**Ю. М. Краснобокий**
**І. А. Ткаченко**

# *МЕХАНІКА НЕБЕСНИХ ТІЛ*

## ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Умань
ФОП Жовтий О. О.
2014

УДК 52 (079.1)
ББК 22.63я7-4
К 78

**Рецензенти:**

М. Т. Мартинюк – д. пед. н., професор, член-кореспондент НАПН України, завідувач кафедри фізики і астрономії Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

К. І. Чурюмов – д. фіз.-мат. н., професор, член-кореспондент НАН України, директор Київського планетарію; професор кафедри аерокосмічної геодезії Національного авіаційного університету;

І. С. Чернецький – кандидат педагогічних наук, науковий співробітник Національного центру «Мала академія наук України», голова ВГО «Асоціація учителів фізики «Шлях освіти – XXI».

**Рекомендовано до друку вченою радою УДПУ імені Павла Тичини (протокол № 9 від 29.04. 2014 р.)**

**К 78 Механіка небесних тіл :** збірник задач / Ю. М. Краснобокий, І. А. Ткаченко. – Умань : ФОП Жовтий О. О., 2014. – 174 с.

Посібник розрахований на студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Він також може бути використаний учителями фізики й астрономії та учнями старшої школи загальноосвітніх навчальних закладів.

**ISBN**

УДК 52 (079.1)
ББК 22.63я7-4
© Краснобокий Ю. М., Ткаченко І. А. 2014

**ЗМІСТ**

# ВІД АВТОРІВ

У наш час дослідження космічного простору набувають статусу основних джерел отримання найновішої унікальної інформації, яка значно розширює і поглиблює наші знання про еволюцію, закономірності розвитку і властивості Всесвіту, з чим людство пов'язує опанування в майбутньому ще невідомих могутніх сил природи та освоєння нових джерел енергії.

Пропонований посібник можна розглядати як спробу інтегрованого видання, низку задач з якого про взаємне переміщення небесних тіл можна розв'язувати на практичних заняттях з фізики, астрономії та астрофізики. Звичайно, що найширше його можна використати при викладанні таких розділів й тем як «Кінематика Сонячної системи», «Елементи небесної механіки і динаміки космічних польотів», «Фізична природа тіл Сонячної системи», «Закони Кеплера», «Закон всесвітнього тяжіння», «Гравітаційне поле і його властивості», «Космічні швидкості», «Рух тіл із змінною масою», «Поняття про невагомість», а також при вивченні основних понять динаміки твердого тіла (момент сили, момент інерції, момент імпульсу тощо).

При підборі задач автори керувалися наступними принципами:

а) задачі мають бути такими, щоб при їх розв'язанні основна увага приділялася фізичній сутності питання, а саме: зрозуміти умову; відокремивши головне від несуттєвого, з'ясувати основні фізичні процеси, що мають місце у цьому випадку; з'ясувати, яким фізичним законам підпорядковуються ці процеси; інколи із декількох законів обрати один, застосування якого визначає найкоротший шлях до мети; б) більш складним задачам повинні передувати простіші; в) у межах кожного розділу задачі мають бути взаємопов'язані: в один випадках розв'язок задачі спирається на отримані раніше результати, в інших – порівняння двох задач робиться для того, щоб, не дивлячись на здавалося б їх подібність, виявити суттєві відмінності.

Більшість задач, наведених у цьому посібнику, перенесено з розділу «Механічні явища у навколопланетному і космічному просторі» авторського «Збірника задач з астрофізичним змістом» та взято із джерел, перелік яких наведено в кінці посібника. Багато задач піддано переробці та ранжуванню за розділами, наведеними у змісті.

Багаторічний досвід викладацької роботи авторів та поради колег підтверджують правильність методичного прийому, коли розв'язанню задач передує короткий огляд необхідного теоретичного матеріалу та наводяться приклади розв'язання типових задач, що й зроблено авторами у цьому посібнику.

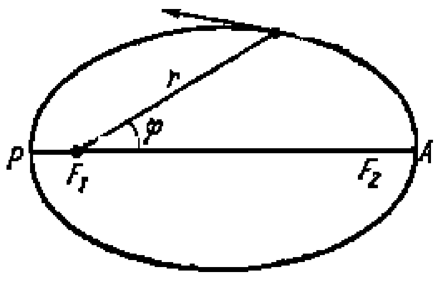
У посібнику не наводяться довідкові матеріали з тієї причини, що необхідні для розв'язання задач дані є або в самих їх умовах, або ж вважаються відомими.

# РОЗДІЛ 1. ДЕЯКІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ

## 1.1. РУХ ПЛАНЕТ ПО КОНІЧНИХ ПЕРЕРІЗАХ

Тут мова йтиме про обчислення прискорень при рухах планет і комет по відповідних траєкторіях. Як показують спостереження, комети рухаються по гіперболах і параболах з фокусом у точці, у якій знаходиться Сонце, причому цей рух описується другим законом Кеплера. Третій закон Кеплера для гіперболічних і параболічних рухів, звичайно, незастосовний. У той же час для обчислення прискорень планет і комет він і не потрібен. Дійсно, за заданої траєкторії другий закон Кеплера визначає швидкість планети або комети на цій траєкторії. Цього цілком достатньо, щоб повністю описати рух тіла, тобто вказати його положення і швидкість у будь-який момент часу. Знаючи це, можна обчислити прискорення тіла в любій точці траєкторії. Проведемо ці елементарні обчислення.

1. Оберемо полярну систему координат з полюсом у фокусі $F_1$, де знаходиться Сонце, і полярною віссю $PA$, напрямленою уздовж великої осі еліпса або гіперболи (див. мал. 1.1.). Прискорення рухомого тіла розкладемо на радіальну складову $a_r$, спрямовану уздовж радіуса $r$, і азимутальну складову $a_\varphi$,




**Мал. 1.1.**

перпендикулярну до радіуса. Ці складові визначаються виразами

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r, \quad a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}). \qquad (1)$$

Величина $\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$ (2)

є секторіальною швидкістю, тобто площею, яку описує радіус-вектор планети або комети в одиницю часу. Згідно з другим законом Кеплера вона постійна, а тому $a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(2\sigma) = 0$. Це означає, що прискорення розглядуваного небесного тіла не має азимутальної складової, тобто спрямоване до Сонця.

Щоб визначити радіальне прискорення $a_r$, необхідно знайти похідні $\ddot{r}$ і $\dot{\varphi}$. Похідна $\dot{\varphi}$ визначається з формули (2): $\dot{\varphi} = 2\sigma / r^2$. Для обчислення похідної $\ddot{r}$ скористаємося рівнянням конічного перерізу в полярній системі координат: $r(1 - e\cos\varphi) = p$, (3)

де $p$ і $e$ – сталі величини: $p$ – параметр еліпса, $e$ – його ексцентриситет. Для еліпса $e<1$, для параболи $e=1$, для гіперболи $e>1$. У граничних випадках $e=0$ і $e=\infty$ отримуються коло і пряма лінія. Диференціюючи рівняння (3) по часові, отримаємо $\dot{r}(1-e\cos\varphi) + er\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$, або після множення на $r$ з урахуванням (2) і (3) $p\dot r+2e\sigma\sin\varphi=0$. Подвійне диференціювання дає $p\ddot r+2\sigma e\cos\varphi\cdot\dot\varphi=0$.

Підставляючи сюди $\dot\varphi=\dfrac{2\sigma}{r^2}$, $e\cos\varphi=1-\dfrac{p}{r}$, отримаємо $\ddot r=-\dfrac{4\sigma^2}{pr^2}+\dfrac{4\sigma^2}{r^3}=-\dfrac{4\sigma^2}{pr^2}+\dot\varphi^2 r$.

Після цього з першої формули (1) знаходимо $a_r=-\dfrac{4\sigma^2}{pr^2}$. (4)

Таким чином, з перших двох законів Кеплера випливає, що прискорення планети або комети обернено пропорційне квадратові її відстані від Сонця.

2. Третій закон Кеплера дозволяє довести, що коефіцієнт пропорціональності $4\sigma^2/p$ – один і той же для всіх планет. Доведемо це. Площа еліпса дорівнює $\pi ab$, де $a$ і $b$ – довжини великої і малої його півосей. Оскільки секторіальна швидкість $\sigma$ стала, то $\sigma=\pi ab/T$, де $T$ – період обертання планети по її орбіті. В аналітичній геометрії відома формула $p=b^2/a$. Тоді з (4) отримаємо

$$a_r=-\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}. \qquad (5)$$

(При рівномірному обертанні по колу ця формула перетворюється у відому формулу $a_r=-\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$). Увівши сталу Кеплера $K=\dfrac{a^3}{T^2}$, отримаємо

$$a_r=-\frac{4\pi^2K}{r^2}. \qquad (6)$$

Цей результат співпадає з попередньою формулою (2), але при його виведенні в цьому випадку були використані лише емпіричні закони Кеплера без залучення інших додаткових міркувань. Отже, формула (2) виявилася точною. Цього й варто було чекати, оскільки у відповідності з основними положеннями механіки Ньютона прискорення планети повинне визначатись лише взаємним розташуванням Сонця і планети, й не може залежати від виду траєкторії і швидкості планети. З тієї ж причини формула (6) може слугувати і для обчислення прискорень комет, хоча третій закон Кеплера для них і не має змісту. У цьому випадку чисельне значення сталої $K$ буде тим же самим, але вона не може бути виражена через параметри орбіти комети формулами, аналогічними до (1).

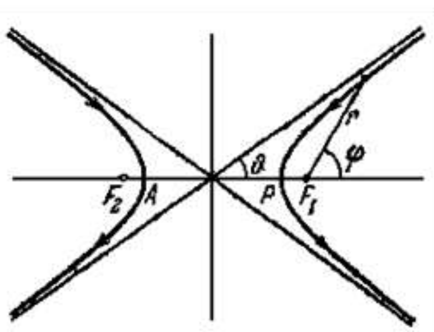
3. Рух по параболі можна розглядати як граничний випадок руху по еліпсу, один із фокусів якого віддалений у нескінченність. Тому детально на цьому випадку зупинятися немає рації.

4. Свою специфіку має рух по гіперболі. Гіпербола складається з двох не зв’язаних між собою віток. Щоб її вітки можна було представити єдиним рівнянням (3), необхідно припустити, щоб відстань $r$ могла приймати не лише додатні, але й від’ємні значення. Нехай кут $\vartheta$ – кут, який визначається з умови $\cos\vartheta=1/e$. Він визначає напрями асимптот гіперболи (див. мал. 1.2.).

Якщо $|\varphi| > \vartheta$, то $r$ додатнє. Цьому відповідає права вітка гіперболи. Якщо є $|\varphi| < \vartheta$, то $r$ від'ємне.

Тоді точку кривої необхідно шукати не в напрямі напівпрямої, проведеної під кутом $\varphi$, а в прямо протилежному напрямі.

Отримується ліва вітка гіперболи. Звичайно, що рухома точка не може перестрибнути з однієї вітки гіперболи на другу. Якщо на неї діє сила притягання, то траєкторія повинна бути повернута вгнутістю до силового центру.




**Мал. 1.2.**

Наприклад, якщо силовий центр (Сонце) знаходиться у фокусі $F_1$, то рух можливий лише по правій вітці гіперболи. Проте, щоб виявити загальні закономірності рухів по конічних перерізах, а не лише по еліпсах, має сенс чисто формально увести допоміжну матеріальну точку, яка рухається по лівій вітці гіперболи під дією сили відштовхування, спрямованої з боку того ж силового центру $F_1$.

Потенціальна енергія допоміжної точки виражається формулою

$$u = +G\frac{Mm}{|r|}.$$

Вона додатня, оскільки тут сили є силами відштовхування. Але, оскільки на лівій вітці гіперболи величини $r$ від'ємні, то цей вираз можна записати у вигляді

$$u = -G\frac{Mm}{|r|}.$$

Ця формула точно співпадає з формулою, якою виражається потенціальна енергія дійсної точки, яка рухається по правій вітці гіперболи. Тому, якщо енергія і момент кількості руху допоміжної точки відносно фокуса $F_1$ дорівнюють відповідним величинам для дійсної точки, то рухи обох точок будуть описуватися одними й тими ж рівняннями. У математичних же розрахунках має значення не те, що рухається, а те, якими рівняннями рух описується. Формально математично справа виглядає так, неначе у наявності є одна матеріальна точка, яка має властивість перестрибувати з однієї вітки гіперболи на другу. Доцільність такого штучного підходу виправдана. Гравітаційних сил відштовхування не існує, але умовно їх вводити можна. Крім того, відомо, що сили відштовхування вимагають при електричних взаємодіях однойменно заряджених частинок. Вони, як і сили тяжіння, зменшуються обернено пропорційно квадрату відстані. Тому рух під дією сил відштовхування представляє не лише умоглядний, але й фізичний інтерес.

## 1.2. УМОВИ ЕЛІПТИЧНОГО, ПАРАБОЛІЧНОГО І ГІПЕРБОЛІЧНОГО РУХІВ

1. Коли траєкторія еліптична, рух планети фінітний, тобто планета рухається в обмеженій області простору, не віддаляючись на нескінченність. Навпаки, у випадку гіперболічних і параболічних траєкторій рух інфінітний – рух планети не обмежений певною областю простору, вона може віддалятися на нескінченність. Отже, задача зводиться до визначення умов фінітності і інфінітності руху планети.

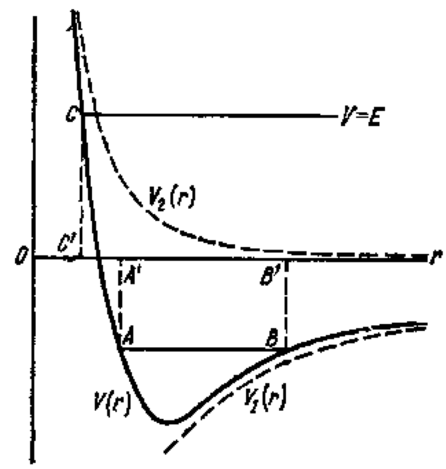
Якщо $E$ повна енергія планети, то $\frac{m\upsilon^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = E = Const.$ (1)

Кінетичну енергію Сонця ми не враховуємо, вважаючи, що вона нехтовно мала порівняно з кінетичною енергією планети. Це справедливо в силу малості маси планети порівняно з масою Сонця. Аналогічно, якщо $L$ – момент імпульсу планети відносно Сонця, то $mr^2\dot{\varphi} = L = Const.$ (2)

Виключимо з цих рівнянь кутову швидкість $\dot{\varphi}$. З цією метою розкладемо повну швидкість $\upsilon$ на радіальну складову $\upsilon_r$ і азимутальну складову $r\dot{\varphi}$. Тоді $\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2}\upsilon_r^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}\upsilon_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$, і рівняння (1) набуде вигляду $\frac{m}{2}\upsilon_r^2 - G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E = Const.$ (3)

Це рівняння містить лише одну невідому величину – радіальну швидкість $\upsilon_r$. Формально воно може розглядатися як рівняння енергії для одномірного – радіального – руху точки. Роль потенціальної енергії відіграє функція $V(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$.

2. Задача звелася до знаходження умов фінітності і інфінітності однмірного руху з потенціальною енергією $V(r)$. Найбільш зручний для розв'язку задачі графічний метод. На мал. 1.3.пунктирні криві представляють відповідно графіки функцій $V_1(r) = -G\frac{Mm}{r}$ і $V_2(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$, причому, мається на увазі, що $L \neq 0$.




**Мал. 1.3.**

Крива, яка нас цікавить $V(r)$, визначиться шляхом додавання ординат цих двох графіків. При $r \to 0$ функція $V_2(r)$ швидше прямує до нескінченності, ніж функція $V_1(r)$. Тому при малих $r$ функція $V(r) = V_1(r) + V_2(r)$ додатня і асимптотично прямує до $+\infty$, коли $r \to 0$. Навпаки, при $r \to \infty$ функція $V_1(r)$ повільніше прямує до нуля, ніж $V_2(r)$. Тому при великих $r$ функція $V(r)$ від'ємна і асимптотично наближається до нуля, коли $r \to \infty$. Графік цієї функції представлено на мал. 1.3. суцільною лінією. Крива $V(r)$ має вигляд «потенціальної ями». Якщо $L = 0$, то $V(r) = V_1(r)$, мінімум на кривій зміщується до початку координат і прямує у нескінченність $(-\infty)$. Це відповідає випадкові, коли планета рухається уздовж прямої, яка проходить через центр Сонця.

Оскільки величина $1/2m\upsilon_r^2$ не може бути від'ємною, то з рівняння (3) випливає, що область, в якій може знаходитися планета, визначається умовою $V(r) \le E$. Проведемо горизонтальну пряму $V = E = Const$. Ділянки кривої $V(r)$, що лежать вище цієї прямої, відповідають точкам простору, які не можуть бути досягнуті планетою з енергією $E$. Якщо $E < 0$, то вказана пряма перетне криву $V = V(r)$ у двох точка $A$ і $B$. Нехай $A'$ і $B'$ – їх проекції на горизонтальну вісь. Планета може здійснювати рух лише в області між $A'$ і $B'$, вона буде «локалізована в потенціальній ямі» $V = V(r)$. У цьому випадку рух планети фінітний, і траєкторія буде еліптичною. Якщо $E > 0$, то пряма перетне криву $V(r)$ лише в одній точці $C$, проекцією якої на горизонтальну вісь є точка $C'$. Якщо планета рухалася справа наліво, то в точці $C'$ вона змінить напрямок руху на протилежний і почне рухатися вправо, монотонно віддаляючись у нескінченність. Її рух буде інфінітним, а траєкторія – гіперболічною. Нарешті, при $E = 0$ рух також буде інфінітним. Цьому проміжному випадкові між еліптичним і гіперболічним рухами відповідає рух по параболі.

