. Перетворимо поверхневий інтервал в (1) справа за допомогою теореми Остроградського – Гауса в інтеграл по об’єму

$$\oint\limits_S \rho \vec{\upsilon} d\vec{S} = \int\limits_{V_0} \operatorname{div} \rho \vec{\upsilon} d\vec{V}, \quad \int\limits_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int\limits_{V_0} \operatorname{div} \rho \vec{\upsilon} d\vec{V}; \quad \int\limits_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{\upsilon} \right) dV = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{\upsilon} = 0. \tag{2}$$

Рівняння (2) називається рівнянням неперервності. Воно виражає закон збереження речовини у диференційній формі. Вектор $\vec{j}=\rho\vec{\upsilon}$ називається густиною потоку рідини. Його напрямок співпадає з напрямком руху рідини, а абсолютна величина визначає кількість рідини, що протікає за одиницю часу через одиницю площі, перпендикулярної до швидкості.

Рідину, для якої $\rho=const$, називають нестисливою. Для нестисливої рідини із закону збереження речовини в інтегральній формі (1) можна отримати просту формулу

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow-\oint_S\rho\vec{\upsilon}d\vec{S}=0,\Rightarrow\ \rho\vec{\upsilon}\vec{S}=const,\ \text{або, так як}\ \rho=const,\ \text{то}\ \upsilon S=const, \qquad (3)$$

де S – площа поперечного перерізу потоку рідини.

§39. Рівняння Ейлера

Виділимо в рідині деякій об'єм V. На елементарну ділянку поверхні рідини dS з боку оточуючої частини рідини діє сила гідравлічного тиску, напрямлена по нормалі до її поверхні: $d\vec{F}=-\vec{n}\cdot pdS=\left[d\vec{S}=\vec{n}dS\right]=-pd\vec{S}.$ Повна сила, що діє на об'єм рідини, дорівнює інтегралу $-\oint_S pd\vec{S}$, взятому по поверхні цього об'єму. Перетворимо його в інтеграл по об'єму: $-\oint_S pd\vec{S}=-\int_V\vec{\nabla}pdV=-\int_V \mathrm{grad}\,pdV$. Отже, на одиницю об'єму рідини діє сила, що дорівнює $-\mathrm{grad}\,p$.

Так як маса одиниці об'єму рідини дорівнює її густині, то з 2-го закону Ньютона випливає рівняння руху одиниці об'єму рідини:

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=-\mathrm{grad}\,p. \qquad (1)$$

Але похідна $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ в рівнянні (1) визначає не зміну швидкості рідини в даній нерухомій точці, а зміну швидкості певної рухомої в просторі частинки рідини. Цю похідну необхідно виразити через величини, що відносяться до нерухомих у просторі точок. Для цього врахуємо, що зміна швидкості $d\vec{\upsilon}$ даної частинки рідини за час dt складається з двох частин: по-перше, із зміни швидкості в даній точці простору за час dt, і по-друге, із різниці швидкостей (в один і той же момент часу) у двох точках, розділених відстанню $d\vec{r}$, пройденого досліджуваною частинкою рідини за час dt. Перша з цих величин дорівнює $\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}dt$, де тепер похідна $\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}$ береться при сталих x,y,z, тобто, в заданій точці простору. Друга частина зміни швидкості дорівнює

$$\vec{\upsilon}(x+dx,y+dy,z+dz)-\vec{\upsilon}(x,y,z)=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial z}dz=\left(d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}.$$

Загальна зміна швидкості дорівнює

$$d\vec{\upsilon}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}dt+\left(d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}dt+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}dt;$$

поділивши обидві частини рівності на dt, отримаємо

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\,. \qquad (2)$$

Підставивши отримане співвідношення в (1), знайдемо

$\rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\rho\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\mathrm{grad}\,p;$ або

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p\,. \qquad (3)$$

Це і є розшукуване рівняння руху рідини, яке називається рівнянням Ейлера. Воно є одним із основних рівнянь гідродинаміки.

Якщо рідина перебуває в полі тяжіння, то на кожну одиницю її об’єму діє додаткова сила тяжіння $\rho\vec{g}$, де $\vec{g}$ - прискорення сили тяжіння. Ця сила повинна бути додана до правої сторони рівняння (1), так що (3) набуває вигляду:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\vec{g}\,. \qquad (4)$$

Слід сказати, що при виводі рівнянь руху ми зовсім не враховували процеси дисипації енергії, які можуть мати місце в рухомій рідині внаслідок внутрішнього тертя (в’язкості) в рідині і теплообміну між різними її ділянками. Тому все викладене тут відноситься тільки до таких рухів рідин і газів, при яких несуттєві процеси теплопровідності і в’язкості. Про такий рух говорять як про рух ідеальної рідини.

§40. Рівняння Бернуллі

В ідеальній рідині відсутність теплообміну між окремими ділянками рідини та між рідиною і оточуючими тілами означає, що рух відбувається адіабатично: $dQ=TdS=0$. Нехай s – ентропія одиниці об’єму рідини. Тоді адіабатичність руху означає, що

$$\frac{ds}{dt}=0\Rightarrow s=const\,. \qquad (1)$$

Отже, адіабатичний рух рідини можна назвати ізоентропійним.

Скористаємось термодинамічним співвідношенням для ентальпії h одиниці маси рідини: $dh=Tds+\upsilon dp$, де $\upsilon=\frac{1}{\rho}$ – питомий об’єм (об’єм одиниці маси), T - температура. Оскільки $s=const$, $ds=0$; то $dh=\frac{1}{\rho}dp$, і тому $\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p=\mathrm{grad}\,h$. Тоді рівняння (39.3) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p=-\mathrm{grad}\,h\,. \tag{2}$$

За допомогою (2) можна отримати ще одну форму рівняння Ейлера, якщо скористатись такою формулою векторного аналізу:

$$grad\,\frac{\upsilon^2}{2}=\left[\vec{\upsilon}\times\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon}\right]+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\,.$$

Тоді (2) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}-\vec{\upsilon}\times rot\vec{\upsilon}=-grad\left(h+\frac{\upsilon^2}{2}\right). \tag{3}$$

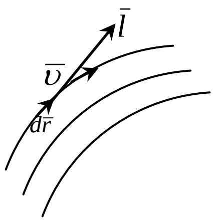
Застосуємо до (3) оператор rot і врахуємо тотожність $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f=0$, отримаємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon}-\mathrm{rot}\left[\vec{\upsilon}\times\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon}\right]=0\,, \tag{4}$$

яке містить тільки швидкість.

Рівняння гідродинаміки значно спрощуються у випадку стаціонарного плину рідини. Під стаціонарним розуміють такий плин, при якому в кожній точці рідини швидкість залишається сталою в часі, тобто $\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}=0$. Тоді рівняння (3) прийме вигляд:

$$\vec{\upsilon}\times rot\vec{\upsilon}=grad\left(h+\frac{\upsilon^2}{2}\right). \tag{5}$$



Введемо поняття лінії потоку як лінії, дотичні до яких вказують напрямок вектора швидкості у точці дотику в даний момент часу. Із паралельності векторів $\vec{r}$ і $\vec{\upsilon}$ випливає диференціальне рівняння ліній потоку:

$$\frac{dx}{\upsilon_x}=\frac{dy}{\upsilon_y}=\frac{dz}{\upsilon_z}\,. \tag{6}$$

При стаціонарному русі рідини лінії потоку залишаються незмінними в часі і співпадають з траєкторіями частинок рідини. При нестаціонарному русі таке співпадання не має місця.

Помножимо рівняння (5) скалярно на одиничний вектор $\vec{l}$ дотичної до лінії потоку і врахуємо, що $\vec{l}$ $:\vec{\upsilon}\parallel\vec{l}\cdot\left[\vec{\upsilon}\times rot\vec{\upsilon}\right]=0=\vec{l}\cdot\mathrm{grad}\left(h+\frac{\upsilon^2}{2}\right)$. Але скалярний добуток градієнта на деякий одиничний вектор дорівнює похідній у напрямку цього вектора. Отже,

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(h+\frac{\upsilon^2}{2}\right)=0\,. \tag{7´}$$

Звідси випливає, що величина $h+\frac{\upsilon^2}{2}$ стала вздовж лінії потоку:

$$h+\frac{\upsilon^2}{2}=const\,. \tag{7}$$

Значення сталої є різним для різних ліній потоку. Рівняння (7) називається рівнянням Даниїла Бернуллі (1738 р.).

Якщо плин рідини відбувається у полі тяжіння, то до правої частини рівняння (3) необхідно додати також прискорення сили тяжіння $\vec{g}$. Виберемо напрямок сили тяжіння в якості напрямку вісі z, причому додатні значення z відраховуються вертикально вгору. Тоді косинус кута між $\vec{l}$ і $\vec{g}$ дорівнює $-\dfrac{dz}{dl}$, так що проекція $\vec{g}$ на напрямок $\vec{l}$ є $-g\dfrac{dz}{dl}$. Тому замість рівняння (7′) маємо: $\dfrac{\partial}{\partial l}\left(h+\dfrac{\upsilon^2}{2}+gz\right)=0$, звідки замість рівняння (7) отримаємо:

$$h+\frac{\upsilon^2}{2}+gz=const. \qquad (8)$$

Це узагальнення рівняння Бернуллі для рідини у полі тяжіння.

Для нестисливої рідини $\rho=const$. Помножимо (8) на ρ і врахуємо, що $h=\dfrac{p}{\rho}$, відповідно $p=h\rho$, тоді замість (6) отримаємо формулу

$$p+\frac{\rho\upsilon^2}{2}+\rho gz=const. \qquad (9)$$

§41. Потік імпульсу у рідині (НСО)

Імпульс одиниці об’єму рідини дорівнює $\rho\vec{\upsilon}$. Знайдемо швидкість його зміни:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\vec{\upsilon}=\frac{\partial\rho}{\partial t}\vec{\upsilon}+\rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}.$$

Перейдемо в цій рівності до тензорних позначень (див. §34):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i=\frac{\partial\rho}{\partial t}\upsilon_i+\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}. \qquad (1)$$

Скористаємось рівнянням неперервності (38.2), написавши його у вигляді

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}\rho\vec{\upsilon}=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\upsilon_x+\frac{\partial}{\partial y}\rho\upsilon_y+\frac{\partial}{\partial z}\rho\upsilon_z\right)=-\frac{\partial}{\partial x_k}\rho\upsilon_k;$$

і рівнянням Ейлера (39.3) у формі

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\Rightarrow\ \frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}=-\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}=-\left(\upsilon_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\upsilon_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Підставимо ці вирази в (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i=-\upsilon_i\frac{\partial}{\partial x_k}\rho\upsilon_k-\rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_k}\rho\upsilon_k\upsilon_i=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\delta_{ik}p+\rho\upsilon_i\cdot\upsilon_k\right). \qquad (2)$$

Введемо тензор

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho\upsilon_i\upsilon_k\,. \qquad (3)$$

Тоді рівняння (2) перепишеться у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i = -\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k}. \qquad (4)$$

Це є тензорна форма рівняння Ейлера.

Для визначення змісту тензора Π_{ik} проінтегруємо рівняння (4) по деякому об'єму: $\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i dV = -\int\limits_V \frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k}dV.$ Інтеграл справа перетворимо в інтеграл по поверхні:

$$\int\limits_V \frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k}dV = -\oint\limits_S \Pi_{ik}dS_k\,.$$

(Правило перетворення інтегралу по замкнутій поверхні в інтеграл по об'єму можна сформулювати так: воно здійснюється заміною елемента поверхні dS_k оператором $dV\frac{\partial}{\partial x_k}$, який повинен бути застосованим по всьому підінтегральному виразу: $dS_k \to dV\frac{\partial}{\partial x_k}$). В результаті отримаємо

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i dV = -\oint\limits_S \Pi_{ik}dS_k\,. \qquad (5)$$

Зліва в (5) стоїть зміна i-ї компоненти імпульсу, що вибуває за одиницю часу із заданого об'єму. Тому інтеграл справа по поверхні є кількість імпульсу, що витікає за одиницю часу через оточуючу об'єм поверхню. Отже, $\Pi_{ik}dS_k$ є i-та компонента імпульсу, що протікає через елемент dS_k поверхні, а Π_{ik} означає i-ту компоненту імпульсу об'єму, що протікає за одиницю часу через одиницю поверхні, перпендикулярну до вісі x_k. Тензор густини Π_{ik} називається тензором густини потоку імпульсу.

§ 42. Рівняння руху в'язкої рідини (НСО)

Дослідимо вплив на рух рідини процесів дисипації енергії, пов'язаних з наявністю внутрішнього тертя і теплопровідності. Для отримання рівнянь руху в'язкої рідини необхідно ввести додаткові члени в рівняння руху ідеальної рідини. Що стосується рівняння неперервності, то це рівняння буде однаковим як для ідеальної, так і для в'язкої рідини. Рівняння ж Ейлера має бути зміненим.

Як було показано в § 41, рівняння Ейлера може бути представлене у вигляді формули, що означає зміну імпульсу одиниці об'єму:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i = -\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k}. \qquad (1).$$

Тензор густини потоку імпульсу ідеальної рідини Π_{ik} дорівнює (41.3):

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho\upsilon_i\upsilon_k\,; \qquad (2)$$

він відповідає чисто оборотному переносу імпульсу, пов'язаному з механічним переносом різних ділянок рідини з одного місця на інше і з діючими в рідині силами тиску. В’язкість рідини проявляється у наявності ще додаткового, необоротного, переносу імпульсу з місць з більшою швидкістю в місця з меншою швидкістю. Тому рівняння руху в’язкої рідини можна отримати, додавши до ідеального потоку (2) додатковий член $-\sigma'_{ik}$, який визначає необоротний, в’язкий перенос імпульсу в рідині. Тому тензор густини потоку імпульсу в’язкої рідини матиме вигляд:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho\upsilon_i\upsilon_k - \sigma'_{ik} = \rho\upsilon_i\upsilon_k - \sigma_{ik}. \tag{3}$$

Тут введено тензор

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}, \tag{4}$$

який називається тензором напружень, тоді як σ'_{ik} – в’язким тензором напружень. σ_{ik} визначає ту частину потоку імпульсу, яка не зв’язана з безпосереднім переносом імпульсу разом з масою рухомої речовини.

Встановимо загальний вигляд тензору σ'_{ik}, виходячи з наступних міркувань. σ'_{ik} відмінний від нуля тільки тоді, коли різні шари рідини рухаються з різними швидкостями, тобто існує градієнт швидкості $\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}$. Тому σ'_{ik} повинно залежати від похідних від швидкості по координатам. Якщо градієнти швидкості не дуже великі, то можна вважати, що обумовлений в’язкістю перенос імпульсу залежить тільки від перших похідних швидкості. Саму залежність σ'_{ik} від похідних $\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}$ можна в тому ж наближенні вважати лінійною. Незалежні від $\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}$ доданки повинні бути відсутні у виразі для σ'_{ik}, тому що σ'_{ik} повинен дорівнювати 0 при $\vec{\upsilon} = const$. Із розгляду треба також виключити ситуацію, коли градієнт швидкості відмінний від нуля внаслідок рівномірного обертання. Найбільш загальним видом тензора другого рангу, який задовольняє приведеним умовам, є

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_l}. \tag{5}$$

Тут η і ζ є незалежні від швидкості додатні величини, які називаються коефіцієнтами в’язкості. Вони є характеристиками рідини, що залежать від температури і її складу.

Підставивши (5) в (3), а (3) в (1), отримаємо найбільш загальний вигляд рівняння руху в’язкої рідини

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_l}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_l}\right). \tag{6}$$

Рівняння (6) суттєво спрощуються, якщо в’язкість не залежить від координат, і тоді його можна представити у векторному вигляді:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\underline{\upsilon}\right) = -\mathrm{grad}\,p + \eta\left(\Delta\vec{\upsilon} + \mathrm{grad\,div}\vec{\upsilon} - \frac{2}{3}\mathrm{grad\,div}\vec{\upsilon}\right) + \zeta\,\mathrm{grad\,div}\vec{\upsilon}$$

або

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\right)=-\mathrm{grad}\,p+\eta\Delta\vec{\upsilon}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\upsilon}\,. \qquad (7)$$

Це – так зване рівняння Нав'є – Стокса для в'язкої рідини. Воно ще більше спрощується для нестисливої рідини, тобто коли $\rho = const$. Тоді з рівняння неперервності

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho\vec{\upsilon}=0\Rightarrow\mathrm{div}\,\rho\vec{\upsilon}=0\Rightarrow\mathrm{div}\,\vec{\upsilon}=0\,.$$

В результаті замість (7) отримаємо:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{\upsilon}\,. \qquad (8)$$

Ми бачимо, що в нестисливій рідині в'язкість описується всього одним коефіцієнтом. Оскільки рідину практично можна вважати нестисливою, важливим є саме коефіцієнт в'язкості η. Відношення $\nu=\frac{\eta}{\rho}$ називають кінематичною в'язкістю, а саму η – динамічною в'язкістю (ζ інколи називають другою в'язкістю). Відмітимо, що динамічна в'язкість газів при заданій температурі не залежить від тиску, а кінематична в'язкість обернено пропорційна тиску.

Рівняння руху доповнюються граничними умовами. Між поверхнею твердого тіла і всякою в'язкою рідиною завжди існують сили молекулярного зчеплення, які приводять до того, що прилеглий до твердої стінки шар рідини повністю затримується, ніби прилипаючи до неї. Відповідно до цього гранична умова до рівнянь руху в'язкої рідини полягає у вимозі обертання в нуль швидкості рідини на нерухомих твердих поверхнях:

$$\vec{\upsilon}\,|_S=0\,. \qquad (9)$$

РОЗДІЛ 7. ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

§43. Вихідні припущення механіки деформівного твердого тіла

Дослідження поведінки деформівних тіл при дії на них зовнішніх сил являє собою настільки складну задачу, що її розв’язання в практично прийнятному вигляді вдається одержати лише при певній схематизації явищ, що відбуваються.

Першим кроком на цьому шляху є відмова від врахування як мікроструктури деформівних тіл, тобто, їх атомної та молекулярної будови, так і макроструктури (кристалічної та аморфної будови, наявності пор і включень і т.д.), а також структурних змін, що відбуваються в процесі деформування.

Деформоване тіло, таким чином, розглядається як обмежене заданою поверхнею суцільне середовище. Іншими словами, припускається, що будь-яка як завгодно мала частина об’єму тіла складається з матеріалу цього тіла. Тому виявляється можливим говорити не тільки про геометричну, але й «матеріальну» точку тіла, і визначати величини, що характеризують стан і поведінку тіла, як неперервні функції від координат названих точок. Отже, ми вважатимемо, що матеріал твердого тіла є однорідним і неперервно розподіленим по всьому об’єму тіла, так що самий найменший елемент, вирізаний з тіла, має ті ж самі фізичні властивості, що й все тіло. Для спрощення міркувань, як правило, будемо припускати, що тіло ізотропне, тобто, що його характеристики по всім напрямкам однакові.

Зовнішні сили, що діють на тіло, розглядаються як результат дотику з іншими тілами або як наслідок наявності у всіх тіл маси. Сили дотику приймаються прикладеними до всієї або до частини поверхні тіла, тому їх називають *поверхневими.* Сили, пов'язані з масою тіла (масові, або об'ємні, сили — тому що вони пропорційні елементарному об’єму тіла), вважаються розподіленими по об’єму тіла (такими є, наприклад, сили тяжіння або інерції).

Приймається, що частинки тіла зв'язані між собою силами зчеплення, які зводяться до сил притягання і відштовхування. Крім того, передбачається, що існує такий стан тіла, у якому сили притягання й відштовхування взаємно зрівноважені. Цей стан називають природним.

Передбачається також, що природний стан тіла відповідає відсутності деформацій і прикладених до цього тіла зовнішніх сил. Будь-яке відхилення від природного стану в такому припущенні пов'язується з порушенням рівноваги сил зчеплення і виникненням із цієї причини деформацій, які продовжують зростати доти, поки не відбудеться руйнування тіла або не буде досягнутий новий рівноважний стан за рахунок виникнення сил взаємодії (зусиль, або внутрішніх сил). Приймається, що ці сили не мають властивості далекодії, так що внутрішні сили, які виникають між двома частинами деформованого тіла, вважаються прикладеними до поверхні, що розмежовує обидві частини. При цьому робиться допущення, що величина і напрямок вказаних сил у будь-якій точці поверхні не залежать від її виду, а лише від напрямку нормалі до неї.

§44. Напруження

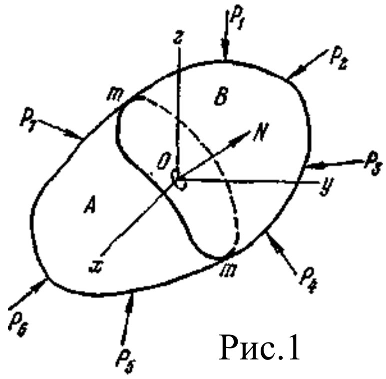


Рис.1

На рис.1 показане тіло, що перебуває в стані рівноваги. Під дією зовнішніх сил P_1, P_2, …, P_7 між частинами тіла виникають внутрішні сили взаємодії. Щоб дослідити величину цих сил у довільній точці O, уявимо, що тіло розділене на дві частини A і B поперечним перерізом mm, що проходить через цю точку. Розглядаючи одну із цих частин, наприклад частину A, можна стверджувати, що вона перебуває в рівновазі під дією зовнішніх сил P_1, P_2, …, P_7 і внутрішніх сил, які розподілені по поперечному перерізу mm і являють собою дію матеріалу частини B на матеріал частини A. Припустимо, що ці сили неперервно розподілені по площі перерізу mm подібно до того, як розподіляються по поверхні, на яку вони діють, гідростатичний тиск або тиск вітру. Величини таких сил визначаються їхньою інтенсивністю, тобто величиною сили, віднесеної до одиниці площі, на яку вона діє. Інтенсивність внутрішніх сил називається напруженням.

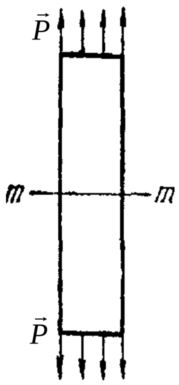


Рис.2

В найпростішому випадку призматичного стержня, що розтягується силами, рівномірно розподіленими по його кінцях (рис.2), внутрішні сили у довільному поперечному перерізі mm також розподіляються рівномірно. Отже, інтенсивність цього розподілу, тобто напруження, можна одержати, розділивши повне розтяжне зусилля P на площу поперечного переріза S.

У розглянутому випадку напруження розподілене по поперечному перерізу рівномірно. У загальному випадку (рис.1, розтин mm) це не так. Щоб одержати величину напруження, розподіленого по деякій малій площадці δS, вирізаній з поперечного перерізу mm у точці O, насамперед відзначимо, що сили, які діють на цю елементарну площадку з боку частини тіла B на частину тіла A, можна звести до результуючої сили δP.

Якщо ми будемо тепер неперервно зменшувати площу елементарної площадки δS, то граничне значення відношення $\delta P/\delta S$ дасть нам величину напруження, що діє в поперечному перерізі mm у точці O. Граничний напрямок результуючої δP є напрямком напруження в розглянутій точці. У загальному випадку вектор напруження нахилений до площадки δS, на якій воно діє, і його можна розкласти на дві компоненти: на *нормальне напруження,* перпендикулярне до площадки, і на *дотичне напруження,* що діє в площині площадки δS.

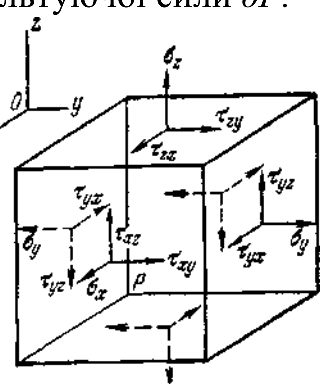


Рис.3

Існує два види зовнішніх сил, які можуть впливати на тіло. Сили, розподілені по поверхні тіла, такі, як тиск одного тіла на інше або гідростатичний тиск, називаються *поверхневими силами.* Сили, розподілені по масі тіла, такі, як сили тяжіння, магнітні сили або (у випадку руху тіла) сили інерції, називаються *масовими силами.* Поверхневу силу, віднесену до одиниці площі, ми будемо розкладати на три компоненти, паралельні декартовим координатним вісям x, y, z, використовуючи для цих компонентів позначення $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Масові сили, віднесені до одиниці об'єму, називані об'ємними силами, також розкладемо на три компоненти, позначивши їх через X, Y, Z.

Буквою σ будемо позначати нормальне напруження, а буквою τ - дотичне. Щоб вказати орієнтацію площини, по якій діє напруження, до цих букв будемо додавати індекси. Розглянемо дуже малий кубічний елемент у точці P (рис.3) із гранями, паралельними координатним осям. Позначення для компонентів напружень, що діють по гранях цього елемента, а також напрямку, які вважаються позитивними, показані на рис. 3. Наприклад, для граней елемента, перпендикулярних вісі y, нормальні компоненти напружень, що діють на цих гранях, позначаються через σ_y. Індекс y показує, що напруження діють по площадці, перпендикулярній вісі y. Нормальне напруження вважається позитивним, коли воно викликає розтяг елемента, і негативним, коли воно викликає стиск.

