ПРО ПОЧАТОК РОЗШАРОВУВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА БІЛЯ КУТОВОЇ ТОЧКИ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ
ON THE INITIAL STAGE OF DELAMINATION OF PIECE-HOMOGENEOUS BODY NEAR THE CORNER POINT OF INTERFASE OF MEDIA

Анатолій КАМІНСЬКИЙ[1], Леонід КІПНІС[2], Тетяна ПОЛІЩУК[2]
[1] *Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, м. Київ, Україна,*
[2] *Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, м. Умань, Україна,* polischuk_t@ukr.net

Значний інтерес для механіки руйнування композитних матеріалів становить здійснення розрахунків зон передруйнування в рамках моделей з лініями розриву переміщення біля інших кутових точок кусково-однорідних тіл, які є гострокінцевими концентраторами напружень. В даній роботі розглянуто таку задачу для кутової точки межі поділу середовищ.

The symmetric problem on the calculation of initial prefracture zone at the corner point of interface of isotropic elastic media is considered. The piece-homogeneous isotropic body with the interface in the form of angle sides is composed of different elastic parts. These parts are connected by the thin elastic layer. The initial prefracture zone is modeled by the lines of rupture of normal displacement, which are located at the interface. The exact solution of corresponding problem of linear theory of elasticity is constructed by the Wiener – Hopf method. Basing on this solution, the prefracture zone length is determined.

Постановка задачі

В умовах плоскої деформації у рамках статичної симетричної задачі розглянемо кусково-однорідне тіло з межею поділу середовищ у формі сторін кута, що складене з ізотропних лінійно-пружних частин, які сполучені між собою тонким з'єднуючим шаром. Матеріал шара є крихким.

Вважається, що у відповідній задачі лінійної теорії пружності на межі поділу середовищ біля кутової точки нормальні напруження є розтягуючими.

Тоді зі зростанням зовнішнього навантаження біля кутової точки межі поділу середовищ з'являється і розвивається зона передруйнування (зона ослаблених зв'язків) у вигляді пари міжфазних смуг, які виходять з цієї точки. Будемо вивчати лишу початкову стадію розвитку зони передруйнування, коли її розмір значно менший, ніж розміри тіла.

Таким чином, має місце початковий етап процесу розшаровування кусково-однорідного тіла, що розглядається, уздовж межі поділу середовищ біля її кутової точки.

Ставиться задача визначення довжини зони передруйнування.

Оскільки з'єднуючий матеріал є крихким, переважні деформації у зоні передруйнування розвиваються за механізмом відриву. Тому смужку-зону будемо моделювати лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює заданій сталій з'єднуючого матеріалу σ.

З урахуванням малості зони передруйнування приходимо до плоскої статичної симетричної задачі лінійної теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, що містить розрізи скінченної довжини, які виходять з кутової точки та розташовані на цій межі (рис. 1).

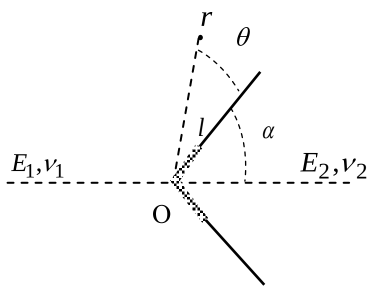

Рис. 1. Лінії розриву нормального переміщення
у кутовій точці межі поділу середовищ.

На нескінченності реалізується асимптотика, що являє розв'язок аналогічної задачі без розрізів (задача **К**), який породжується єдиним на інтервалі $\left]-1;0\right[$ коренем її характеристичного рівняння. Довільна стала *C*, що входить до указаного розв'язку, вважається заданою. Вона характеризує інтенсивність зовнішнього поля і повинна визначатися з розв'язку зовнішньої задачі.