Таким чином, при $E > 0$ рух гіперболічний, при $E = 0$ – параболічний, при $E < 0$ – еліптичний.

У випадку сил відштовхування енергія $E$ завжди додатна, а тому рух у цьому випадку завжди гіперболічний (зокрема, прямолінійний). Оскільки при $r \to \infty$ функція $V(r)$ перетворюється в нуль, то $E = \frac{m}{2}\upsilon_\infty^2$. (4)

Звідси випливає, що при гіперболічному русі матеріальна точка приходить у нескінченність з кінцевою швидкістю $\upsilon_\infty$, а при параболічному русі – з нульовою швидкістю. Початкова швидкість $\upsilon_n$, яку необхідно надати матеріальній точці, щоб вона стала рухатися по параболі, називається параболічною швидкістю. Параболічну швидкість можна визначити з рівняння (1), підставивши в нього $E = 0$. Якщо $r_o$ – початкове значення радіуса $r$, то $\frac{m\upsilon_n^2}{2} - G\frac{Mm}{r_o} = 0$, звідки $\upsilon_n = \sqrt{2G\frac{M}{r_o}}$. (5)

Параболічна швидкість зв'язана простим співвідношенням з «коловою» швидкістю $\upsilon_к$. Так називається швидкість, яку повинна мати планета, щоб під дією гравітаційної сили Сонця рухатися навколо нього по колу з радіусом $r_o$. Вона визначиться, якщо доцентрове прискорення $\upsilon_к^2 / r_o$

прирівняти до гравітаційної сили $G\frac{M}{r_o^2}$, яка діє на одиницю маси. Це діє

$$\upsilon_n = \sqrt{G\frac{M}{r_o}}. \qquad (6)$$

Таким чином $\upsilon_n = \upsilon_к\sqrt{2}$.

## 1.3. ТЕОРЕМА ВІРІАЛУ

Для фінітних рухів виконується так звана теорема віріалу, яка має широке застосування у різних розділах фізики. Вона була сформульована Клаузіусом (1822-1888). Для довільної системи матеріальних точок можна записати $\frac{d}{dt}\sum \vec{p}\vec{r} = \sum \vec{r}\vec{F} + \sum \vec{p}\vec{\upsilon}$, (1)

оскільки $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, $\dot{\vec{r}} = \vec{\upsilon}$ (сумування проводиться за всіма матеріальними точками). Останній доданок у правій частині являє собою подвійну кінетичну енергію системи: $2К = \sum \vec{p}\vec{\upsilon} = \sum m\upsilon^2$, і попереднє співвідношення можна переписати у вигляді $К = -\frac{1}{2}\sum \vec{r}\vec{F} + \frac{d}{dt}\sum \frac{1}{2}(\vec{p}\vec{r})$. (2)

Величина $-\frac{1}{2}\sum \vec{r}\vec{F}$ називається віріалом сил, які діють у системі.

Назвемо середнім за часом значення функції $f(t)$ на числовому інтервалі $(t,\ t+T)$ величину, яка визначається з виразу

$$< f(t) > = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t')dt'. \qquad (3)$$

Якщо функція $f(t)$ періодична, то в якості часу $T$ зазвичай беруть її період. Якщо ж функція $f(t)$ не періодична, але обмежена, то час $T$ беруть достатньо великим і переходять до границі

$$< f(t) > = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t')dt', \qquad (4)$$

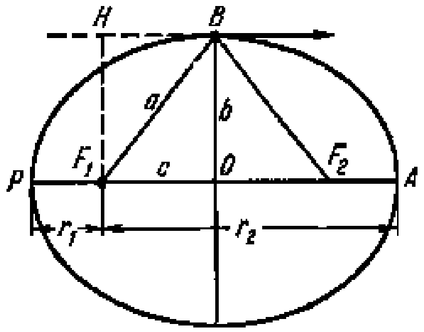
передбачаючи, звичайно, що границя існує. Якщо $f(t)$ є похідною обмеженої функції за часом: $f = \frac{d\varphi}{dt}$, то $< f(t) > = 0$. Дійсно,$> = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{d\varphi}{dt'}dt' = \lim_{T\to\infty}\frac{\varphi(t+T)-\varphi(t)}{N}$. (5)

Маючи це на увазі, усереднимо співвідношення (2) за часом, спрямовуючи $T$ до нескінченності. Тоді для фінітного руху останній доданок у (2) дасть нуль, і ми отримаємо $< К > = -\frac{1}{2} < \sum \vec{r}\vec{F} >$. (6)

У випадку фінітних рухів середнє за часом значення кінетичної енергії системи дорівнює середньому за часом значенню віріала сил, діючих у системі. Це і є теорема віріалу Клаузіуса.

## 1.4. ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ОРБІТ

1. Довжини великої і малої осей еліптичної орбіти планети можна розрахувати з допомогою законів збереження енергії і моменту імпульсу. У перигелії $P$ і в афелії $A$ (див. мал. 1.4.) радіальна швидкість планети дорівнює нулю. Тому, покладаючи у рівнянні $\frac{m}{2}\upsilon_r^2 - G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E = Const$ $\upsilon_r = 0$,




**Мал. 1.4.**

отримаємо для цих точок $r^2 + G\frac{Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$. (1)

При $E < 0$ це квадратне рівняння має два дійсних додатніх корені $r_1$ і $r_2$. Один із коренів відповідає перигелію $P$, другий – афелію $A$.

Сума коренів $r_1 + r_2$ дає довжину великої осі еліпса. Користуючись для цієї довжини стандартним позначенням $2a$, отримаємо
$$2a = r_1 + r_2 = -G\frac{Mm}{E} = -G\frac{M}{\varepsilon}, \qquad (2)$$

де $\varepsilon = E/m$ – повна енергія, яка припадає на одиницю маси планети. Оскільки для руху по еліпсу $\varepsilon < 0$, то вираз (2) суттєво додатній, як це й повинно бути.

Колові траєкторії є виродженими випадками еліптичних. Умова руху по коловій орбіті знайдеться з рівняння (2), якщо в ньому покласти $r_1 = r_2 = r$. Тоді отримується $2E = -G\frac{Mm}{r}$, або $2E = u$.

Записавши цей вираз у вигляді $E = u - E$ і скориставшись співвідношенням $E = K + u$, отримаємо $E = -K$. (3)

Таким чином, при коловому русі сума повної і кінематичної $K$ енергії дорівнює нулю, що знову дає раніше виведену формулу
$$\upsilon_к = \sqrt{G\frac{M}{r_0}}.$$

Для еліптичного руху формула (3) також справедлива, але під $K$ слід розуміти середнє за часом значення кінетичної енергії планети. Дійсно, як було показано, еліптичний рух фінітний, і до нього можна застосувати теорему віріалу. Стосовно руху планети ця теорема дає
$$<K> = -\frac{1}{2} < \vec{r}\vec{F} > = \frac{1}{2} < rF > = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2} < u >.$$

Віднімаючи з обох частин $\frac{1}{2} < K >$ і враховуючи, що $E = < K > + < u >$, отримаємо $< K > = -E$, що й доводить наше твердження.

2. Визначимо тепер довжину малої півосі еліпса $b$. Для цього крім енергії необхідно знати ще й момент кількості руху планети, або її

секторіальну швидкість $\sigma = \dot{S}$. Велику вісь еліпса можна вважати відомою, оскільки вона одноразово визначається енергією планети. Нехай $B$ – одна з точок, у яких мала вісь перетинається з еліпсом (див. мал. 1.4.). Оскільки сума відстаней будь-якої точки еліпса від його фокусів $F_1$ і $F_2$ постійна і дорівнює $2a$, то $F_1B = a$. Секторіальна швидкість у точці $B$ дорівнює

$$\sigma = \frac{1}{2}\upsilon b, \tag{4}$$

оскільки $b$ є довжина перпендикуляра $F_1H$, опущеного з фокуса $F_1$ на напрям швидкості в цій точці. Швидкість $\upsilon$ у точці $B$ визначиться з рівняння енергії. Поклавши в ньому $r = a$, знайдемо

$$\frac{\upsilon^2}{2} - G\frac{M}{a} = \varepsilon .$$

Підставивши сюди вираз для $\varepsilon$ з (2), визначимо $\upsilon$. Після чого знайдемо

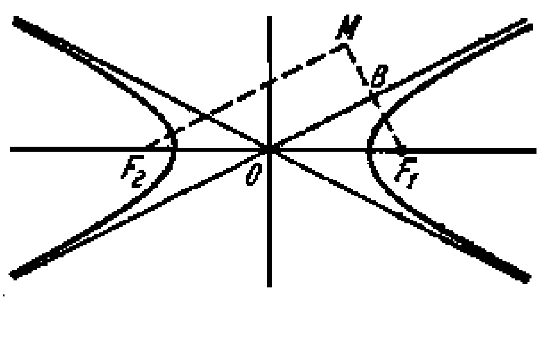
$$b = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{GM}} . \tag{5}$$

3. Поширимо тепер отриманий результат на випадок гіперболічного руху. Для цього скористаємося штучним прийомом, який використовували раніше. По правій вітці гіперболи (мал. 1.5.) рухається комета, по лівій – відповідна їй допоміжна матеріальна точка. Ці рухи описуються одним і тим же рівнянням $\frac{m}{2}\upsilon_r^2 - G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E = Const$. У вершинах гіперболи $P$ і $A$ радіальна швидкість $\upsilon_r$ дорівнює нулю, і ми знову приходимо до квадратного рівняння (1). Проте тепер енергія $E$ додатня, так що знаки коренів цього рівняння протилежні. Додатній корінь $r_1$ відповідає вершині $P$, а від'ємний $r_2$ – вершині $A$. Сума обох коренів $r_1 + r_2$ від'ємна. За абсолютною величиною ця сума дорівнює відстані між вершинами $P$ і $A$. Використовуючи для цієї відстані стандартне позначення $AP = 2a$, отримаємо

$$2a = -(r_1 + r_2) = G\frac{Mm}{E} = G\frac{M}{\varepsilon} . \tag{6}$$

Ця формула точно співпала б з формулою (2), якщо домовитися відстань між вершинами гіперболи вважати величиною від'ємною.

4. Знайдемо тепер аналог формули (4) для гіперболічного руху. Відстань між фокусами $F_1F_2$ позначимо через $2c$, а під $b$ будемо розуміти квадратний корінь $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Проведемо через фокус $F_2$ пряму, паралельну до однієї з асимптот гіперболи (див. мал. 1.5.). Із фокуса $F_1$ на пряму $F_2M$ опустимо перпендикуляр $F_1M$.




**Мал. 1.5.**

Довжину відрізка $F_2M$ можна розглядати як різницю відстаней між фокусами $F_1$ і $F_2$ до нескінченно віддаленої точки, в якій перетинаються паралельні прямі $F_2M$ і $OB$.

Тому, на основі відомої властивості гіперболи $F_2M = 2a$. За теоремою Піфагора робимо висновок, що відстань $F_1M = 2b$. Секторіальну швидкість, як величину сталу, досить обрахувати для точки, яка рухається у нескінченності. Радіус-вектор такої точки в одиницю часу описує трикутник з основою $\upsilon_\infty$ і висотою $F_1M = 2b$. Його площа дорівнює

$$\sigma = \frac{1}{2} b\upsilon_\infty, \tag{7}$$

що відповідає секторіальній швидкості. При цьому величина $\upsilon_\infty$ визначається за формулою (4), яку можна записати також у вигляді

$$\frac{\upsilon_\infty^2}{2} = \varepsilon. \tag{8}$$

Кут $\vartheta$ між асимптотами гіперболи можна вирахувати за формулою

$$tg\frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{a} = \frac{b\upsilon_\infty^2}{GM}. \tag{9}$$

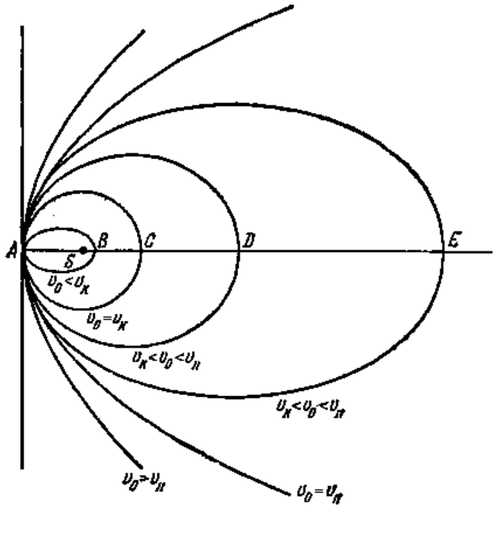
5. Параметр $p$ для еліпса і гіперболи визначається з виразу $p = b^2/a$. Підставляючи сюди відповідні значення для $b$ і $a$, в обох випадках знайдемо

$$p = \frac{4\sigma^2}{GM}. \tag{10}$$

Цією ж формулою визначається параметр $p$ й для параболи, оскільки парабола є граничною кривою, в яку переходять еліпс і гіпербола. Для параболи параметр $p$ є єдиною величиною, яка визначає її форму.

6. Вид траєкторії планети, звичайно, визначається початковими умовами, тобто положенням і швидкістю планети в деякий момент часу, який умовно можна вважати початковим. Проілюструємо це на наступному прикладі. Нехай $S$ – Сонце, а $A$ – початкове положення планети (див. мал. 1.6.). Відстань $AS$ позначимо $r_0$. Будемо надавати планеті в точці $A$ швидкість $\upsilon_0$ у напрямі, перпендикулярному до $AS$. Розглянемо, як буде змінюватися вид траєкторії при зміні величини $\upsilon_0$. Якщо повна енергія планети від'ємна, тобто $\upsilon_0$ менша за параболічну швидкість $\upsilon_п$, то траєкторією планети буде еліпс. При $\upsilon_0 = 0$ еліпс вироджується в пряму, яка проходить через Сонце $S$.

Якщо $\upsilon_0 = \upsilon_к$, то планета буде рухатися по колу.




**Мал. 1.6.**

У цьому випадку точки $A$ і $C$ рівновіддалені від Сонця.

Відстань між ними (велика вісь) дорівнює $2r_0$. При зменшенні енергії велика вісь еліпса зменшується. При $\upsilon_0 < \upsilon_к$ вона стає меншою за $2r_0$. У цьому випадку точка $A$ віддалена від Сонця далі (афелій), ніж точка $B$ (перигелій). При $\upsilon_0 > \upsilon_к$, навпаки, велика вісь еліпса більша від $2r_0$, тобто перигелієм буде точка $A$, а афелієм – точка $D$ (або $E$). При $\upsilon = \upsilon_п = \upsilon_к\sqrt{2}$ траєкторією буде парабола. При $\upsilon > \upsilon_п$ вона переходить у гіперболу. Всі ці результати зведені в таблицю:

| Початкова швидкість | Траєкторія планети |
|---|---|
| $\upsilon_0 = 0$ | Пряма, яка проходить через Сонце. |
| $\upsilon_0 < \upsilon_к$ | Еліпс з перигелієм у точці $B$ і афелієм у точці $A$. |
| $\upsilon_0 = \upsilon_к$ | Коло з центром у точці знаходження Сонця. |
| $\upsilon_к < \upsilon_0 < \upsilon_п$ | Еліпс з перигелієм у точці $A$ і афелієм у точці $D$. |
| $\upsilon_0 = \upsilon_п$ | Парабола. |
| $\upsilon_0 > \upsilon_п$ | Гіпербола. |

## 1.5. ВИВЕДЕННЯ ЗАКОНІВ РУХУ ПЛАНЕТ ІЗ ЗАКОНУ ВСЕСВІТНЬОГО ТЯЖІННЯ

Припустимо, що на планету з боку Сонця діє сила тяжіння, яка підкоряється закону всесвітнього тяжіння Ньютона. Визначимо рух планети під дією такої сили. Масу Сонця будемо вважати нескінченно великою порівняно з масою планети. Оберемо полярну систему координат ($r,\ \varphi$), полюс якої помістимо в центрі Сонця. Швидкість планети $\upsilon$ можна розкласти на радіальну швидкість $\upsilon_r = \dot{r}$ і перпендикулярну до неї азимутальну швидкість $\upsilon_\varphi = e\dot{\varphi}$. Очевидно, що $\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Закони збереження енергії і моменту імпульсу планети запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G\frac{M}{r} = \varepsilon, \qquad \text{ё} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \sigma, \qquad (2)$$

де $M$ – маса Сонця, $\varepsilon$ – повна енергія планети, яка припадає на одиницю її маси, $\sigma$ – секторіальна швидкість, яка залишається постійною під час руху. Для знаходження рівняння траєкторії планети необхідно вилучити час. Уважаючи $r$ функцією $\varphi$, маємо $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$. Підставляючи це значення у рівняння (1) і вилучаючи $\dot{\varphi}$ з допомогою рівняння (2), отримуємо

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\varepsilon + \frac{GM}{r}\right). \qquad (3)$$

Уведемо нову змінну $\rho = -\frac{1}{r} + \frac{1}{p}$, де $p$ – стала, значення якої з'ясуємо нижче. Тоді рівняння (3) отримає такий вигляд: $\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \left(\rho - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{GM}{2\sigma^2}\left(-\rho + \frac{1}{p}\right).$

Підберемо сталу $p$ таким чином, щоб у цьому рівнянні зникли члени, які містять перші степені $\rho$. Для цього необхідно покласти

$$p = \frac{4\sigma^2}{GM}. \qquad (4)$$

За такого вибору сталої $p$ отримуємо

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{1}{p^2} - \rho^2.$$

Оскільки зліва стоїть невід'ємна величина, то сума $\frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{1}{p^2}$ теж невід'ємна, і її можна позначити заміною на $A^2$:

$$A^2 = \frac{1}{p^2} + \frac{\varepsilon}{2\sigma^2}. \qquad (5)$$

У результаті отримаємо $\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = A^2 - \rho^2$. (6)

Очевидно, що $A^2 \geq \rho^2$, тому можна покласти $\rho / A = \cos\theta$, де $\theta$ – нова невідома. Тоді $A^2 - \rho^2 = A^2 \sin^2\theta$, $\frac{d\rho}{d\varphi} = -A\sin\theta \frac{d\theta}{d\varphi}$.