Дотичні напруження розкладаються на дві компоненти, паралельні координатним осям. У цьому випадку використовуються вже два індекси, з яких перший показує напрямок нормалі до розглянутої площини, а другий - напрямок компоненти напружень. Наприклад, якщо знову розглянути грані, перпендикулярні осі y, то компонента у напрямку x позначається через τ_{yx}, а компонента у напрямку z - через τ_{yz}. Позитивні напрямки компонентів дотичних напружень на грані кубічного елемента приймаються співпадаючими з позитивними напрямками координатних осей, якщо розтягуючі напруження для тієї ж грані збігаються з позитивним напрямком відповідної осі. Якщо розтягуючі напруження мають напрямок, протилежний позитивному напрямку осі, то позитивні напрямки компонент дотичного напруження міняються на зворотні. Відповідно до цього правила позитивні напрямки всіх компонентів напруги на першій грані кубічного елемента (рис.3) збігаються з позитивними напрямками координатних осей. Якщо ж розглядається ліва грань того ж елемента, то позитивні напрямки міняються на зворотні.

§45. Компоненти напружень

Як видно з попереднього параграфа, для кожної пари паралельних граней кубічного елемента, зображеного на рис. 44.3, потрібно один символ, щоб позначити нормальну компоненту напружень, і ще два символи, щоб позначити компоненти дотичних напружень. Щоб позначити напруження, що діють на шести гранях елемента, потрібно три символи σ_x, σ_y, σ_z для нормальних напружень і шість τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{zx}, τ_{yz}, τ_{zy} для дотичних. За допомогою простого дослідження рівноваги елемента число символів для дотичних напружень можна скоротити до трьох.

Якщо взяти моменти сил, що діють на елемент, відносно осі, що проходить через центральну точку C паралельно осі x, то виявиться необхідним розглядати лише ті поверхневі сили, які показані на рис.1. Об'ємними силами, такими, як вага елемента, у цьому випадку можна знехтувати, оскільки при зменшенні розмірів елемента діючі на нього об'ємні сили зменшуються пропорційно кубу лінійного розміру, тоді як поверхневі зусилля зменшуються пропорційно квадрату лінійного розміру.

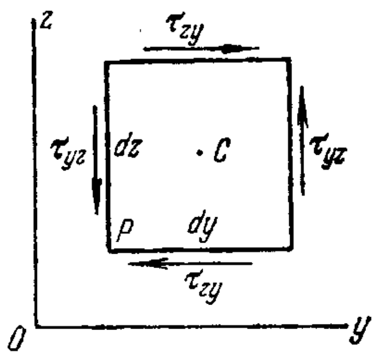


Рис.1.

Отже, для дуже малого елемента об'ємні сили є величинами більш високого порядку малості, ніж поверхневі сили, і при визначенні моментів можуть не враховуватися. Точно так само моменти, викликані неоднорідністю розподілу нормальних зусиль, мають більш високий порядок малості, ніж моменти, викликані зсувними зусиллями, і обертаються в нуль при необмеженому зменшенні розмірів елемента.

Таким чином, зусилля, що діють на кожній грані куба, можна вважати рівними добутку площі грані на величину напруження в її центрі. Якщо позначити розміри малого елемента на рис.1 через dx, dy, dz, то з рівняння моментів сил відносно точки C знаходимо

$$2\tau_{yz} dxdz\cdot\frac{dy}{2} = 2\tau_{zy} dxdy\cdot\frac{dz}{2},\ \text{або}\ \ \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Аналогічно можна одержати й два інших співвідношення. Отже,

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\ \tau_{xz}=\tau_{zx},\ \tau_{yz}=\tau_{zy}. \tag{1}$$

Отже, на двох перпендикулярних одна одній гранях кубічного елемента компоненти дотичного напруження, перпендикулярні лінії перетину цих граней, рівні між собою.

Таким чином, для опису напружень, що діють на координатних площинах, які проходять через будь-яку точку, достатньо шести величин: σ_x, σ_y, σ_z, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{xz}=\tau_{zx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$. Вони будуть називатися *компонентами напружень* у цій точці і утворюють тензор напружень σ_{ik}

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

За допомогою цих шести компонентів можна визначити напруження на будь-якій нахиленій площадці, що проходять через цю ж точку (§49).

§ 46. Тензор деформацій

При розгляді деформацій пружного тіла будемо припускати, що є достатня кількість в'язів, які перешкоджають руху тіла як твердого цілого, у силу чого переміщення частинок тіла неможливі без його деформації.

Будемо надалі розглядати тільки звичайно виникаючі в інженерних конструкціях малі деформації. Перш за все розкладемо переміщення частинок деформованого тіла на компоненти *u*, *v*, *w*, паралельні відповідно до координатних осей *x, y, z*. Будемо вважати, що ці компоненти є досить малими величинами, які міняються неперервно по об'єму тіла. Розглянемо малий елемент пружного тіла (рис.1). Якщо тіло піддається деформації і *u*, *v*, *w* - компоненти переміщення в точці *P*, то переміщення в напрямку *x* сусідньої точки *A*, розташованої на осі *x*, з точністю до величин першого порядку по *dx* має вигляд $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ через зростання функції *u* на величину $(\partial u/\partial x)dx$ зі збільшенням координати *x*. Збільшення довжини елемента *PA*, викликане деформацією, дорівнює $(\partial u/\partial x)dx$. Таким чином, *відносне видовження* в точці *P* у напрямку *x* становить $\varepsilon_x=\partial u/\partial x$. Таким же шляхом можна показати, що відносні подовження в напрямках *y* і *z* визначаються похідними $\varepsilon_x=dv/\partial y$ і $\varepsilon_z=dw/\partial z$.

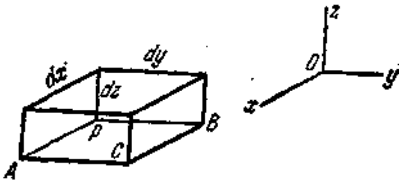


Рис.1.

Розглянемо тепер зміну кута між елементами *PA* і *PB* (рис.2). Якщо *u* і *v* - переміщення точки *P* у напрямках *x* і *y,* то переміщення точки *A* в напрямку *y* і точки *B* у напрямку *x* дорівнюють відповідно $v+(\partial v/\partial x)dx$ і $u+(du/dy)dy$. У результаті цих переміщень новий напрямок *P'A'* елемента *PA* утворить, як показано на кресленні, з початковим напрямком малий кут $dv/\partial x$. Точно так само напрямок *P'B'* повернений відносно *PB* на малий кут $\partial u/\partial y$.

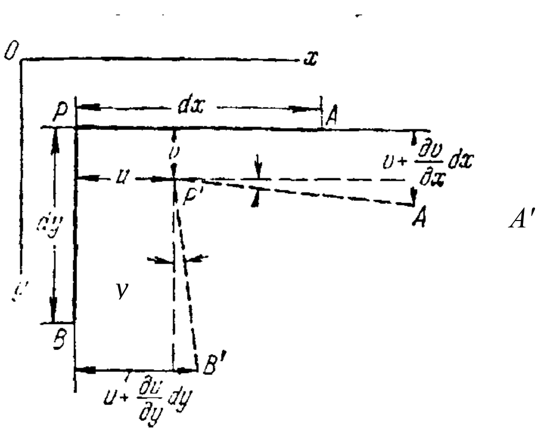


Рис.2.

Звідси видно, що початково прямий кут *APB* між двома елементами *PA* і *PB* зменшився на величину $\gamma_{xy}=dv/dx+\partial u/\partial y$. Ця величина являє собою деформацію зсуву між площинами *xz* і *yz*. Таким же шляхом можна одержати деформації зсуву між площинами *xy* і *xz,* а також між площинами *yx* і *yz*.

Через ε будемо позначати відносне видовження, а через γ - відносну деформацію зсуву. Для вказівки напрямків деформації будемо використовувати ті ж індекси, що й для компонентів напружень. Тоді із наведених вище міркувань випливає, що

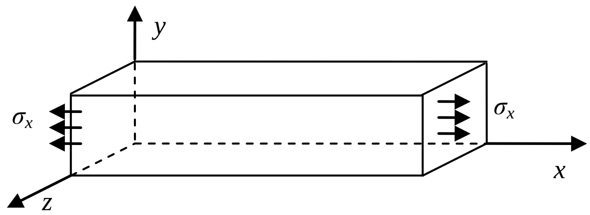
$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\;\; \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\;\; \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\;\; \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\;\; \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (1)$$

Знаючи три відносних видовження у трьох перпендикулярних напрямках і три відносні деформації зсуву, віднесені до тих же напрямків, можна знайти видовження у *будь-якому* напрямку й зміну кута між *будь-якими* двома напрямками. Шість величин ε_x, …, γ_{yz} називаються *компонентами деформації* і утворюють тензор деформацій

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

§ 47. Закон Гука

Лінійні співвідношення між компонентами напружень і компонентами деформацій називають звичайно *законом Гука.* Уявимо собі елементарний прямокутний паралелепіпед із гранями, паралельними координатним осям, підданий дії нормального напруження σ_x, рівномірно розподіленого по двох протилежних гранях, як це має місце в досліді на розтяг (Рис).



Аж до досягнення межі пропорційності відносне видовження елемента дається формулою

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \tag{1}$$

де *E – модуль пружності при розтягу.* Матеріали, використовувані в інженерних конструкціях, мають модулі, дуже великі у порівнянні з допустимими напруженнями, у силу чого відносне подовження, визначене за формулою (1), є дуже малою величиною. Наприклад, для конструкційних сталей воно звичайно менше ніж 0,001.

Таке видовження елемента в напрямку осі *x* супроводжується звуженням у поперечному напрямку (стисненням), обумовленим компонентами деформацій:

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}, \tag{2}$$

де ν - константа, названа *коефіцієнтом Пуассона.* Для багатьох матеріалів коефіцієнт Пуассона можна прийняти рівним 0,25. Для конструкційних сталей він звичайно вважається рівним 0,3.

Залежності (1-2) можна використовувати також у випадку простого стиску. При стиску модуль пружності й коефіцієнт Пуассона зазвичай мають ті ж значення, що й при розтяганні.

Якщо розглянутий елемент піддається одночасній дії нормальних напружень σ_x, σ_y, σ_z, рівномірно розподілених по його гранях, то компоненти отримуваних деформацій можна одержати з виразів (1-2). Здійснюючи накладання компонентів деформацій, викликаних кожним із трьох напружень, одержимо співвідношення

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right],$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right], \qquad (3)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right].$$

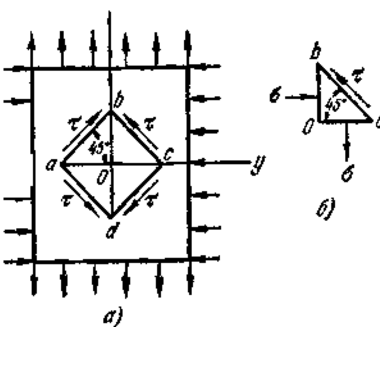
Ці співвідношення підтверджуються численними дослідами.

Надалі ми будемо часто використовувати вище застосований *метод накладення,* або *суперпозицію,* для відшукання повних деформацій і напружень, викликаних декількома силами. Цей метод справджується поки деформації малі, а відповідні їм малі переміщення не впливають істотно на дію зовнішніх сил. У таких випадках ми нехтуємо малими змінами розмірів деформованого тіла, а також малими переміщеннями точок прикладання зовнішніх сил, і здійснюємо наші обчислення на основі початкових розмірів і початковій формі тіла. Переміщення, що отримуються у результаті деформації, можна знаходити за допомогою суперпозиції у вигляді лінійних функцій зовнішніх зусиль, як це було зроблено при виведенні співвідношень (3).

Проте, існують особливі випадки, у яких малими деформаціями не можна зневажати і треба їх ураховувати. Як приклад такого роду можна назвати випадок одночасної дії осьового й поперечного навантаження на тонкий стержень. Самі по собі осьові сили викликають просте розтягання або стиснення, однак якщо вони діють одночасно з поперечним навантаженням, то впливають на згинання стержня. При визначенні деформацій стержня в таких умовах, незважаючи на малість прогинів, потрібно враховувати їхній вплив на момент від зовнішніх сил. Тепер уже повні прогини не є лінійними функціями зусиль і не можуть бути отримані за допомогою простого накладання.

У співвідношеннях (3) залежності між видовженнями й напруженнями повністю визначаються двома фізичними константами E і ν. Ті ж константи можна використати й для визначення залежності між деформацією зсуву й дотичним напруженням.

Розглянемо окремий випадок деформації прямокутного паралелепіпеда, коли $\sigma_z=\sigma$, $\sigma_y= -\sigma$, $\sigma_x=0$. Виріжемо елемент $abcd$ площинами, паралельними осі x і нахиленими під кутом 45° до осей y і z (рис. 52.1). Як випливає з умов рівноваги елемента Obc (рис. 52.1, б), нормальні напруження на всіх гранях елемента $abcd$ дорівнюють нулю, а дотичні напруження



$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma . \qquad (4)$$

Такий напружений стан називається *чистим зсувом.* Видовження вертикального елемента Ob дорівнює скороченню горизонтальних елементів Oa і Oc, звідки (нехтуючи малими величинами другого порядку) випливає, що довжини відрізків елемента Рис.1

ab і *bc* при деформації не змінюються. Кут між гранями *ab* і *bc* змінюється, і відповідну величину деформації зсуву γ можна знайти із трикутника *Obc.* Таким чином, у результаті деформації маємо

$$\frac{Oc}{Ob} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1+\varepsilon_y}{1+\varepsilon_z}.$$

Підстановка відносних деформацій з рівностей (52.3) дає

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\sigma_y\right] = \frac{(1+\nu)\sigma}{E}, \quad \varepsilon_y = -\frac{(1+\nu)\sigma}{E}.$$

Зауважуючи, що при малих γ

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1 + tg\left(\frac{\pi}{4}\right)tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}} = \frac{1-\frac{1+\nu}{E}\sigma}{1+\frac{1+\nu}{E}\sigma},$$

з урахуванням (4) знаходимо

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)\sigma}{E} = \frac{2(1+\nu)\tau}{E}. \tag{5}$$

Таким чином, залежність між деформацією зсуву і дотичним напруженням визначається константами E і ν. Часто використовується позначення

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{6}$$

З його допомогою рівність (5) приймає вид

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Константа G, визначена рівнянням (6), називається *модулем пружності при зсуві* або *модулем зсуву*.

Якщо дотичні напруження діють по всіх гранях елемента, як показано на рис. 44.3, спотворення кута між двома гранями, що перетинаються, залежить тільки від відповідних компонентів дотичного напруження. Звідси одержуємо

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \tag{7}$$

Компоненти деформацій, що характеризують видовження (3) і деформації (7), не залежать друг від друга. Загальний випадок деформації, здійснюваної трьома нормальними й трьома дотичними компонентами напружень, можна одержати за допомогою накладання: на три видовження, обумовлені виразами (3), накладаються три деформації зсуву, обумовлені співвідношеннями (7).

Рівняння (3) і (7) визначають компоненти деформацій як функції компонент напружень. Іноді потрібно виразити компоненти напружень як функції компонентів деформацій. Їх можна одержати в такий спосіб. Складаючи рівняння (3) і використовуючи позначення

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad \Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \tag{8}$$

одержуємо наступну залежність між об'ємним розширенням e і сумою нормальних напружень Θ:

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\Theta \ . \qquad (9)$$

Для випадку рівномірного гідростатичного тиску з інтенсивністю p маємо

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \ .$$

Тоді з (9) одержуємо $e = -\frac{3(1-2\nu)p}{E}$.

Ця формула являє собою залежність між відносним об'ємним розширенням e і гідростатичним тиском p. Величина $E/[3(1-2\nu)]$ називається модулем об'ємного розширення.

Використовуючи позначення (8) і розв’язуючи рівняння (3) відносно σ_x, σ_y, σ_z, знайдемо

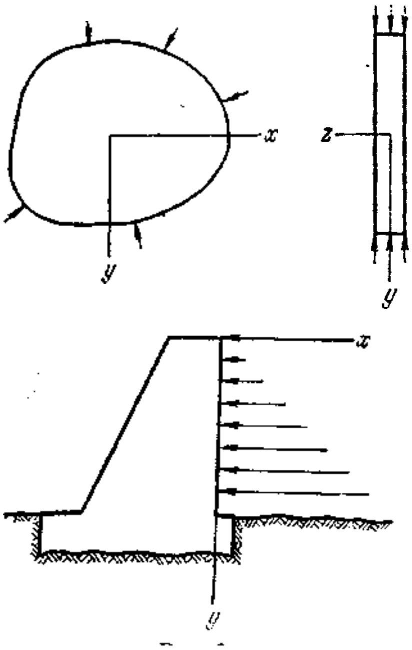
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}e + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}e + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}e + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_z. \end{aligned} \qquad (10)$$

Використовуючи позначення $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ (11)

і вираз (6), ці формули можна привести до виду

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z \ . \qquad (12)$$

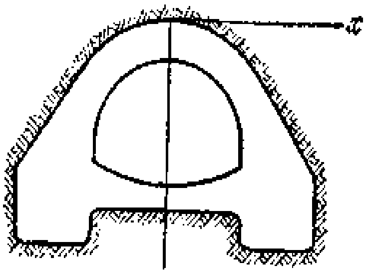
§ 48. Плоский напружений стан і плоска деформація



Якщо тонка пластинка навантажена зусиллями, прикладеними на її межі паралельно до площини пластинки і рівномірно розподіленими по товщині (рис.), то компоненти напружень σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} на обох поверхнях пластинки дорівнюють нулю, і можна попередньо припустити, що вони дорівнюють нулю й усередині пластинки. Тоді напружений стан буде визначатися тільки компонентами σ_x, σ_y, τ_{xy} і називається *плоским напруженим станом*. Можна також припустити, що ці три компоненти не залежать від z, тобто не міняються по товщині пластинки, а є функціями тільки від x і y.

Подібні спрощення можливі й в іншому граничному випадку, коли розмір тіла в напрямку осі z дуже великий. Якщо довге циліндричне або призматичне тіло навантажується силами, які перпендикулярні до поздовжньої осі тіла й не міняються по його довжині, можна вважати, що всі поперечні перерізи перебувають у однакових умовах. Простіше всього для початку припустити, що кінцеві перерізи обмежені фіксованими гладкими абсолютно твердими площинами, які перешкоджають переміщенням у поздовжньому напрямку. Оскільки немає осьових переміщень на кінцях, а в силу симетрії їх немає й у середньому перерізі, можна припустити, що те ж саме справедливо й для будь-якого поперечного перерізу.

Існує багато важливих задач такого роду; наприклад, для підпірної стінки під дією поперечного тиску, трубопроводу або тунелю, циліндричної труби під дією внутрішнього тиску, циліндричного ролика,



стиснутого силами в діаметральній площині, як це має місце в роликопідшипнику. У кожному випадку, звичайно, навантаження не повинно змінюватися по довжині тіла. Оскільки в кожному поперечному перерізі умови однакові, досить розглянути тонкий шар між двома перерізами, відстань між якими дорівнює одиниці. Компоненти переміщень u і v є функціями x і y, але не залежать від поздовжньої координати z. Оскільки поздовжні переміщення w дорівнюють нулю, рівняння (46.1) дають

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \qquad (1)$$

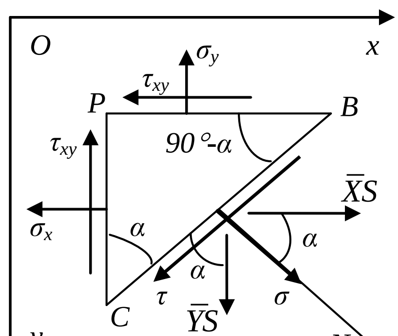
Повздовжні нормальні напруження σ_z можна виразити через σ_x і σ_y за допомогою закону Гука (47.3). У силу того, що ε_z=0, одержуємо

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \qquad (2)$$

Ці нормальні напруження діють по всім поперечним перерізам, включаючи кінцеві, де вони являють собою сили, необхідні для підтримки плоскої деформації, і створюються фіксованими гладкими абсолютно твердими площинами.

Відповідно до рівнянь (1-2) компоненти напружень τ_{xz} і τ_{yz} дорівнюють нулю, а відповідно до рівняння (2) напруження σ_z можна визначити, знаючи σ_x і σ_y. Отже, задача про плоску деформацію, як і задача про плоский напружений стан, зводиться до визначення компонентів напружень σ_x, σ_y і τ_{xy} як функцій x і y.

§ 49. Напруження в точці (НСО)



Знаючи компоненти напружень σ_x, σ_y і τ_{xy} у будь-якій точці пластинки в умовах плоского напруженого стану або плоскої деформації, можна знайти з рівнянь статики напруження на будь-якій похилій відносно осей x і y площині (площадці), що проходить через цю точку перпендикулярно пластинці. Позначимо через P деяку точку у напруженій пластинці й допустимо, що компоненти напруги σ_x, σ_y і τ_{xy}

відомі (див. рис.). На малій відстані від P проведемо площину ВС, паралельну осі z, так, щоб ця площина разом з координатними площинами вирізала із пластинки дуже малу трикутну призму PBC. Оскільки напруження змінюються по об’єму тіла неперервно, то при зменшенні розмірів вирізаного елемента напруження, що діє на площадці BC, буде наближатись до напруження на паралельній площадці, що проходить через точку P.

При розгляді умов рівноваги малої трикутної призми об'ємними силами можна знехтувати як величинами вищого порядку малості. Подібним чином, якщо вирізаний елемент дуже малий, можна знехтувати змінами напруг по гранях і припустити, що напруження розподілені рівномірно. Тоді сили, що діють на трикутну призму, можна визначити шляхом множення компонентів напружень на площі граней. Нехай N - напрямок нормалі до площини BC, кут між нормаллю N до площадки BC і віссю x дорівнює α; тоді косинуси кутів між нормаллю N і осями x і y позначаються в такий спосіб:

$$\cos(N, x) = l = \cos\alpha,\ \cos(N, y) = m = \sin\alpha.$$

Тоді, якщо через S позначити площу грані BC елемента, то площі двох інших граней будуть Sl і Sm. Якщо позначити через $\overline{X}$ і $\overline{Y}$ компоненти напружень, що діють на грань BC, то умови рівноваги призматичного елемента приводять до наступних співвідношень: $\overline{X}S = \sigma_x lS + \tau_{xy} mS,\ \overline{Y}S = \sigma_y mS + \tau_{xy} lS$, або

$$\overline{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy},\ \overline{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy} \ . \tag{1}$$

Таким чином, компоненти напружень на будь-якій площі, обумовленої направляючими косинусами l і m, можна легко знайти зі співвідношень (1), якщо відомі три компоненти напружень σ_x, σ_y і τ_{xy} у точці P. Згідно (1), нормальна і дотична компонента напружень на площадці BC дорівнюють:

$$\begin{aligned} \sigma &= \overline{X}\cos\alpha + \overline{Y}\sin\alpha = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \ , \\ \tau &= \overline{Y}\cos\alpha - \overline{X}\sin\alpha = \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Очевидно, кут α можна вибрати таким чином, щоб дотичне напруження τ на площадці ВС стало рівним нулю. Для цього випадку одержуємо

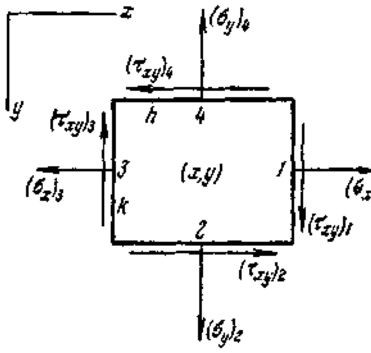
$$\tau = \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha = 0 \ \Rightarrow \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1}{2}tg2\alpha \ . \tag{3}$$

Із цього рівняння можна знайти два взаємно перпендикулярних напрямки, для яких дотичні напруження на відповідних площадках дорівнюють нулю. Ці напрямки називаються головними, а відповідні нормальні напруження - головними нормальними напруженнями. Якщо за головні напрямки прийняти напрямки осей x і y, то компонента τ_{xy} =0 і формули (2) приймають більш простий вид

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \;,\; \tau = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\alpha. \qquad (4)$$

§ 50. Диференціальні рівняння рівноваги

Розглянемо рівновагу малого прямокутного паралелепіпеда з розмірами уздовж осей x і y - h, k і одиничної товщини (рис.). Напруження, що діють на площадках *1, 2, 3, 4* у позитивних напрямках показані на малюнку. З урахуванням зміни напружень у просторі значення, наприклад σ_x, для граней *1* і *3* не точно дорівнюють один одному. Символи σ_x, σ_y і τ_{xy} відносяться до точки *(x, y)* - центру прямокутника на малюнку. Значення напружень посередині граней будуть позначатися через $(\sigma_x)_1$, $(\sigma_y)_1$ і т.д. Оскільки грані малі, діючі на них зусилля отримаємо множенням напружень на площі граней, по яких вони діють.



Об'ємна сила, якою ми нехтували при розгляді рівноваги трикутної призми у §49 як величиною вищого порядку малості, тепер повинна враховуватися, оскільки вона має той же порядок, що й члени, що описують досліджувані зміни компонентів напружень. Якщо позначити через X, Y компоненти об'ємної сили, то рівняння рівноваги сил, що діють у напрямку осі x, має вигляд (з урахуванням, що товщина пластини дорівнює 1): $(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + Xhk = 0$, або, після ділення на hk,

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0 .$$

Якщо тепер зменшувати розміри розглянутого елементарного паралелепіпеда, поклавши $h \to 0$, $k \to 0$, то, відповідно до визначення похідної, межі першого і другого виразів будуть дорівнювати $\partial\sigma_x/\partial x$ і $\partial\tau_{xy}/\partial y$ відповідно. Подібним же чином вийде рівняння рівноваги для сил, що діють у напрямку осі y. Таким чином, будемо мати

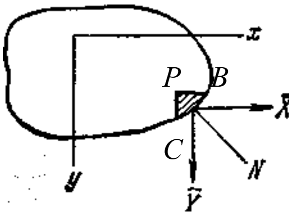
$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 . \qquad (1)$$

Це два диференціальних рівняння рівноваги для двовимірної задачі.