Крайові умови задачі про розрізи, що розглядається, мають наступний вигляд (рис. 1):

$$\theta=\pi-\alpha,\ \tau_{r\theta}=0,\ u_\theta=0;\ \theta=-\alpha,\ \tau_{r\theta}=0,\ u_\theta=0\,; \qquad (1)$$

$$\theta=0,\ \langle\sigma_\theta\rangle=\langle\tau_{r\theta}\rangle=0,\ \langle u_r\rangle=0\,;$$

$$\theta=0,\ r<l,\ \sigma_\theta=\sigma;\ \theta=0, r>l,\ \langle u_\theta\rangle=0\,; \qquad (2)$$

$$\theta=0,\ r\to\infty,\ \sigma_\theta=Cgr^{\lambda_0}+o\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (3)$$

$(-\alpha \le \theta \le \pi-\alpha;\ \langle a\rangle$ - стрибок a; $\lambda_0(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) \in]-1;0[$, $g(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)$ - відомі функції; $e_0 = E_1/E_2 > 1$; E_1, E_2 - модулі Юнга; ν_1, ν_2 - коефіцієнти Пуассона).

Розв'язок сформульованої задачі теорії пружності (рис. 1) є сумою розв'язків наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що замість першої з умов (2) маємо

$$\theta = 0,\ r < l,\ \sigma_\theta = \sigma - Cgr^{\lambda_0}, \tag{4}$$

а на нескінченності напруження затухають як $o(1/r)$ (у (3) відсутній перший доданок). Друга задача – задача **К**. Оскільки розв'язок другої задачі відомий, достатньо побудувати розв'язок першої.

Для побудови точного розв'язку першої задачі будемо використовувати метод Вінера–Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [1-3].

Рівняння Вінера-Хопфа та його розв'язок.

Застосовуючи перетворення Мелліна до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука, умов (1) та враховуючи другу з умов (2) і умову (4), приходимо до наступного функціонального рівняння Вінера-Хопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma}{p+1} + \frac{\sigma_1}{p+\lambda_0+1} = A\operatorname{ctg} p\pi G(p)\Phi^-(p), \tag{5}$$

$$A = \frac{(1+æ_1)[1+æ_1+(1+æ_2)e]}{2\left[æ_1+(1+æ_1æ_2)e+æ_2e^2\right]},\quad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

$$G_1(p) = \left[æ_1+(1+æ_1æ_2)e+æ_2e^2\right]\ \left[a_0(p)+a_1(p)e\right]\sin p\pi,$$

$$G_2(p) = \left[1+æ_1+(1+æ_2)e\right]\ \left[b_0(p)+b_1(p)e+b_2(p)e^2\right]\cos p\pi,$$

$$a_0(p) = (1+æ_1)\ \left[\cos 2p(\pi-\alpha)+\cos 2\alpha\right]\ (\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha),$$

$$a_1(p) = (1+æ_2)\ (\cos 2p\alpha+\cos 2\alpha)\ [\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha],$$

$$b_0(p) = (\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha) + p\sin 2\alpha\right],$$

$$b_1(p) = (1+æ_1)(1+æ_2)\sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)\left[æ_1 \sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha\right] -$$
$$-\left[\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha\right](æ_2\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha),$$

$$b_2(p)=\left[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha\right]\left(æ_2\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha\right),\quad \sigma_1=-Cgl^{\lambda_0},$$

$$\Phi^+(p)=\int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l,0)\rho^p d\rho,\ \Phi^-(p)=\frac{E_1}{4\left(1-\nu_1^2\right)}\int_0^1\left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle\Bigg|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=0}}\rho^p d\rho,$$

$$e=\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}e_0,\quad æ_{1,2}=3-4\nu_{1,2}$$

($-\varepsilon_1<\operatorname{Re}p<\varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ - достатньо малі додатні числа).

Розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$\Phi^+(p)=K^+(p)G^+(p)\left\{\frac{\sigma}{p+1}\left[\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)}-\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}\right]+\right. \tag{6}$$

$$\left.+\frac{\sigma_1}{p+\lambda_0+1}\left[\frac{1}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)}-\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}\right]\right\}\ (\operatorname{Re}p<0)$$

$$\Phi^-(p)=\frac{pG^-(p)}{AK^-(p)}\left[\frac{\sigma}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)}+\frac{\sigma_1}{(p+\lambda_0+1)K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)}\right]$$

$(\operatorname{Re}p>0)$,

$$G(p)=\frac{G^+(p)}{G^-(p)}\quad(\operatorname{Re}p=0),\ \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G^+(p), & \operatorname{Re}p<0,\\ G^-(p), & \operatorname{Re}p>0\end{cases}$$

$$K^\pm(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1/2\mp p)}$$

($\Gamma(z)$ - гамма-функція).

Довжина пластичної зони передруйнування та поведінка напружень біля кутової точки

На основі (6) одержуємо формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень в кінці розрізу

$$k_I=\frac{2\sqrt{2}\left(æ_1+e\right)}{1+æ_1+\left(1+æ_2\right)e}\sqrt{l}\left[\frac{g\Gamma(\lambda_0+3/2)}{\Gamma(\lambda_0+2)G^+(-\lambda_0-1)}Cl^{\lambda_0}-\frac{\sqrt{\pi}}{2G^+(-1)}\sigma\right]. \tag{7}$$

Довжина зони передруйнування визначається з умови обмеженості напружень біля кінця лінії розриву нормального переміщення, тобто з умови рівності нулю коефіцієнта k_I.

Прирівнюючи до нуля праву частину (7), одержимо наступну формулу для визначення довжини $2l$ зони передруйнування:

$$l = L\left(\frac{|C|}{\sigma}\right)^{-1/\lambda_0}, \quad L = \left[\frac{2|g|\Gamma(\lambda_0 + 3/2)G^+(-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda_0 + 2)G^+(-\lambda_0 - 1)}\right]^{-1/\lambda_0} \tag{8}$$

Значення функцій λ_0 і L у випадку, коли тіло містить включення, що має гострий кут ($\alpha^\circ > 135^\circ$), матеріал якого жорсткіший ніж матеріал тіла, наведено у таблиці.

Таблиця. 1. Значення функцій λ_0 і $L(\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3)$

α^0	e_0			
	2	3	5	10
140	-0,101	-0,146	-0,190	-0,229
	$4{,}1\cdot10^{-5}$	0,115	0,597	1,318
145	-0,110	-0,161	-0,211	-0,254
	0,017	10,848	16,498	32,055
150	-0,117	-0,173	-0,228	-0,278
	0,331	20,165	36,524	86,081
155	-0,120	-0,180	-0,241	-0,298
	1,187	22,443	44,086	92,543
160	-0,116	-0,179	-0,241	-0,313
	2,278	22,648	35,708	38,691
165	-0,104	-0,168	-0,241	-0,318
	1,466	19,896	29,203	34,502
170	-0,082	-0,140	-0,215	-0,305
	0,133	11,787	23,935	27,314
175	-0,047	-0,087	-0,150	-0,246
	$4{,}6\cdot10^{-7}$	0,352	12,921	15,093

Зі зростанням модуля параметра навантаження C довжина зони передруйнування зростає за степеневим законом. Зі зростанням сталої з'єднуючого матеріалу σ довжина зони передруйнування зменшується.

Якщо $\left(\left|C\right|/\sigma\right)^{-1/\lambda_0}$ слабо змінюється зі зміною α і e_0, зі зростанням кута α довжина зони передруйнування спочатку збільшується, а потім зменшується. При $e_0 = 2;\ 3;\ 5;\ 10$ найбільшим значенням довжини зони передруйнування відповідають значення кута α°, що дорівнюють $163,9^\circ$; $158,2^\circ$; $155,4^\circ$; $151,7^\circ$.

Чим більше відрізняються матеріали, тим більша довжина зони передруйнування і меншим є кут її найбільшої довжини.

1. *Каминский А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А.* Исследование напряженного состояния вблизи угловой точки при моделировании начальной пластической зоны линиями скольжения // Прикл. механика. – 2001. – **37**, №5. – С.93 – 99.
2. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279с.
3. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука,1967. – 402с.