Підставляючи ці значення в (6) і скорочуючи на $A\sin\theta$, отримаємо $d\theta / d\varphi = \pm 1$, звідки $\theta = \pm\varphi + \varphi_0$. Отже, $\rho = A\cos(\pm\varphi + \varphi_0) = A\cos(\varphi \pm \varphi_0)$. В останньому виразі подвійний знак перед $\varphi_0$ зберігати не має сенсу, оскільки $\varphi_0$ є сталою інтегрування. Повертаючись до попередніх позначень, отримаємо

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\left[1 - e\cos(\varphi + \varphi_0)\right], \tag{7}$$

де $e = pA = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon p^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{1 + \frac{8\varepsilon\sigma^2}{G^2 M^2}}$. (8)

Без обмеження загальності розгляду можна покласти $\varphi_0 = 0$. Це означатиме просто, що відлік кутів $\varphi$ проводиться від такого положення радіуса-вектора планети, коли його довжина дорівнює $p/(1-e)$. При такому відликові рівняння (7) набуває виду $r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$. (9)

Це – рівняння конічного перерізу з ексцентриситетом $e$ і параметром $p$. Якщо $\varepsilon < 0$, то $e < 0$ (еліпс); якщо $\varepsilon = 0$, то $e = 1$ (парабола); якщо $\varepsilon > 0$, то $e > 1$ (гіпербола). Ми прийшли до тих же результатів, що й раніше, отриманих іншим шляхом. Тепер можна вирахувати й решту параметрів орбіти, а у випадку еліптичного руху – отримати вираз третього закону Кеплера.

## 1.6 УРАХУВАННЯ РУХУ СОНЦЯ

При розгляді планетарних рухів ми не враховували руху Сонця, вважаючи його масу нескінченно великою порівняно з масою планети. Для прискорення планети ми писали

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}_{абс} = \vec{F}\,, \tag{1}$$

де $\vec{F} = -G\dfrac{Mm}{r^3}\vec{r}$ – ньютонівська сила гравітаційного притягання, яка діє на планету з боку Сонця. Символом $\vec{a}_{абс}$ позначено прискорення планети відносно деякої інерціальної системи відліку, наприклад системи Коперніка. Урахуємо тепер рух Сонця. Щоб отримати рівняння руху планети відносно Сонця, необхідно масу планети $m$ замінити на зведену масу $\mu = \dfrac{Mm}{M+m}$. У результаті рівняння відносного руху набуде вигляду $\mu\ddot{\vec{r}} = \mu\vec{a}_{відн} = \vec{F}$. Підставивши вираз для $\mu$, отримаємо

$$m\vec{a}_{відн} = \left(1+\frac{m}{M}\right)\vec{F}\,. \tag{2}$$

Формально справа відбувається так, якби Сонце залишалося нерухомим, а гравітаційна стала збільшилася б у $(1+m/M)$ разів. Тому для відносного руху перший і другий закони Кеплера залишаються справедливими. Проте третій закон повинен бути уточнений. Для цього достатньо у формулі для сталої Кеплера гравітаційну сталу $G$ замінити на $G(1+m/M)$. Ця заміна дає співвідношення:

$$\frac{a^3}{T^2(M+m)} = \frac{G}{4\pi^2}\,. \tag{3}$$

Вона показує, що відношення $a^3/T^2(M+m)$ є універсальною сталою, тобто не залежить ні від мас взаємодіючих тіл, ні від відстані між ними. Таким чином, третій закон Кеплера для відносно руху не зовсім точний. Та обставина, що для планет Сонячної системи він виконується з великою точністю, пов'язана з тим, що маса планети дуже мала порівняно з масою Сонця. Варто звернути увагу ще й на співвідношення

$$\frac{a_{відн}}{a_{абс}} = 1+\frac{m}{M}\,, \tag{4}$$

яке безпосередньо випливає з порівняння формул (1) і (2).

2. На формулах $K = \dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$ і $\dfrac{a^3}{T^2(M+m)} = \dfrac{G}{4\pi^2}$ ґрунтується визначення мас планет, які мають супутників, а також мас подвійних зірок. Якщо маса супутника нехтовно мала порівняно з масою планети, то для руху супутника справедливий третій закон Кеплера у формулі $K = a^3/T^2$. Сталу Кеплера $K$ можна вирахувати, вимірявши розміри орбіти і час обертання супутника. Знаючи гравітаційну сталу $G$, за формулою $K = \dfrac{GM}{4\pi^2}$ можна обчислити масу планети $M$ в абсолютних одиницях. В астрономії, проте, за одиницю маси

обирають масу Землі. Для визначення мас планет у таких одиницях не потрібно знати значення гравітаційної сталої, яке визначене наближено.

У якості прикладу знайдемо відношення маси Сонця $M_C$ до маси Землі $m_З$. Масу Землі будемо вважати нехтовно малою порівняно з масою Сонця. Так само нехтуємо масою Місяця порівняно з масою Землі. Для земної орбіти маємо $a_З = 1{,}496 \cdot 10^8$ км, $T_З = 365{,}26$ діб, для орбіти Місяця $a_M = 3{,}844 \cdot 10^5$ км, $T_M = 27{,}32$ діб. За наведеними вище формулами отримуємо:

$$\frac{M_C}{m_З} = \left(\frac{a_З}{a_M}\right)^3 \left(\frac{T_M}{T_З}\right)^2 = 3{,}298 \cdot 10^5.$$

У дійсності, як видно з формули $\frac{a^3}{T^2(M+m)} = \frac{G}{4\pi^2}$, таким шляхом знаходиться відношення $\frac{M_C + m_З}{m_З + m_M}$. Цей метод дає відношення мас центральних тіл, навколо яких обертаються супутники, лише у тому випадку, коли маса кожного супутника нехтовно мала порівняно з масою відповідного центрального тіла. Ця умова ідеально виконується для штучних супутників. Наприклад, можна визначити відношення мас Місяця і Землі, якщо виміряти параметри орбіт штучних супутників, які обертаються навколо них.

## 1.7. РУХ ТІЛ ІЗ ЗМІННОЮ МАСОЮ. РЕАКТИВНИЙ РУХ

Принцип реактивного руху можна описати на основі закону збереження імпульсу замкнутої системи. Стосовно руху ракети його можна тлумачити наступним чином. За відсутності зовнішніх силових полів повний імпульс ракети і вилітаючих із її сопла газів залишається сталим. Тому при витікання газів ракета набуває швидкості у протилежному напрямі. Поклавши ці міркування в основу подальших викладок, отримаємо рівняння, яке описує рух ракети.

Нехай у деякий момент часу ракета у деякій інерціальній системі відліку має швидкість $\vec{\upsilon}$. Розглянемо другу інерціальну систему відліку, в якій у даний момент часу ракета нерухома. Якщо двигун ракети працює і за проміжок часу $\Delta t$ викидає гази масою $\Delta m$ з швидкістю $\upsilon_{відн}$ відносно ракети, то через $\Delta t$ швидкість ракети в цій системі буде відмінна від нуля і дорівнює $\Delta\vec{\upsilon}$. Застосуємо до розглядуваної системи «ракета плюс гази» закон збереження імпульсу. У початковий момент ракета і гази у вибраній системі перебувають у спокої, тому повний імпульс дорівнює нулю. Через $\Delta t$ імпульс ракети дорівнює $m\Delta\vec{\upsilon}$, а імпульс виштовхнутих газів $\Delta m_г\vec{\upsilon}_{відн}$, тому $m\Delta\vec{\upsilon}+\Delta m_г\vec{\upsilon}_{відн}=0$.

Повна маса системи зберігається, тому маса виштовхнутих газів дорівнює зменшенню маси ракети: $\Delta m_г+\Delta m=0$. Тепер попереднє рівняння після ділення на $\Delta t$ запишеться у вигляді $m\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\vec{\upsilon}_{відн}\frac{\Delta m}{\Delta t}$.

Переходячи до границі при $\Delta t\to 0$, отримуємо рівняння руху тіла змінної маси за умови відсутності зовнішніх сил:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{\upsilon}_{відн}\frac{dm}{dt}. \qquad (1)$$

Рівняння (1) має форму другого закону Ньютона. Проте маса ракети $m$ тут не постійна, а зменшується з часом через втрату речовини, тому $dm/dt<0$. Праву частину рівняння (1) можна розглядати як реактивну силу, тобто силу, з якою діють на ракету вилітаючі з неї гази.

Рівняння (1) отримане у певній інерціальній системі відліку, але, зрозуміло, що внаслідок принципу відносності воно справедливе і в будь-якій іншій інерціальній системі відліку.

Якщо крім реактивної сили на ракету діють інші зовнішні сили, то їх необхідно додати в праву частину рівняння (1). Це рівняння вперше було отримано І.В.Мещерським і носить його ім’я.

Нехай ракета знаходиться у вільному просторі, де на неї не діють зовнішні сили. Після включення двигуна ракета набирає швидкість, рухаючись по прямій лінії. Спроектувавши векторне рівняння (1) на напрям руху ракети, отримаємо

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=-\upsilon_{вінд}\frac{dm}{dt}. \qquad (2)$$

По мірі роботи двигуна маса ракети зменшується. Тому в рівнянні (2) масу розглядатимемо як функцію набраної ракетою швидкості. Тоді швидкість зміни маси можна представити наступним чином:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (3)$$

Підставляючи (3) у (2), отримаємо $\frac{dm}{d\upsilon} = -\frac{1}{\upsilon_{відн}} m$. (4)

Припустимо, що $\upsilon_{відн} = const$, що доволі точно виконується у сучасних ракетах. У цьому випадку рівняння (4) дозволяє визначити масу ракети як функцію швидкості. Дійсно, згідно (4) похідна шуканої функції $dm/d\upsilon$ пропорційна самій функції $m$. А, як відомо, таку властивість має експоненціальна функція. Тому розв'язок рівняння (4) при $\upsilon_{відн} = const$ має вид

$$m = C\exp(-\upsilon/\upsilon_{відн}). \qquad (5)$$

Значення сталої $C$ визначається з початкових умов: при $\upsilon = 0$ маса ракети дорівнює початковій масі $m_0$. Із (5) при $\upsilon = 0$ отримуємо, що $C = m_0$. Таким чином, маса ракети $m$ у той момент, коли її швидкість дорівнює $\upsilon$, визначається за формулою

$$m = m_0 \exp(-\upsilon/\upsilon_{відн}), \qquad (6)$$

яка називається формулою Ціолковського.

Формула Ціолковського дозволяє розрахувати запас палива, який необхідний для надання ракеті певної кінцевої швидкості $\upsilon$. Згідно з (6) відношення початкової маси ракети $m_0$ до її кінцевої маси $m$ дорівнює $\exp(\upsilon/\upsilon_{відн})$ і буде тим меншим, чим більша швидкість витікання газів $\upsilon_{відн}$. У сучасних ракетах на хімічному паливі швидкість газової струмини складає $3 \div 4{,}5$ км/с. Припустимо, що ракеті необхідно надати першу космічну швидкість, тобто таку швидкість, за якої вона може стати супутником Землі. Ця швидкість приблизно дорівнює 8 км/с. При швидкості витікання газів $\upsilon_{відн} = 2$ км/с формула Ціолковського дає $m_0/m = 54{,}6$, тобто практично вся початкова маса ракети припадає на паливо. При $\upsilon_{відн} = 4$ км/с відношення $m_0/m$ складає 7,4, але і в цьому випадку запас палива $(m_0 - m)$ повинен переважати масу космічного корабля $m$ у декілька разів.

Як відомо, технічні складнощі, пов'язані з досягненням космічних швидкостей, долаються за допомогою використання багатоступінчастих ракет.

Для здійснення міжзоряних польотів космічних кораблів необхідні надто великі швидкості. Наприклад, найближчі до нас зорі знаходяться на відстані біля 4-х світлових років, тому для експедиції прийнятної тривалості необхідні швидкості не менше від 0,1 швидкості світла ($\upsilon \approx 0{,}1c$). Формула Ціолковського показує, що для досягнення таких швидкостей ракети на хімічному паливі абсолютно не придатні. Якщо навіть припустити, що вдасться забезпечити швидкість газової струмини $\upsilon_{відн} = 10$ км/с, то за вимоги $\upsilon = 0{,}1$ c відношення $m_0/m$ складатиме $e^{3000} \approx 10^{1300}$. Це означає, що при корисній масі $m$ (корпус космічного корабля, космонавти, обладнання, системи життєзабезпечення і т.п.) всього лише одна тонна – стартова маса ракети повинна складати $10^{1300}$ тонн. Ця величина перевершує найбагатшу уяву. Для порівняння варто вказати, що маса нашої Галактики складає «лише» $3 \cdot 10^{38}$ тонн.

## 1.8. КОСМІЧНІ ШВИДКОСТІ

Аналітичний розв’язок динамічної задачі про рух тіла в центральному гравітаційному полі, наприклад, про рух планет навколо Сонця, або штучних супутників Землі, пов’язаний зі значними математичними труднощами. Проте відповіді на багато питань, пов’язаних з цим рухом, можна порівняно просто отримати за допомогою законів збереження.

Насамперед визначимо другу космічну швидкість $\upsilon_{II}$, тобто мінімальну швидкість, яку необхідно надати тілу, що знаходиться на поверхні Землі для того, щоб воно віддалилося на нескінченність (її часто ще називають швидкістю «звільнення» або «втечі»). Простіше всього це можна зробити, використавши закон збереження енергії. Будемо вважати, що двигуни ракети спрацьовують безпосередньо біля поверхні Землі, що вони надають ракеті необхідну швидкість і виключаються. Кінетична енергія тіла під час запуску дорівнює $m\upsilon_{II}^2/2$, а потенціальна енергія поблизу поверхні Землі дорівнює ($mgR$). Повна механічна енергія $E=\dfrac{m\upsilon_{II}^2}{2}-mgR$ у вільному польоті залишається незмінною. У кінцевому стані, коли ракета віддалилася на нескінченність від Землі, її потенціальна енергія дорівнює нулю. Очевидно, що необхідна початкова швидкість буде мінімальною, якщо в кінцевому стані швидкість ракети буде рівною нулю. Отже, в кінцевому стані повна механічна енергія дорівнює нулю, і в наслідок закону збереження енергії

$$\frac{m\upsilon_{II}^2}{2}-mgR=0, \text{ звідки } \upsilon_{II}=\sqrt{2gR}=11{,}2 \text{ км/с}. \qquad (1)$$

Ракета віддалиться на нескінченність незалежно від того, в якому напрямі надана їй друга космічна швидкість, хоч траєкторії руху при цьому, зрозуміло, будуть різними.

Звертаємо увагу, що наведені вище міркування, проведені в системі відліку, пов’язаній із Землею. Це цілком природно, оскільки за самою постановкою задачі очевидно, що Земля вважається нерухомою. Точніше кажучи, система відліку, зв’язана з Землею, вважається інерціальною, а притяганням Сонця і тим паче інших планет нехтуємо. Проте спробуємо у тому ж самому наближенні (тобто, нехтуючи притяганням до Сонця) розглянути це питання з точки зору системи, зв’язаної з Сонцем. Це цілком законно, оскільки геліоцентрична система відліку являється інерціальною з більшою степінню точності, ніж геоцентрична. Оскільки притягання до Сонця тут не враховується, то Сонце є лише тілом, з яким зв’язана система відліку, а не фізичним тілом, яке впливає на рух.