У багатьох практичних додатках єдиним видом об'ємних сил є вага тіла. Тоді, направляючи вісь y вниз і позначаючи через ρ масу, віднесену до одиниці об'єму тіла, одержимо рівняння рівноваги у вигляді

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0 \; . \qquad (2)$$

§ 51. Граничні умови



Рівняння (50.1) або (50.2) повинні задовольнятися у всіх точках об'єму тіла. Компоненти напружень міняються по об'єму розглянутої пластинки. При досягненні її границі вони повинні бути такими, щоб перебувати в рівновазі із зовнішніми силами, прикладеними на границі пластинки. Тому зовнішні сили можна розглядати як продовження розподілу внутрішніх напружень. Умови рівноваги на границі можна одержати з рівнянь (49.1). Розглянемо малу трикутну призму PBC (див. рис. §49), таку, що її сторона BC збігається із границею пластинки, як показано на даному малюнку. Позначаючи через $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ компоненти поверхневих сил, віднесених до одиниці площі в цій точці границі, одержуємо

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy} \quad . \tag{1}$$

де l і m - направляючі косинуси нормалі N до границі.

В окремому випадку розгляду рівноваги прямокутної пластинки координатні осі звичайно приймаються паралельними сторонам пластинки і граничні умови (1) можна спростити. Нехай, наприклад, одна зі сторін пластинки паралельна осі x, тоді нормаль N на цій частині границі буде паралельна осі y; звідси l=0 і m=1. Рівняння (1) тоді приймають вид $\bar{X} = \pm\tau_{xy}, \bar{Y} = \pm\sigma_y$, причому позитивний знак у цих формулах береться в тому випадку, коли нормаль N спрямована убік позитивних значень y; якщо ж нормаль спрямована в протилежну сторону, то береться негативний знак. Із цих формул видно, що компоненти напруження на границі дорівнюють компонентам поверхневих зусиль, віднесених до одиниці площі границі.

§ 52. Рівняння сумісності

Визначення напруженого стану в тілі, що перебуває під дією заданих зовнішніх сил, є однією з основних завдань теорії пружності. У двовимірному випадку необхідно розв'язати диференціальні рівняння рівноваги (50.1), і цей розв'язок повинен бути таким, щоб задовольнялися граничні умови (51.1). Цих рівнянь, виведених із застосуванням статичних умов рівноваги для трьох компонент напружень σ_x, σ_y і τ_{xy}, недостатньо для визначення зазначених компонентів. Задача є статично невизначеною: щоб одержати її розв'язок, слід розглянути пружну деформацію тіла.

Математичне формулювання умов сумісності розподілу напружень з існуванням неперервних функцій u, v, w, що визначають деформацію, буде отримана з рівнянь (46.1). Для двовимірних задач ми розглянемо три компоненти деформації, а саме

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \;\; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \;\; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Ці три компоненти деформації виражаються через дві функції u і v. Отже, вони не можуть вибиратися довільно і повинно існувати деяке співвідношення між компонентами деформації; його можна легко одержати з (1). Диференціюючи перше з рівнянь (1) двічі по y, друге двічі по x, а третє - один раз по x і другий раз по y, знаходимо

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial^2 x}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{2}$$

Це диференціальне рівняння, яке називається умовою сумісності, повинно задовольнятися при підстановці компонентів деформації, щоб забезпечити існування функцій u і v, пов'язаних з компонентами деформації співвідношеннями (1). Використовуючи закон Гука (47.3), можна, перетворивши умову (2), одержати співвідношення, якому повинні задовольняти компоненти напружень.

У випадку <u>плоского напруженого стану</u> ($\varepsilon_z=0, \sigma_z=0$) вирази (47.3) і (47.7) приймають вигляд

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\sigma_y\right], \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\sigma_x\right], \quad (3) \qquad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \quad (4)$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (2), знаходимо

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y\right)+\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x\right)=2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{5}$$

Рівняння (5) можна переписати в іншій формі, якщо скористатися рівняннями рівноваги. Для окремого випадку, коли єдиною об'ємною силою є вага тіла, диференціюючи перше з рівнянь (50.2) по x, а друге по y, і складаючи їх, одержуємо $2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}=-\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$. Підставляючи цей результат у рівняння (5), одержуємо умову сумісності в напруженнях у вигляді

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0. \tag{6}$$

У загальному випадку, використовуючи в такий же спосіб рівняння рівноваги (50.1), знаходимо

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right). \tag{7}$$

У випадку плоскої деформації маємо $\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)$. Використовуючи це співвідношення, із закону Гука (47.3) знаходимо

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_x-\nu(1+\nu)\sigma_y\right],\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_y-\nu(1+\nu)\sigma_x\right],\end{aligned} \quad (8) \qquad \gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \quad (9)$$

Підставляючи знайдені вирази в рівняння (2) і використовуючи, як і раніше, рівняння рівноваги (50.2), ми бачимо, що рівняння сумісності (6) зберігає свій вид і для плоскої деформації. Для загального випадку об'ємних сил з рівнянь (2) і (50.1) одержуємо умову сумісності в наступній формі:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{10}$$

Рівняння рівноваги (50.1) або (50.2) разом із граничними умовами (51.1) і рівнянням сумісності (в одній з наведених вище форм) дають нам систему рівнянь, що звичайно достатня для повного визначення розподілу напружень у двовимірній задачі. Цікаво відзначити, що у випадку постійних об'ємних сил рівняння, що визначають розподіл напружень, не містять пружних констант матеріалу. Отже, розподіл напружень у цьому випадку буде тим самим для всіх ізотропних матеріалів, якщо ці рівняння достатні для повного визначення напружень. Даний висновок має практичне значення: для прозорих матеріалів, таких, як скло або целулоїд, можна визначати напруження оптичним методом, використовуючи поляризоване світло. З вищенаведених міркувань ясно, що експериментальні результати, отримані для якого-небудь прозорого матеріалу, у більшості випадків можна безпосередньо застосовувати й до будь-яких інших матеріалів, наприклад до сталі.

Слід також зазначити, що у випадку постійних об'ємних сил рівняння сумісності (6) справедливе як для плоского напруженого стану, так і для плоскої деформації. Отже, в обох випадках розподіл напружень буде однаковим, якщо форми границь і прикладені до них зовнішні зусилля збігаються.

§ 53. Принцип Сен-Венана

Розв’язування задач теорії пружності зводиться до деяких типових крайових задач для систем рівнянь із частинними похідними. Фактична побудова розв’язків цих рівнянь із заданими початковими і граничними умовами навіть при сучасному рівні розвитку математичних методів і обчислювальної техніки не завжди виявляється здійсненною. Тому представляється доцільним розглянути питання про можливості такої зміни крайових умов, щоб модифікована задача виявилася більш доступною для розв’язання, ніж вихідна, а розходженням в результатах можна було б знехтувати (принаймні в значній частині області, розміри якої бажано оцінити). Необхідність такого підходу диктується ще й тим, що в ряді задач відсутня докладна інформація про граничні умови (наприклад, на бічних поверхнях тонких пластинок), а задані лише інтегральні характеристики.

Первісне формулювання теореми, що дозволяє видозмінювати крайові умови, було запропоновано у вигляді принципу Сен-Венаном і полягало в наступному: «Спосіб прикладання і розподіли сил по кінцях призм байдужий для ефектів, викликаних на решті довжини, так що завжди можливо з достатнім ступенем наближення замінити прикладені сили статично еквівалентними силами, тобто силами, що мають такий же повний момент і таку ж рівнодійну, але з розподілом точно таким, який вимагають формули розтягу, згину і кручення для того, щоб стати зовсім точними».

Наприклад, у задачах кручення і згинання стержнів самі граничні умови на торцях заздалегідь невідомі й визначаються лише в ході розв'язання відповідних двовимірних задач, однак зроблене на основі принципу Сен-Венана припущення дає можливість перейти від тривимірної (часом змішаної) до двовимірної задачі. Таким чином, при розв'язуванні задач кручення і згинання стержнів потрібне знання лише глобальних характеристик граничних умов на торцях (головний вектор зусиль і головний вектор моменту).

Сен-Венан стверджував, що отриманий на основі двовимірної теорії розв'язок виявляється близьким до точного у всій області, крім малих ділянок, що примикають до торців. Тому такий розв'язок, будучи строгим розв'язком для стержнів довільної довжини, виявляється практично корисним для різних стержнів уже при відсутності яких-небудь обмежень на крайові умови, причому з розгляду випадають ділянки, що примикають до торців довжиною порядку двох-трьох діаметрів. Тому має сенс говорити лише про довгі стержні, тому що для коротких стержнів зона вірогідності розв'язків може бути відсутньою. На підтвердження своєї гіпотези Сен-Венан посилався лише на експеримент, однак в окремих випадках можливо теоретичне обґрунтування цього принципу.

Принцип Сен-Венана, крім задач кручення і згинання, використовується також при побудові теорії для плоского напруженого стану, коли для пластинки розподіл навантаження по бічній поверхні не враховується, а зводиться до результуючих характеристик. Інший підхід має місце в задачах згинання пластинок (і, більше того, у теорії оболонок). Тут ігнорування розподілу напружень є наслідком гіпотез, покладених в основу тієї або іншої теорії. У цьому випадку крайові умови в напруженнях зводяться до згинальних моментів, крутячому моменту й перерізуючим силам.

МОДУЛЬ IV. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

РОЗДІЛ 8. СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ (СТВ)

§ 54. Постулати СТВ

В основу СТВ покладено два постулати, сформульовані Ейнштейном у 1905 році.

1. Принцип відносності Ейнштейна: Всі фізичні явища в усіх ІСВ при однакових початкових умовах протікають однаково. Це означає, що рівняння, які описують фізичні явища будь-якої природи, однакові у всіх ІСВ.

2. Принцип сталості швидкості світла: Світло у вакуумі завжди поширюється з постійною швидкістю $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ *м/с*, незалежно від стану руху випромінюючого тіла.

Механіка Ньютона виходить з припущення про миттєву передачу взаємодій від одного тіла до іншого. В дійсності в природі миттєвих взаємодій не існує. Таким чином, слід припускати існування граничної швидкості поширення взаємодій. Ця гранична швидкість дорівнює швидкості світла c.

З другого постулату випливає, що швидкість поширення взаємодій однакова у всіх ІСВ, тобто є універсальною сталою, що суперечить перетворенню Галілея (§8):

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{\upsilon}_0 t, \tag{1}$$

з якого випливає класичний закон додавання швидкостей:

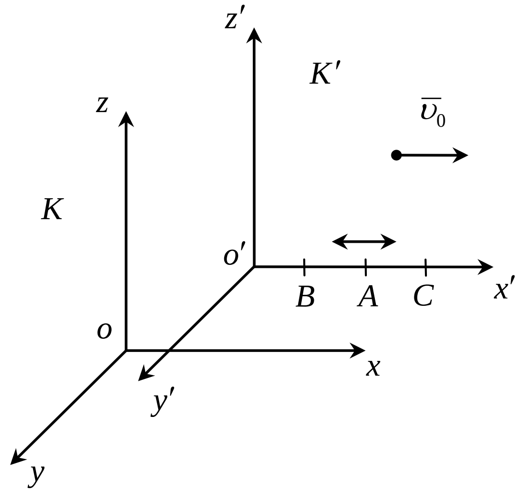
$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{\upsilon}_0. \tag{2}$$

Механіку, побудовану на постулатах Ейнштейна, називають релятивістською, тоді як механіку Ньютона називають класичною.

В класичній механіці можна знехтувати впливом скінченності швидкості поширення взаємодії, якщо $\upsilon \ll c$. Отже, релятивістська механіка має переходити в класичну механіку при $c \to \infty$.

Постулати СТВ вимагають перегляду Ньютонівської концепції поглядів на простір і час. Так, в класичній механіці час є абсолютним, тобто властивості часу вважають незалежними від системи відліку (час однаковий у всіх СВ). Це означає, що якщо дві події є одночасними для одного спостерігача, то вони є одночасними і для будь-якого іншого. Але поняття абсолютного часу суперечить Ейнштейнівському принципу сталості швидкості світла, бо з поняття абсолютного часу випливає, зокрема, класичний закон додавання швидкостей.

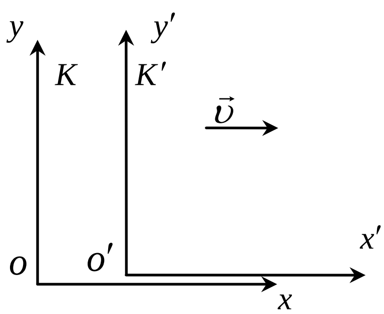
Принцип сталості швидкості світла приводить до результату, що час не є абсолютним, зокрема, події, одночасні у деякій ІСВ, будуть неодночасні в іншій ІСВ (мал.).



Постулати СТВ вносять фундаментальні зміни в основні фізичні поняття. Ця обставина привела Ейнштейна до висновку, що рівняння Ньютона потребують уточнення. До Ейнштейна піддавалися сумніву рівняння Максвела, які не задовольняли вимозі інваріантності по відношенню до перетворень Галілея. Ейнштейн здійснив таку видозміну законів механіки, при якій і самі рівняння механіки, і рівняння електродинаміки виявились інваріантними по відношенню до одних і тих же перетворень координат і часу, що відповідають переходу від однієї ІСВ до іншої.

§ 55. Перетворення Лоренца

Оскільки постулати СТВ і перетворення Галілея суперечать одні одному, то виникає задача про знаходження узгоджених з постулатами СТВ перетворень СВ. Для цього розглянемо дві системи відліку K і K', що рухаються одна відносно одної зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ вздовж вісей x і x'. У початковий момент початки відліку систем співпадають. Нехай певний кінематичний процес вивчається спостерігачем, який рухається разом з системою K' і описує його за допомогою величин x', y', z', t'. Необхідно знайти систему перетворень цих величин, яка приводить до правильного опису цього процесу в змінних x, y, z, t, що використовується спостерігачем, який рухається разом з системою K.



В якості пробного процесу розглядається поширення фронту сферичної світлової хвилі з центра координат обох систем відліку з того моменту, коли вони співпадали. Хай годинники в момент спалаху світла в обох ІСВ показують 0. Тоді рівняння фронту хвилі у цих ІСВ мають вигляд:

$$K: \ x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2;$$

$$K': \ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

Звідси знаходимо: $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$. При вибраних напрямках вісей координат $y = y'$, $z = z'$, тому

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2. \qquad (1)$$

Зв'язок між x, t та x', t' має бути лінійним. Враховуючи, що має бути

$x' \sim x - \upsilon t$, представимо цей зв'язок у вигляді:

$$x' = \alpha(x - \upsilon t); \;\; t' = \beta x + \gamma t, \tag{2}$$

де постійні коефіцієнти *α, β, γ* повинні залежати від модуля швидкості. Підставимо (2) в (1) і прирівняємо коефіцієнти при x^2 , t^2 , xt в правій і лівій частині (1):

$$c^2t^2 - x^2 = c^2(\beta x + \gamma t)^2 - (\alpha(x - \upsilon t))^2;$$
$$c^2t^2 - x^2 = c^2\beta^2x^2 + 2c^2xt + c^2\gamma^2t^2 - 2\alpha^2x^2 + 2\alpha^2\upsilon xt - \alpha^2\upsilon^2t^2;$$
$$c^2t^2 - x^2 = \left(c^2\gamma^2 - \alpha^2\upsilon^2\right)t^2 + \left(2c^2\beta\gamma + 2\alpha^2\upsilon\right)xt + \left(c^2\beta^2 - \alpha^2\right)x^2;$$

$$\left\{\begin{array}{l} c^2 = c^2\gamma^2 - \alpha^2\upsilon^2 \\ 0 = 2c^2\beta\gamma + 2\alpha^2\upsilon \\ -1 = c^2\beta^2 - \alpha^2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \\ \beta = \dfrac{-\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \end{array} \tag{3}$$

Підставляючи (3) в (2), отримаємо розшукуваний зв'язок між координатами в K і K':

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \;\; t' = \frac{t - \frac{\upsilon}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \;\; y' = y; \;\; z' = z \;. \tag{4}$$

Формули (4) вперше були отримані Лоренцом і носять назву перетворень Лоренца. Це є формули переходу від координат і часу в ІСВ K' до координат і часу в ІСВ K, що рухається в додатному напрямку вісі x зі швидкістю $\vec{\upsilon}$. Для зворотного переходу від K до K' достатньо врахувати, що знак швидкості K відносно K' буде зворотнім. Міняючи в (4) знак при υ, знайдемо:

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \;\; t = \frac{t' + \frac{\upsilon}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \;\; y = y'; \;\; z = z'. \tag{5}$$

Формули (4) і (5) співпадають з точністю до знаку швидкості, тобто правила перетворення від змінних в ІСВ К до в ІСВ К' мають той же вигляд, що й правила зворотного перетворення. Це відповідає 1-му постулату Ейнштейна про їх еквівалентність.

З формул (4) і (5) видно, що при граничному переході $c \to \infty$ до класичної механіки (що відповідає умові $\upsilon << c$) перетворення Лоренца дійсно переходять в перетворення Галілея .

При $\upsilon > c$ у формулах (4) і (5) координати стають уявними. Це відповідає факту, що рух зі швидкістю, більшою ніж швидкість світла, неможливий. Неможливе навіть використання ІСВ, що рухається зі швидкістю, яка дорівнює швидкості світла - при цьому у формулах (4) і (5) знаменник перетворюється в 0.

Правда, деякими вченими висловлюється гіпотеза – припущення про існування тахіонів – частинок, швидкість яких більша за швидкість світла. З математичної точки зору це можливо, тільки у тахіонів всі характеристики мають бути уявними. Частинки реального світу з $\upsilon < c$ називають тардіонами, а між ними лежать люксони – частинки із $\upsilon = c$ (фотон, нейтрино). Якщо тардіони знаходяться в спокої, то для прискорення їх до субсвітових швидкостей необхідно затратити багато енергії, тоді як тахіони, навпаки, мають нескінчено велику швидкість, і необхідно багато енергії, щоб зменшити її до швидкості, незначно більшої за *c*. Але найсерйозніші труднощі тахінної гіпотези пов'язані з порушенням принципу причинності.

§ 56. Кінематичні наслідки перетворень Лоренца

а) Відносність довжини відрізка

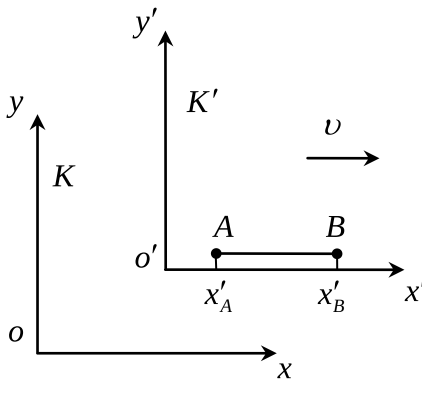
З перетворень Лоренца випливає, що лінійний розмір тіла, яке рухається відносно ІСВ, зменшується у напрямку руху. Ця зміна повздовжнього розміру тіла при його русі називається лоренцевим скороченням.

Нехай l_0 – довжина стержня, нерухомого в системі відліку K'. Якщо стержень розміщений вздовж вісі x', то $l_0 = x'_B - x'_A$, де x'_B, x'_A - координати кінців стержня. Довжина l того ж стержня в системі відліку K, відносно якої він рухається вздовж вісі Ox зі швидкістю $\bar{\upsilon}$, дорівнює різниці значень координат кінців стержня, виміряних в один і той же момент часу t: $l = x_B(t) - x_A(t)$. Тоді з формул Лоренца отримаємо:

$$l_0 = x'_B - x'_A = \frac{x_B - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{x_A - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

або

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} < l_0. \qquad (1)$$



Отже, розмір тіла в напрямку руху скорочується в $\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$ разів.

З перетворень Лоренца випливає, що поперечні розміри тіла не змінюються під час руху: $\Delta y' = \Delta y,\ \Delta z' = \Delta z$. Звідси випливає, що об'єм тіла зменшується пропорційно довжині:

$$V = V_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}. \qquad (2)$$

б) Відносність проміжків часу

Покажемо, що тривалість проміжку часу між будь-якими двома подіями також залежить від вибору ІСВ. Нехай в рухомій ІСВ K' дві події відбуваються в одній і тій же нерухомій відносно K' точці A ($x'_1 = x'_2 = x'$) в моменти часу t'_1 і t'_2, а проміжок часу між ними $\tau_0 = t'_2 - t'_1$. Відносно нерухомої ІСВ K точка A рухається з тією ж швидкістю υ, що й система K'. Тому в ІСВ K події 1 і 2 відбуваються в різних точках з координатами x_1, x_2, причому $x_2 - x_1 = \upsilon\tau$, де $\tau = t_2 - t_1$- проміжок часу між подіями 1 і 2 по двом годинникам в ІСВ К. Скористаємось перетворенням Лоренца:

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{\upsilon}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{\upsilon}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \;\; \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} > \tau_0 . \qquad (3)$$

Отже, в рухомій ІСВ K' час протікає повільніше, ніж у нерухомій ІСВ K $(\tau > \tau_0)$. При цьому проміжок часу між двома подіями мінімальний в тій ІСВ, відносно якої обидві події відбуваються в одній і тій же точці. Час τ_0, що вимірюється по годиннику, що рухається разом з даним об'єктом, називається власним часом даного об'єкта.

Відкриті явища є реальними і залежать лише від стану руху досліджуваних тіл, але вони помітні лише при швидкостях, близьких до швидкості світла.

§ 57. Релятивістський закон додавання швидкостей

Знайдемо зв'язок між значеннями швидкості, виміряної в нерухомій ІСВ K і в рухомій ІСВ K'. Для цього перепишемо перетворення Лоренца у диференційній формі:

$$dx' = \frac{dx - \upsilon dt}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \;\; dy' = dy; \;\; dz' = dz; \;\; dt' = \frac{dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

поділивши ці вирази на dt, отримаємо:

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\dfrac{dx - \upsilon dt}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}{\dfrac{dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}} = \frac{dx - \upsilon dt}{dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}};$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{\dfrac{dx - \frac{\upsilon}{c^2}dt}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}} = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}; \;\; u_z' = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}} . \qquad (1)$$

Тут u_x', u_y', u_z' - компоненти швидкості в ІСВ K', а u_x, u_y, u_z - компоненти швидкості в ІСВ K. Формули (1) зв'язують проекції швидкостей тіла в ІСВ K з проекціями швидкості тіла в ІСВ K'.

Формули зворотних перетворень утворюються заміною $\upsilon \to -\upsilon$ і перестановкою штрихів:

$$u_z = \frac{u'_z + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}}; \quad u_z = \frac{u'_y\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}}; \quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}}. \tag{2}$$

Формули (1) і (2) називають релятивістським законом додавання швидкостей.

Розглянемо випадок, коли в ІСВ K' тіло рухається в напрямку вісі x, тобто $u'_x = u'$; $u'_y = u'_z = 0$. Тоді з (2) випливає, що

$$u_y = u_z = 0, \quad u_x \equiv u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'}{c^2}}. \tag{3}$$

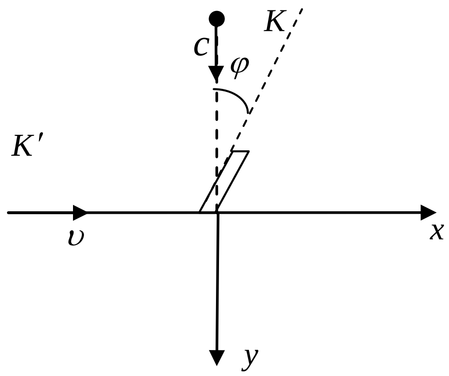
Користуючись формулою (3), визначимо швидкість світла в ІСВ *K,* якщо в ІСВ K' вона дорівнює *c*:

$$u = \frac{c + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon c}{c^2}} = \frac{\frac{c + \upsilon}{\frac{c + \upsilon}{c}}}{} = c;$$

тобто і в ІСВ *K* швидкість світла також дорівнює *c*. Навіть якщо $u' = c$, $\upsilon = c$, отримаємо $u = \dfrac{c + c}{1 + \dfrac{c^2}{c^2}} = c \neq 2c.$

Отриманий закон додавання швидкостей пояснює негативний результат досліду Майкельсона, в якому при вимірюванні швидкості світла в напрямі руху Землі і в протилежному напрямі були отримані однакові значення.

Закон додавання швидкостей пояснює також явище аберації зірок, яке полягає в тому, що при спостереженні променя світла з двох систем відліку, які рухаються одна відносно одної, цей промінь буде спостерігатись під різними кутами до деякого спільного в цих двох системах напрямку (наприклад, напрямку відносної швидкості), тобто, рух спостерігача (телескопа) змінює видимий напрям світла.



Для пояснення розглянемо найпростіший випадок, коли напрям світла від зірки перпендикулярний до напрямку руху Землі. Нехай система K зв’язана з зіркою, K' – з Землею, вісь x збігається з напрямком руху Землі. В ІСВ K швидкість світла:

$$u_x = 0, \; u_y = c; \; u_z = 0.$$

В ІСВ K', зв’язаній з Землею, на основі (1) матимемо:

$$u'_x = -\upsilon,\ u'_y = c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}};\ u'_z = 0.$$

Отже, в системі K', зв'язаній з Землею, промінь не буде перпендикулярний до вісі x, а утворюватиме з віссю y кут φ, для якого $tg\varphi = \left|\frac{u'_x}{u'_y}\right| = \frac{\upsilon}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$. При $\upsilon \ll c$ отримаємо $\varphi \approx \frac{\upsilon}{c}$ - це є відомий результат з класичної механіки.

§58. Інтервал та інші інваріанти СТВ

СТВ змінила уявлення про довжину і проміжки часу. Вони втратили притаманний їм у класичній механіці абсолютний характер. В СТВ вони є відносними, залежними від швидкості руху тіла або зв'язаних з ними ІСВ.

На перший погляд, створюється враження, що в СТВ всі величини є відносними, залежними від відносної швидкості тіл, які досліджуються. Насправді особливості СТВ, в яких чітко виявляється єдність простору і часу, розкриваються не лише в перетвореннях Лоренца, у яких час і довжина залежать від системи відліку, а й в особливому інваріанті теорії, який називають інтервалом.

Нехай в ІСВ K дві події відбулись у точці (x_1, y_1, z_1) в момент часу t_1 і точці (x_2, y_2, z_2) у момент часу t_2 відповідно. Інтервалом між цими двома подіями називають величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}, \tag{1}$$

де $t_{12} = t_2 - t_1$ – проміжок часу між подіями; $l_{12} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$ – відстань між точками, в яких відбулися події.

В іншій ІСВ K' ці події характеризуються своїми наборами координат і часу: (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1), (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2). Тому в цій ІСВ K' інтервал між подіями дорівнює:

$$s'_{12} = \sqrt{c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}};\ t'_{12} = t'_2 - t'_1;\ l'_{12} = \sqrt{(x'_2-x'_1)^2 + (y'_2-y'_1)^2 + (z'_2-z'_1)^2}\ .$$

Користуючись формулами перетворення Лоренца, покажемо, що $s'_{12} = s_{12}$:

$$s'^2_{12} = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12} = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = [(55.4)] =$$

$$= c^2\left(\frac{t_2 - \frac{\upsilon}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{\upsilon}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)^2 - \left(\frac{x_2 - \frac{\upsilon}{c^2}t_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - \frac{\upsilon}{c^2}t_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 =$$

$$= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = s_{12}^2.$$

Отже, при переході від однієї ІСВ до іншої інтервал між двома подіями не змінюється, тобто є інваріантом. (В класичній механіці такими інваріантними, тобто незмінними при переході від однієї ІСВ до іншої, величинами є відстані і проміжки часу).

Чи існує така ІСВ K', в якій дві задані події відбуваються в одній і тій же точці простору? З інваріантності інтервалу $\left(s_{12}'^2 = s_{12}^2\right)$ випливає, що $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Якщо така ІСВ K' існує, то в ній $l_{12}' = 0$. Тоді

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}'^2 > 0. \tag{2}$$

Отже, ІСВ з такою властивістю існує, якщо $s_{12}^2 > 0$, тобто, якщо інтервал s_{12} - дійсне число. Дійсні інтервали називають часоподібними. Таким чином, якщо інтервал між двома подіями часоподібний, то існує така ІСВ, в якій обидві події відбулись в одному і тому ж місці. Час між такими двома подіями, які відбулись в даній ІСВ в одній і тій же точці, називають власним часом між цими подіями. З (2) випливає, що він дорівнює

$$\tau = \frac{s_{12}}{c}. \tag{3}$$

Власний час разом з інтервалом і швидкістю світла також є інваріантом СТВ.

Вияснимо тепер, чи існує така ІСВ, в якій дві події відбулись би в один і той же момент часу? Як і раніше, з рівності інтервалів в ІСВ K і K' знаходимо

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = s_{12}'^2 = c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2 = \left[t_{12}' = 0\right] = -l_{12}'^2 < 0.$$

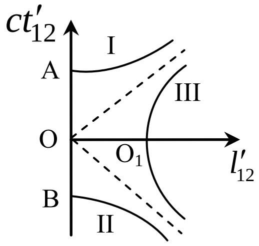
Отже, така ІСВ існує, якщо квадрат інтервалу між подіями від'ємний, а сам інтервал між двома подіями уявний: $s_{12} = \pm i l_{12}'$. Уявні інтервали називають просторово-подібними.

§59. Причинність в СТВ (НСО)

Із інваріантності інтервалу по відношенню до вибору ІСВ K' випливає, що в всіх ІСВ K' значення t_{12}' і l_{12}' для даних двох подій задовольняють рівнянню гіперболи:

$$c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2 = s_{12}^2 = const. \tag{1}$$

Якщо $s_{12}^2 > 0$, то зв'язок між t_{12}' і l_{12}' в різних ІСВ K', що рухаються відносно нерухомої ІСВ K з усіма можливими швидкостями $(0 \le \upsilon < c)$, зображується графічно у вигляді двох віток гіперболи I і II. Таким чином,



знак проміжку часу між подіями 1 і 2, зв'язаними часоподібним інтервалом, є абсолютний (не змінюється при переході від однієї ІСВ до іншої). Він не залежить від вибору ІСВ: в усіх ІСВ K' друга подія відбувається або завжди пізніше першої, тобто $t_{12}' > 0$ (вітка I), або завжди раніше першої, тобто $t_{12}' < 0$ (вітка II). Відстань l_{12}' відносна, причому завжди можна вказати таку ІСВ K', в якій $l_{12}' = 0$, тобто події 1 і 2 відбуваються в одному й тому ж місці (точки A і B на вітках гіперболи). Отже, двом подіям, зв'язаним причинно–наслідковим зв'язком, завжди повинен відповідати часоподібний інтервал, або в крайньому випадку, інтервал, що дорівнює нулю ($s_{12} = 0$ - нульовий інтервал). Це зумовлено тим, що сигнал, завдяки якому подія 1 (причина) обумовлює подію 2 (наслідок), не може поширюватись в просторі зі швидкістю, більшою за швидкість світла в вакуумі: $l'_{12} \le ct'_{12}$.

В ряді подій, зв'язаних просторово-подібним інтервалом $\left(s_{12}^2 < 0\right)$, знак t'_{12} відносний: $t'_{12} > 0$ (верхня частина гіперболи III) в одних ІСВ K', а в інших $t'_{12} < 0$ (нижня частина гіперболи III). Точка O_1 відповідає системі відліку K', в якій $t'_{12} = 0$, тобто події 1 і 2 відбуваються одночасно.

Поширенню світла відповідають прямі $l'_{12} = \pm ct'_{12}$ (пунктирна лінія на малюнку). В чотиривимірній СК x, y, z, t вони зображувались би конусом з віссю t. Цей конус називають світловим конусом. Дві внутрішні полості цього конуса (I і II) відповідатимуть абсолютно минулим і абсолютно майбутнім подіям по відношенню до події O. Тобто, на події, що лежать в полості світлового конуса I (абсолютне майбутнє) можуть вплинути події з області II (абсолютне минуле), але ніколи не навпаки.

Область III можна було б назвати „абсолютно далекою" по відношенню до події O, тому що в любій ІСВ K' подія O і люба подія з області III з'єднані просторово-подібним інтервалом $\left(s_{12}^2 < 0\right)$, тобто в любій ІСВ ці події відбуваються в різних місцях простору ($l'_{12} > 0$ завжди). Поняття „одночасно", „раніше" і „пізніше" для цих подій відносні. Для всякої події з цієї області є такі ІСВ, де вона відбувається пізніше події O; є ІСВ, де вона відбувається раніше події O, і є одна ІСВ, де вона відбувається одночасно з O.

Дві події можуть бути причинно зв'язаними одна з одною тільки в тому випадку, якщо інтервал між ними часоподібний, що безпосередньо випливає з того, що ніяка взаємодія не може поширюватись з швидкістю, більшою за швидкість світла. Тільки для таких подій мають абсолютний зміст поняття „раніше" і „пізніше", що є необхідною умовою для того, щоб мали зміст поняття причини і наслідку.

§ 60. Чотиривимірний просторово-часовий многовид

Результати попередніх параграфів вказують на нерозривний зв'язок між простором і часом. Їх єдність привела Мінковського до думки розглядати простір і час як єдиний комбінований чотиривимірний многовид – Простір-Час, який ще називають чотиривимірним світом Мінковського. У цьому світі положення матеріальної точки в кожен момент часу визначається чотирма координатами – трьома просторовими x, y, z і четвертою часовою t. Сукупність чотирьох координат, що визначає положення матеріальної точки у певний момент часу, називається світовою точкою. Крива, яку описує світова точка у Просторі-Часі, називається світовою лінією. Відстань між двома нескінченно близькими світовими точками визначається інтервалом, квадрат якого

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1)$$

Вираз для інтервалу є інваріантом відносно перетворення Лоренца. Це означає, що у Просторі-Часі відстань між світовими точками є інваріантом відносно перетворень Лоренца. Подібним інваріантом відносно перетворень Галілея є відстань між двома точками у звичайному тривимірному просторі $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Порівнявши dl^2 і ds^2, помічаємо відмінність в знаках при c^2dt^2 і dx^2, dy^2, dz^2. Ця відмінність знаків відображає відмінність в природі простору і часу. Сукупність знаків при координатах в елементі інтервалу ds^2 називається сигнатурою; в Просторі-Часі Мінковського згідно з (1) є (+,-,-,-). Сигнатура не змінюється при любих дійсних перетвореннях координат, тому відмінність між часовою і просторовими координатами завжди зберігається, і завжди можна відрізнити часоподібну координату від інших по знаку в (1).

Якщо у виразі (1) перейти до уявних просторових координат за допомогою перетворення $x = i\tilde{x},\ y = i\tilde{y},\ z = i\tilde{z},\ ct = \tilde{u}$, отримаємо $ds^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 + d\tilde{u}^2$. Маючи на увазі цю просту формулу, часто говорять, що геометрія Простору-Часу в СТВ відповідає чотиривимірному псевдоевклідовому (плоскому) простору.

§ 61. Чотиривимірні вектори і тензори

Сукупність координат подій (t, x, y, z) можна розглядати як компоненти чотиривимірного радіус-вектора у чотиривимірному просторі-часі. Ці компоненти позначають через x^i, де індекс i пробігає значення від 0 до 3: $x^i\ (i = 0,1,2,3)$, причому

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z. \quad (1)$$

Квадрат довжини 4-вимірного радіус-вектора відповідає квадрату інтервалу:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = inv. \quad (2)$$

Як було показано у §58, він не змінюється при перетвореннях Лоренца.

Взагалі 4-вектором A^i у СТВ називають сукупність чотирьох величин $A^i\left(A^0, A^1, A^2, A^3\right)$, які при перетворенні системи відліку перетворюються як компоненти 4-радіус-вектора. Оскільки перетворення Лоренца можна представити у вигляді:

$$t = \frac{t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}};\quad x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}};\ y = y';\ z = z' \ \Rightarrow$$

$$x^0 = \frac{x^{0'} + \frac{\upsilon}{c} x^{1'}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad x^1 = \frac{x^{1'} + \frac{\upsilon}{c} x^{0'}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad x^2 = x^{2'}; \; x^3 = x^{3'}, \tag{3}$$

то компоненти вектора A^i повинні перетворюватись аналогічно:

$$A^0 = \frac{A^{0'} + \frac{\upsilon}{c} A^{1'}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad A^1 = \frac{A^{1'} + \frac{\upsilon}{c} A^{0'}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad A^2 = A^{2'} \quad A^3 = A^{3'}. \tag{4}$$

Компонента A^0 називається часовою, а компоненти A^1, A^2, A^3 - просторовими. По аналогії з (2) квадрат довжини 4-вектора A^i визначається за формулою

$$A^2 = A^{0^2} - A^{1^2} - A^{2^2} - A^{3^2} = inv. \tag{5}$$

Квадрат 4-вектора може бути додатнім, від'ємним і нульовим; відповідно вектор буде часоподібним, просторовоподібним або нульовим.

A^i носить назву контраваріантного вектора. Наряду з ним для спрощення запису виразів типу (5) вводять коваріантний вектор A_i з індексами внизу. При цьому зв'язок між контраваріантними і коваріантними компонентами має вигляд:

$$A_0 = A^0; \; A_1 = -A^1; \; A_2 = -A^2; \; A_3 = -A^3. \tag{6}$$

Тоді квадрат довжини 4-вектора можна представити у вигляді

$$A^2 = A^{0^2} - A^{1^2} - A^{2^2} - A^{3^2} = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = \sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^i A_i. \tag{7}$$

У цьому виразі використано домовленість про підсумовування, згідно з якою по всякому індексу, який повторюється у даному виразі двічі - вгорі і внизу, передбачається підсумовування, а знак суми опускається, тобто $A^2 = A^i A_i$. Індекси, по яким здійснюється підсумовування, називають німими.

Аналогічно квадрату 4-вектора визначається скалярний добуток 2-х різних векторів. Скалярним добутком векторів A^i і B_i називається

$$A \cdot B = A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 =$$
$$= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A_i B^i = inv \; . \tag{8}$$

Введемо також важливе в СТВ поняття 4-тензора. Чотиривимірним тензором другого рангу називається сукупність 16-ти величин $A^{ik} \left(i, k = 0,1,2,3\right)$, які при перетвореннях координат перетворюються як добуток двох 4-векторів. Наряду з компонентами A^{ik} з індексами вгорі, які називаються контраваріантними, розглядаються коваріантні компоненти A_{ik} з індексами внизу, та змішані $A^i{}_k$. Зв'язок між різними видами компонент визначається правилом: підняття або опускання часового індексу (0) не змінює, а підняття або опускання просторового індексу (1,2,3) змінює знак компоненти. Наприклад,

$$A_{00} = A^{00} = A^0_0; \; A_{01} = A^0_1 = -A^{01} = -A_0^1; \; A_{12} = -A^1_2 = A^{12}.$$

Для зручності піднімання і опускання індексів вводиться так званий метричний тензор, коваріантні і контраваріантні компоненти якого однакові. Його можна представити у вигляді

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

(індекс i нумерує стрічки, а індекс k – стовпчики в порядку значень 0, 1, 2, 3). При цьому має місце співвідношення:

$$g_{ik} \cdot g^{kl} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, i \neq k \\ 0, i = k \end{cases} \tag{10}$$

де δ_i^k називається символом Крон екера, або одиничним тензором. За допомогою метричного тензора підняття і опускання індексів має вигляд:

$$A_i = g_{ik} A^k,\ A^i = g^{ik} A_k,\ A_{ik} = g_{im} g_{kl} A^{ml}\ . \tag{11}$$

(Наприклад, $A_1 = g_{1k} A^k = g_{10} A^0 + g_{11} A^1 + g_{12} A^2 + g_{13} A^3 = -A^1$;
$A^0 = g^{0k} A_k = g^{00} A_0 = A_0$).

У скалярному добутку векторів також можна використати метричний тензор:

$$A \cdot B = A^i B_i = g^{ik} A_k B_i = g_{ik} A^i B^k\ . \tag{12}$$

Особливого значення метричний тензор набуває у зв’язку з записом квадрата інтервалу

$$s^2 = {x^0}^2 - {x^1}^2 - {x^2}^2 - {x^3}^2 = x_i x^i = g_{ik} x^i x^k\ . \tag{13}$$

Якщо взяти дві нескінченно близькі події, з’єднані 4-радіус-вектором dx^i, то відстань між ними у просторі-часі визначається квадратом елемента інтервалу

$$ds^2 = {dx^0}^2 - {dx^1}^2 - {dx^2}^2 - {dx^3}^2 = g_{ik} dx^i dx^k\ . \tag{14}$$

Таким чином, метричний тензор g_{ik} визначає метричні властивості 4-вимірного Простору-Часу, що й обумовило його назву.

§62. Геометрична інтерпретація перетворень Лоренца (НСО)

У тривимірному просторі перехід від однієї СК до іншої можна здійснити паралельним перенесенням вісей та їх поворотом (див. §8). При повороті, наприклад, навколо вісі z на кут φ зв’язок між координатами визначається рівностями:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi, \\ z' = z \end{cases} \tag{1}$$

Подібні повороти можливі також у чотиривимірному просторі у площинах xy, zy, xz і перетворюють лише просторові координати. Вони відповідають звичайним просторовим поворотам, що залишають незмінними квадрати відстаней у 3-вимірному просторі: $l^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

Але у 4-вимірному Просторі-Часі можна уявити також повороти у площинах xt, yt, zt. Щоб зрозуміти зміст таких поворотів, розглянемо поворот у площині xt, координати y і z при цьому не змінюється. Це перетворення повинно залишати, зокрема, незмінним квадрат інтервалу – аналога відстані у 4-вимірному Просторі-Часі – від точки (ct, x) до початку координат. Отже, при переході від старих координат до нових повинна виконуватись умова: $s^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$, яка задовольняється, якщо перетворення координат має вигляд:

$$x' = x\,\mathrm{ch}\,\psi - ct\,\mathrm{sh}\,\psi, \quad ct' = ct\,\mathrm{ch}\,\psi - x\,\mathrm{sh}\,\psi, \tag{2}$$

де ψ - «кут повороту», і використані гіперболічні косинус та синус:

$$\mathrm{ch}\,\psi = \frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{2} = \cos i\psi; \quad \mathrm{sh}\,\psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{2} = -i\sin i\psi; \quad \mathrm{ch}^2\,\psi - \mathrm{sh}^2\,\psi = 1. \tag{3}$$

Формули (2) відрізняються від звичайних формул перетворень при повороті вісей координат (1) заміною тригонометричних функцій гіперболічними (або використанням уявних кутів $\varphi = i\psi$ повороту вісей). У цьому проявляється відмінність псевдоевклідової геометрії від евклідової.

Розглянемо рух системи K' відносно K зі швидкістю υ. Оскільки центр координат O' системи K' у цій системі має координату $x' = 0$, а в системі K - координату $x = \upsilon t$, то з формули (2) отримаємо:

$$0 = \upsilon t\,\mathrm{ch}\,\psi - ct\,\mathrm{sh}\,\psi, \text{ звідси } ct\,\mathrm{sh}\,\psi = \upsilon t\,\mathrm{ch}\,\psi$$

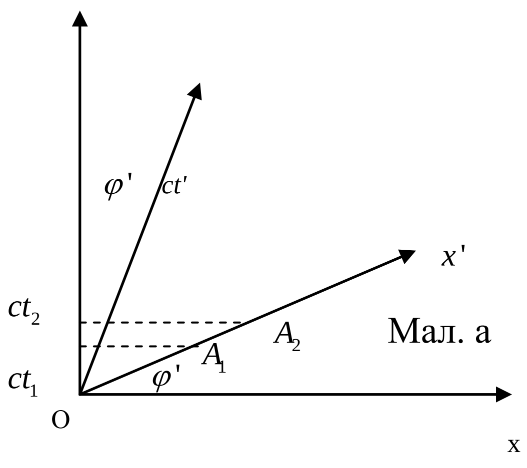
або

$$\frac{\mathrm{sh}\,\psi}{\mathrm{ch}\,\psi} = \mathrm{th}\,\psi = \frac{\upsilon}{c}, \quad \mathrm{sh}\,\psi = \frac{\mathrm{th}\,\psi}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\,\psi}} = \frac{\upsilon/c}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad \mathrm{ch}\,\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\,\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.$$

Підставивши це в (2), приходимо до перетворень Лоренца:

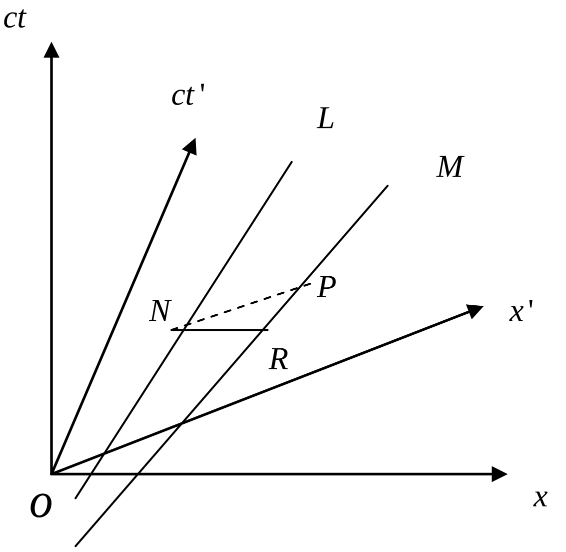
$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{\upsilon}{c^2}x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.$$

Отже, перетворенням Лоренца для двох систем, одна з яких рухається відносно другої зі швидкістю υ у тривимірному просторі, відповідає поворот на такий уявний кут φ у 4-вимірному просторі, що $tg\varphi = i\frac{\upsilon}{c}$. Такий поворот мало нагадує обертання декартової системи. Перетворення Лоренца зводяться до того, що вісі x' і ct' повертаються на кут $\varphi' = \mathrm{arctg}\frac{\upsilon}{c}$ навколо початку координат по напрямку до бісектриси координатного кута і займають положення x', ct'. Ми переходимо до косокутної системи координат - ось що означає поворот вісей на уявний кут (мал. а).



Мал. а

Після того, як побудовані вісі ІСВ K і K', можна дати геометричну інтерпретацію наслідкам перетворення Лоренца. Наочно видно відмінність одночасності. В системі K' одночасні всі події, що лежать на вісі x' або на паралельних їй прямих $ct'=const$. Отже, події A_1 і A_2, одночасні в K', бо лежать на прямій $t'=0$, зовсім не одночасні в K (щоб знайти відповідні їм моменти в K, ми проектуємо їх на вісь ct за допомогою прямих, паралельних вісі x).



На малюнку б) зображені світові лінії двох тіл L і M. Видно відносність відстані між тілами. Щоб знайти відстань, треба визначити координати цих тіл, але обов'язково одночасно. Якщо тіло L знаходиться в т. N, то з точки зору K тіло M в цей же момент перебуває в т. R, але з точки зору K' друге тіло в цей же час перебуває в т. P. З мал. б випливає, що $NR \neq NP$, тобто відстані в K і в K' різні.

§ 63. Релятивістська інваріантність

У відповідності з принципом відносності Ейнштейна всі фізичні процеси в усіх ІСВ протікають однаково, а це вимагає, щоб усі фундаментальні рівняння фізики в усіх ІСВ мали однакову форму, яка не змінюється при перетвореннях Лоренца, що відповідають переходам від однієї ІСВ до іншої. Це формальне вираження принципу відносності називають релятивістською інваріантністю. Зокрема, рівняння Максвела для електромагнітного поля є релятивістськи інваріантні, а от рівняння Ньютона цій вимозі вже не задовольняють, і тому мають бути видозмінені.

СТВ поставила і реалізувала задачу про знаходження релятивістськи інваріантної форми фізичних законів. Розв'язання цих задач випливає з аналогії із класичною механікою. В класичній механіці всі закони формулюються або у вигляді скалярних рівностей типу $\alpha=\beta$, де α, β – скаляри, або векторних рівностей $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$, де $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ – вектори. Перше з цих рівнянь містить зв'язок між скалярними величинами, які залишаються незмінними при повороті координатних вісей. Друге зв'язує між собою векторні величини, які змінюються при поворотах вісей – змінюються їх компоненти, але оскільки вони змінюються в обох векторах $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ однаково, то рівність $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ не порушується, вона не залежить від системи координат.

Перетворення Лоренца відповідають поворотам СК в Просторі-Часі. Виходячи з цієї геометричної інтерпретації і аналогії з класичною механікою, можна зробити висновок про релятивістськи інваріантну форму фізичних законів. А саме, для того, щоб деякий вираз був релятивістськи інваріантним, він повинен був мати вигляд $a=b$, де a і b – скаляри, або $a_i=b_i$, a_i, b_i – чотиривимірні вектори, і в загальному випадку

$$a_{ik\ldots lm}=b_{ik\ldots lm}, \tag{1}$$

де $a_{ik\ldots lm}$, $b_{ik\ldots lm}$ - 4-вимірні тензори довільного рангу.

При перетвореннях 4-вимірної системи координат в просторі-часі всі величини, що входять в релятивістські рівняння виду (1), перетворюються по одному і тому ж закону так, що вигляд рівнянь не змінюється. Ці умови інваріантності в 4-вимірному просторі Мінковського є безпосереднім аналогом умов інваріантності при повороті СК у реальному 3-вимірному просторі.

Один із способів знаходження таких релятивістськи інваріантних величин полягає у послідовному переході від більш простих величин, фізичний зміст яких добре відомий, до більш складних тензорів. Нам відомі такі інваріанти СТВ: швидкість світла c, елемент інтервалу ds, власний час $d\tau=\dfrac{ds}{c}$, диференціал 4-вимірного радіус-вектора dx^i. В наступних параграфах ми з цих величин утворимо інші релятивістськи інваріантні величини та знайдемо рівняння, яким вони задовольняють.

§ 64. Чотиривимірні швидкість і прискорення

У класичній механіці швидкість визначається виразом

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1}$$

Але ця величина не є інваріантом в СТВ, тому що час dt не є інваріантом СТВ. Замінивши в (1) вектор $d\vec{r}$ на 4-вимірний нескінчено малий приріст 4-радіус-вектора dx^i, а dt на інваріантний час $d\tau=\dfrac{ds}{c}$, визначимо релятивістськи інваріантний чотиривимірний вектор швидкості

$$u^i=\frac{dx^i}{d\tau}. \tag{2}$$

Враховуючи значення $dx^i(dx^0,dx^1,dx^2,dx^3)=dx^i\left(cdt,dx,dy,dz\right)$, а також те, що

$$dt=\frac{d\tau}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\Rightarrow d\tau=dt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}},$$

знайдемо компоненти 4-швидкості:

$$u^0=\frac{dx^0}{d\tau}=\frac{cdt}{dt\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}};\ u^1=\frac{dx^1}{d\tau}=\frac{dx}{dt\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}};\ u^2=\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

$$u^3=\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

або

$$u^i\left(u^0,u^1,u^2,u^3\right)=u^i\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=u^i\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right), \tag{3}$$

де $\vec{\upsilon}$ - звичайна тривимірна швидкість частинки. При $\upsilon \ll c$ просторова частина 4-швидкості переходить у звичайну швидкість $\vec{\upsilon}$.