Позначимо швидкість руху Землі через $\vec{\upsilon}$ і припустимо для простоти, що початкова швидкість тіла відносно Землі $\vec{\upsilon}_{II}$ співпадає з нею за напрямом. Застосуємо закон збереження енергії враховуючи, що, віддалившись від Землі на нескінченність, тіло зупиняється відносно Землі, тобто у розглядуваній системі відліку має ту ж швидкість, що й Земля:

$$\frac{m(\upsilon_{II}+\upsilon)^2}{2}-mgR=\frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (2)$$

Звідси знаходимо $\upsilon_{II}=\sqrt{2gR+\upsilon^2}-\upsilon$, (3)

що не співпадає з отриманим раніше результатом (1). Який же результат вважати достовірним? Цілком очевидно, що формула (3) не може бути правильною. До неї входить $\upsilon$ – відносна швидкість двох використаних нами систем відліку. Але оскільки всі інерціальні системи рівноправні, то відповідь не може залежати від $\upsilon$. У чому ж справа? У справедливості закону збереження енергії сумніватися не варто. Вираз для потенціальної енергії у всіх інерціальних системах відліку однаковий. Отже, у рівнянні балансу енергії (2) «щось» не враховано. Що ж саме? Єдине, що ми могли не врахувати, – це зміна кінетичної енергії Землі. Насправді, при віддаленні тіла від Землі сила тяжіння діє не лише на тіло, але й на Землю, впливаючи на її рух. Щоправда, зміна кінетичної енергії Землі при цьому надто мала, бо її маса $M$ набагато більша, ніж маса тіла $m$. Та все ж спробуємо цю зміну врахувати. Позначимо швидкість Землі після відділення тіла на нескінченність через $\upsilon_1$ і запишемо закон збереження енергії у такому вигляді:

$$\frac{M\upsilon^2}{2}+\frac{m(\upsilon_{II}+\upsilon)^2}{2}-mgR=\frac{M\upsilon_1^2}{2}+\frac{m\upsilon_1^2}{2}. \qquad (4)$$

Швидкість тіла в кінцевому стані тепер дорівнює $\upsilon_1$, оскільки тіло, як і раніше, повинно бути нерухомим відносно Землі. Величину $\upsilon_1$ можна визначити за допомогою закону збереження імпульсу, оскільки за відсутності зовнішніх сил, тобто в замкнутій системі взаємодіючих тіл, повний імпульс зберігається. Тому $M\upsilon+m(\upsilon_{II}+\upsilon)=M\upsilon_1+m\upsilon_1$. (5)

Визначаючи $\upsilon_1$ з рівняння (5) і підставляючи його в (4), отримаємо

$$\upsilon_{II}^2=\left(1+\frac{m}{M}\right)2gR. \qquad (6)$$

Отриманий вираз уже набагато ближчий до попереднього результату, ніж (3), але все ж відрізняється від нього лишнім множником $\left(1+\frac{m}{M}\right)$. Зауважимо, що коли вважати масу тіла набагато меншою від маси Землі, тобто $m/M<<1$, то доданком $m/M$ можна знехтувати порівняно з одиницею, і формула (6) дає попередній результат $\upsilon_{II}=\sqrt{2gR}$.

Не важко здогадатися, що припущення $m/M\to 0$ з самого початку було неявно використане при розв'язанні задачі в системі відліку, зв'язаній із Землею. Дійсно, Земля вважалася нерухомою як у початковому, так і в кінцевому стані, незважаючи на те, що на неї, як і на тіло, діяла сила тяжіння. А це можливо лише за умови, якщо $m/M\to 0$.

Отже, вираз (6) є більш загальним, ніж (1). Він дає можливість визначити другу космічну швидкість у тому випадку, коли маса тіла, яке запускається із Землі, і самої Землі порівняні між собою. Проте тепер виникає інше питання. Чому нехтування зміною кінетичної енергії Землі (при

$m/M \to 0$) в геоцентричній системі відліку допускається, а в геліоцентричній призводить до явно нерівнозначного результату (3)? Адже зміна швидкості Землі однакова у будь-якій інерціальній системі відліку. У цьому легко переконатися, переписавши формулу (5) у дещо іншому вигляді:

$$m\upsilon_{II} = (M+m)(\upsilon_1 - \upsilon). \tag{7}$$

Видно, що зміна швидкості Землі $\Delta\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon$ не залежить від її початкової швидкості $\upsilon$, тобто від вибору системи відліку. Проте зміна кінетичної енергії Землі в різних системах відліку буде різною: у геоцентричній системі це $M(\Delta\upsilon)^2/2$, а в геліоцентричній

$$\frac{M(\upsilon+\Delta\upsilon)^2}{2} - \frac{M\upsilon^2}{2} = M\upsilon\Delta\upsilon + \frac{M(\Delta\upsilon)^2}{2}. \tag{8}$$

При $m << M$, як видно із (7), $\Delta\upsilon << \upsilon_{II}$. Оскільки швидкість $\upsilon$ більша від другої космічної швидкості, то перший доданок у правій частині (8) набагато більший від другого, тобто зміна кінетичної енергії в геліоцентричній системі набагато більша від такої зміни в геоцентричній системі, і її не можна не враховувати у рівнянні балансу енергії.

Зрозуміло, що формула (6) може бути отримана також і в геоцентричній системі відліку, якщо там врахувати зміну кінетичної енергії Землі.

Розглянутий приклад наочно показує, наскільки обережно слід підходити до питання про те, що є суттєвим у розглядуваному явищі, а чим можна нехтувати. Всі інерціальні системи рівноправні в тому сенсі, що закони природи в них одинакові. Тому при точному розв’язанні задачі вибір такої системи байдужий. Проте при знаходженні наближеного рішення нехтування, які допустимі в одній системі відліку, можуть виявитися абсолютно непридатними в іншій.

Перейдемо тепер до визначення третьої космічної швидкості $\upsilon_{III}$, тобто мінімальної швидкості, яку необхідно надати тілу поблизу поверхні Землі, для того, щоб воно змогло покинути межі Сонячної системи. Будемо міркувати наступним чином. Забудемо тимчасово про земне тяжіння і знайдемо мінімальну швидкість $\upsilon_1$, яку необхідно надати тілу, яке знаходиться від Сонця на відстані $r$, рівній радіусу земної орбіти, щоб воно могло подолати притягання Сонця. Цю швидкість легко знайти, використовуючи закон збереження енергії. Оскільки ми тимчасово нехтуємо полем тяжіння Землі, то необхідно просто забезпечити вимогу, щоб сума кінетичної енергії тіла $m\upsilon_1^2/2$ і потенціальної енергії в полі тяжіння Сонця $-GmM_C/r$ дорівнювала нулю: тіло повинно залишатися на нескінченно великій відстані від Сонця, де потенціальна енергія дорівнює нулю. Звідси

$$\upsilon_1^2 = 2G\frac{M_C}{r}. \tag{9}$$

Легко бачити, що ця швидкість у $\sqrt{2}$ разів більша від швидкості Землі на коловій орбіті її руху навколо Сонця $\upsilon = 29{,}8$ км/с. Тіло віддалиться на нескінченність незалежно від того, в якому напрямі йому надана швидкість

$\upsilon_1$. Таким чином, $\upsilon_1$ дорівнює приблизно 42,1 км/с. Це дуже багато, проте, зрозуміло, що ми можемо використовувати рух Землі і запускати тіло в той бік, куди рухається Земля по орбіті. Тоді тілу необхідно надати додаткової швидкості, рівної $(\sqrt{2}-1)\upsilon \approx 12{,}3$ км/с.

Тепер можна знайти й саму третю космічну швидкість. Для цього достатньо лише зрозуміти, що насправді швидкість 12,3 км/с тіло повинно мати після того, як воно подолає притягання до Землі. Тому сума кінетичної енергії тіла при запускові $m\upsilon_{III}^2/2$ і потенціальної енергії на поверхні Землі – $mgR$ повинна дорівнювати енергії руху з швидкістю 12,3 км/с після подолання земного тяжіння:

$$\frac{m\upsilon_{III}^2}{2} - mgR = \frac{m(\sqrt{2}-1)^2\upsilon^2}{2}, \text{ звідки } \upsilon_{III}^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2\upsilon^2 + 2gR. \qquad (10)$$

Цій формулі можна надати іншого вигляду, якщо пригадати, що $\sqrt{2gR}$ дорівнює другій космічній швидкості $\upsilon_{II}$:

$$\upsilon_{III}^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2\upsilon^2 + \upsilon_{II}^2. \qquad (11)$$

Підставляючи в (11) числові значення орбітальної швидкості Землі $\upsilon \approx 29{,}8$ км/с і другої космічної швидкості $\upsilon_{II} \approx 11{,}2$ км/с, отримаємо числове значення $\upsilon_{III}$: $\upsilon_{III} \approx 16{,}7$ км/с.

Отже, відповідь отримана. Але не з'ясованим залишається питання: чому міркування проводилися у два етапи? Іншими словами, чому закон збереження енергії використовувався двічі – спочатку для процесу виходу тіла з поля тяжіння Сонця, а потім – з поля тяжіння Землі? Чи не можна застосувати закон збереження енергії один раз до всього процесу загалом, передбачивши вимогу, щоб повне енергія тіла, тобто сума його кінетичної енергії і потенціальних енергій у полях тяжіння Землі і Сонця, дорівнювала нулю:

$$\frac{m(\upsilon+\upsilon_{III})^2}{2} - mgR - G\frac{mM_C}{r} = 0\,? \qquad (12)$$

Уважний аналіз попереднього прикладу підказує, що так писати не можна. Дійсно, якщо виразити другий доданок у формулі (12) через другу космічну швидкість $\upsilon_{II}^2 = 2gR$, а третій доданок – через швидкість Землі по коловій орбіті навколо Сонця $\upsilon^2 = GM_C/r$, то ми не отримаємо для третьої космічної швидкості формули (11). І зрозуміло чому: у виразі (12) не врахована зміна кінетичної енергії Землі при віддаленні від неї запущеного тіла. Хоча ця зміна і не значна, але, як було показано вище, врахування її в геліоцентричній системі необхідне. Тепер врахуємо зміну кінетичної енергії Землі. Зрозуміло, що при цьому ми будемо нехтувати зміною кінетичної енергії Сонця: як при обчисленні другої космічної швидкості можна було нехтувати змінами кінетичної енергії Землі при використанні зв'язаної з нею системи відліку, так і тут змінами кінетичної енергії Сонця можна знехтувати при використанні геліоцентричної системи відліку. Її необхідно було б враховувати, якби ми використовували яку-небудь інерціальну систему відліку, у якій Сонце рухається, наприклад систему відліку, зв'язану з якою-небудь Галактикою. З урахуванням сказаного, закон збереження енергії в геліоцентричній системі відліку необхідно записувати в наступному вигляді:

$$\frac{m(\upsilon+\upsilon_{III})^2}{2}+\frac{M\upsilon^2}{2}-mgR-G\frac{mM_C}{r}=\frac{M\upsilon_2^2}{2}, \tag{13}$$

де $M$ – маса Землі; $\upsilon_2$ – швидкість Землі після запуску тіла. Третій і четвертий доданки у лівій частині (13), як і раніше, виразимо відповідно через другу космічну швидкість і швидкість Землі на коловій орбіті. Перенесемо другий доданок з лівої частини в праву; тоді в правій частині буде стояти зміна кінетичної енергії Землі, яке можна представити у виді:

$$\frac{M}{2}\left(\upsilon_2^2-\upsilon^2\right)=\frac{M}{2}\left(\upsilon_2+\upsilon\right)\left(\upsilon_2-\upsilon\right)\approx M\upsilon(\upsilon_2-\upsilon). \tag{14}$$

Оскільки маса тіла набагато менша від маси Землі, то зміна швидкості Землі при віддаленні від неї тіла теж буде незначною, тому сума $(\upsilon_2+\upsilon)$ приблизно замінена на $2\upsilon$. Не важко здогадатися, що це відповідає нехтуванню другим доданком у правій частині формули (8).

Для знаходження зміни швидкості Землі $\Delta\upsilon=\upsilon_2-\upsilon$ скористаємося законом збереження імпульсу. Знехтуємо впливом поля тяжіння Сонця на рух Землі і запущеного тіла протягом всього часу, який воно витрачає на вихід із зони дії земного тяжіння. Оскільки швидкість тіла при виході з цієї зони дорівнює $\upsilon_1$, то отримуємо: $m(\upsilon+\upsilon_{III})+M\upsilon=m\upsilon_1+M\upsilon_2$.

Звідси $M(\upsilon_2-\upsilon)=m(\upsilon+\upsilon_{III}-\upsilon_1)=m\left[\upsilon_{III}\left(\sqrt{2}-1\right)\upsilon\right]$, (15)

оскільки $\upsilon_1=\sqrt{2}\upsilon$. Звертаємо увагу на те, що зміна швидкості Землі $\Delta\upsilon$ прямує до нуля при $m/M\to 0$, тобто запуск космічних апаратів практично не впливає на рух самої Землі. Помноживши (15) на $\upsilon$, отримаємо, згідно з (14), зміну кінетичної енергії Землі. Підставивши цю зміну у рівняння балансу енергії (13), отримаємо рівняння для визначення третьої космічної швидкості $\upsilon_{III}$: $(\upsilon+\upsilon_{III})^2-2\upsilon_{II}^2-2\upsilon^2=2\upsilon\left[\upsilon_{III}\left(\sqrt{2}-1\right)\upsilon\right]$.

Розв'язавши це рівняння, знайдемо для $\upsilon_{III}$ попереднє значення, яке вже давала формула (11).

Звернемо увагу на наступну обставину. Не дивлячись на те, що закон збереження енергії (13) був записаний для всього процесу в цілому, при знаходженні зміни швидкості Землі нам довелося скористатися законом збереження імпульсу в наближеному вигляді лише для певного етапу процесу, а саме для виходу тіла лише із зони дії тяжіння Землі. При цьому вважалося, що на другому етапі, тобто при віддаленні тіла із зони дії сонячного тяжіння, швидкість Землі вже не змінювалася за модулем. Таким чином, фактично нам, так чи інакше, довелося проводити поетапний наближений розгляд процесу. Спроба застосувати закон збереження імпульсу до всього процесу не привела б до бажаного результату. Справа в тому, що тут ми стикаємося з так званою «задачею трьох тіл», які рухаються під дією сил взаємного притягання. Точний розв'язок цієї задачі в загальному випадку зустрічає колосальні математичні труднощі і може бути доведений до кінця лише в деяких частинних випадках.

При розв'язанні практичних задач космічної динаміки зазвичай використовують наближений підхід, оснований на розбитті (поділі) простору на так звані сфери дії окремих небесних тіл. Так, наприклад, у розглянутому прикладі спочатку розглядався рух тіла лише під дією притягання до Землі. При цьому, строго кажучи, нехтується не вплив Сонця на рух тіла, а різниця у впливах Сонця на рухи Землі і тіла, тобто фактично нехтується неоднорідність поля тяжіння Сонця у сфері дії Землі. Після виходу тіла із сфери дії Землі розглядався його рух лише в полі тяжіння Сонця. Розмір сфери дії Землі визначається тією відстанню, на якій різниця прискорень, які надає Сонце Землі і запущеному тілу, стає порівняною з прискоренням, яке надає тілу Земля. На відміну від сфери дії Землі, «сфера притягання Землі відносно Сонця», яка визначається як область, на межі якої гравітаційні прискорення тіла від Землі і від Сонця рівні за величиною, не відіграє жодної ролі в космічній динаміці.

Проілюструємо можливість застосування наведених теоретичних міркувань до розв'язання типових задач у загальному вигляді.

## РОЗДІЛ 2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

**Задача 2.1.** Деяка планета рухається навколо Сонця по еліптичній орбіті. Відстань від перигелію її орбіти до Сонця дорівнює $r_0$, швидкість планети в перигелії дорівнює $\upsilon_0$. Визначити радіус кривизни траєкторії планети в перигелії і афелії, відстань від афелію $r_a$ до Сонця, швидкість $\upsilon_a$ планети в афелії. Довести, що рух планети по еліптичній орбіті можливий лише в тому випадку, якщо її повна енергія від'ємна.

*Розв'язання*

Позначимо радіус кривизни в перигелії через $R_0$, кінетичну енергію планети в перигелії $K_0 = m\upsilon_0^2/2$ і потенціальну енергію $\Pi_0 = -GmM/r_0$. Радіус кривизни в перигелії визначимо з другого закону Ньютона

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = G\frac{mM}{r_0^2}\text{, звідки } R_0 = \frac{m\upsilon_0^2 r_0^2}{GMm} = -\frac{2r_0K_0}{\Pi_0}.$$

В афелії радіус кривизни такий же, як і в перигелії, оскільки еліпс – симетрична фігура. Згідно з другим законом Ньютона маємо: $\frac{m\upsilon_a^2}{R_0} = G\frac{mM}{r_a^2}$.

Згідно із законом збереження енергії повна механічна енергія планети

$$E = \frac{m\upsilon_0^2}{2} - \frac{GmM}{r_0} = \frac{m\upsilon_a^2}{2} - G\frac{mM}{r_a}.$$

Підставивши в це рівняння відповідні значення швидкості $\upsilon_0$ і $\upsilon_a$, отримуємо: $G\frac{mMR_0}{2r_0^2} - G\frac{mM}{r_0} = G\frac{mMR_0}{2r_a^2} - G\frac{mM}{r_a}$.