Знайдемо квадрат чотиривимірного вектора швидкості :

$$u^{i2}=u^iu_i=u^0u_0+u^1u_1+u^2u_2+u^3u_3=u^{0^2}-u^{1^2}-u^{2^2}-u^{3^2}=\frac{c^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}-\frac{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=\frac{c^2-\upsilon^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=c^2,$$

тобто, квадрат чотиривимірного вектора швидкості є інваріантом відносно перетворень Лоренца:

$$u^iu_i=c^2=inv. \tag{4}$$

Геометрично 4-швидкість u^i є дотичним вектором до світової лінії частинки. Те, що $u^iu_i=c^2>0$, означає, що 4-вимірна швидкість є часоподібним вектором.

Визначимо тепер чотиривимірне прискорення як похідну від 4-швидкості по власному часу:

$$w^i=\frac{du^i}{d\tau}\ . \tag{5}$$

Якщо продиференціювати формулу (4) по власному часу $d\tau$, то знайдемо:

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^iu_i\right)=0=\frac{du^i}{d\tau}\cdot u_i+u^i\frac{du_i}{d\tau}=w^iu_i+w_iu^i=2w^iu_i.$$

Ця рівність означає, що скалярний добуток 4-прискорення на 4-швидкість дорівнює нулю, тобто вектори 4-швидкості і 4-прискорення взаємно перпендикулярні у 4-вимірному Просторі-Часі:

$$w^iu_i=0. \tag{6}$$

§ 65. Принцип найменшої дії в СТВ

В СТВ для дослідження руху матеріальних частинок можна виходити з принципу найменшої дії, який полягає в тому, що для будь-якої механічної системи існує такий інтеграл *S*, названий дією, який для дійсного руху має мінімум (§ 6).

Визначимо інтеграл дії для вільної частинки, тобто частинки, яка не перебуває під впливом яких-небудь зовнішніх сил. Для цього зауважимо, що:

1) дія в СТВ при швидкостях $\upsilon << c$ повинна переходити в дію для вільної частинки класичної механіки:

$$S_{\hat{e}\ddot{e}}=\int_{t_1}^{t_2}L_{\hat{e}\ddot{e}}dt, \qquad L_{кл}=\frac{m\upsilon^2}{2}; \tag{1}$$

2) інтеграл дії повинен бути інваріантом відносно перетворення Лоренца. Отже, він повинен бути взятий від скаляра, причому скаляр повинен мати вигляд диференціала в першій степені. Єдиний скаляр, який можна співставити вільній частинці, є величина, пропорційна інтервалу ds. Позначивши коефіцієнт пропорційності через α, отримаємо для дії наступний вираз:

$$S = \int \alpha ds . \tag{2}$$

Представимо елемент інтервалу через час: $ds = cd\tau = cdt\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$, тоді

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \alpha c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}dt = \int_{t_1}^{t_2} Ldt . \tag{3}$$

Отже, функція Лагранжа в СТВ має вигляд $L = \alpha c\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$. (4)

При $\upsilon << c$ вираз (4) повинен переходити до вигляду (1): $L \to L_{кл}$. Розкладемо (4) в ряд по степеням $\dfrac{\upsilon}{c}$. Нехтуючи членами вищих порядків, отримаємо:

$$L \approx \alpha c\left(1-\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = \alpha c - \frac{1}{2}\alpha c\frac{\upsilon^2}{c^2}.$$

Відкинувши в L несуттєвий сталий доданок αc і порівнюючи остаток з $L_{кл} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, знайдемо значення коефіцієнта: $\alpha = -mc$. Отже, функція Лагранжа і дія для вільної частинки дорівнюють

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}, \quad S = -\int mcds = -\int_{t_1}^{t_2} mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}dt . \tag{5}$$

§ 66. Енергія і імпульс у релятивістській механіці

В класичній механіці імпульс і енергія визначаються через функцію Лагранжа виразами

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{d\vec{\upsilon}}, \; E = \sum\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}}\vec{\upsilon} - L = \vec{p}\vec{\upsilon} - L . \tag{1}$$

Скористаємось ними в СТВ, взявши релятивістський вираз для функції Лагранжа (65.5), і отримаємо для імпульсу:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}} \Rightarrow \vec{p} = \frac{\partial}{\partial\vec{\upsilon}}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}\right) = -mc^2\frac{1}{2}\frac{-2\vec{\upsilon}/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

При малих швидкостях $\upsilon << c$ цей вираз переходить в класичний: $\vec{p} \cong m\vec{\upsilon} = \vec{p}_{кл}$.

Енергія частинки за формулою (1) дорівнює

$$E = \vec{p}\vec{\upsilon} - L = \frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{m\upsilon^2 + \left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{m\upsilon^2 + mc^2 - m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

– формула Ейнштейна. З формули (3) випливає, що енергія частинки при $\upsilon = 0$ не обертається в нуль, а дорівнює

$$E_0 = mc^2. \qquad (4)$$

Її називають енергією спокою. Різниця між повною енергією (3) і енергією спокою (4) дає кінетичну енергію частинки в СТВ:

$$T = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2. \qquad (5)$$

При малих швидкостях $\upsilon << c$ ця формула переходить у ньютонівський вираз для кінетичної енергії: $T \approx mc^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) - mc^2 = \frac{m\upsilon^2}{2} = T_{кл}$.

Знайдемо 4-вимірний аналог величин $\vec{p}$ і E, оскільки останні не є релятивістськими інваріантами. По аналогії з ньютонівським виразом $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ 4-вимірний імпульс визначимо як 4-вектор з компонентами

$$p^i = mu^i \quad (i = 0,1,2,3), \qquad (6)$$

де $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ - компоненти 4-швидкості. Враховуючи, що $u^i\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$,

знаходимо, що 4-імпульс має компоненти

$$p^i\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = p^i\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \qquad (7)$$

Такими чином, енергія і звичайний, тривимірний імпульс виявляються компонентами одного 4-вектора – 4-імпульса частинки, який ще називають 4-вектором енергії-імпульсу. Знайдемо квадрат його довжини, враховуючи формулу (64.4):

$$p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = mu^i \cdot mu_i = m^2 u^i u_i = m^2 c^2.$$

Таким чином, приходимо до співвідношення $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$. (8)

Формула (8) означає енергію частинки, виражену через імпульс, і називається функцією Гамільтона. Отже, функція Гамільтона вільної частинки в СТВ має вигляд:

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}\,. \tag{9}$$

Якщо частинка перебуває у зовнішньому силовому полі з потенціальною енергією U в ньому, то функція Гамільтона набуває вигляду

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2} + U\,. \tag{10}$$

Підкреслимо, що хоч ми говорили тут про частинку, її елементарність ніде не використовується. Тому отримані формули в рівній мірі можна використовувати і до любого складного тіла, яке складається з багатьох частинок, причому під m слід розуміти масу тіла, а під υ - швидкість його руху як цілого. Зокрема, формула (4) справедлива і для любого нерухомого як ціле тіла. Але енергія нерухомого тіла включає в себе, крім енергії спокою частинок, з яких воно складається, також кінетичну енергію частинок і енергію їх взаємодії між собою. Другими словами, $mc^2 \neq \sum\limits_a m_a c^2$ (m_a – маси частинок), а тому і $m \neq \sum\limits_a m_a$. Отже, в СТВ не має місця закон збереження маси: маса складного тіла не дорівнює сумі мас його частин. Замість цього має місце тільки закон збереження енергії, в яку входить і енергія спокою частинок.

§ 67. Рівняння релятивістської динаміки (НСО)

Рівняння Ньютона інваріантні відносно перетворень Галілея, але не інваріантні відносно перетворень Лоренца. Тому для того, щоб задовольнити принцип відносності Ейнштейна, 2-й закон Ньютона потрібно замінити більш загальним законом. Прийнявши до уваги, що при $\upsilon \ll c$ (υ - швидкість відносного руху ІСВ) перетворення Лоренца переходять в перетворення Галілея, необхідно вимагати, щоб релятивістськи інваріантні рівняння руху при $\upsilon \ll c$ переходили в ньютонівські рівняння:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{1}$$

Очевидним 4-вимірним узагальненням цих рівнянь є:

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \mathsf{F}^i\,. \tag{2}$$

Отже, в СТВ вводиться 4-вектор сили F^i, який дорівнює похідній 4-вектора енергії-імпульсу частинки по її власному часу. Цей вектор називають силою Мінковського. Прийнявши до уваги вирази для власного часу і компонент 4-імпульсу:

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,, \qquad p^i\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right),$$

представимо рівняння (2) у вигляді:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\mathsf{F}^{\,0},\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\mathsf{F}^{\vec{}}.$$

Помноживши ці рівняння на $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\mathsf{F}^{\,0}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}},\ \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\mathsf{F}^{\vec{}}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}. \qquad (3)$$

Якщо визначити просторові компоненти сили Мінковського $\mathsf{F}^{\vec{}}$ так, щоб вони були зв'язані з компонентами звичайної 3-вимірної сили $\vec{F}$ співвідношеннями

$$\vec{F}=\mathsf{F}^{\vec{}}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}, \qquad (4)$$

то рівняння (3) приймуть вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F} \text{ або } \frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}. \qquad (5)$$

Видно, що при $\upsilon \ll c$ рівняння (5) дійсно переходить в рівняння Ньютона.

Виясними тепер зміст часової компоненти сили Мінковського $\mathsf{F}^{\,0}$. Для цього визначимо 4-вимірний скалярний добуток

$$\mathsf{F}^{\,i}u_i=\frac{dp^i}{dt}u_i=m\frac{du^i}{dt}u_i=mw^iu_i=[(64.6)]=0.$$

З іншого боку,

$$\mathsf{F}^iu_i=\mathsf{F}^0u_0+\mathsf{F}^1u_1+\mathsf{F}^2u_2+\mathsf{F}^3u_3=\frac{\mathsf{F}^0c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-\frac{\vec{\mathsf{F}}\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{\mathsf{F}^0c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-\frac{\vec{F}\vec{\upsilon}}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=0;$$

звідси

$$\mathsf{F}^{\,0}=\frac{\vec{F}\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (6)$$

Отже, тепер можна написати всі компоненти сили Мінковського:

$$\mathsf{F}^{\,i}=\left(\frac{\vec{F}\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right). \qquad (7)$$

Скалярний добуток 3-вимірних векторів $\vec{F}$ і $\vec{\upsilon}$ дає роботу сили $\vec{F}$ за одиницю часу, тобто потужність $\frac{dE}{dt}$. Отже, вираз (6) можна представити у вигляді:

$$\mathsf{F}^{\;0} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{\tilde{n}^2}}}\frac{dE}{dt}, \tag{8}$$

де $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ - енергія частинки. Знайдемо тепер зв’язок між тривимірною силою $\vec{F}$ і прискоренням $\vec{w}$. Для цього рівняння (5) представимо у вигляді:

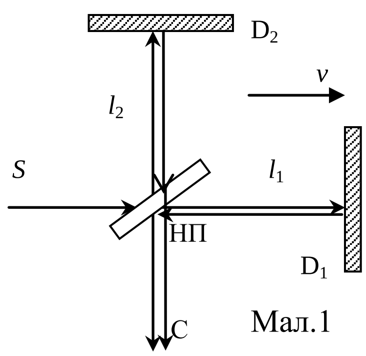
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \frac{m\dot{\vec{\upsilon}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{m\vec{\upsilon}\left(-\frac{2\vec{\upsilon}}{c^2}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)}{2\sqrt{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^3}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\vec{w} + \frac{\vec{\upsilon}\cdot(\vec{\upsilon}\cdot\vec{w})}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}\right). \tag{9}$$

Звідси випливає, що в загальному випадку вектор сили і вектор прискорення непаралельні між собою.

Відмітимо, що релятивістські рівняння динаміки лежать в основі розрахунків при проектуванні сучасних прискорювачів елементарних частинок, в яких останні досягають швидкостей, досить близьких до швидкості світла, тому без урахування ефектів СТВ їх успішна робота стала б неможливою.

§68. Експериментальне обґрунтування СТВ (НСО)

1. Дослід Майкельсона (1881-1929 рр.) був поставлений для виявлення відмінностей величини швидкості світла у напрямку руху Землі і у протилежному напрямку. У збудованому ним інтерферометрі промінь світла від джерела S розщеплюється в напівпрозорій пластині НП на 2 промені, які, відбившись від дзеркал Д$_1$ і Д$_2$, знову падають на напівпрозору пластину НП і після проходження інтерферують у С. Вигляд інтерференційної картини визначається різницею часу проходження світлом плечей l_1 і l_2. Враховуючи швидкість поширення Землі $\vec{\upsilon}$, знайдемо час проходження плечей T_1 і T_2. В першому випадку, враховуючи класичний закон додавання швидкостей Галілея, отримаємо (див. мал. 1)



Мал.1

$$T_1 = t_1 + t_2 = \frac{l_1}{c+\upsilon} + \frac{l_1}{c-\upsilon} = \frac{2cl_1}{c^2-\upsilon^2}.$$

$$T_2 = \frac{AD_2 + D_2B}{c} = \frac{2AD_2}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{(KD_2)^2 + (AK)^2} = \frac{2}{c}\sqrt{l_2{}^2 + \left(\frac{\upsilon T_2}{2}\right)^2} \Rightarrow c^2\frac{T_2^2}{4} = l_1^2 + \frac{\upsilon^2 T_2^2}{4};$$

$$\frac{T_2^2\left(c^2-\upsilon^2\right)}{4}=l_2^2\,;T_2=\frac{2l_2}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}\,.$$

Різниця ходу променів визначається часом

$$\Delta T=\left|T_1-T_2\right|=\left|\frac{2cl_1}{c^2-\upsilon^2}-\frac{2l_2}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}\right|.$$

Після повороту інтерферометра на 90° плечі l_1 і l_2 поміняються місцями, і різниця ходу стане:

$$\Delta T'=\left|T_1'-T_2'\right|=\left|\frac{2cl_2}{c^2-\upsilon^2}-\frac{2l_1}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}\right|\neq\Delta T\,,$$

тобто $\Delta T\neq\Delta T'$ навіть при рівності плечей. Це повинно було привести до зміщення смуг в інтерференційній картині. Але ніякого зміщення смуг у досліді не спостерігалось, незважаючи на багаторічні удосконалення Майкельсоном інтерференційної установки. З точки зору класичної фізики, на основі якої і були отримані попередні висновки, негативний результат досліду Майкельсона не мав пояснення. Тільки теорія відносності пояснила результат досліду Майкельсона на основі припущення про незалежність швидкості світла від стану руху джерела:

$$T_1=T_1'=\frac{2l_1}{c};\qquad T_2=T_2'=\frac{2l_2}{c};\qquad \Delta T=\Delta T'\,.$$

2. Час життя елементарних частинок

При поширенні в атмосфері Землі космічних променів внаслідок певних взаємодій виникають μ^+- і μ^--мезони (мюони). Мюони – нестабільні частинки, що розпадаються при повільному русі за час $T_0\approx 2,2\cdot 10^{-6}c$. Проте мюони, що утворюються космічними променями, пролітають зі швидкістю $\upsilon\approx c$ відстань порядку 20 км, що відповідає часові життя $T\approx 0,7\cdot 10^{-4}c>>T_0$, який значно більший від T_0. Це можна пояснити, тільки якщо врахувати релятивістський ефект сповільнення часу: в системі відліку, зв'язаній з рухомим мюоном, час протікає повільніше, ніж у лабораторній системі, згідно з (56.3).

3. Релятивістський ефект Допплера

Це явище зміни частоти хвилі ω, випромінюваної джерелом, що рухається відносно спостерігача, порівняно з частотою ω_0 того ж джерела в системі відліку, в якій воно покоїться. Формула, що зв’язує ці частоти, має вигляд:

$$\omega=\omega_0\frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon}{c}\cos\alpha},\qquad (1)$$

де α – кут між напрямком поширення хвилі і напрямком відносного руху джерела та спостерігача. При $\upsilon\ll c$ ця формула, якщо α не дуже близький до 90°, дає

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{\upsilon}{c} \cos\alpha \right).$$

Цей результат був відомий ще в класичній фізиці. Але при α=90° класична фізика дає $\omega = \omega_0$, тоді як в СТВ виявляється поперечний ефект Допплера

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{2c^2} \right).$$

4. Ефект Комптона, який полягає у тому, що при розсіянні рентгенівського випромінювання на вільних або слабозв'язаних електронах довжина розсіяної хвилі збільшується порівняно з довжиною падаючої хвилі.

5. Дефект мас в атомних ядрах. Відомо, що ядра атомів усіх хімічних елементів складаються з протонів і нейтронів. Маса протона в атомних одиницях $m_p \approx 1{,}0081213$, а маса нейтрона $m_n \approx 1{,}00893$. У кожному ядрі міститься Z протонів і A-Z нейтронів, де Z – порядковий номер елементу в таблиці Мендєлєєва, A – його масове число. Отже, маса ядра повинна була б становити величину

$$M = Z\, m_p + (A - Z)\, m_n.$$

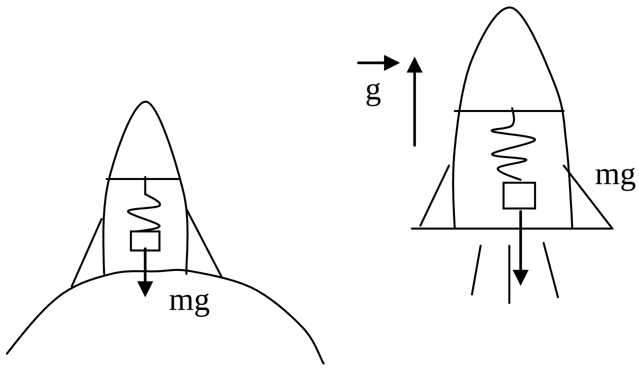
Проте експериментальними вимірюваннями мас ядер було встановлено, що насправді маса ядра менше від величини, обчисленої за даною формулою, на величину ΔM, яка називається дефектом мас. Наявність дефекту маси вказує на те, що при утворенні ядра з елементарних частинок виділилась енергія $E = \Delta M \cdot c^2$ і відповідно зменшилась маса ядра. З іншого боку, для того, щоб зруйнувати ядро, треба затратити таку саму енергію, яка виділилась при його утворенні. Це явище використовується в уранових реакторах, в термоядерному синтезі.

6. Необхідність врахування законів релятивістської динаміки, зокрема, **зростання маси елементарних частинок** із збільшенням їх швидкості у прискорювачах елементарних частинок.

РОЗДІЛ 9. ЕЛЕМЕНТИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ (ЗТВ)

§ 69. Принцип еквівалентності

СТВ вимагає, щоб швидкість поширення взаємодії не перевищувала швидкість світла, а рівняння, які описують фізичні процеси, були інваріантні відносно перетворень Лоренца. Закон всесвітнього тяжіння Ньютона, який припускає миттєву передачу дії сили на відстані, виявляється несумісним з СТВ. Розв’язання цього протиріччя було знайдене в одній властивості поля гравітації, яка отримала назву принципу еквівалентності. Ця властивість полягає в тому, що всі тіла незалежно від їх маси рухаються в гравітаційному полі (при заданих початкових умовах) однаково. Ще Галілей в дослідах з падінням тіл з Пізанської башти встановив, що всі тіла біля поверхні Землі падають з однаковим прискоренням (закон Галілея). Ця властивість гравітаційних полів дає можливість встановити суттєву аналогію між рухом тіл в гравітаційному полі і рухом тіл, які не перебувають в деякому зовнішньому полі, але розглядаються з точки зору неінерціальної системи відліку.



Наприклад, для спостерігача на Землі космічний корабель має постійне прискорення $\vec{g}$, викликане притяганням з боку Землі. А в неінерціальній системі відліку (НСВ), зв’язаній з прискорено рухомим кораблем, гравітаційного поля взагалі немає, але діятимуть сили інерції, подібні силам тяжіння. Якщо в кораблі немає вікон, то ніяким способом не можна встановити причину сили, яка діє на тіла – чи це є дія сили тяжіння, чи результат прискореного руху ракети. Отже, неінерціальна СВ еквівалентна деякому гравітаційному полю. Цю обставину називають принципом еквівалентності.

Але поля, які еквівалентні НСВ, все ж не зовсім тотожні з справжніми гравітаційними полями, існуючими і в ІСВ. Між ними існує суттєва відмінність у властивостях на нескінченності. На нескінченній відстані від створюючих поле тіл справжнє гравітаційне поле завжди наближається до нуля: $F_{гр} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \to 0$ при $r \to \infty$. Поля ж, які еквівалентні НСВ, на нескінченості не зникають: поле, якому еквівалентна прискорена прямолінійно рухома СВ, однакове у всьому просторі, в т.ч. і на ∞.

Поля, які еквівалентні НСВ, зникають, як тільки ми перейдемо до ІСВ.

Справжні ж гравітаційні поля існують і в ІСВ, і їх неможливо виключити ніяким вибором СВ. Це видно вже з вказаної вище відмінності між умовами на нескінченності в справжніх гравітаційних полях і полях, яким еквівалентні НСВ; оскільки останні на ∞ до 0 не наближаються, то ніяким вибором СВ неможна виключити справжні поля, що зникають на ∞. Єдине, чого можна досягти належним вибором СВ, це – локального виключення гравітаційного поля в даній ділянці простору, достатньо малій для того, щоб поле в ній можна було вважати однорідним. Це можна зробити шляхом вибору прискореної СВ, прискорення якої дорівнювало б тому прискоренню, яке набуває частинка, розміщена в розглядуваній ділянці поля. Приклад: у вільно падаючому ліфті або космічному кораблі на навколоземній орбіті поле тяжіння буде відсутнім.

Вказана еквівалентність гравітаційного поля деякій НСВ можлива завдяки рівності гравітаційної маси, яка входить в закон всесвітнього тяжіння, і інертної маси, що входить в другий закон Ньютона. Покажемо це. Згідно з законом всесвітнього тяжіння сила взаємодії двох тіл

$$F = G\frac{m_1^* m_2^*}{r^2}, \tag{1}$$

де G – гравітаційна стала Ньютона, m_1^*, m_2^* - гравітаційні маси цих тіл, які відповідають за взаємодію тіл. Маса, яка є мірою інертності тіла, називається інертною масою. В полі тіла з гравітаційною масою m_1^* друге тіло набуває прискорення:

$$w_2 = \frac{F}{m_2} = G\frac{m_1^*}{r^2}\cdot\frac{m_2^*}{m_2} \quad , \tag{2}$$

де m_2 - інертна маса другого тіла. Ні з чого не випливає, що гравітаційна маса еквівалентна інертній, завдяки чому відношення m_2^*/m_2 має бути однаковим для всіх тіл. Але саме тільки при такій умові виконується закон Галілея. Цей закон був відкритий Галілеєм близько 1600 року (1592-1610 р.). Бессель в 1928 році підтвердив його з точністю до 10^{-5}. Етвеш біля 35 років підвищував точність, довівши її до $5\cdot10^{-9}$. Дікке в 1959–1964 рр. довів еквівалентність з точністю до $3\cdot10^{-11}$, а Брагінський і Попов в 1970 – 1971 рр. довели точність до 10^{-12}.

§70. Принцип загальної коваріантності

Для введення у фізичні системи гравітаційного поля можна використовувати принцип еквівалентності, але для практичного вживання він виявляється громіздким і незручним. Тому для розв'язання цієї проблеми використовують альтернативну версію принципу еквівалентності, відому як принцип загальної коваріантності.

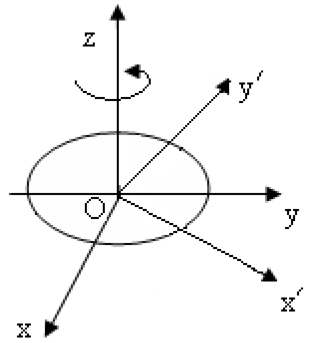
Принципи загальної коваріантності є поширенням принципу відносності Ейнштейна на неінерціальні системи відліку і полягає в тому, що закони фізики повинні виражатись у формі, незалежній від конкретного вибору СВ (або просторово-часових координат). Можна дати таке виправдання принципу коваріантності. Вимірювання фізичних величин здійснюється в деякій системі просторово-часових координат. Але реальна фізична поведінка не повинна залежати від довільного вибору фізиком СВ. Виходячи з цієї незалежності фізичної реальності від вибору СВ і СК, приходимо до висновку, що закони фізики, якими б вони не були в дійсності, можуть бути виражені у вигляді, ніяк не залежному від вибору конкретної СК. Таким чином, ставиться проблема знаходження формул для конкретних фізичних законів, які були б коваріантними відносно довільних перетворень координат. (Про інваріантність і коваріантність див. §8).

Але загальна коваріантність сама по собі не має фізичного змісту. Будь-яке рівняння може бути зроблене коваріантним, якщо записати його в деякій одній СК, а потім придати форму, яка не змінюється при переході до будь-якої іншої СВ. Зміст принципу загальної коваріантності стосовно ефектів гравітації полягає в тому, що фізичне рівняння завдяки його загальній коваріантності буде справедливим в гравітаційному полі, якщо воно справедливе при його відсутності, адже ми, у відповідності з принципом еквівалентності, пов'язуємо гравітаційне поле з НСВ.