Після відповідних скорочень отримаємо квадратне рівняння: $r_a^2(2r_0 - R_0) - 2r_a r_0^2 + R_0 r_0^2 = 0$.

Перший корінь рівняння $r_a = r_0$. Це означає, що в цьому випадку еліпс вироджується в коло з радіусом $r_0$. Тоді радіус кривизни $R_0 = r_0$, а отже, швидкість руху планети на орбіті $\upsilon = \upsilon_0 = \sqrt{GM/r_0}$.

Другий корінь рівняння $r_a = \frac{r_0R_0}{2r_0 - R_0} = -\frac{r_0K_0}{E}$.

Оскільки відстань від афелія до Сонця – суттєво додатня величина, то $E < 0$. Це означає, що планета може рухатися по еліптичній орбіті лише в тому випадку, якщо сума $K$ і $\Pi$ (тобто $E$) буде від'ємною величиною. Зокрема, для колової орбіти $E = -G\frac{mM}{2r_0}$.

**Задача 2.2.** а) Довести, що площа еліптичної орбіти дорівнює $\pi ab$. б) Вивести третій закон Кеплера для еліптичних орбіт. в) Довести, що орбіти всіх тіл, для яких на одиницю маси припадає однакова енергія, відповідають однаковим періодом обертання. (Для спрощення вважати, що $m << M$).

*Розв'язання*

а) Еліпс можна отримати із кола з радіусом $b$, якщо збільшити масштаб уздовж однієї із осей координат в $a/b$ разів. При збільшенні масштабу уздовж однієї з осей площі фігур збільшуються у стільки ж разів, тому площа еліпса дорівнює $\pi b^2 \dfrac{a}{b} = \pi ab$, де $a$ – довжина великої півосі.

б) Обчислимо швидкість планети в апогеї, виходячи із закону збереження енергії:

$$\frac{m\upsilon_A^2}{2} - \frac{GmM}{a(1+e)} = -\frac{GmM}{2a}, \text{ звідки } \upsilon_A^2 = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}.$$

Враховуючи, що $T = 2\pi R/\upsilon$, отримуємо вираз третього закону Кеплера: $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2}{GM} a^3$.

в) Скористаємося формулою, яка дає можливість виразити довжину великої півосі $a$ через повну енергію і масу планети: $a = \dfrac{GM}{2} \cdot \dfrac{m}{|E|}$.

Підставивши цей вираз для $a$ у формулу для періоду $T$, отримаємо

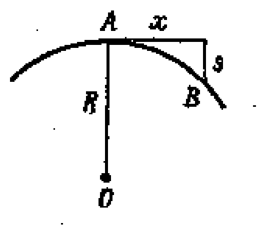
$$T^2 = \frac{\pi^2 G^2 M^2}{2} \left( \frac{m}{|E|} \right)^3.$$

Звідси й слідує висновок, що орбіти всіх тіл, для яких на одиницю їх маси припадає однакова енергія, відповідають однаковим періодам обертання (період залежить лише від відношення $m$ до $|E|$).

**Задача 2.3.** Супутник рухається по коловій орбіті з радіусом $R$ навколо великого небесного тіла з масою $M$. Маса супутника $m$. а) Використовуючи співвідношення $s = at^2/2$, отримати вираз для доцентрового прискорення супутника. Виразити це прискорення через орбітальну швидкість і радіус його орбіти. б) Покладаючи $ma = GMm/R^2$, отримати третій закон Кеплера.

*Розв'язання*

а) Оскільки супутник рухається по коловій орбіті з радіусом $R$, то змістившись на $x$ у горизонтальному напрямі, він одночасно переміститься на відстань $s$ по вертикалі. Ці величини зв'язані наступним співвідношенням: $\dfrac{x}{s} = \dfrac{2R-s}{x} \approx \dfrac{2R}{x}$ ($s$ вважається малим,




**Мал. 2.1.**

оскільки вважається, що пройшов зовсім невеликий час з того моменту, як супутник побував у точці $A$).

Таким чином, $s = \dfrac{x^2}{2R}$. Довжина дуги $AB$ (див. мал. 2.1.) дорівнює $\upsilon t$ ($\upsilon$ – швидкість супутника). Але якщо ця довжина мала, то можна вважати, що й $x \approx \upsilon t$; отже $s = \dfrac{\upsilon^2}{R} \cdot \dfrac{t^2}{2}$. З іншого боку, формула шляху для рівноприскореного руху має вигляд: $s = at^2/2$. Порівнюючи ці дві формули, бачимо, що доцентрове прискорення супутника $a_{дц} = \upsilon^2 / R$.

б) Якщо покласти $a = GM/R^2$, то $\dfrac{\upsilon^2}{R} = \dfrac{GM}{R^2}$ і $\upsilon^2 = \dfrac{GM}{R}$.

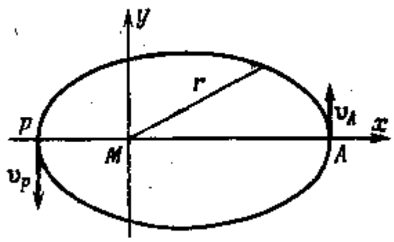
Період обертання супутника – це час, протягом якого він здійснює один повний оберт, так що $T = 2\pi R/\upsilon$, або $T^2 = \dfrac{4\pi^2 R^2}{\upsilon^2} = \dfrac{4\pi^2}{GM} R^3$.

Отриманий вираз для $T^2$ відповідає третьому законові Кеплера: квадрат періоду пропорційний кубові великої півосі орбіти (у нашому випадку колової орбіти – кубу її радіуса).

**Задача 2.4.** Невелике тіло (супутник) з масою $m$ рухається під впливом гравітаційного притягання по еліптичній орбіті навколо масивного тіла (планети) з масою $M$. Масивне тіло можна вважати нерухомим. Велика піввісь орбіти $a$, її ексцентриситет дорівнює $e$. Обчислити повну енергію тіла $E$. Звернути увагу на те, що результат не залежить від ексцентриситету.

*Розв'язання*

Помістимо початок системи координат у фокус еліпса (там же знаходиться тіло з масою $M$), а вісь $x$ спрямуємо уздовж його великої осі (мал. 2.2.). Повна енергія тіла масою $m$, дорівнює сумі його кінетичної і потенціальної енергій, тобто $E = m\upsilon^2/2 - GmM/r$ і, як відомо, залишається сталою. Отже $E$ – константа, яка не залежить ні від часу, ні від $r$.




**Мал. 2.2.**

Тому її зручно обрахувати для таких положень тіла $m$ на орбіті, у яких його радіус-вектор і швидкість порівняно просто виражаються через параметри еліпса. Такими положеннями на еліптичній орбіті є апогей і перигей, які на малюнку позначені точками $A$ і $P$. Для них $r_A = a(1+e)$, $r_P = a(1-e)$. Швидкості $\vec{\upsilon}_A$ і $\vec{\upsilon}_P$ перпендикулярні до осі $x$ (оскільки вони спрямовані по дотичних до еліпса). Крім того, згідно з другим законом Кеплера ці швидкості зв'язані між собою співвідношенням $\upsilon_A r_A = \upsilon_P r_P$. Таким чином

$$E_A = \frac{m\upsilon_A^2}{2} - \frac{GMm}{a(1+e)}; \qquad \upsilon_A r_A = \upsilon_P r_P;$$

$$E_P = \frac{m\upsilon_P^2}{2} - \frac{GMm}{a(1-e)}; \qquad E_A = E_P = E,$$

звідки випливає, $E\left(r_A^2 - r_P^2\right) = -GmM\left(r_A - r_P\right)$, тобто $E = -\dfrac{GmM}{2a}$.

Тепер можна більше детально розглянути рух супутника під дією сили гальмування $F = \rho S \upsilon^2$. Нехай у початковий момент часу $t = 0$ супутник знаходиться на стаціонарній орбіті з радіусом $r_0 = R + h$ і рухається з швидкістю $\upsilon_0 = \sqrt{gR}\left(R/r_0\right)$.

Повна енергія супутника на довільній коловій орбіті, як було вище доведено, дорівнює

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{GMm}{r}=-\frac{GmM}{2r}.$$

Але зміна енергії супутника в одиницю часу (за рахунок тертя) дорівнює потужності сил тертя; отже,

$$\frac{dE}{dt}=-\rho S\upsilon^2\upsilon=-\rho S\upsilon^3.$$

Вважаючи, що орбіта супутника незначно відрізняється від колової, можна покласти, що $m\upsilon^2/r=GmM/r^2$ або $m\upsilon^2=GmM/r$. Тоді $E=-m\upsilon^2/2$. Таким чином $\frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)=\rho S\upsilon^3$, звідки $\frac{d\upsilon}{\upsilon^2}=\frac{\rho S}{m}dt$; інтегруючи, отримуємо: $-\frac{1}{\upsilon}=\frac{\rho S}{m}t+C$. Сталу інтегрування знаходимо з початкових умов: $C=-1/\upsilon_0$. Остаточно знаходимо $\frac{1}{\upsilon_0}-\frac{1}{\upsilon}=\frac{\rho S}{m}t$. Отже, при гальмуванні швидкість супутника не зменшується, а збільшується (для будь-якого $t>0$ $\upsilon>\upsilon_0$). Зробимо оцінку зміни модуля швидкості за один період $T=2\pi r_0/\upsilon_0$. Після нескладних перетворень знаходимо:

$$\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon_0}=\frac{\upsilon-\upsilon_0}{\upsilon_0}=\frac{2\pi\rho Sr_0/m}{1-2\pi\rho Sr_0/m}\approx\frac{2\pi\rho Sr_0}{m}=2{,}5\cdot10^{-4}.$$

Одержаний результат стверджує, що використане наближення квазістаціонарності орбіти супутника цілком виправдане.

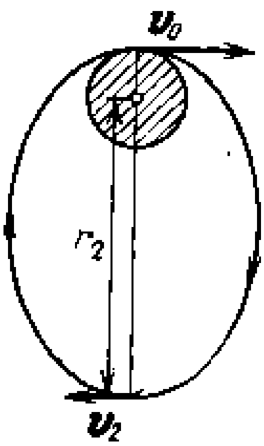
**Задача 2.5.** З полюса Землі запускають дві ракети, одну вертикально вгору, другу горизонтально. Початкові швидкості ракет дорівнюють $\upsilon_0$, причому $\upsilon_1<\upsilon_0<\upsilon_{II}$. Яка з ракет віддалиться на більшу відстань від центра Землі і в скільки разів? Опором повітря знехтувати.

*Розв'язання*

Розглянемо спочатку більш простий випадок, коли ракета запускається вертикально вгору. Оскільки єдиною силою, яка діє на ракету у вільному польоті, є сила притягання до Землі, спрямована вертикально вниз, то ракета полетить по прямій, яка проходить через центр Землі. Оскільки початкова швидкість ракети менша за другу космічну швидкість, то ракета на деякій відстані $r_1$ від центра Землі зупиниться і почне падати назад. Точку максимального віддалення простіше за все визначити з енергетичних міркувань. Дійсно, оскільки повна механічна енергія системи ракета-Земля зберігається, то енергія на початку польоту ($m\upsilon_0^2/2-mgR$) дорівнює енергії у точці зупинки ($-mgR^2/r_1$). Звідси знаходимо відстань максимального віддалення ракети від центра Землі: $r_1=\frac{2gR_2}{2gR-\upsilon_0^2}$.

Перед тим, як обчислити максимальне віддалення ракети при горизонтальному запускові, доцільно з’ясувати питання про форму траєкторії її польоту. Оскільки початкова швидкість ракети перевищує першу космічну, але менша за другу, то ракета рухатиметься по еліпсу, фокус якого знаходиться в центрі Землі, а початкова точка польоту є перигеєм еліпса. Велика вісь еліпса проходить через цю точку і центр Землі (див. мал. 2.3.). Точка найбільшого віддалення центра Землі – апогей – лежить на протилежному кінці великої осі еліпса, і швидкість ракети $\upsilon_2$ у цій точці, зрозуміло, відмінна від нуля і спрямована перпендикулярно до великої осі еліпса. Для знаходження $r_2$ знову можна скористатися законом збереження енергії: $\frac{m\upsilon_0^2}{2} - mgR = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_2}$.

Уже звідси видно, що максимальне віддалення ракети $r_2$ у цьому випадку буде менше, ніж $r_1$. Рівняння містить дві невідомі величини $\upsilon_2$ і $r_2$ і тому має нескінченну множину розв’язків.



**Мал. 2.3.**

Що б це значило? Якщо переглянути наведені міркування, то можна помітити, що рівняння закону збереження енергії не містить жодних ознак, які б характеризували точку $r_2$ як точку найбільшого віддалення. Точно таке ж рівняння можна отримати і для будь-якої іншої точки траєкторії. Відмітимо, що в першому випадку (при вертикальному запускові ракети) точка максимального віддалення була вже виділена у рівнянні закону збереження енергії як така, що лише в ній кінетична енергія ракети перетворюється в нуль. Яку ж умову необхідно добавити до рівняння балансу енергії в другому випадку, щоб врахувати особливості точки найбільшого віддалення, яка б відрізняла цю точку від решти точок траєкторії? Уже було відмічено, що в цій точці швидкість перпендикулярна до напряму на центр Землі. Точно таку ж властивість має й початкова точка траєкторії: за умовою початкова швидкість ракети $\upsilon_0$ перпендикулярна до напряму на центр Землі. У всіх решти точках траєкторії це не так. Цей факт дозволяє у простому вигляді застосувати другий закон Кеплера про сталість секторіальної швидкості при русі в центральному полі: $\upsilon_0 R = \upsilon_2 r_2$.

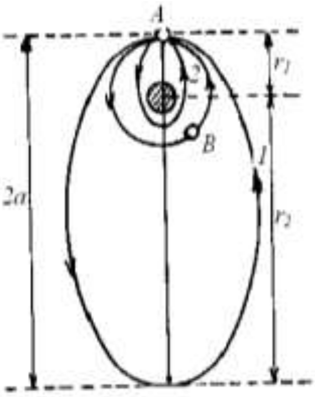
Тепер є система двох рівнянь для визначення двох невідомих $\upsilon_2$ і $r_2$, причому з наших міркувань випливає, що ця система повинна мати два розв’язки, відповідних перигею і апогею. Легко переконатися, що після підстановки $\upsilon_2 = \upsilon_0 R / r_2$ у рівняння балансу енергії, воно перетворюється у квадратне рівняння відносно $r_2$, корені якого дорівнюють $R$ і $r_2 = \upsilon_0 R / \left(2gR - \upsilon_0^2\right)$. Порівнюючи $r_1$ і $r_2$, отримуємо:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2gR}{\upsilon_0^2} = \left(\frac{\upsilon_{II}}{\upsilon_0}\right)^2 > 1.$$

**Задача 2.6.** Два штучних супутники Землі рухаються по одній і тій же коловій орбіті на відстані $L$ один від одного, рахуючи уздовж траєкторії. Період обертання супутників дорівнює $T$. Як можна зблизити супутники на орбіті, якщо на одному з них є двигун, з допомогою якого можна практично миттєво надати деяку додаткову швидкість $\Delta\upsilon$, малу порівняно з орбітальною швидкістю і спрямованою по дотичній до траєкторії? Як швидкість $\Delta\upsilon$ зв'язана з $L$ та $T$?

*Розв'язання*

На малюнку 2.4. зображено колову траєкторію радіусом $r_1$, по якій рухаються супутники на відстані $L$ один від одного. Якщо в довільній точці $A$ супутникові надати додаткової швидкості $\Delta\upsilon$ у напрямі орбітального руху, то він буде рухатися по еліптичній орбіті 1 з фокусом у центрі Землі. Період обертання супутника по такій орбіті більший, ніж по коловій. Якщо ж додаткову швидкість $\Delta\upsilon$ в точці $A$ спрямувати проти руху по орбіті, то супутник перейде на еліптичну орбіту 2, період обертання по якій менший від $T$.




**Мал. 2.4.**

З цих міркувань можна зробити висновок,які маневри варто робити для зближення супутників. Насамперед відмітимо, що оскільки колова і еліптична орбіти мають лише одну спільну точку $A$, то зустріч супутників може відбутися лише в цій точці. Тому зустріч може відбутися лише через проміжок часу після здійснення маневру, який має бути кратним періоду обертання супутника по еліптичній орбіті. Якщо двигун встановлений на супутнику, який рухається попереду, то його слід розігнати,

переводячи на орбіту 1. Якщо ж двигун знаходиться на супутникові, який рухається позаду, то його необхідно пригальмувати, переводячи на орбіту 2 (хоча це здається парадоксом: для того, щоб наздогнати, потрібно пригальмувати).

Для визначеності розглянемо перший випадок: у момент здійснення маневру пасивний супутник знаходиться в точці $B$, віддаленій на $L$ від точки $A$. Визначимо додаткову швидкість $\Delta\upsilon$, яку необхідно надати активному супутникові, щоб зустріч відбулася через один оберт. Позначимо через $\upsilon$ швидкість руху по коловій орбіті. Тоді період обертання $T_1$ по еліптичній орбіті повинен бути більшим від періоду обертання $T$ по коловій орбіті на час проходження дуги $L$ по коловій орбіті:

$$T_1 - T = L/\upsilon. \qquad (1)$$

Знайдемо зв'язок між періодом обертання $T_1$ по еліптичній орбіті і тією додатковою швидкістю $\Delta\upsilon$, яка переводить супутник на цю орбіту. На основі третього закону Кеплера:

$$T_1^2 = T^2 \frac{a^3}{r_1^3}, \qquad (2)$$

де $a = (r_1 + r_2)/2$ – велика піввісь еліпса.