§71. Гравітаційне поле і геометрія Простору-Часу

Згідно з принципом еквівалентності гравітацію можна розглядати як еквівалент прискорення. Це прискорення не залежить від тіл, на які діють гравітаційні сили, а залежить лише від точки простору, де вони опинились. Тому можна було б характеристики тяжіння – відповідні йому прискорення – співставляти не тілам, а саме відповідним точкам простору. Але як це зробити? Плоский Простір – Час Мінковського надто бідний за своїми властивостями. Він однорідний і ізотропний, через що компоненти метричного тензора g^0_{ik} сталі (= 0, ±1 в декартових координатах). Отже, для реалізації даної ідеї необхідно перейти до Простору-Часу з компонентами метричного тензору $g_{ik}(x)$, які змінюються від точки до точки, тобто до викривленого Простору-Часу. Тоді можна говорити про зміну геометричних властивостей Простору-Часу в різних місцях. Лишається вияснити конкретний зв'язок між значеннями компонент $g_{ik}(x)$ і властивостями гравітаційних взаємодій. Такий зв'язок якраз і дає загальна теорія відносності (ЗТВ), яку створив А. Ейнштейн у 1915 р.

В СТВ важливу роль відіграє квадрат інтервалу. Якщо гравітаційне поле відсутнє, то існує така система відліку, в якій квадрат інтервалу між двома нескінченно близькими подіями визначається виразом (60.1):



$$ds^2 = g^0_{ik} dx^i dx^k = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1)$$

Повертаючись у СВ, де є гравітаційне поле, за допомогою нелоренцевих перетворень між неінерціальними одна відносно іншої СВ, отримаємо вираз для інтервалу

$$ds^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k, \tag{2}$$

е метрика (метричний тензор $g_{ik}(x)$) уже відмінна від метрики Мінковського, представленої метричним тензором g^0_{ik}. Звідси лишається тільки один крок до припущення, що неплоска метрика g_{ik} Простору-Часу може служити мірою гравітаційного поля, а також до загального принципу відносності про еквівалентність не тільки ІСВ, але й і НСВ.

Ілюстрацією приведених міркувань може служити, наприклад, перехід від ІСВ до НСВ, яка рівномірно обертається навколо вісі і кутовою швидкістю ω, з допомогою перетворень координат

$$x = x'\cos\omega t + y'\sin\omega t,\quad y = y'\cos\omega t - x'\sin\omega t,\quad z = z',$$

в якій інтервал
$ds^2 = [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega dt'(y'dx' - x'dy')$ відрізняється від (1). В такій НСВ для любого кола, що лежить на координатній площині (x',y') і має центр на вісі z', виконуватиметься нерівність $\ell/d < \pi$, де ℓ - довжина цього кола, d - її діаметр. Упевнитись в цьому можна, якщо уявити, що вздовж кола розташовані маленькі стержні, які повинні зазнавати лоренцеве скорочення своїх довжин, в той час, як стержні, розташовані вздовж діаметра, такого скорочення не зазнають. Аналогічно можна впевнитись в тому, що годинники, які розташовані на цьому колі, будуть йти повільніше, ніж у центрі. Отже, введення НСВ приводить до уявлень про неевклідовий характер Простору-Часу у вказаній СВ.

§72. Тензор кривизни

Квадрат елемента інтервалу в плоскому Просторі-Часі Мінковського в декартових координатах має вигляд:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{ik}{}^0 dx^i dx^k \tag{1}$$

з допомогою перетворень $$x^{i}{}' = x^{i}{}'\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \tag{2}$$

ми можемо перейти від СК x^0, x^1, x^2, x^3 до іншої СК $x^{0}{}', x^{1}{}', x^{2'}{}', x^{3}{}'$ ($x^{i}{}'$ – деякі функції) і отримати інтервал у вигляді:

$$ds^2 = g_{ik}{}^0 \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}dx'^m \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x'^n}dx'^n = g_{mk}(x')dx'^m dx'^n,\ g_{mn}(x') = g_{ik}{}^0 \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x'^n}, \tag{3}$$

де використано домовленість про підсумовування. Нові координати x', якщо вони відмінні від декартових, називаються криволінійними, а функції $g_{ik}(x')$ – коваріантними компонентами метричного тензора криволінійної СК. По певним правилам можна визначити також контраваріантні компоненти метричного тензора:

$$g^{ik} = A_{ik}/g, \tag{4}$$

де A_{ik} - алгебраїчне доповнення елемента g_{ik} у визначнику $g = |g_{ik}|$, причому

$$g^{ik}g_{kl} = \delta^i{}_l, \tag{5}$$

де $\delta^i{}_l$ - одиничний тензор:

$$\delta^i{}_l = \begin{cases} 0, i \neq l \\ 1, i = l \end{cases}. \tag{6}$$

Властивості g^{ik} і g_{ik}, про які йшла мова в СТВ (піднімання і опускання індексів, тощо), зберігаються в криволінійних координатах.

Нехай в криволінійних координатах інтервал дорівнює

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{7}$$

Якби Простір-Час був плоским і, отже, не було б підстав говорити про гравітаційні поля, то деяким перетворенням координат можна було б інтервал (7) перевести до лоренцевого вигляду (1). Якщо ж такого перетворення не існує, то Простір-Час не може бути плоским, тобто він має бути викривленим, або, як кажуть, носить рімановий характер (на відміну від евклідового характеру плоского простору). Питання про існування такого перетворення розв'язав німецький математик Бернгард Ріман. Приведемо отриманий ним результат. Введемо так званий тензор Рімана – Крістофеля, або тензор кривизни:

$$R^i{}_{skp} = \partial \Gamma^i{}_{sp} / \partial x^k - \partial \Gamma^i{}_{sk} / \partial x^p + \Gamma^i{}_{rk} \Gamma^r{}_{sp} - \Gamma^r{}_{ks} \Gamma^i{}_{rp}. \tag{8}$$

Тут функції $\Gamma^i{}_{pk}$ називаються символами Кристофеля і мають вигляд:

$$\Gamma^i{}_{pk} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\partial g_{sp} / \partial x^k + \partial g_{sk} / \partial x^p - \partial g_{pk} / \partial x^s \right). \tag{9}$$

Всі індекси приймають значення 0, 1, 2, 3, причому 0 відповідає часовій компоненті, 1, 2, 3 – просторовим, по німим індексам ведеться підсумовування.

Отже, Ріман встановив, що якщо всі компоненти тензора кривизни (8), утворені за допомогою метричного тензора g_{ik}, тотожньо дорівнюють нулю, то існує перетворення координат, яке переводить інтервал (7) до форми (1), тобто простір буде плоским. Якщо ж хоча б одна з компонент тензора Рімана – Крістофеля відмінна від 0, то вказаного перетворення не існує і простір буде викривленим (рімановим).

З тензором Рімана – Крістофеля пов'язані інші тензорні величини, які використовуються у формулюванні рівнянь ЗТВ. Тензор Річчі є згорткою по двом індексам тензора кривизни:

$$R_{ik} = R^m{}_{imk} = R^0{}_{iok} + R^1{}_{i1k} + R^2{}_{i2k} + R^3{}_{i3k} \tag{10}$$

і дорівнює

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^e{}_{ik}}{\partial x^e} - \frac{\partial \Gamma^e{}_{ie}}{\partial x^k} + \Gamma^e{}_{ik} \Gamma^m{}_{em} - \Gamma^m{}_{ie} \Gamma^e{}_{km}. \tag{11}$$

Видно, що тензор є симетричним: $$R_{ik} = R_{ki}. \tag{12}$$

Спрощуючи R_{ik}, отримаємо так звану скалярну кривизну простору:

$$R = g^{ik} R_{ik}. \tag{13}$$

Проте R_{ik} і R можуть дорівнювати 0, а простір все ж залишиться викривленим, якщо $R^i{}_{kem} \neq 0$. Плоским він буде лише при $R^i{}_{kem} = 0$.

Отже, використання принципу коваріантності на практиці приводить до ідеї запису фундаментальних аксіом або законів фізики в тензорному вигляді, як це було зроблено в СТВ. Тензорне представлення фізичного закону зберігає свій вигляд в усіх просторово-часових СК. Тому ЗТВ починається з вираження фундаментальних фізичних постулатів у виді тензорних рівнянь, подібно 4–вимірним рівнянням СТВ, з використанням апарату тензорного числення Річчі і Леві-Чівіта.

§73. Час і відстані у гравітаційному полі

В ЗТВ вибір СВ нічим не обмежений, трьома просторовими координатами x^1, x^2, x^3 можуть бути довільні величини, які визначають положення тіл в просторі, а часова координата x^0 може визначатись годинником з довільним ходом. Виникає питання про те, як за значеннями величин x^0, x^1, x^2, x^3 визначити справжні (дійсні) відстані і проміжки часу.

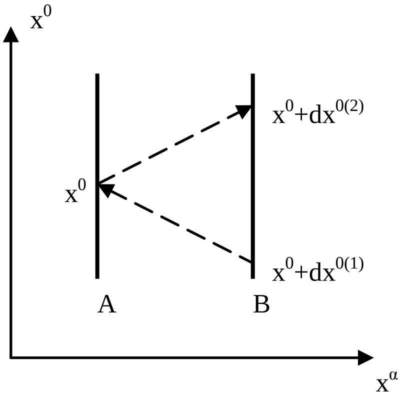
Визначимо спочатку зв'язок істинного часу τ з часовою координатою x^0. Для цього розглянемо дві нескінчено близькі події, які відбуваються в одній і тій же точці простору. Тоді інтервал між цими двома подіями, з одного боку, виражається через проміжок істинного часу $d\tau$ між подіями: $ds = cd\tau$, а з другого боку, з виразу для квадрату інтервалу внаслідок рівності $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0,$ маємо $ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2$. Отже, $ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2$, звідки

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{1}$$

Для проміжку часу між двома довільними подіями в одній і тій же точці простору з (1) випливає

$$\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{00}}\,dx^0 . \tag{2}$$

Ці співвідношення і визначають власний час для даної точки простору. Відмітимо також, що з (1) або (2) випливає умова $g_{00} > 0$. (3)



Визначимо тепер елемент dl просторової відстані. Для цього з деякої точки B Простору-Часу з координатами $x^\alpha + dx^\alpha$ відправляється світловий сигнал у нескінченно близьку до неї точку A (з координатами x^α), а потім назад по тому ж шляху. Необхідний на це час, помножений на швидкість світла c, дорівнюватиме подвійній відстані між точками $2dl$. Таким чином, розшукувана відстань $dl = \frac{1}{2}cd\tau$. Напишемо інтервал, виділивши просторові і часову координати:

$$ds^2 = g_{ik}dx_i dx_k = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0, \tag{4}$$

де $\alpha, \beta = 1,2,3$, по α і по β, що двічі повторюються, передбачається підсумовування. Оскільки для світла $ds = 0$, то розв’язуючи (4) відносно dx^0, знайдемо 2 кореня:

$$\begin{cases} dx^{0(1)} = \left(-g_{o\alpha}dx^{\alpha} - \sqrt{\left(g_{o\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}}\right)\Big/ g_{00} \\ dx^{0(2)} = \left(-g_{o\alpha}dx^{\alpha} + \sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}}\right)\Big/ g_{00}, \end{cases} \tag{5}$$

які відповідають поширенню сигналу в двох напрямках між А і В. Якщо x^0 є момент прибуття сигналу в т.А, то моменти його відправлення між А і В і наступного повернення в точку В будуть відповідно $x^0 + dx^{0(1)}$ і $x^0 + dx^{0(2)}$ (див. мал.). (На мал. суцільні прямі – світові лінії точок А і В, пунктирні – світові лінії сигналів). Повний проміжок «часу» між відправленням і поверненням сигналу у ту ж точку дорівнює

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}}\,. \tag{6}$$

Помноживши (6) на $\sqrt{g_{00}}\big/c$, отримаємо, згідно з (1), істинний час, а якщо отриманий вираз помножити ще $c\big/2$, знайдемо відстань dl:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}. \tag{7}$$

Це і є розшукуваний вираз для відстані через елементи просторових координат. Оскільки g_{ik} може залежати від x^0, то відстань dl може змінюватись з часом, вона не має абсолютного змісту.

§74. Рівняння руху в гравітаційному полі

Рух вільної частинки в СТВ визначається принципом найменшої дії [§65]:

$$\delta S = -mc\delta\int ds = 0\,, \tag{1}$$

згідно з яким частинка рухається так, що б її світова лінія була екстремальною між двома заданими світовими точками, тобто, в СТВ – по прямій. В звичайному 3-вимірному просторі цьому відповідає рівномірний прямолінійний рух.

Рух частинки в гравітаційному полі повинен визначатись принципом найменшої дії в тій же формі (1), оскільки гравітаційне поле є не чим іншим, як зміною метрики Простору-Часу, яка проявляться у зміні виразу ds через dx^i. Отже, в гравітаційному полі частинка рухається так, що її світова точка переміщується в Просторі-Часі по екстремальній, або, як кажуть, по геодезичній лінії, але, оскільки при наявності гравітаційного поля Простір-Час є неевклідовим, то ця лінія – не «пряма», а реальний просторовий рух частинки – не рівномірний і не прямолінійний.

Підставивши вираз інтервалу $ds = \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$ в (1) і скориставшись рівняннями Ейлера з варіаційного числення для знаходження екстремуму функціоналу $\int\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$, після деяких перетворень отримаємо так зване рівняння геодезичних

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma_{jk}{}^i \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}, \tag{2}$$

де $\Gamma_{jk}{}^i$ - символи Кристофеля (72.9).

Рівняння (2) являє собою систему рівнянь руху пробних тіл у викривленому Просторі-Часі, тобто рівняння руху тіл у гравітаційному полі. У лівій частині цього рівняння стоїть «прискорення» d^2x^i/ds^2. У праву частину квадратично входить 4–швидкість. Символи Кристофеля є ніби напруженістю гравітаційного поля – вони виражаються через гравітаційні «потенціали» g_{ik}. В рівняннях (2) відсутня маса частинки, тобто автоматично ніби скорочуються маси інертна і гравітаційна, що практично реалізує принцип еквівалентності.

Для світлових променів рівняння геодезичних у формі (2) непридатні, тому що вздовж світової лінії поширення світлового променя інтервал $ds = 0$. Для отримання коректних рівнянь руху світла введемо 4-вимірний хвильовий вектор $k^i = \dfrac{dx^i}{d\lambda}$, дотичний до променя, де λ – деякий параметр, який змінюється вздовж променя. Тоді замість (2) можна отримати

$$\frac{dk^i}{d\lambda} = -\Gamma_{jk}{}^i k^j k^k \tag{3}$$

(з цих же рівнянь визначиться і параметр λ). Квадрат хвильового 4-вектора дорівнює 0:

$$k_i k^i = g_{ik}\frac{dk^i}{d\lambda}\frac{dk^k}{d\lambda} = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = 0.$$

Геодезичні лінії, вздовж яких $ds = 0$, називають нульовими, або ізотропними. Отже, світло рухається по ізотропним геодезичним.

Рівняння геодезичної (2) можна переписати у вигляді

$$D_k u^i = 0, \tag{4}$$

де $D_k u^i$ позначає коваріантну похідну 4-вектора «швидкості», $u^i = dx^i/ds$. Рівність (4) означає, що вектор u^i дотичний до геодезичної, причому при паралельному переносі вздовж геодезичної він буде залишатись дотичним до неї. Через всяку точку простору в любому напрямку проходить геодезична. Вона однозначно задається самою цією точкою і дотичним до неї в цій точці вектором швидкості.

Отже, точкові тіла в гравітаційному полі рухаються як вільні по часоподібним геодезичним, які визначаються відповідним Простором-Часом.

§75. Рівняння гравітаційного поля А.Ейнштейна

Додатково до принципів коваріантності і еквівалентності необхідно в теорію гравітації ввести деякі додаткові елементи. Дійсно, з допомогою вже введених принципів ми навчились інтерпретувати фундаментальний тензор

g_{ik}: в метричному плані ним визначається геометрія Простору-Часу, а в його гравітаційному аспекті ним визначається рух частинок і світлових променів. Але ми поки що не знаємо про залежність g_{ik} від координат, якщо не враховувати досить загального твердження, що Простір-Час є плоским при відсутності гравітаційного поля і викривленим при його наявності. Отже, необхідно ввести тепер третій принцип релятивістської теорії гравітації, а саме: точне формулювання закону, який відбиває залежність метричного і гравітаційного полів від розподілу матерії, адже, згідно А. Ейнштейну, матерія є джерелом викривлення Простору-Часу.

Рівняння гравітаційного поля були встановлені в 1915 р. Д.Гільбертом, який застосував варіаційний принцип до функціоналу дії:

$$S = \int \left(-\frac{1}{2\kappa} R + L_m \right) \sqrt{-g}\, d^4 x, \tag{1}$$

і А. Ейнштейном, який виходив з ряду припущень, з яких умова загальної коваріантності стала остаточним критерієм вибору рівнянь у формі:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik}, \tag{2}$$

де R_{ik} - тензор Річчі, R - скалярна кривизна, T_{ik} - тензор енергії-імпульсу матерії, κ - стала, L_m - лагранжіан матерії.

Рівняння (2) отримали назву гравітаційних рівнянь Ейнштейна. Їх 10 ($R_{ik} = R_{ki}$) для 10 компонент метрики ($g_{ik} = g_{ki}$). Вони є диференціальними рівняннями 2-го порядку в частинних похідних для g_{ik} і зв'язують викривлення Простору-Часу (гравітаційне поле) з тензором енергії–імпульсу матерії T_{ik}. Стала κ в (1) і (2) називається ейнштейнівською гравітаційною сталою і вираховується через гравітаційну сталу G в законі тяжіння Ньютона: $\kappa = 8\pi G / c^4$ (див. наступний §). Тензор енергії – імпульсу характеризує розподіл і рух матерії. Його компонентами T^{00}, T^{0i}, T^{ij} є відповідно густина енергії, густина імпульсу (густина потоку матерії) і густина потоку імпульсу. Наприклад, тензор енергії-імпульсу вільних частинок

$$T^{ik} = \rho u^i u^k, \tag{4}$$

де ρ - густина маси в системі спокою; тензор енергії-імпульсу ідеальної рідини

$$T^{ik} = \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) u^i u^k + \frac{p}{c^2} g^{ik}, \tag{5}$$

де p - тиск (в системі спокою).

Тензор енергії-імпульсу є універсальною характеристикою матерії, притаманною, на відміну від всіх інших характеристик, всім без винятку видам матерії. Тому те, що саме він є джерелом гравітаційного поля і викривлення Простору-Часу, робить гравітаційне поле універсальним. Але це не означає, що пустий простір (без звичайної матерії) плоский. В пустому просторі ($T_{ik} = 0$) рівняння гравітаційного поля зводяться до рівняння $R_{ik} = 0$, тоді як для плоского простору необхідно виконання більш сильної умови $R^{i}{}_{jke} = 0$.

Рівняння гравітаційного поля є суттєво нелінійним, тобто в них не можна виділити лінійну частину, яка описує вільне поле. Тому гравітаційні поля обов'язково взаємодіють одне з одним, і для них не виконується принцип суперпозиції. Фізична причина цього криється в тому, що маса і енергія, згідно з висновками СТВ, не є аддітивними, тобто маса і енергія системи не дорівнюють сумі мас і енергій окремих тіл, що входять в систему (відрізняються на масу та енергію взаємодії), внаслідок чого гравітаційне поле системи не дорівнює сумі гравітаційних полів її складових частин.

А.Ейнштейн шукав ліву – геометричну – частину гравітаційних рівнянь (позначимо її $G_{\alpha\beta}$ - тензор Ейнштейна), виходячи з двох умов: 1) вона є раціональною функцією метрики, її перших та других похідних, причому від останніх вона повинна залежати лінійно; 2) вона задовольняє «закону збереження»: $G^{i}{}_{k;i} = 0$. Але А.Картан показав, що цим умовам задовольняє G_{ik} більш загального вигляду, ніж ліва частина рівнянь Ейнштейна, а саме:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik}$$

де $\Lambda = const$ - так званий космологічний член.

Космологічний член був введений в рівняння гравітації А.Ейнштейном із феноменологічних міркувань для отримання статичних космологічних моделей (А. Ейнштейн, В. де Сіттер, 1917) як енергію відштовхування, що протидіє гравітаційному притяганню. Але експеримент дає дуже мале його значення ($\Lambda \sim 10^{-56} см^{-2}$) і його впливом на некосмологічні процеси можна знехтувати. Але в сучасних космологічних моделях він знову, вже з квантових позицій як ефективна енергія вакууму, відіграє ключову роль, оцінюючись на ранній стадії розвитку Всесвіту значенням $\sim 10^{30} см^{-2}$.

§76. Закон гравітації Ньютона в ЗТВ

Покажемо, що закон всесвітнього тяжіння Ньютона є в першому наближенні наслідком гравітаційних рівнянь Ейнштейна. Для цього припустимо малі швидкості і слабке гравітаційне поле. Функцію Лагранжа частинки в такому полі можна записати у вигляді

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \tag{1}$$

де φ – гравітаційний потенціал; а рівняння руху будуть:

$$\dot{\vec{v}} = -grad\varphi \quad . \tag{2}$$

Нерелятивістський вираз для дії для частинки в гравітаційному полі має вигляд:

$$S = \int L dt = -mc\int (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}) dt \, . \tag{3}$$

Порівнюючи його з релятивістським виразом $S = -mc\int ds$ (65.5), знайдемо, що

$$ds = (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c})dt \cdot \tag{4}$$

Піднесемо ds до квадрату, відкидаючи доданки, які наближаються до 0 при с→∞:

$$ds^2 = dt^2(c^2 + \cancel{\frac{v^4}{4c^2}} + \cancel{\frac{\varphi^2}{c^2}} - v^2 + 2\varphi - \cancel{\frac{v^2\varphi}{c^2}}) = c^2(1 + \frac{2\varphi}{c^2})dt^2 - d\vec{r}^{\,2}, \tag{5}$$

де враховано, що $\vec{v}dt = d\vec{r}$. Отже, компонента g_{00} метричного тензору дорівнює

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \cdot \tag{6}$$

Далі, в тензорі енергії –імпульсу матерії вільних частинок $T_{ik} = \rho u_i u_k$ (75.4) при повільних рухах можна знехтувати всіма просторовими компонентами швидкості, тобто покласти $u^\alpha = 0$, α=1,2,3, а залишити тільки часову: $u^0 = u_0 = c$. Тоді з усіх компонент T_{ik} залишиться лише $T_{00} = \rho c^2$; згортка $T = g^{ik}T_{ik} = \rho c^2$. В цьому випадку рівняння Ейнштейна зведуться до вигляду

$$R_{00} = \frac{\kappa}{2}\rho c^2, \tag{7}$$

всі інші рівняння, як легко переконатись, обертаються в 0. Обчислення показують, що в прийнятому наближенні $R_{00} = \partial \Gamma_{00}{}^{\alpha} / \partial x^{\alpha}$, (по $\alpha = 1,2,3$ здійснюється підсумовування), причому $\Gamma_{00}{}^{\alpha} \approx -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$, звідки $R_{00} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha 2}} = \frac{1}{c^2}\Delta\varphi$ (Δ – звичайний тривимірний оператор Лапласа у плоскому просторі). Отже, рівняння Ейнштейна мають вигляд

$$\Delta\varphi = \frac{\kappa\rho c^4}{2} \cdot \tag{8}$$

Це і є рівняння гравітаційного поля в нерелятивіській механіці, яке має форму рівняння Пуассона і для якого загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa c^4}{8\pi}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')dV}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -\frac{\kappa c^4}{8\pi}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')dV}{R}. \tag{11}$$

Тут $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$- відстань від точки $\vec{r}$, в якій визначається потенціал φ, до гравітуючої маси в точці $\vec{r}\,'$. Ця формула визначає потенціал гравітаційного поля будь-якого розподілу мас. Зокрема, для потенціалу однієї частинки з масою m' маємо:

$$\varphi = -\frac{\kappa c^4}{8\pi} \cdot \frac{m'}{R} \tag{12}$$

і, отже, сила, яка діє в цьому полі на іншу частинку маси m, дорівнює

$$F = -m\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -\frac{\kappa c^4}{8\pi}\frac{mm'}{R^2} = -G\frac{mm'}{R^2}. \qquad (13)$$

Це відомий закон всесвітнього тяжіння Ньютона. З (13) можна знайти значення гравітаційної сталої Ейнштейна за гравітаційною сталою Ньютона:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2,07\cdot 10^{-47}\frac{c^2}{г\cdot см} \qquad \left(G = 6,67\cdot 10^{-8}\frac{см^3}{г\cdot c^2}\right).$$

§77. Розв'язок Шварцшильда

Одним із перших розв'язків рівнянь гравітаційного поля Ейнштейна став розв'язок, отриманий К.Шварцшильдом у 1916 р. для одного нерухомого тіла сферичної структури. Оскільки створене таким тілом гравітаційне поле повинно мати сферичну симетрію, то для запису розв'язку Шварцшильда зручними є сферичні координати r, θ, φ і час t. В них метрика Шваршильда зовні цього тіла має вигляд:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \qquad (1)$$

де $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ називається гравітаційним радіусом тіла (для Землі r_g = 0,886 см, для Сонця r_g=2,96 км). При $r \to \infty$ метрика Шварцшильда асимптотично переходить в метрику Мінковського:

$$ds_\infty^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad (2)$$

якщо від сферичних координат перейти до декартових з допомогою стандартних перетворень: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Отже, світ стає плоским на великих відстанях від початку координат. Але на скінчених відстанях простір уже не плоский, особливо при $r \sim r_g$.

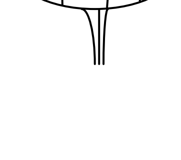
Що являє собою координата r? Величина r не є метричною відстанню: якби r визначала метричну відстань, то е виразі для ds^2 другий член дорівнював би dr^2. Але квадрат довжини в (1) дорівнює:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \qquad (3)$$

звідки метрична відстань при $\theta = const$ і $\varphi = const$ між двома сферами:

$$l_{12} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{1 - r_g/r}} > r_2 - r_1 \qquad , \qquad (4)$$

а довжина кола з центром в центрі поля дорівнює $2\pi r$. Отже, довжини кіл, проведених біля початку координат, збільшуються при збільшенні радіуса повільніше, ніж у плоскому евклідовому просторі (див. мал.). Далі ми бачимо, що $g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} \le 1$. В зв'язку

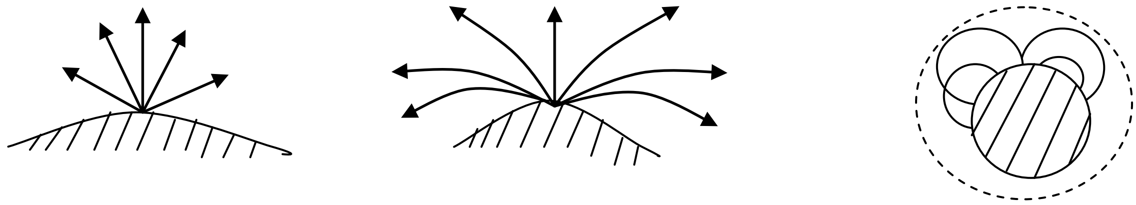


з формулою (73.1), $d\tau = \sqrt{g_{00}}dt$, яка визначає справжній час, звідки випливає, що
$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}dt \le dt. \qquad (5)$$
Знак «=» в (5) має місце на ∞, де час t співпадає з істинним, власним часом τ. Таким чином, відбувається «сповільнення» часу порівняно з часом на ∞.

Звернемо увагу на поведінку метрики при $r < r_g$, коли компонента g_{00} стає від'ємною, а g_{rr} додатною. Оскільки часу відповідає додатна компонента g_{ik}, то це означає, що в області $r < r_g$ роль часу починає грати координата r, а роль радіуса - t. Отже, в цій області гравітаційне поле суттєво залежить від часу (r), залишаючись незалежним від t. Границя $r = r_g$ виявляється особливою, тому що $g_{00} = 0$, а $|g_{rr}| = \infty$. Другою особливою точкою є $r = 0$, але це не дивно для точкового джерела гравітаційного поля. Такі особливості метрики називають сингулярностями.

Проаналізуємо сингулярність на сфері з $r = r_g$(ця сфера називається шварцшильдовою). В середині сфери лінія $r = const$ відповідає надсвітловому руху, тому що при $r < r_g$ $ds^2 < 0$. Зовні цієї сфери лінія $r = const$ часоподібна ($ds^2 > 0$ при $r > r_g$). Отже, при $r = r_g$ лінія ізотропна ($ds^2 = 0$) – точка, що знаходиться на сфері Шварцшильда при $d\theta = d\varphi = 0$, має швидкість світла. Те, що при $r < r_g$ рух виявляється надсвітловим, означає, що вибрана СВ не охоплює весь Простір-Час, а тільки область зовні сфери Шварцшильда. Проте особливість $r = r_g$ виявляється фіктивною, викликаною невдалим вибором СВ, яка відповідає спостерігачу, що нерухомо знаходиться на певній відстані від сфери Шварцшильда. В інших система відліку метрика стає регулярною, тому що на сфері Шварцшильда компоненти тензора Річчі і тензора кривизни регулярні. Наприклад, якщо перейти до іншої СК за допомогою заміни радіальної координати: $r = \left(1 - \frac{r_g}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r}$, отримаємо метрику Шварцшильда у вигляді:
$$ds^2 = \frac{\left(1 - r_g/4\bar{r}\right)^2}{\left(1 + r_g/4\bar{r}\right)^2}c^2dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\bar{r}}\right)^4 \cdot \left(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$
яка має особливість тільки при $\bar{r} = 0$.

Який фізичний зміст сфери Шварцшильда? Щоб вияснити це, розглянемо спостерігача, що знаходиться на поверхні масивної зірки, у якої вигоріло ядерне пальне і під дією гравітаційних сил вона починає стискуватись, зменшуючись в розмірі. Цей процес називається колапсом. Картина поширення світлових променів, які посилає в усі сторони спостерігач, має різний вигляд на різних стадіях колапсу (R - радіус зірки):



а) $R \gg r_g$ - початок колапсу; гравітаційне поле слабке;

б) $R > r_g$ - гравітаційне поле сильнішає, світлові промені викривлені;

в) $R < r_g$ - пізня стадія колапсу;

Із збільшенням кривизни Простору - Часу по мірі розвитку колапсу зірки все менше променів виривається назовні, і нарешті, на критичній стадії, коли радіус поверхні зірки виявляється $R < r_g$, жоден промінь не в смозі покинути зірку. Тоді кажуть, що зірка пройшла свій горизонт подій. Ніщо, що опинилось за горизонтом подій, не зможе вийти назовні, навіть світло. Таку зірку, що сколапсувала за горизонт подій, називають чорною дірою. В момент, коли колапсуюча зірка піде за горизонт подій, її розміри ще досить великі, але ніякі фізичні сили вже не зможуть зупинити її подальше стискування. Тому зірка продовжуватиме стискатись, поки, нарешті, не припинить свого існування в центрі чорної діри. В цій точці мають місце нескінчений тиск, нескінчена густина і нескінчена кривизна Простору - Часу. Це місце і являє собою реальну, фізичну сингулярність метрики Шварцшильда.

Оскільки радіус Землі, Сонця та більшості тіл значно перевищує їхній гравітаційний радіус, то сфера Шварцшильда знаходиться глибоко всередині цих тіл. Отже, задовго до того, коли досягається особлива область, ми зустрічаємся з речовиною, де розв'язок Шварцшильда стає непридатним, тому що $T_{ik} \neq 0$. Зате його можна використовувати до пустого простору, оточуючого статичну сферично-симетричну систему.

§78. Перебіг часу в полі чорної діри. Гравітаційне червоне зміщення

Нехай статичний спостерігач знаходиться в гравітаційному полі чорної діри в точці з фіксованими координатами $r, \theta, \varphi = const$. Інтервал власного часу для такого спостерігача визначається виразом (76.1) з $dr = d\theta = d\varphi = 0$:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2, \text{ звідки } d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt, \qquad (1)$$

де t – координатний час ($r > r_g$). Цей вираз свідчить про гравітаційне сповільнення часу, тобто сповільнення годинників у гравітаційному полі порівняно з годинниками на нескінченності ($d\tau < dt = d\tau_\infty$). Рівняння (1) порушується при $r \leq r_g$, тобто під горизонтом подій.

Щоб виснити наслідки, до яких приводить гравітаційне сповільнення часу в полі чорної діри, розглянемо падіння на чорну діру деякого зонду з радіопередавачем, який періодично посилає сигнали спостерігачу. Спостерігач на нескінченості по мірі наближення зонду до чорної діри буде спостерігати запізнення сигналів, тому що $d\tau_\infty = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} > d\tau$, аж поки вони не припиняться зовсім, коли передавач не досягне горизонту подій (при $r = r_g \quad d\tau = \infty$). Що ж до передавача, то на ньому ніяких змін з плином часу не буде, він перетне горизонт подій і падатиме далі до центру чорної діри, до сингулярності.

Сповільнення часу в гравітаційному полі приводить також до зміщення частоти електромагнітного променя при його русі в радіальному напрямку. Цей висновок годиться для любого викривленого Простору-Часу. Дійсно, нехай в статичному гравітаційному полі у фіксованому положенні є джерело електромагнітних хвиль з частотою $\nu_{дж}$, яке визначається як обернена величина проміжку власного часу між двома послідовними проходженнями гребнів хвилі $d\tau_{дж}$:

$$\nu_{дж} = 1/d\tau_{дж} = c/\sqrt{g_{00}\left(r_{дж}\right)}dx^0_{дж}. \tag{2}$$

Вираз, аналогічний цьому, можна отримати і для приймача:

$$\nu_{пр} = 1/d\tau_{пр} = c/\sqrt{g_{00}\left(r_{пр}\right)}dx^0_{пр}. \tag{3}$$

Координатний час dx^0, що проходить між двома послідовними проходженнями гребнів хвилі, один і той же як для джерела, так і для приймача, тому що гравітаційне поле є статичним і від часу нічого не залежить. Отже, $dx^0_{дж} = dx^0_{пр}$, і тому

$$\nu_{пр}/\nu_{дж} = \sqrt{g_{00}\left(r_{дж}\right)}/\sqrt{g_{00}\left(r_{пр}\right)}. \tag{4}$$

Зокрема, для чорної діри, яка описується метрикою Шварцшильда,

$$\frac{\nu_{пр}}{\nu_{дж}} = \sqrt{\frac{1-r_g/r_{дж}}{1-r_g/r_{пр}}}. \tag{5}$$

Отже, при поширенні електромагнітної хвилі від чорної діри її частота зменшується ($\nu_{пр} < \nu_{дж}$, якщо $r_{пр} > r_{дж}$), а довжина хвилі відповідно збільшується. Наприклад, видиме світло збільшує довжину хвилі до червоних хвиль, через що даний ефект називається гравітаційним червоним зміщенням. Завдяки цьому явищу в ході колапсу зірки світло, яке випромінюють атоми на поверхні цієї зірки, зазнає все більшого червоного зміщення. Тому для спостерігача колапсуюча зірка стає одночасно все менш яскравою і більш червоною (випромінюючою довгі хвилі).

При падінні світла на чорну діру спостерігається зворотній ефект – «фіолетове зміщення». Падаюче світло накопичується біля горизонту подій, і якби спуститись під горизонт подій, то зустрінемо різкий спалах рентгенівських і γ-променів, який називається фіолетовим шаром.

На великих відстанях від гравітуючого тіла, коли гравітаційне поле слабке, $r >> r_g$, матимемо

$$\frac{\delta\nu}{\nu_{дж}} = \frac{\left|\nu_{дж} - \nu_{пр}\right|}{\nu_{дж}} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{r_g}{r_{дж}}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{r_g}{r_{пр}}\right) \approx \frac{r_g}{2}\left(\frac{1}{r_{пр}} - \frac{1}{r_{дж}}\right) = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_{пр}} - \frac{1}{r_{дж}}\right). \quad (6)$$

Ця формула була отримана А. Ейнштейном ще в 1907 р. і стала одним з перших ефектів, передбачених ЗТВ. Ефект червоного зміщення одразу зацікавив астрономів, які намагались знайти його в спектрах Сонця і зірок. Так, для Сонця гравітаційне зміщення очікується $\frac{\delta\nu}{\nu} \sim 2{,}12 \cdot 10^{-6}$. Проведені спостереження узгоджуються з результатами теорії, але на значення $\frac{\delta\nu}{\nu}$ накладається ефект Доплера. Біля поверхні Землі при поширенні електромагнітної хвилі з висоти h до поверхні відносна зміна частоти складає, згідно з (6), величину:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{GM_{\oplus}}{c^2}\left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{R_{\oplus} + h}\right) \approx \frac{GM_{\oplus}h}{c^2 R_{\oplus}^2} = \frac{gh}{c^2}. \quad (7)$$

Вказаний ефект для Землі дуже малий, оскільки $gh << c^2$, і тільки в 1960 р. Паунду і Ребкі вдалося з достатнього точністю ~1% підтвердити це співвідношення. Їх дослід полягав в тому, що з висоти h=22,6 м вниз направлялось γ випромінювання ядер, яке має дуже високу стабільність. Остання властивість була відкрита в 1958 р. Мессбауером і послужила основним засобом для вимірювання зміщеної частоти. Досліди Паунда і Ребки стали одним з експериментальних підтверджень ЗТВ.

Ефект сповільнення часу в гравітаційному полі експериментально був перевірений в експериментах американського вченого Шапіро (1971-1972 рр.). Він вимірював затримку Δt тривалості руху імпульсу електромагнітної хвилі від джерела до спостерігача. Для цього радіолокатор посилав сигнал до Венери і Меркурія, коли вони були майже за диском Сонця, і далі з допомогою атомних годинників спостерігалась затримка сигналу, що проходив біля поверхні Сонця. Обробка отриманих результатів продемонструвала хороше співпадання (~5-10%) отриманого ефекту з передбаченим в ЗТВ.

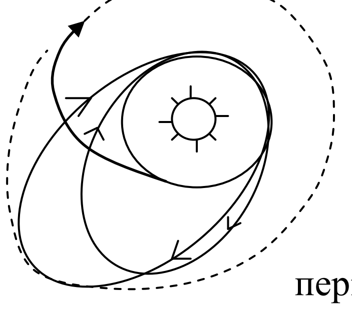
Перевірялось також сповільнення ходу годинника в рухомому літаку в порівнянні з годинником на Землі. В різних експериментах воно складало 10 ÷ 100 мкс і узгоджувалось до 1% з розрахунковим (ефекти СТВ враховувались). Більш точне узгодження (10^{-2} %) дали експерименти Р.Вессота і М. Левіна в 1976 р. з годинником (водневий лазерний стандарт частоти), поміщеним на ракету, яка пролітала по траєкторії з висотою підйому 10^4 км над поверхнею Землі.

§79. Рух перигелію планет

Закономірності руху планет чудово пояснюються теорію тяжіння Ньютона, і це пояснення знаменувало собою тріумф класичної механіки. Найвищим досягненням механіки Ньютона стало передбачення Дж.Адамсом (Англія) і Ю.Левер'є (Франція) в 1840 р. планети Нептун, положення якої було визначено по збуренням руху планети Уран. Цей факт не має прямого відношення до ЗТВ, але наштовхнув астрономів на думку, що будь-які відхилення від класичних законів руху планет пов'язані з ще не спостереженими планетами. Так астрономи поступили з Меркурієм, коли в середині XIX століття з'явились дані про неправильності в його русі. Регулярно спостерігаючи проходження Меркурія по диску Сонця, астрономи змогли дуже точно визначити елементи його орбіти, але, прослідивши його рух за тривалі строки, виявили, що він відхиляється від передбачуваного теорією Ньютона.

Із законів Кеплера, які є наслідком класичної механіки Ньютона з її законом всесвітнього тяжіння, випливає, що орбіта планети в Сонячній системі була б замкнутим еліпсом, якби в ній була всього 1 планета. Але планет багато, деякі з них мають значну масу. Взаємне притягання планет примушує планети рухатись навколо Сонця не по ідеальним еліпсам, а по близьким до еліпсів, але незамкнутим орбітам. Такі збурені орбіти схожі на еліпси, які постійно повертаються в своїй площині, так що, наприклад, перигелій Меркурія - найближча до Сонця точка його орбіти – зміщується під дією збурень з боку всіх планет приблизно на 575″ (секунд дуги) за 100 років. Крім того, є ще кінематичний рух перигелію, пов'язаний з обертанням нашого базису, який добавляє до вказаного вище для Меркурія ще 5026″ за сторіччя. Це все – наслідки теорії Ньютона, яку в позаминулому сторіччі використовували в небесній механіці. Але вже тоді відкрили, що до 575″ + 5026″ = 5601″, на які перигелій Меркурія випереджує рух цієї планети по кеплеревій орбіті за 100 років, фактично добавляється ще біля 40″. При цьому ніякі припущення – ні про проходження гіпотетичної планети, ні спроби видозмінити закон всесвітнього тяжіння Ньютона - не змогли пояснити виявлену добавку. Тільки ЗТВ розв'язала дану проблему.

Вже в процесі створення ЗТВ А.Ейнштейн показав, що орбіти планет не можуть бути замкнутими; вони схожі на еліпси, що весь час обертаються в своїй площині: їх великі піввісі обертаються зі сталою швидкістю. Якщо розглянути рівняння геодезичної в полі зірки (поле Шварцшильда), то легко зайти закони збереження енергії і моменту імпульсу і показати, що рух відбувається в постійній площині. Комбінуючи перші інтеграли і вираз Шварцшильда для інтервалу, можна прийти до рівняння 1-го порядку для радіальної координати r як функції кута φ. Наближене розв'язання цього рівняння дає рівняння орбіти:



$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\lambda\varphi, \quad p = a\left(1 - e^2\right), \tag{1}$$

де a - велика піввісь орбіти, e - її ексцентриситет, а

$$\lambda = 1 - \frac{3GM}{c^2 a\left(1 - e^2\right)}. \tag{2}$$

Періодичність функції $r(\varphi)$ визначається періодичністю косинуса в (1), тобто дорівнює $\frac{2\pi}{\lambda}$. Тому від однієї характерної точки орбіти до другої такої ж точки (наприклад, від одного перигелію до наступного) кут φ змінюється більше ніж на 2π - положення перигелію зміщується по орбіті за один оберт на кут

$$\delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} - 2\pi \cong \frac{6\pi GM}{c^2 a\left(1-e^2\right)}. \tag{3}$$

Якщо врахувати масу Сонця ($M = 1{,}99 \cdot 10^{33} г$), величину великої піввісі орбіти Меркурія ($a = 57{,}91 \cdot 10^{11} см$) і ексцентриситет орбіти ($e = 0{,}21$), а також період обертання Меркурія навколо Сонця (87,97 доби), то звідси легко обчислити кут, на який перигелій Меркурія повертається за одне (земне) сторіччя: $43{,}03''$. Спостереження з поверхні Землі дають (після віднімання кінематичних і динамічних – з боку інших планет - збурень) величину $42{,}9'' \pm 0{,}2''$ в чудовому узгоджені з передбаченням ЗТВ.

Звичайно, ефект руху перигелію планет такого ж походження існує і для інших планет, але для них він слабкіший, тому що вони значно далі від Сонця, ніж Меркурій, рухаються повільніше і мають менший ексцентриситет (їх орбіти ближчі до кола). Для Венери $e = 0{,}0068, \delta\varphi_{100} = 8{,}63''$; для Землі $e = 0{,}0167; \delta\varphi_{100} = 3{,}8''$.

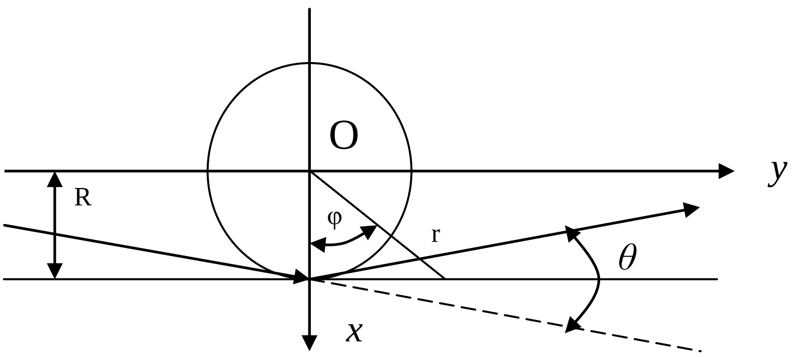
§80. Відхилення променів світла гравітаційним полем

Траєкторія променя світла при його походженні поблизу масивних тіл повинна викривлятись, відхилятись від початкового напрямку внаслідок дії на світло гравітаційного поля тіла. Цей ефект в ЗТВ можна розрахувати, розв’язуючи рівняння геодезичної для світла, але тепер на відміну від руху планети геодезична буде ізотропною, тобто, для неї $ds = 0$.

Розглянемо поширення світла в сферично-симетричному гравітаційному полі деякого небесного тіла, наприклад, зірки, яке описується метрикою Шварцшильда. Рівняння для траєкторії світлових променів у сферичних координатах має вигляд:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3r_g}{2u^2}, \text{ де } \quad u = \frac{1}{r}. \tag{1}$$

При відсутності поля було б: $r_g = 0$ $\left(r_g = \dfrac{2GM}{c^2}\right)$, і з (1) ми отримали б $\dfrac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 = 0$, розв’язком якого є пряма лінія:



$$u_0 = \frac{\cos\varphi}{R} = \frac{1}{r}, \quad r\cos\varphi = R \quad \left(x = R\right) \tag{2}$$

яка проходить на відстані R від центру притягуючого тіла (див. мал.). Підставивши знову (2) в (1), отримаємо наступне наближення:

$$r\cos\varphi = R - \frac{r_g}{2R}\left(r\cos^2\varphi + 2r\sin^2\varphi\right). \qquad (3)$$

Переходячи до декартових координат, що можливо в просторі, близькому до евклідового (гравітаційне поле слабке), ми можемо останній вираз представити у вигляді:

$$x = R - \frac{r_g}{2R}\cdot\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (4)$$

Для великих значень y це дає

$$x = R - \frac{r_g}{R}(\pm y) \approx \pm\frac{r_g}{R}y, \ (R \ll y), \qquad (5)$$

де верхній знак відповідає додатнім y, нижній – від'ємним. Звідси $tg\frac{\theta}{2} = \frac{x}{y} = \frac{r_g}{R} \ll 1$, а отже, кут між асимптотичними напрямками променів дорівнює

$$\theta = {}^{2r_g}\!/_{R} = {}^{4GM}\!/_{Rc^2}. \qquad (6)$$

Якщо взяти масу Сонця ($M_c = 1{,}99\cdot 10^{33}\,г$) і його радіус в якості відстані найбільшого наближення променя ($R = R_c = 7\cdot 10^{10}\,см$), то отримаємо, що промені, які дотикаються до сонячного диску, повинні відхилитись, за формулою (6), на кут 1,75" (для Юпітера цей кут дорівнює 0,02"). Результати спостережень положень зірок під час сонячних затемнень добре узгоджуються з теорією, хоч відхилення інколи досягали 30-40 %, що пояснюється тим, що час спостереження повного сонячного затемнення припадає на денний період, коли атмосфера неспокійна, в ній відбувається рух повітря, викликаний його нагріванням променями Сонця. Це сильно спотворює зображення зірки, чому й результати мають неточність.

Слід сказати, що теорія Ньютона теж передбачає відхилення променів світла гравітаційним полем, але вона дає вдвічі менший кут (німецький астроном Зольднер, 1800 р.). Але сукупність всіх експериментів говорить на користь ЗТВ як в якісному, так і в кількісному відношеннях.

§81. Явище гравітаційної лінзи

Порівняємо фотографії однієї і тієї ж ділянки зоряного неба – один раз, коли в центрі неба знаходиться Сонце, і вдруге – коли Сонце знаходиться на протилежній стороні небосхилу. Якщо покласти обидва знімки один на другий, то виявиться, що Сонце ніби «розсунуло» зображення. Інакше кажучи, гравітаційне поле Сонця подіяло як лінза, «збільшивши» зображення зоряного неба. З відстанню поле Сонця стає слабшим, і «коефіцієнт збільшення» стає тим менше, чим далі від диску Сонця видно зірки. Таким чином, зосереджена маса утворює навколо себе гравітаційну лінзу, яка, проте, на відміну від звичайних оптичних пристроїв, не дає чіткого зображення, оскільки її фокусна відстань змінюється з відстанню від променя до центра.

Явище гравітаційної лінзи впливає також на зовнішній вигляд сферичних тіл, наприклад, Сонця. Внаслідок гравітаційного викривлення променів масивний світний об’єкт повинен здаватись більш крупним, ніж він є насправді. До того ж, гравітаційне відхилення променів світла придає їм тенденцію «зазирнути» за зворотну сторону тіла.

Якщо розглядати джерело світла, яке знаходиться досить далеко позаду великої і компактної маси, ми, якщо також віддалимось від неї на досить велику відстань, побачимо світло цього джерела в вигляді більш-менш яскравого кружечка, в центрі якого буде знаходитись маса, що утворює гравітаційну лінзу. Чим далі ми будемо відходити від цієї маси, тим більшим буде радіус кружка. Але картина буде такою, якщо тільки і джерело, і маса гравітаційної лінзи, і сам спостерігач перебувають на одній прямій. У протилежному випадку спостерігач побачить лише окремі зображення джерела світла, що вистрояться по прямій лінії.

Скільки ж буде таких зображень? Якщо центральне масивне тіло непрозоре для променів світла і має радіус $R > r_g$, то ясно, що може бути не більше двох зображень – одне повинно здаватись більш віддаленим від центральної маси, ніж друге. Якщо ж центральна маса при вказаних розмірах досить прозора для світла, з’явиться можливість для ще одного (або декількох) зображень, які будуть відповідати світлу, яке проходить через гравітуюче середовище. Цей випадок може реалізуватись, коли гравітаційна лінза утворена галактикою.

У 70-х роках минулого століття астрономи вперше виявили 3-х кандидатів в гравітаційні лінзи. В них джерелами світла були квазари – дуже далекі від нас квазізоряні об’єкти масою біля 10^{13} мас Сонця. Гравітаційну лінзу утворюють галактики. Так от, астрономи в сузір’ї Великої Ведмедиці виявили поруч 2 квазари, у яких одночасно були однакові спектри і значення космологічного червоного зміщення $\Delta\nu/\nu$. Це не може бути випадково, і мова повинна бути або про унікальні квазари – «двійнята», що мають спільне походження, або це просто зображення одного й того ж об’єкта, який розглядається через гравітаційну лінзу. Таке ж явище незабаром було відкрите і в іншому місці неба – на цей раз це був вже потрійний квазар.

Зараз не можна категорично стверджувати, що ефект гравітаційної лінзи дійсно спостерігався, але ймовірність цього надзвичайно велика. Остаточно підтвердити достовірність факту, може, наприклад, копіювання зображеннями квазара поведінки один одного. Справа в тому, що квазари нерідко змінюють свою яскравість. Тоді всі зображення повинні однаково «підморгувати» - з тією лише різницею, що це повинно відбуватись з зсувом по часу, оскільки по різним шляхам світло від джерела доходить до нас за суттєво різні терміни.

ПИТАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Модуль 1. Основи класичної механіки

1. Що називають теоретичною фізикою?
2. Перерахуйте задачі, які розв’язує теоретична фізика.
3. Які етапи традиційно проходить у своєму розвитку фізична теорія?
4. Дайте визначення Простору-Часу.
5. В чому особливість ньютонівських уявлень про Простір і Час?
6. Які погляди на Простір і Час у філософії Лейбніца?
7. Які властивості Простору і Часу виявила спеціальна теорія відносності?
8. Яку ідею про Простір і Час висунув Г. Мінковський?
9. Які властивості Простору і Часу виявила загальна теорія відносності?
10. Перерахуйте топологічні властивості Простору-Часу.
11. Що розуміють під метричними властивостями?
12. Що називають системою відліку?
13. Що називають механікою?
14. Які властивості простору і часу припускаються в класичній механіці?
15. Що розуміють під ізотропністю простору?
16. Що розуміють під однорідністю простору?
17. Що розуміють під однорідністю часу?
18. Дайте визначення механічного руху.
19. Приведіть формулу для швидкості у векторному описі руху.
20. Приведіть формулу для прискорення у векторному описі руху.
21. Приведіть формулу для швидкості в координатному описі руху.
22. Приведіть формулу для прискорення в координатному описі руху.
23. Приведіть формулу для швидкості при природному описі руху.
24. Приведіть формулу для прискорення при природному описі руху.
25. Сформулюйте 1-й закон Ньютона.
26. Запишіть визначення імпульсу.
27. Сформулюйте 2-й закон Ньютона.
28. Сформулюйте 3-й закон Ньютона.
29. Запишіть основне рівняння динаміки.
30. Дайте визначення в’язів.
31. Приведіть рівняння Лагранжа 1-го роду
32. Що називають числом ступенів вільності?
33. Що називають узагальненими координатами і швидкостями?
34. Сформулюйте принцип найменшої дії.
35. Запишіть рівняння Лагранжа 2-го роду
36. Які сили називають потенціальними?
37. Чому, в загальному випадку, дорівнює функція Лагранжа?
38. Приведіть формулу-визначення узагальненого імпульсу.
39. Приведіть формулу-визначення узагальненої сили.
40. Приведіть загальні властивості функції Лагранжа.

41. Сформулюйте принцип відносності Галілея.
42. Запишіть формули перетворень Галілея.
43. Дайте визначення інваріантності законів і рівнянь механіки.
44. Дайте визначення коваріантності законів і рівнянь механіки.
45. Що називають інтегралами руху?
46. Які інтеграли руху називають адитивними?
47. Сформулюйте теорему Е.Ньотер.
48. Сформулюйте теорему А.Пуанкаре.
49. Який зв'язок між симетріями простору-часу та законами збереження?
50. З якою властивістю часу пов’язане збереження енергії?
51. Запишіть загальний вираз для повної механічної енергії у лагранжевому формалізмі.
52. З якою властивістю простору пов’язане збереження імпульсу?
53. Сформулюйте закон збереження імпульсу.
54. З якою властивістю простору пов’язане збереження моменту імпульсу?
55. Як визначається вектор повороту?
56. Запишіть формулу-визначення моменту імпульсу.
57. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
58. Які сили називають центральними?
59. Чому в центральному полі зберігається момент імпульсу?
60. Дайте визначення Функції Гамільтона.
61. Запишіть рівняння Гамільтона.
62. Приведіть вигляд рівнянь Гамільтона для частинки у потенціальному полі.
63. Які координати називають циклічними?
64. Що можна сказати про імпульси, які відповідають циклічним координатам?
65. Дайте визначення дужок Пуассона.
66. Запишіть в термінах дужок Пуассона умову того, що певна функція є інтегралом руху.
67. Які властивості мають дужки Пуассона?
68. Запишіть загальне рівняння Гамільтона-Якобі.
69. Запишіть рівняння Гамільтона-Якобі для укороченої дії.
70. Запишіть рівняння Гамільтона-Якобі для частинки в нестаціонарному потенціальному полі

Модуль 2. Застосування класичної механіки

1. Запишіть формулу, яка визначає середнє функції по часу.
2. Яку величину називають віріалом системи?
3. Сформулюйте теорему про віріал.
4. За яких умов виконується теорема про віріал?
5. Які функції називають однорідним функціями зі ступенем однорідності *k*?

6. Приведіть формулу, що складає суть теореми Ейлера для однорідних функцій.
7. Запишіть теорему про віріал для малих коливань.
8. Запишіть теорему про віріал для гравітаційних сил.
9. Запишіть рівняння Мещерського і поясніть його.
10. Запишіть рівняння Ціолковського і поясніть його.
11. Що розуміють під одновимірним рухом?
12. Запишіть функцію Лагранжа для частинки при одновимірному русі.
13. Запишіть рівняння руху частинки при одновимірному русі.
14. Яка умова визначає межі руху частинки при одновимірному русі?
15. Які точки простору називають точками зупинки?
16. Який одновимірний рух називають фінітним?
17. Який одновимірний рух називають інфінітним?
18. Чому одновимірний фінітний рух є коливальним?
19. Якою формулою визначається період коливань одновимірного фінітного руху?
20. Приведіть формулу, яка зв'язує імпульси системи частинок в різних ІСВ.
21. Яка формула визначає швидкість ІСВ, в якій повний імпульс системи частинок дорівнює 0?
22. Що розуміють під фразою: „механічна система покоїться відносно деякої ІСВ"?
23. Запишіть формулу для радіус-вектора центра інерції системи.
24. Запишіть функцію Лагранжа системи двох частинок.
25. Який вигляд приймає функція Лагранжа системи двох тіл при переході початку відліку ІСВ до центру інерції і використанні вектора відносної відстані?
26. Що називають зведеною масою системи двох тіл?
27. Які властивості сили, що діє на частинку у центральному полі?
28. Який висновок випливає зі сталості моменту імпульсу частинки в центральному полі?
29. Що називають секторіальною швидкістю частинки?
30. Який зв'язок між секторіальною швидкістю та моментом імпульсу частинки?
31. Сформулюйте 2-й закон Кеплера.
32. Запишіть вираз для енергії частинки в центральному полі в полярних координатах.
33. Запишіть рівняння траєкторії частинки в центральному полі.
34. Яка умова визначає межі області руху частинки в центральному полі по відстані від центру?
35. Яку величину називають відцентровою енергією?
36. Яка умова замкнутості траєкторії частинки в центральному полі?
37. Для яких полів виконується умова замкнутості траєкторії?
38. Приведіть другу формулу Біне.

39. Запишіть рівняння траєкторії в ньютонівському полі всесвітнього тяжіння.
40. При якій умові траєкторія частинки в ньютонівському полі всесвітнього тяжіння є еліпсом?
41. При якій умові траєкторія частинки в ньютонівському полі всесвітнього тяжіння є колом?
42. При якій умові траєкторія частинки в ньютонівському полі всесвітнього тяжіння є параболою?
43. При якій умові траєкторія частинки в ньютонівському полі всесвітнього тяжіння є гіперболою?
44. Сформулюйте 1-й закон Кеплера.
45. Сформулюйте 3-й закон Кеплера.
46. Що розуміють під розсіянням частинок?
47. Покажіть на малюнку кут розсіяння частинки.
48. Що називають прицільною відстанню при розсіянні частинки?
49. Приведіть розрахункові формули, що визначають кут розсіяння.
50. Приведіть формулу для кута розсіяння через енергію частинки та прицільну відстань.
51. Дайте визначення ефективного перерізу розсіяння.
52. Приведіть розрахункову формулу для ефективного перерізу розсіяння для однорідного пучка.
53. Приведіть формулу для ефективного перерізу розсіяння в елемент тілесного кута.
54. Запишіть формулу Резерфорда для перерізу розсіяння α-частинки.
55. Які системи відліку можна віднести до неінерціальних?
56. Запишіть рівняння руху частинки в неінерціальній СВ.
57. Запишіть вираз для сили інерції при прискореному поступальному русі СВ.
58. Запишіть вираз для відцентрової сили інерції.
59. Запишіть вираз для сили Коріоліса.
60. Запишіть умову стійкої рівноваги для системи з одним ступенем вільності.
61. Запишіть вид потенціальної енергії системи з одним ступенем вільності поблизу положення стійкої рівноваги.
62. Запишіть вид функції Лагранжа системи з одним ступенем вільності поблизу положення стійкої рівноваги.
63. Запишіть рівняння руху системи з одним ступенем вільності поблизу положення стійкої рівноваги
64. Запишіть зв'язок циклічної частоти власних коливань з параметрами системи.
65. Запишіть закон руху у випадку вільних коливань без тертя
66. Що називають амплітудою коливань?
67. Що називають фазою коливань?
68. Що називають періодом коливань?
69. Який зв'язок між періодом і циклічною частотою?

70. Як представляють закон коливальної системи у комплексному вигляді?

71. Що розуміють під дисипацією енергії?

72. Запишіть рівняння руху коливальної системи при наявності тертя.

73. Запишіть закон руху у випадку вільних затухаючих коливань.

74. Як впливає тертя на період вільних коливань?

75. Що являє собою рух у випадку аперіодичного затухання?

76. Яка умова аперіодичного затухання?

77. Що розуміють під вимушеними коливаннями?

78. Запишіть рівняння руху коливальної дисипативної системи, на яку діє зовнішня періодична сила.

79. Як шукається розв’язок рівнянь руху коливальної системи, на яку діє зовнішня періодична сила?

80. Запишіть закон руху коливальної системи, на яку діє зовнішня періодична сила.

81. Що відбувається з рухом коливальної системи, на яку діє зовнішня періодична сила, з часом?

82. Що відбувається з рухом коливальної системи, на яку діє зовнішня періодична сила, при наближення частоти сили до власної частоти коливань?

83. Яке явище називають резонансом?

84. Сформулюйте умову резонансу.

85. Що розуміють під ангармонічними коливаннями?

86. Як представляють функцію Лагранжа у випадку ангармонічних коливань?

87. Запишіть рівняння руху ангармонічних коливань.

88. Яка залежність від часу 1-ї поправки до закону вільних коливань у випадку ангармонічності?

89. Якою є поправка до основної частоти у випадку ангармонічних коливань?

90. Що називають параметричною коливальною системою?

91. На що йде енергія зовнішньої сили в параметричних коливаннях?

92. Що називають параметричним резонансом?

93. Які умови виникнення параметричного резонансу?

94. Запишіть рівняння руху вимушених ангармонічних коливань.

95. Запишіть формулу, що визначає залежність амплітуди від частоти поблизу резонансу в нелінійній системі.

96. Як відбувається зрив амплітуди коливань при вимушених ангармонічних коливаннях?

97. Яка умова визначає частоти, при яких відбувається зрив амплітуди вимушених ангармонічних коливань?

98. Запишіть функцію Лагранжа системи з багатьма ступенями вільності біля положення рівноваги.

99. Запишіть рівняння руху системи з багатьма ступенями вільності біля положення рівноваги.

100. Що являє собою закон руху коливальної системи з s ступенями вільності?

Модуль 3. Механіка суцільних середовищ

1. Як визначається тверде тіло у механіці?
2. Чому тверде тіло розглядається як система з 6 ступенями вільності?
3. Чому дорівнює швидкість точки твердого тіла?
4. Що називають миттєвою віссю обертання твердого тіла?
5. Чому дорівнює кінетична енергія твердого тіла?
6. Як представляється кінетична енергія обертального руху через тензор інерції?
7. Запишіть визначення тензора інерції.
8. Що розуміють під головними моментами інерції?
9. Яке тверде тіло називають симетричною дзигою?
10. Яке тіло називають кульовою дзигою?
11. Сформулюйте теорему Штейнера.
12. Приведіть вираз для моменту імпульсу твердого тіла в тензорних позначеннях.
13. Який зв'язок моменту імпульсу з кутовою швидкість при використанні головних вісей інерції?
14. Приведіть вирах для моменту імпульсу кульової дзиги.
15. В яких випадках вектор моменту імпульсу співпадає по напрямку з вектором кутової швидкості?
16. Що являє собою вільне обертання кульової дзиги?
17. Яке явище називають регулярною прецесією?
18. Як можна представити вільне обертання симетричної дзиги?
19. Чому дорівнює кутова швидкість обертання симетричної дзиги навколо вісі симетрії?
20. Чому дорівнює кутова швидкість прецесії симетричної дзиги?
21. Запишіть рівняння поступального руху твердого тіла.
22. Чому в рівнянні поступального руху твердого тіла достатньо враховувати лише зовнішні сили?
23. Запишіть рівняння обертального руху твердого тіла.
24. Чому в повному моменті сил, прикладених до тіла, достатньо враховувати лише зовнішні сили?
25. Що називають кутовим прискоренням?
26. Як представляється рівняння обертального руху з використанням кутового прискорення?
27. Як змінюється повний момент сил при переході до іншого початку системи координат?
28. В якому випадку повний момент сил не залежить від вибору початку координат?
29. Що Називають парою сил?
30. Сформулюйте умови рівноваги твердого тіла.

31. Які сили діють між тілами, що дотикаються, при їх відносному русі?
32. Який напрямок мають сили тертя при ковзанні?
33. Яка природа сил тертя при коченні?
34. Які поверхні тіл називають абсолютно гладкими?
35. Які поверхні тіл називають абсолютно шорсткими?
36. Який вигляд мають рівняння в’язів при коченні?
37. В чому суть принципу Даламбера?
38. Що вивчає гідродинаміка?
39. Що означає розгляд рідини в гідродинаміці як суцільного середовища?
40. Які величини описують рухому рідину в гідродинаміці?
41. Приведіть рівняння, яке виражає закон збереження речовини в диференціальній формі.
42. Запишіть закон збереження речовини для труб змінного перерізу.
43. Запишіть рівняння Ейлера.
44. Яку рідину називають ідеальною?
45. Чому рух ідеальної рідини є адіабатичним?
46. Який рух рідини називають стаціонарним?
47. Дайте визначення ліній потоку.
48. Запишіть диференційні рівняння ліній потоку рідини.
49. Запишіть рівняння Бернуллі.
50. Запишіть рівняння руху ідеальної рідини в тензорних позначеннях.
51. Приведіть визначення тензору потоку імпульсу ідеальної рідини.
52. Який фізичний зміст мають компоненти тензора потоку імпульсу?
53. Запишіть вигляд тензора потоку імпульсу в’язкої рідини.
54. Приведіть рівняння Нав’є-Стокса.
55. Які граничні умови використовують в гідродинаміці в’язких рідин?
56. Як визначається нормальне напруження?
57. Як визначається тангенціальне напруження?
58. Коли нормальні напруження вважають позитивними?
59. Як визначаються позитивні напрямки дотичних напружень?
60. Як визначаються відносні видовження в декартових координатах?
61. Як визначаються відносні зсуви у декартових координатах?
62. Що характеризує модуль пружності ?
63. Запишіть закон Гука для повздовжніх деформацій?
64. Яку величину називають модулем зсуву?
65. Запишіть закон Гука для деформації зсуву.
66. Який стан називають плоским напруженим?
67. Що розуміють під плоскою деформацією?
68. Які напрямки для напружень називають головними?

69. Приведіть диференціальні рівняння рівноваги.
70. Приведіть умову сумісності для деформацій.

Модуль 4. Релятивістська механіка

1. Сформулюйте 1-й постулат СТВ.
2. Сформулюйте 2-й постулат СТВ.
3. Чому 2-й постулат СТВ суперечить класичній механіці?
4. Запишіть формули перетворень Лоренца.
5. Що означають формули перетворень Лоренца?
6. Як з перетворень Лоренца отримати перетворення Галілея?
7. Як з перетворень Лоренца випливає неможливість надсвітлової швидкості?
8. Що розуміють під відносністю довжини відрізка в СТВ?
9. Запишіть формулу, яка зв'язує довжини відрізка в різних ІСВ.
10. Як об'єм тіла залежить від швидкості руху тіла відносно системи відліку?
11. Що розуміють під відносністю проміжка часу в СТВ?
12. Запишіть формулу, яка зв'язує проміжки часу в різних ІСВ.
13. Який час називають власним?
14. Приведіть формули перетворення компонентів швидкості при переході від однієї до іншої ІСВ.
15. Запишіть формулу релятивістського додавання швидкостей.
16. В чому суть аберації зірок?
17. Що в СТВ називають інтервалом між подіями?
18. За якої умови існує така ІСВ, в якій дві події відбуваються в одній і тій же точці простору?
19. За якої умови існує така ІСВ, в якій дві події відбуваються в один і той же час?
20. Які інтервали називають часоподібними?
21. Які інтервали називають просторовоподібними?
22. Який зв'язок власного часу і інтервалу між подіями?
23. Які ви знаєте релятивістські інваріанти?
24. Яка умова того, що дві події зв'язані причинно-наслідковими зв'язком?
25. Що розуміють під світовим конусом?
26. Що розуміють під світом Мінковського?
27. Що служить відстанню між подіями в 4-вимірному Просторі-Часі?
28. Поясніть значення сигнатури 4-вимірного Простору-Часу.
29. Дайте визначення 4-радіус-вектора.
30. Приведіть формули перетворень Лоренца в 4-вимірній трактовці.
31. Дайте визначення довільного 4-вимірного вектора.
32. В чому відмінність коваріантних і коваріантних компонентів 4-вектора?
33. Як визначається квадрат довжини 4-вектора?

34. Сформулюйте домовленість про підсумування.
35. Як визначається скалярний добуток двох 4-векторів?
36. Дайте визначення 4-тензора.
37. Сформулюйте правило, що встановлює зв'язок між коваріантними і контраваріантними компонентами тензора.
38. Як з геометричної точки зору інтерпретуються перетворення Лоренца в 4-вимірному Просторі-Часі?
39. Як інтерпретується в 4-вимірному Просторі-Часі поворот вісей координат на уявний кут?
40. Що розуміють під релятивістською інваріантністю?
41. Який вигляд повинні мати релятивістськи інваріантні вирази?
42. Приведіть визначення 4-швидкості.
43. Приведіть явний вигляд компонентів 4-швидкості.
44. Чому дорівнює квадрат довжини 4-швидкості?
45. Приведіть визначення 4-прискорення.
46. Приведіть вираз для функції Лагранжа вільної частинки в СТВ.
47. Приведіть вираз для інтеграла дії вільної частинки в СТВ.
48. Запишіть вираз для релятивістського вектора імпульсу.
49. Запишіть формулу Ейнштейна для енергії частинки в СТВ.
50. Запишіть вираз для енергії спокою.
51. Запишіть формулу Ейнштейна для кінетичної енергії в СТВ.
52. Приведіть формулу-визначення для 4-вектора імпульса.
53. Приведіть вираз для компонентів 4-імпульсу.
54. Приведіть вираз для квадрата довжини 4-імпульсу.
55. Приведіть співвідношення між енергією і імпульсом в СТВ.
56. Запишіть релятивістськи інваріантне рівняння динаміки.
57. Запишіть релятивістське узагальнення 2-го закону Ньютона.
58. Яку мету переслідував дослід Майкельсона?
59. Як СТВ пояснює негативний результат досліду Майкельсона?
60. Як СТВ пояснює завищений час життя елементарних частинок – продуктів космічних променів?
61. В чому суть релятивістського ефекту Доплера?
62. В чому суть явища дефекту мас атомних ядер?
63. Як СТВ пояснює дефект мас атомних ядер?
64. В яких пристроях враховується залежність маси частинок від швидкості?
65. В чому суть ефекту Комптона?
66. Чому закон всесвітнього тяжіння несумісний зі спеціальною теорією відносності?
67. В чому суть закону Галілея?
68. В чому суть принципу еквівалентності?
69. Який висновок випливає з принципу еквівалентності стосовно мас?
70. Сформулюйте принцип загальної коваріантності.

71. Як обґрунтувати зв'язок гравітаційного поля з геометрією простору-Часу?
72. Запишіть вираз для квадрата елемента інтервалу у викривленому Просторі-Часі.
73. Запишіть умову того, що простір є плоским.
74. Яка процедура вимірювання відстані між двома точками у викривленому просторі?
75. Що називають геодезичною лінією?
76. Запишіть рівняння геодезичних.
77. Який вигляд мають рівняння руху у викривленому Просторі-Часі?
78. Що, за А.Ейнштейном, є джерелом викривлення Простору-Часу?
79. Чому рівняння гравітаційного поля Ейнштейна є суттєво нелінійними?
80. Приведіть рівняння, якому задовольняє гравітаційний потенціал у теорії гравітації Ньютона.
81. Приведіть закон всесвітнього тяжіння Ньютона.
82. Для яких об’єктів був отриманий розв’язок рівнянь гравітаційного поля Шварцшильдом?
83. Що називають гравітаційним радіусом?
84. Які властивості має Простір-Час поблизу сфери Шварцшильда і на великій відстані від неї?
85. Як співвідноситься хід годинників поблизу сфери Шварцшильда і на великих відстанях від неї?
86. Яке явище називають гравітаційним колапсом?
87. Який об’єкт називають чорною дірою?
88. Що відбувається зі сколапсованою зіркою після проходження горизонту подій?
89. Що називають сингулярністю розв’язку Шварцшильда?
90. Що називають гравітаційним сповільненням часу у гравітаційному полі чорної діри?
91. Як співвідносяться частоти електромагнітних хвиль поблизу чорної діри і на відстані від неї?
92. Що розуміють під гравітаційним червоним зміщенням?
93. Чому дорівнює відносне зміщення частоти світла поблизу поверхні Землі?
94. Який дослід вперше підтвердив існування гравітаційного зміщення частоти?
95. В чому розбіжності передбачень теорії Ньютона і астрономічних спостережень для руху Меркурія?
96. Як загальна теорія відносності пояснила рух перигелію Меркурія?
97. Як в загальній теорії відносності визначається кут повороту орбіти планети за один оберт?

98. Приведіть малюнок для траєкторії світла поблизу масивного сферичного тіла.

99. Як гравітуюча речовина галактик впливає на вигляд зоряного неба за нею?

100. Що розуміють під гравітаційною лінзою?

ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ З КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

1. Предмет і методи теоретичної фізики
2. Сучасні наукові уявлення про простір і час (НСО)
3. Метризація простору і часу. Системи координат і відліку (НСО)
4. Основні положення класичної механіки
5. Поняття про в’язі. Рівняння Лагранжа I роду
6. Принцип найменшої дії. Рівняння Лагранжа II роду
7. Функція Лагранжа механічної системи та її властивості
8. Інваріантність і коваріантність законів механіки. Принцип відносності Галілея
9. Зв’язок законів збереження з властивостями простору і часу.
10. Закон збереження енергії
11. Закон збереження імпульсу
12. Збереження моменту імпульсу
13. Рівняння Гамільтона
14. Дужки Пуассона (НСО)
15. Рівняння Гамільтона-Якобі (НСО)
16. Одновимірний рух
17. Центр інерції
18. Задача двох тіл
19. Рух частинки в центральному полі
20. Формули Біне та закони Кеплера (НСО)
21. Розсіяння частинок
22. Формула Резерфорда
23. Рух тіла змінної маси
24. Теорема про віріал
25. Рух у неінерціальних системах відліку (НСО)
26. Вільні коливання системи без тертя
27. Затухаючі коливання
28. Вимушені коливання
29. Ангармонічні коливання (НСО)
30. Резонанс в нелінійних коливаннях (НСО)
31. Параметричний резонанс
32. Коливання системи з багатьма ступенями вільності (НСО)
33. Кінематика твердого тіла
34. Кінетична енергія твердого тіла. Тензор інерції
35. Момент імпульсу твердого тіла
36. Рівняння руху твердого тіла
37. Умови рівноваги твердих тіл. Дотик твердих тіл
38. Вступ у гідродинаміку. Рівняння неперервності
39. Рівняння Ейлера
40. Рівняння Бернуллі
41. Потік імпульсу у рідині (НСО)
42. Рівняння руху в’язкої рідини (НСО)

43. Вихідні припущення механіки деформівного твердого тіла
44. Напруження
45. Компоненти напружень
46. Тензор деформацій
47. Закон Гука
48. Плоский напружений стан і плоска деформація
49. Напруження в точці (НСО)
50. Диференціальні рівняння рівноваги
51. Граничні умови
52. Рівняння сумісності
53. Принцип Сен-Венана
54. Постулати СТВ
55. Перетворення Лоренца
56. Кінематичні наслідки перетворень Лоренца
57. Релятивістський закон додавання швидкостей
58. Інтервал та інші інваріанти СТВ
59. Причинність в СТВ (НСО)
60. Чотиривимірний просторово-часовий многовид
61. Чотиривимірні вектори і тензори
62. Геометрична інтерпретація перетворень Лоренца (НСО)
63. Релятивістська інваріантність
64. Чотиривимірні швидкість і прискорення
65. Принцип найменшої дії в СТВ
66. Енергія і імпульс у релятивістській механіці
67. Рівняння релятивістської динаміки (НСО)
68. Експериментальне обґрунтування СТВ (НСО)
69. Принцип еквівалентності
70. Принцип загальної коваріантності
71. Гравітаційне поле і геометрія Простору-Часу
72. Тензор кривизни
73. Час і відстані у гравітаційному полі
74. Рівняння руху в гравітаційному полі
75. Рівняння гравітаційного поля А.Ейнштейна
76. Закон гравітації Ньютона в ЗТВ
77. Розв’язок Шварцшильда
78. Перебіг часу в полі чорної діри. Гравітаційне червоне зміщення
79. Рух перигелію планет
80. Явище гравітаційної лінзи

Для нотаток

Навчальне видання

Класична механіка
курс лекцій

Дудик Михайло Володимирович
Діхтяренко Юлія Володимирівна

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
фізико-математичних спеціальностей

Видання здійснено в авторському редагуванні

Підписано до друку 15.01.2015. Формат 60×90 1/32
Папір офсет.
Обл.-вид. арк. 0,45. Ум. друк. арк. 0,4
Тираж 100. Зам. №2561.

Видавець та виготовлювач
ФОП Жовтий О.О.

20300, м. Умань, вул. Садова, 2
(УДПУ, навчальний корпус №1)
Тел. 097 255 65 07
047 44 5 21 66
093 540 78 82
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК, №2444 від 22.03.2006 р.