Для того, щоб зв'язати відстань $r_2$ від центра Землі до апогея еліптичної орбіти з $\Delta\upsilon$, скористаємося другим законом Кеплера і законом збереження енергії: позначивши через $\upsilon_1 = \upsilon + \Delta\upsilon$ швидкість супутника в перигеї, а через $\upsilon_2$ – в апогеї еліптичної орбіти, отримаємо

$$r_1\upsilon_1 = r_2\upsilon_2, \qquad (3)$$

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_1} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_2}, \qquad (4)$$

де $m$ – маса супутника; $R$ – радіус Землі.

Виразивши $\upsilon_2$ з (3) і підставивши його в (4), отримаємо

$$\frac{1}{2}\upsilon_1^2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = \frac{gR^2}{r_1}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right). \qquad (5)$$

Зваживши, що $gR^2/r_1$ – це квадрат швидкості супутника на коловій орбіті радіусом $r_1$, з рівняння (5) отримуємо $r_2 = \dfrac{r_1}{2\upsilon^2/\upsilon_1^2 - 1}$.

Звідси велика піввісь еліпса $a = \dfrac{1}{2}(r_1 + r_2) = \dfrac{r_1}{2 - \left(\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon}\right)^2}$.

Оскільки за умовою задачі додаткова швидкість $\Delta\upsilon$ набагато менша за швидкість орбітального руху $\upsilon$, то $\dfrac{\upsilon_1^2}{\upsilon^2} = \left(1 + \dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon}\right)^2 \approx 1 + 2\dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon}$.

Тепер для великої півосі отримуємо: $a \approx r_1(1 + 2\Delta\upsilon/\upsilon)$. Підставимо отриманий вираз для $a$ в рівняння третього закону Кеплера (2). Підносячи відношення $a/r_1$ до кубу і враховуючи, що $\dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon} << 1$, знаходимо $T_1^2 \approx T^2(1 + 6\Delta\upsilon/\upsilon)$, звідки $T_1 - T = \dfrac{3T\Delta\upsilon}{\upsilon}$.

Порівнюючи цей вираз з (1), бачимо, що $\Delta\upsilon = \dfrac{L}{3T}$. (6)

Отже, якщо ми хочемо, щоб зустріч супутників відбулася через один оберт, то супутникові, який рухається попереду, необхідно надати додаткової швидкості $\Delta\upsilon$, величина якої визначається співвідношенням (6).

Щоб зустріч відбулася через $n$ обертів, то йому необхідно надати в $n$ разів меншу додаткову швидкість $\Delta\upsilon = L/(3nT)$. Таким чином, можна витратити тим менше палива для здійснення маневру, чим більше часу супутники будуть чекати зустрічі.

Після завершення маневру зближення, для того, щоб перевести супутник знову на колову орбіту, необхідно погасити надану йому додаткову швидкість, тобто ще раз включити двигун.

Другий випадок, коли необхідно «наздогнати» супутник, який рухається попереду, розглядається цілком аналогічно і приводить до такого ж виразу (6) для $\Delta\upsilon$.

**Задача 2.7.** На великій відстані від Землі метеорит рухається відносно неї з швидкістю $\upsilon_0$. Якби земне притягання було відсутнє, то метеорит пройшов би на відстані $l$ від центра Землі. Визначити, за якого найбільшого значення «прицільної» відстані $l$ метеорит буде захоплений Землею.

*Розв'язання*

На великій відстані від Землі, де потенціальну енергію взаємодії із Землею можна вважати рівною нулеві, метеорит має швидкість $\upsilon_0$ і його повна енергія дорівнює кінетичній $m\upsilon_0^2/2$. Якби початкова швидкість метеорита $\upsilon_0$ була рівна нулю, то рухаючись лише під дією сили притягання до Землі, він обов'язково упав би на Землю і при падінні мав би біля поверхні Землі швидкість, рівну другій космічній $\upsilon_{II} = 11{,}2$ км/с, у чому легко переконатися за допомогою закону збереження енергії. Зрозуміло, що траєкторія метеорита при цьому – пряма лінія, яка проходить через центр Землі. Якщо ж початкова швидкість метеорита відмінна від нуля, то він у полі земного тяжіння рухається по гіперболі і буде захоплений Землею лише тоді, коли ця гіпербола «зачепить» земну кулю. Зрозуміло, що при заданій прицільній відстані $l$ траєкторія метеорита буде тим менш викривлена, чим більша його швидкість $\upsilon_0$, так що достатньо швидкі метеорити благополучно минають Землю. Очевидно, що найменшій швидкості $\upsilon_0$, за якої метеорит ще пролетить повз Землі, відповідає траєкторія на мал. 2.5, *а*. І навпаки, при заданій початковій швидкості $\upsilon_0$ ця траєкторія відповідає найбільшій прицільній відстані $l$, при якій метеорит буде захоплений Землею. Отже, для отримання відповіді на поставлене питання необхідно розглянути траєкторію, яка доторкається до земної кулі.

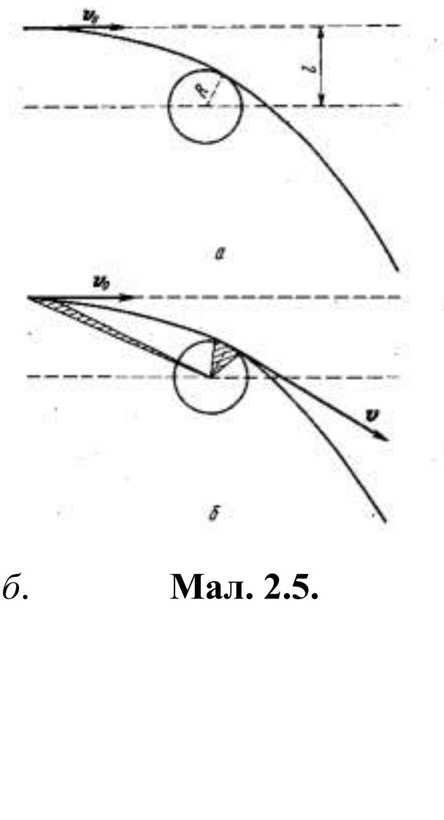
При русі метеорита в полі тяжіння Землі виконується закон збереження механічної енергії $\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} - mgR,$ (1)

де $\upsilon$ – швидкість метеорита у точці дотику, віддаленій від центра Землі на відстань $R$.

Другий закон Кеплера про сталість секторіальної швидкості при русі тіла в полі тяжіння справедливий і для розімкнутих траєкторій. Тому прирівняємо секторіальні швидкості метеорита у нескінченно віддаленій від Землі точці і в точці дотику (мал. 2.5, *б*):

$$l\upsilon_0 = R\upsilon. \quad (2)$$

Права частина цієї рівності очевидна, оскільки у точці дотику вектор швидкості $\vec{\upsilon}$ перпендикулярний до радіуса Землі, а ліва частина стає зрозумілою, якщо поглянути на мал. *б*.




**Мал. 2.5.**

Підставляючи $\upsilon$ із рівняння (1) закону збереження енергії в рівність (2), знаходимо $l$: $l = R\sqrt{1+\frac{2gR}{\upsilon_0^2}} = R\sqrt{1+\left(\frac{\upsilon_{II}}{\upsilon_0}\right)^2}$ . (3)

Із отриманої відповіді видно, що максимальна прицільна відстань, за якої метеорит буде захоплений Землею, залежить від початкової швидкості $\upsilon_0$. Якщо $\upsilon_0 \to 0$, то $l \to \infty$, тобто метеорит, який на початку не рухався відносно Землі, упаде на Землю за будь-яких обставин (зрозуміло, що це твердження справедливе у припущенні, що ні Сонце, ні інші небесні тіла не впливають на рух метеорита). Якщо $\upsilon_0 \to \infty$ ($\upsilon_0 >> \upsilon_{II}$), то $l \to R$, тобто за умови нескінченно великої швидкості $\upsilon_0$ траєкторія метеорита прямолінійна, оскільки за малий проміжок часу прольоту його поблизу Землі сила земного притягання не встигає помітно змінити імпульс метеорита (тобто викривити його траєкторію), і метеорит попаде на Землю лише тоді, коли його прицільна відстань $l$ не більша радіуса Землі.

У даному випадку не враховувався вплив земної атмосфери на траєкторію метеорита. Проте при розрахунку максимальної прицільної відстані за формулою (3) ми не отримаємо помітної похибки, оскільки товщина атмосфери мала порівняно з радіусом Землі $R$.

**Задача 2.8.** З метою кращого з’ясування закономірностей руху ракети корисно розглянути модель ракети, коли вона викидає речовину не неперервно, а певними дискретними порціями однієї і тієї ж маси $\Delta m$. Нехай при кожному такому викиданні порція речовини $\Delta m$ набуває однакової швидкості $u = \upsilon_{відн}$ відносно ракети, спрямованої назад. Визначити швидкість ракети $\upsilon_n$, якої вона досягне після $n$ викидань речовини, якщо початкова маса ракети дорівнює $m_0$. Довести, що і граничному випадку, коли $\Delta m \to 0$, $n \to \infty$, але добуток $n\Delta m$ залишається сталим, то вираз для $\upsilon_n$ переходить у формулу Ціолковського.

*Розв’язання*

Нехай $\upsilon_1$, $\upsilon_2$, – швидкості ракети після 1-го, 2-го, … викидань речовини. За законом збереження імпульсу $(m_0 - \Delta m)\upsilon_1 + \Delta m \cdot \omega = 0$, де $\omega$ – швидкість виштовхнутої маси після першого викидання. Очевидно, що $u = \upsilon_1 - \omega$. Позбувшись $\omega$, отримаємо

$$\upsilon_1 = \frac{\Delta m}{m_0} u . \qquad (1)$$

Визначимо тепер $\upsilon_2$. У системі відліку, яка рухається з швидкістю $\upsilon_1$, ракета перед другим викиданням нерухома, а після другого викидання набуває швидкість $\upsilon_2 - \upsilon_1$. Тому можна скористатися формулою (1), зробивши в ній заміну: $m_0 \to m_0 - \Delta m$, $\upsilon_1 \to \upsilon_2 - \upsilon_1$. Це дає $\upsilon_2 - \upsilon_1 = \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} u$.

Комбінуючи це співвідношення з (1), знаходимо $\upsilon_2$. Продовжуючи цей процес дальше, неважко отримати значення $\upsilon_n$:

$$\upsilon_n = \left[\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} + \ldots + \frac{\Delta m}{m_0 - (n-1)\Delta m}\right] u\,.$$

У границі, коли $\Delta m \to 0$, $n \to \infty$, $m_0 - (n-1)\Delta m \to m$, сума, яка стоїть у квадратних дужках, переходить в інтеграл і отримується $\upsilon = u\int_m^{m_0} \frac{dm'}{m'}$,

де $m$ – кінцева маса ракети. Після обчислення інтеграла отримується формула Ціолковського.

**Задача 2.9.** Узагальнити формулу Ціолковського $\upsilon = u\ln(m/m)$ на випадок релятивістських рухів ракети. Вважати, що швидкості ракети і газової струмини спрямовані уздовж однієї прямої лінії.

*Розв'язання*

Нехай $m$ і $\upsilon$ – маса спокою і швидкість ракети в довільний момент часу $t$, а $m_{газ}$ і $\upsilon_{газ}$ – ті ж величини для газів, що утворилися з палива ракети до цього моменту часу. Оскільки гази, які вже залишили ракету, не створюють впливу на її рух, то можна вважати, що $m_{газ} = 0$. Але гази утворюються постійно, тому $dm_{газ} \neq 0$. На основі закону збереження імпульсу і енергії ( для релятивістської маси) отримуємо:

$$\frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + \frac{m_{газ}\upsilon_{газ}}{\sqrt{1-\upsilon_{газ}^2/c^2}} = const, \qquad (1)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + \frac{m_{газ}}{\sqrt{1-\upsilon_{газ}^2/c^2}} = const. \qquad (2)$$

Диференціюючи рівняння (1) з урахуваннями (2) і покладаючи в кінцевому результаті $m_{газ} = 0$, отримаємо:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,d\upsilon + (\upsilon - \upsilon_{газ})\,d\frac{m}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = 0\,.$$

Згідно з релятивістським законом додавання швидкостей

$$\upsilon_{газ} = \frac{\upsilon - u}{1 - \upsilon u/c^2}\,, \qquad (3)$$

де $u$ – швидкість потоку газів відносно ракети. Виключивши $\upsilon_{газ}$, після нескладних перетворень, знаходимо:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon^2 - c^2} = \frac{u}{c^2}\frac{dm}{m}\,. \qquad (4)$$

Поклавши $u = const$, після інтегрування (4), знаходимо:

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{c/2u}. \qquad (5)$$

**Задача 2.10.** а) Виразити прискорення вільного падіння у таких одиницях: швидкість – у світлових роках за рік (світл. рік); час у роках (рік$^2$).

б) Космічний корабель рухається з таким прискоренням, що його екіпаж відчуває таку ж саму силу тяжіння, що й на Землі. З точки зору спостерігача, нерухомого відносно точки, в якій корабель знаходився в момент $t = 0$, такий розгін (прискорення) продовжується 5,00 років. На яку відстань відлетить корабель за цей час і яка буде його швидкість у кінці розгону (прискорення)?

*Розв'язання*

а) Одиниця довжини: світловий рік – це та відстань, яку промінь світла проходить за один рік; вона дорівнює $c\tau$, де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла, а $\tau = 3{,}15 \cdot 10^7$ – число секунд у рокові. Тому $q = 9{,}8\dfrac{\tau}{c}\dfrac{\text{світл.рік}}{\text{рік}^2} = 1{,}03\dfrac{\text{світл.рік}}{\text{рік}^2}$.

б) Сила тяжіння, яку відчувають космонавти, – це сила, яка притискає їх до корпусу корабля. Звичайно, що корабель діє на космонавтів з такою ж силою. Згідно з умовою задачі, ці сили постійні і таким чином, рух всіх предметів всередині корабля – це рух під дією постійної сили. Ця сила може бути представлена у вигляді $F = m_0 c^2 / b$, де константу $b$ можна визначити із умови рівності сили $F = m_0 q$. Обрахунки будемо проводити у такій системі одиниць, де відстань вимірюється світловими роками, а час – роками. У цій системі одиниць швидкість світла дорівнює 1 світл. рік/рік. Результати обрахунку дають $b = \dfrac{c^2}{q} = 0{,}97$ світл. року; швидкість корабля у кінці 5-го року руху дорівнює $\upsilon = \left.\dfrac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}}\right|_{t=5} = 0{,}98\dfrac{\text{світл.рік}}{\text{рік}} = 0{,}98\,\text{c}$; пройдений шлях корабля становить: $x = \left(\sqrt{b^2 + c^2 t^2} - b^2\right)_{t=5} = 4{,}15$ світлових років.

**Задача 2.11.** Навести приклади деяких явищ, що періодично повторюються у природі, які можна було б раціонально обрати в якості еталону часу.

*Розв'язання*

За еталон часу було прийнято три астрономічних явища, які регулярно повторюються. Це – добове обертання Землі навколо своєї осі, річне обертання Землі навколо Сонця і тривалість обороту Місяця навколо Землі. Крім того, існує ще атомний еталон часу. Що ж стосується раціональності вибору одного з цих рухів у якості еталона часу, то тут в основу необхідно покласти одну з двох важко сумісних оцінок вибору: практичну зручність і точність.

Серед макроскопічних еталонів часу найбільш зручним для складання календаря виявився місячний еталон. Для використання ж у громадському житті і державному регулюванні прийнято два перших астрономічних еталони часу як найбільш раціональні.

**Задача 2.12.** Якщо уявити собі можливість майбутніх космічних подорожей, коли людина не буде більше «прив'язана» до Землі, а буде населяти й інші планети, то які недоліки виявляться у сучасних нам еталонах довжини і часу? Які недоліки виявляться також в атомних еталонах?

*Розв'язання*

Припустимо, що ми з секундним (математичним) маятником перенеслися із Землі на супутник Сіріуса, тобто на «білий карлик», де напруженість сили тяжіння в 30 тисяч разів більша, ніж на Землі. У цьому випадку маятник здійснював би за 1 секунду 140 коливань замість одного. Крім того, годинник, який зазнав би такого транспортування, вимагатиме синхронізації, що здійснити може виявитися надто важко. Неполадки з годинником вплинуть на вимірювання швидкостей і відстаней у нових умовах, навіть і в тому випадку, якщо на макроскопічних еталонах довжини ці умови безпосередньо і не відобразяться.

На хід пружинного годинника зміна напруженості поля сили тяжіння не вплине. Збереже за цих умов сталість й еталон довжини. Тому вимірювання швидкостей, прискорень і т.д. в умовах Сіріуса при застосуванні в якості еталона часу пружинного годинника дасть ті ж результати, що й на Землі.

Частота атомного еталону у вигляді, наприклад, частоти коливань спектральної лінії молекул аміаку змінилася б на супутникові Сіріуса менш ніж на 0,01%. Відповідно зміниться й довжина хвилі лінії аміаку, або якоїсь іншої лінії, взятої за еталонну.

**Задача 2.13.** Якщо постійні множини, які зв'язують одиниці маси, довжини і часу в системі СІ з цими ж величинами у довільній «штрихованій» системі одиниць, дорівнюють $\mu$, $\lambda$ і $\tau$ відповідно, так що $m' = \mu m$, $l' = \lambda l$ і $t = \tau t$, то:

а) які множники необхідно ввести для переводу одиниць вимірювання швидкості, прискорення, сили і енергії з однієї системи в другу?

б) як будуть зв'язані між собою числові значення гравітаційної сталої, виміряні в цих двох системах одиниць?

в) чому буде дорівнювати числове значення величини $GM_c$, якщо відстань вимірювати в астрономічних одиницях (а.о.), а час у роках?

*Розв'язання*

а) Всі величини в штрихованій системі будемо позначати з штрихом. Без штриха будемо позначати ті ж величини в системі СІ. Тоді:

$$\upsilon' = \frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau}\frac{dl}{dt} = \frac{\lambda}{\tau}\upsilon;$$

$$a' = \frac{d}{dt'}\frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda d^2 l}{\tau^2 dt^2} = \frac{\lambda}{\tau^2}a;$$

$$E' = \frac{m'\upsilon'^2}{2} = \frac{1}{2}\mu m\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2\upsilon^2 = \mu\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2 E;$$

$$F' = m'a' = \mu m\frac{\lambda}{\tau^2}a = \frac{\mu\lambda}{\tau^2}F.$$

б) У штрихованій системі одиниць сила тяжіння запишеться у вигляді: $F' = G'\dfrac{M_1'M_2'}{R'^2}$.

Використавши з а) вираз для $F'$, отримуємо: $G' = \dfrac{F'R'^2}{M_1'M_2'} = \dfrac{\lambda^3}{\mu\tau^2}\cdot\dfrac{FR^2}{M_1M_2} = \dfrac{\lambda^3}{\mu\tau^2}G$.

в) Насамперед відзначимо, що величини $GM_c$ у штрихованій системі одиниць і системі СІ зв'язані між собою співвідношенням: $G'M'_c = \frac{\lambda^3}{\mu\tau^2} G\mu M_c = \frac{\lambda^3}{\tau^2} GM_c$.

У системі СІ $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$, $M_c = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $GM_c = 13{,}34 \cdot 10^{19}$ м$^3$/с$^2$. Обрахуємо $\lambda$ і $\tau$. За одиницю довжини в розглядуваній системі одиниць обирається довжина великої півосі орбіти Землі, тобто відстань, рівна $14{,}9 \cdot 10^9$ м. Отже, в а.о. довжина $l'$ виражається через $l$ як $l' = \frac{l}{14{,}9 \cdot 10^{10}}$ (тобто $\lambda^{-1} = 14{,}9 \cdot 10^{10}$).

Аналогічно, $\tau^{-1} = 3{,}15 \cdot 10^7$ (число секунд в рокові). Таким чином, $G'M'_c = 3 \cdot 10^{-19} GM_c \approx 40$(а.о.)$^3$/(років)$^2$.

Величину $G'M'_c$ можна також визначити, скориставшись раніше виведеною формулою для періоду обертання планети: $T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}$.

Застосовуючи цю формулу до системи Сонце-Земля і нехтуючи масою Землі порівняно з масою Сонця, отримуємо: $GM_c = \frac{(2\pi)^2 R^3}{T^2}$.

Але $R = 1$ а.о., а $T = 1$ рік, отже $G'M'_c = (2\pi)^2 \approx 40$(а.о.)$^3$/(років)$^2$.

# РОЗДІЛ 3. ПЛАНЕТИ ТА ЇХ СУПУТНИКИ

**Задача 3.1.** Знайти залежність прискорення вільного падіння $g$ від відстані $r$, відрахованої від центра планети, щільність $\rho$ якої можна вважати для всіх точок однаковою. Побудувати графік залежності $g(r)$. Радіус $R$ планети вважати відомим.

**Задача 3.2.** На якій висоті над планетою прискорення вільного падіння удвічі менше, ніж на її поверхні?

**Задача 3.3.** Радіус $R$ малої планети дорівнює 250км, середня щільність $\rho = 3$г/см$^3$. Визначити прискорення вільного падіння $g$ на поверхні цієї планети.

**Задача 3.4.** Земля у своєму русі навколо Сонця максимально зміщується по орбіті на дугу $61'$, а мінімально − $57'$. Визначити за цими даними ексцентриситет земної орбіти та вказати дні, коли це відбувається.

**Задача 3.5.** Радіус небесного тіла більший від радіуса Землі в $m$ разів, а густина – в $n$ разів. Визначити прискорення сили тяжіння на поверхні цього небесного тіла.

**Задача 3.6.** Прискорення вільного падіння на поверхні деякої планети, радіус якої $r_0$, дорівнює $g_0$. Чому дорівнює перша космічна швидкість для такої планети?

**Задача 3.7.** Деяка планета сферичної форми має щільність, яка не залежить від відстані до її центра $r$. Уздовж діаметра планети прорито тунель, у якому проводять вимірювання прискорення вільного падіння $g$. Чому дорівнює $g$?

**Задача 3.8.** Яку довжину матиме підвіс маятника Фуко, коли уявити собі, що маятник встановлений на планеті, щільність якої дорівнює густині Землі, а радіус у два рази менший? Маятник здійснює 3 коливання за хвилину.

**Задача 3.9.** Визначити прискорення вільного падіння на Венері, Місяці і Сонці. Використати одержані дані для «оцінки» одиниці тиску 1 Тор на Місяці, на Венері.

**Задача 3.10.** Чому дорівнює прискорення вільного падіння поблизу поверхні Марса, якщо період обертання його супутника Фобоса становить 7год. 39хв.? Радіус орбіти Фобоса 9380км, радіус Марса 3390км. Впливом добового обертання Марса знехтувати.

**Задача 3.11.** На яку максимальну висоту $h_М$ піднялося б тіло, кинуте вертикально вгору на Марсі, якщо на Землі при тій же швидкості кидання воно піднялося б на висоту $h_З$? Опором рухові і залежності $g$ від $h$ знехтувати: $R_М \approx 0{,}53 R_З$; $M_М \approx 0{,}11 M_З$.

**Задача 3.12.** Визначити прискорення вільного падіння на поверхні Венери, Місяця та Сонця.

**Задача 3.13.** Радіус Землі в $n = 3{,}66$ більший за радіус Місяця; середня щільність Землі в $k = 1{,}66$ рази більша від середньої густини Місяця.

Визначити прискорення вільного падіння $g_M$ на поверхні Місяця; на поверхні Землі $g$ вважати відомим.

**Задача 3.14.** Радіус Землі і Місяця дорівнюють 6378 км і 1738км відповідно, а їх маси знаходяться у відношенні $81{,}3:1$. Визначити прискорення вільного падіння на Місяці, якщо на Землі $g_З = 9{,}8$ м/с$^2$.

**Задача 3.15.** Підлетівши до незнайомої планети, космонавти надали своєму кораблеві горизонтальної швидкості $\upsilon = 11$ км/с. Ця швидкість забезпечила політ корабля по коловій орбіті радіусом $r = 9100$ км. Яке прискорення вільного падіння біля поверхні планети, якщо її радіус $R = 8900$км?

**Задача 3.16.** Оцінити сплюснутість Землі, зумовлену її осьовим обертанням, вважаючи Землю однорідною нестисливою рідкою кулею.

**Задача 3.17.** Обчислити східне і екваторіальне відхилення вільно падаючого тіла (без початкової швидкості) для широти $\varphi$ і висоти падіння $h$. Розв'язати задачу в системі відліку, зв'язаній не з обертовою Землею, а з Сонцем і зірками. Застосувати два методи розв'язання: 1) безпосереднім застосуванням до падаючого тіла законів Ньютона; 2) застосуванням до падаючого тіла закону збереження моменту кількості руху.

**Задача 3.18.** Методом послідовних наближень отримати закони вільного падіння тіл у полі тяжіння Землі з врахуванням її обертання навколо власної осі. Рух розглядати в системі відліку, в якій Земля нерухома.

**Задача 3.19.** Визначити прискорення вільного падіння $g$ на поверхні Землі за такими даними: середній радіус Землі $R \approx 6400$ км; середня щільність Землі $\rho = 5{,}4$ г/см$^3$; гравітаційна стала $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$.

**Задача 3.20.** Місяць робить повний оберт навколо Землі за час $T = 27$ діб 7 годин. Радіус його орбіти дорівнює 60 радіусам Землі. Визначити прискорення вільного падіння $g$ на Землі. Радіус Землі $R \approx 6400$ км.

**Задача 3.21.** Довести, що коли висота над земною поверхнею мала порівняно з радіусом Землі $R$, то залежність прискорення вільного падіння від висоти визначається наближеною формулою $g \approx g_0\left(1 - 2\dfrac{h}{R}\right) \approx g_0(1 - 0{,}00314h)$, де $g_0$ – значення $g$ на поверхні Землі. (Мається на увазі, що висота $h$ вимірюється в кілометрах).

**Задача 3.22.** Знайти залежність прискорення вільного падіння $g$ від висоти $h$ над поверхнею Землі. На якій висоті $h$ прискорення вільного падіння $g_h$ складає 25% прискорення вільного падіння $g$ біля поверхні Землі?

**Задача 3.23.** На якій висоті над полюсом Землі прискорення сили тяжіння зменшується на $1\%$; удвічі?

**Задача 3.24.** На якій відстані від поверхні Землі прискорення сили тяжіння дорівнює 1 м/с$^2$?

**Задача 3.25.** Визначити прискорення сили земного тяжіння на висоті $h = 20$ км над Землею. Прискорення сили тяжіння на поверхні Землі $g_0 = 981$ см/с$^2$; радіус Землі $R = 6400$ км.

**Задача 3.26.** Чому дорівнює прискорення сили тяжіння на висоті, що дорівнює радіусу Землі? Яку відстань пройде тіло за першу секунду при вільному падінні з цієї висоти?

**Задача 3.27.** Порівняти сили, з якими Сонце і Земля діють на Місяць. Як пояснити той факт, що Місяць все ж є супутником Землі, хоча притягання його Сонцем сильніше?

**Задача 3.28.** Сонце притягує тіла, що містяться на Землі, з більшою силою, ніж Місяць, але явище припливів і відпливів зумовлюється, головним чином, дією Місяця, а не Сонця. Чому?

Відстань від Землі до Місяця $d_1 = 60R$, а відстань від Землі до Сонця $d_2 = 25000R$, де $R-$ радіус Землі. Маса Сонця приблизно в $27 \cdot 10^6$ раз більша за масу Місяця.

**Задача 3.29.** Притягання Місяця і Сонця викликають на Землі припливи, причому припливна дія Сонця удвічі менша, ніж Місяця. За яких умов їх сумісний ефект буде максимальним, а за яких – мінімальним?

**Задача 3.30.** Притягання Землі Сонцем у 175 разів сильніше, ніж Місяцем. Чому ж Місяць викликає більш сильні припливи?

**Задача 3.31.** Земну кулю можна розглядати як гігантський космічний корабель, що рухається навколо Сонця. Тому всі предмети на поверхні Землі повинні бути невагомими по відношенню до гравітаційних сил Сонця, Місяця та інших небесних тіл. Чому ж притягання Місяця викликає морські припливи?

**Задача 3.32.** Чи призводить зміна щільності Землі поблизу її центра до іншої зміни прискорення вільного падіння з висотою порівняно з однорідною сферою? Як саме відбувається ця зміна?

**Задача 3.33.** Якщо сила тяжіння пропорційна масі тіла, то чому важке тіло не падає швидше легкого?

**Задача 3.34.** Якого прискорення набуває Земля під дією сили її притягання Сонцем?

**Задача 3.35.** На скільки повинен стиснутися діаметр земної кулі, щоб її обертання навколо осі прискорилося на 1 с за добу?

**Задача 3.36.** Якою повинна бути точність експериментального визначення прискорення вільного падіння $g$ на поверхні Землі, щоб стала помітною добова зміна величини цього прискорення через наявність місячного притягання? Місце, де проводяться вимірювання, має таке географічне розташування, що коли Місяць проходить над ним, він знаходиться в зеніті, а коли – «під ним», він перебуває в надирі. Впливом припливів знехтувати.

**Задача 3.37.** Коли Земля рухається швидше по своїй орбіті навколо Сонця – зимою, чи літом (наприклад, для північної її півкулі)?

**Задача 3.38.** Визначити лінійну швидкість $\upsilon$ точок земної поверхні на географічній широті $\varphi$, викликану добовим обертанням Землі навколо своєї осі. Радіус земної кулі $R = 6400$км.

**Задача 3.39.** Визначити лінійну швидкість Землі, викликану її орбітальним рухом. Середній радіус Земної орбіти дорівнює $\approx 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

**Задача 3.40.** Обертання Землі призводить до відхилення вільно падаючих тіл (без початкової швидкості) від напряму виска. У який бік спрямоване це відхилення і чому дорівнює його величина? Задачу розв’язати в системі відліку, зв’язаній із Землею.

**Задача 3.41.** Уявимо, що Земля втратила свою орбітальну швидкість і почала падати на Сонце. З якою швидкістю підійде вона до його поверхні? Радіус земної орбіти 150 млн. км, радіус Сонця 700000 км, орбітальна швидкість Землі 30 км/с.

**Задача 3.42.** На полюсі Землі тілу надали швидкість $\upsilon_0$, напрямлену вертикально вгору. Знаючи радіус Землі і прискорення вільного падіння на її поверхні, знайти висоту, на яку підніметься тіло. Опором повітря знехтувати.

**Задача 3.43.** Які кутові і лінійні швидкості точок поверхні Землі, зумовлені її обертанням навколо своєї осі: а) на екваторі? б) на широті $\alpha = 45^0$? $R_З \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м.

**Задача 3.44.** Чому дорівнює лінійна швидкість руху Землі навколо Сонця в *перигелії*, якщо найменша і найбільша відстані від Землі до Сонця відповідно дорівнюють: $r_1 = 147$ Гм і $r_2 = 152$ Гм? Середня швидкість руху Землі по орбіті $<\upsilon> = 29{,}8$ км/с.

**Задача 3.45.** Ексцентриситет земної орбіти дорівнює $0{,}0167$. Визначити відношення значень максимальної до мінімальної орбітальних швидкостей Землі.

**Задача 3.46.** Визначити лінійну швидкість точок земної поверхні, розташованих уздовж меридіану від екватора до полюса, і закон зміни сили тяжіння на поверхні Землі з широтою у припущенні, що Земля – куля ($R = \mathrm{Const}$).

**Задача 3.47.** Визначити нормальне прискорення точок земної поверхні, викликане добовим обертанням Землі. Визначити значення проекції цього прискорення на напрям земного радіуса в даній точці. Оцінити значення шуканих величин для $\varphi = 55^o$ північної широти. Радіус Землі $R = 6400$км.

**Задача 3.48.** Простий аналіз механічних рухів дає змогу з’ясувати, що являє собою кільце планети Сатурн – суцільне утворення чи скупчення дрібних супутників. Для цього потрібно лише знати, який край кільця, внутрішній чи зовнішній, рухається швидше? Які закономірності можна покласти в основу такого аналізу?

**Задача 3.49.** Беручи значення прискорення вільного падіння біля поверхні Землі рівним $g = 9{,}80$ м/с$^2$ і користуючись табличними даними, скласти таблицю значень першої і другої космічних швидкостей біля поверхні планет Сонячної системи.

**Задача 3.50.** Визначити швидкість, з якою рухається тінь Місяця по земній поверхні під час повного сонячного затемнення, якщо воно спостерігається на екваторі. Уважати, що площини сонячної і місячної орбіт (відносно Землі) співпадають, а вісь Землі до них перпендикулярна. Швидкість світла вважати нескінченно великою порівняно зі всіма іншими швидкостями, що входять до задачі. Радіус місячної орбіти $R_M = 3{,}8 \cdot 10^5$ км.

**Задача 3.51.** Місяць рухається навколо Землі на відстані $R = 384000$ км, здійснюючи один оберт за $27{,}3$ доби. Визначити, з яким прискоренням рухається Місяць.

**Задача 3.52.** Яку швидкість необхідно надати тілу, щоб воно могло віддалитися з поверхні Місяця у нескінченність? Маса Місяця $M_M = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ кг, радіус Місяця $R_M = 1{,}74$ мм.

**Задача 3.53.** Визначити швидкість руху Місяця навколо Землі, вважаючи, що Місяць рухається по коловій орбіті. Маса Землі $M_З = 5{,}96 \cdot 10^{24}$ кг, відстань між Місяцем і Землею $R = 384{,}4$ Мм.

**Задача 3.54.** Місяць обертається навколо Землі з періодом $T \approx 27$ діб. Середній радіус орбіти Місяця $R \approx 4 \cdot 10^5$ км. Знайти лінійну швидкість $\upsilon$ руху Місяця навколо Землі і його нормальне прискорення $a_n$.

**Задача 3.55.** Знайти значення першої і другої космічних швидкостей біля поверхні Сонця.

**Задача 3.56.** Місяць рухається навколо Землі з швидкістю $\upsilon_1 = 1{,}02$ км/с. Середня відстань $l$ Місяця від Землі дорівнює $60{,}3R$ ($R-$ радіус Землі). Визначити за цими даними, з якою швидкістю $\upsilon_2$ повинен рухатися штучний супутник, який обертається навколо Землі на незначній висоті над її поверхнею.

**Задача 3.57.** Маса Землі у $81{,}3$ рази більша від маси Місяця. Радіус Землі у $3{,}66$ рази більший від радіуса Місяця. Визначити першу і другу космічні швидкості для Землі; напруженість і потенціал гравітаційного поля Місяця на його поверхні; у скільки разів космічні швидкості для Землі більші, ніж для Місяця?

**Задача 3.58.** Визначити першу космічну швидкість для Місяця. $R_M = 1760$ км; $g_M = 0{,}17 g_З$.

**Задача 3.59.** Нехай відстань від *перигелію* планети до Сонця $r_0$, швидкість планети в *перигелії* $\upsilon_0$. Визначити радіус кривизни траєкторії в *перигелії* і *афелії*, відстань від *афелію* до Сонця та швидкість планети в *афелії*.

**Задача 3.60.** Над екватором планети рухається супутник у бік її обертання. Швидкість супутника відносно нерухомої системи відліку, не зв'язаної з планетою, – $\upsilon_1$, лінійна швидкість точки екватора – $\upsilon_2$, радіус планети $R_2$, радіус орбіти супутника – $R_1$. Визначити швидкість супутника відносно планети.

**Задача 3.61.** Чому дорівнюють величина і напрям прискорення Місяця: а) коли Місяць «молодик»; б) у першій чверті; в) коли Місяць уповні?

Примітка. Відстань від Землі до Сонця дорівнює $1{,}5 \cdot 10^8$ км; відстань від Землі до Місяця $3{,}85 \cdot 10^5$ км; маса Сонця складає $3{,}33 \cdot 10^5$ земних мас.

**Задача 3.62.** Космічна ракета, яка стала штучною планетою, обертається навколо Сонця по еліпсу. Найменша відстань $r_{\min}$ ракети від Сонця дорівнює $0{,}97$, найбільша відстань $r_{\max}$ дорівнює $1{,}31$ астрономічних одиниць (середня відстань Землі від Сонця). Визначити період $T$ обертання (у роках) цієї штучної планети.

**Задача 3.63.** Знайти період обертання $T$ навколо Сонця штучної планети, якщо відомо, що велика піввісь $R_1$ її еліптичної орбіти більша за велику піввісь $R_2$ земної орбіти на $\Delta R = 0{,}24 \cdot 10^8$ км.

**Задача 3.64.** Деяка планета рухається по коловій орбіті навколо Сонця з швидкістю $\upsilon = 34{,}9$ км/с (відносно геліоцентричної системи відліку). Визначити період обертання цієї планети.

**Задача 3.65.** Навколо планети по коловій орбіті обертається супутник. Визначити радіус орбіти, якщо період обертання супутника дорівнює $T$, маса планети $M$.

**Задача 3.66.** Деяка планета рухається навколо Сонця по еліпсу так, що мінімальна відстань між нею і Сонцем дорівнює $r$, а максимальна – $R$. Визначити за допомогою законів Кеплера період обертання її навколо Сонця.

**Задача 3.67.** Планета являє собою однорідну кулю з щільністю $\rho$. Який період обертання штучного супутника, що рухається поблизу її поверхні?

**Задача 3.68.** Період обертання штучного супутника навколо планети дорівнює $T$. Як зміниться величина періоду, якщо супутник рухатиметься навколо планети, що має таку саму щільність, але вдвічі більший радіус? В обох випадках супутник рухається по коловій орбіті поблизу поверхні планети.

**Задача 3.69.** Орбіта штучної планети близька до колової. Визначити лінійну швидкість $\upsilon$ її руху і період $T$ її обертання навколо Сонця. Уважати відомими діаметр Сонця $D$ і його середню щільність $\rho$. Середня відстань планети від Сонця $r = 1{,}71 \cdot 10^8$ км.

**Задача 3.70.** Штучна планета рухається навколо Сонця по орбіті, середній радіус якої дорівнює $R_{пл}$. Знайти період обертання планети навколо Сонця і її лінійну швидкість.

**Задача 3.71.** Якщо виготовити модель Сонячної системи в одну $k$-ту натуральної величини із матеріалів тієї ж самої середньої щільності, яка відома для дійсних планет і Сонця, то як будуть залежати від «масштабного фактору» $k$ періоди обертання «планет» моделі по своїх орбітах?

**Задача 3.72.** На екваторі деякої планети тіло важить удвічі менше, ніж на полюсі. Щільність речовини цієї планети $\rho = 3$ г/см$^3$. Визначити період обертання планети навколо своєї осі.

**Задача 3.73.** Робота одних годинників пов'язана з коливаннями пружини, робота інших – з коливаннями маятника. Припустимо, що обидва годинники опинилися на Марсі. Чи будуть вони показувати там той самий час, що й на Землі? Чи будуть вони синхронними один з одним? Врахувати, що маса Марса у 10 разів менша за масу Землі, а його радіус менший удвічі.

**Задача 3.74.** Як показали радіолокаційні вимірювання, Венера обертається навколо своєї осі у напрямку, зворотному до напряму її орбітального руху. Період осьового обертання Венери (відносно зірок) $T_1 = 243$ земних діб. Венера обертається навколо Сонця з періодом $T_2 = 225$ земних діб. Визначити тривалість сонячної доби на Венері, тобто час $T$ між двома послідовними проходженнями Сонця через один і той же меридіан на цій планеті (час від полудня до полудня).

**Задача 3.75.** Відстань від Марса до Сонця більша за відстань від Землі до Сонця в $1{,}524$ рази. Вважаючи орбіти планет коловими, знайти, у скільки разів $n$ період обертання Марса навколо Сонця більший від періоду обертання Землі. З якою орбітальною швидкістю $\upsilon_1$ рухається Марс? Орбітальна швидкість Землі $\upsilon = 29{,}8$ км/с.

**Задача 3.76.** Якої довжини має бути маятник, щоб його частота коливань на поверхні Місяця становила $\nu = 0{,}12$ Гц?

**Задача 3.77.** Як змінився б хід маятникового годинника на Марсі порівняно з ходом на Землі? Відомо, що маса Марса становить $0{,}1$ маси Землі, а його радіус – $0{,}53$ радіуса Землі.

**Задача 3.78.** Як зміниться період коливань математичного маятника, якщо його по відношенню до поверхні Землі: а) підняти на висоту $H$; б) опустити на глибину $h$? На поверхні Землі період коливань $T$. Радіус Землі $R$.

**Задача 3.79.** Період коливань математичного маятника на поверхні Землі дорівнює $2$ с. Яким був би період коливань такого маятника на Місяці, якщо сила тяжіння на поверхні Місяця в $6$ разів менша, ніж на Землі?

**Задача 3.80.** Планета Плутон рухається по орбіті з великою піввіссю $a = 40$ а.о. і ексцентриситетом $e = 0{,}25$. Визначити період обертання і максимальну швидкість руху планети.

**Задача 3.81.** Радіус орбіти Нептуна у $30$ разів більший від радіуса орбіти Землі. Яка тривалість року на Нептуні?

**Задача 3.82.** Планета Марс має два супутники – Фобос і Деймос. Перший знаходиться на відстані $r_1 = 0{,}95 \cdot 10^4$ км від центра мас Марса, другий – на відстані $r_2 = 2{,}4 \cdot 10^4$ км. Визначити періоди обертання $T_1$ і $T_2$ цих супутників навколо Марса.

**Задача 3.83.** Визначити відстань від Венери до Сонця, знаючи період її обертання і період обертання Землі навколо Сонця.

**Задача 3.84.** Середня відстань Марса від Сонця в $1{,}524$ рази більша від середньої відстані Землі від Сонця. Вирахувати число земних років, необхідних для здійснення Марсом одного повного оберту навколо Сонця.

**Задача 3.85.** Радіус орбіти штучної планети, яка обертається навколо Сонця, в 30 разів більший від радіуса орбіти Землі. Визначити період $T$ обертання цієї планети.

**Задача 3.86.** Під час запуску автоматичної станції «Венера-1» спочатку запустили на колову орбіту з радіусом біля $250\,км$ першу космічну базу. З цієї бази стартувала ракета-носій, яка за допомогою власної тяги збільшувала швидкість, і вже від неї відділилася «Венера-1» масою $634{,}5\,кг$ з швидкістю $11860\,м/с$ відносно Землі. Станція наблизилася до планети Венера на відстань $10^5\,км$ і залишила її, ставши супутником Сонця з періодом обертання $296\,діб$. Визначити, по якій траєкторії відносно Землі почала рухатися станція після відділення від ракети-носія; середній радіус орбіти станції в гравітаційному полі Сонця; енергію станції при обертанні по орбіті. При розрахунках вважати середню відстань від Сонця до Землі $149\cdot10^9\,м$, період обертання Землі $365\,діб$, масу Сонця $2\cdot10^{30}\,кг$.

**Задача 3.87.** Яким має бути період обертання Землі навколо своєї осі, щоб на екваторі тіла були невагомими?

**Задача 3.88.** Що сталося б, якби Земля раптово припинила свій рух: а) навколо своєї осі? б) по орбіті навколо Сонця?

**Задача 3.89.** Між всіма тілами існує взаємне притягання. Чому ми помічаємо притягання тіл до Землі і не помічаємо взаємного тяжіння оточуючих нас предметів один до одного?

**Задача 3.90.** Чи відрізнялися б між собою сила тяжіння і сила ваги на поверхні Землі за відсутності обертання Землі навколо своєї осі? Землю вважати однорідною кулею.

**Задача 3.91.** Визначити, у скільки разів зменшується вага тіла на екваторі внаслідок добового обертання Землі. Якої тривалості повинна була б бути доба на Землі, щоб тіла на екваторі не мали ваги?

**Задача 3.92.** Чи можна відтворити стан невагомості на Землі? Якщо можна, то як?

**Задача 3.93.** Визначити період обертання $T$ Місяця навколо Землі, знаючи прискорення сили земного тяжіння на полюсах $g_0 = 9{,}83\,м/с^2$, радіус Землі $R_З = 6370$ км і відстань від Землі до Місяця $R = 3{,}84\cdot10^8\,м$.

**Задача 3.94.** Відстань від Місяця до центра Землі змінюється від $363000$ км у перигеї до $405500$ км в апогеї, а період обертання Місяця навколо Землі складає $27{,}322$ діб. Штучний супутник Землі рухається по орбіті так, що відстань від земної поверхні в перигеї дорівнює $225$ км, а в апогеї $710$ км. Середній діаметр Землі дорівнює $12756$ км. Визначити період обертання супутника.

**Задача 3.95.** Супутник Юпітера $I_o$ здійснює оберт по орбіті з радіусом $421800$ км за $1{,}769$ доби. а) Визначити відношення маси Юпітера до маси Землі. б) Порівнюючи параметри орбітальних рухів Землі навколо Сонця і Місяця навколо Землі, визначити відношення маси Сонця до маси Землі.

**Задача 3.96.** Час обертання Юпітера в $12$ разів більший за час обертання Землі навколо Сонця. Яка відстань від Юпітера до Сонця, якщо відстань від Землі до Сонця становить $150 \cdot 10^9$ м? Орбіти вважати коловими.

**Задача 3.97.** Період обертання Юпітера навколо Сонця у $12\,\textit{разів}$ більший від періоду обертання Землі. Вважаючи орбіти планет коловими, визначити: а) у скільки разів відстань від Юпітера до Сонця перевищує відстань від Землі до Сонця; б) швидкість і прискорення Юпітера у геліоцентричній системі відліку.

**Задача 3.98.** Період обертання планети Сатурн навколо Сонця в $n \approx 30\,\textit{раз}$ більший за період обертання Землі. Знаючи відстань від Землі до Сонця, визначити відстань від Сатурна до Сонця. Орбіти обох планет вважати коловими.

**Задача 3.99.** Як показує інтегрування рівнянь руху, планета навколо Сонця рухається по конічних перерізах. Вирахувати, коли траєкторія планети буде еліптичною, гіперболічною і параболічною.

**Задача 3.100.** Притягання Місяця Сонцем приблизно удвічі більше, ніж притягання його Землею. Чому ж Місяць є супутником Землі, а не самостійною планетою?

**Задача 3.101.** Назвіть можливі способи вимірювання: радіуса Землі, відстані між Землею і Сонцем, розміру Сонця.

**Задача 3.102.** Розглянемо деякий вантаж, що висить на довгій нитці (висок). Оскільки він притягується не лише до Землі, але й до Сонця, то вранці він повинен дещо відхилятися на Схід, а увечері – на Захід. Чи так це?

**Задача 3.103.** Радіус планети Марс становить $0{,}53$ радіуса Землі. Маса Марса становить $0{,}11$ від маси Землі. Визначити, у скільки разів сила притягання на Марсі менша від сили притягання на Землі.

**Задача 3.104.** Найближчий супутник Марса знаходиться на відстані $r = 9{,}4$ Мм від центра планети і рухається навколо неї з швидкістю $\upsilon = 2{,}1$ км/с. Визначити масу $M$ Марса.

**Задача 3.105.** У скільки разів планета Плутон притягується до Сонця слабкіше, ніж Земля, якщо Плутон віддалений від Сонця на відстань, у $40$ разів більшу, ніж Земля? Маси Землі і Плутона приблизно однакові.

**Задача 3.106.** Один із супутників планети Сатурн знаходиться приблизно на такій же відстані $r$ від планети, як Місяць від Землі, але період його обертання $T$ навколо планети майже в $n = 10$ разів менший, ніж у Місяця. Визначити відношення мас Сатурна і Землі.

**Задача 3.107.** Які вимірювання повинен здійснити дослідник для визначення маси іншої планети, наприклад Сатурна?

**Задача 3.108.** Радіус планети Марс дорівнює $3{,}4$ Мм, її маса $6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг. Визначити напруженість гравітаційного поля на поверхні Марса.

**Задача 3.109.** Тілу з масою спокою $m_0 = 1000$ т надано швидкість $V$ у напрямі дотичної до земної орбіти. Якою має бути різниця між швидкістю світла $c$ і швидкістю тіла $V$, щоб Земля стала рухатися відносно Сонця по параболічній траєкторії? Маса Землі $M = 6 \cdot 10^{21}$ т, швидкість її орбітального руху $\upsilon = 29{,}8$ км/с. Порівняти кінетичну енергію тіла з кінетичною енергією орбітального руху Землі.

**Задача 3.110.** Маса Землі у $81$ раз більша від маси Місяця, а відстань між центрами Землі і Місяця дорівнює $384000$ км. Де знаходиться центр мас системи Земля-Місяць?

**Задача 3.111.** Якої маси вантаж могла б підняти людина на поверхні Місяця, якщо на поверхні Землі вона може підняти вантаж масою $m_1 = 60$кг, а відношення $R_З / R_М = 3{,}7$ і $M_З / M_М = 81$? Чому дорівнює прискорення вільного падіння на Місяці?

**Задача 3.112.** Визначити масу і середню щільність речовини Місяця, якщо прискорення вільного падіння на його поверхні приблизно дорівнює $1{,}63$м/с$^2$. Радіус Місяця $R_М \approx 1{,}73 \cdot 10^6$м.

**Задача 3.113.** Як почав би рухатися Місяць, якби зникло тяжіння між Місяцем і Землею? Якби припинився рух Місяця по орбіті?

**Задача 3.114.** Маса Землі $6 \cdot 10^{24}$ кг, маса Місяця $7{,}3 \cdot 10^{22}$кг, відстань між їх центрами $384 \cdot 10^6$м. Визначити силу тяжіння між Землею і Місяцем.

**Задача 3.115.** З якою силою $F$ Місяць притягує тіло масою $1$ кг, яке знаходиться на його поверхні? Маса Місяця $7{,}3 \cdot 10^{22}$кг, а його радіус $1{,}7 \cdot 10^6$м.

**Задача 3.116.** На якій висоті над поверхнею Землі вага тіла буде у два рази меншою, ніж на поверхні Землі?

**Задача 3.117.** Визначити масу Землі $M_З$, знаючи період обертання супутника навколо неї $T_C$ і відстань між ними $R_C$.

**Задача 3.118.** Визначити силу тяжіння, що діє з боку Землі на тіло масою $m_1 = 1$ кг, яке знаходиться на поверхні Місяця. Відстань від Землі до Місяця $r = 384000$ км.

**Задача 3.119.** Визначити масу $M$ Землі за значенням середньої відстані $r$ від центра Місяця до центра Землі і періоду $T$ обертання Місяця навколо Землі ($T$ і $r$ вважати відомими).

**Задача 3.120.** Визначити масу і середню щільність земної кулі, взявши на полюсі Землі значення: $g_З \approx 9{,}83$ м/с$^2$; $R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$м.

**Задача 3.121.** Обрахувати масу Землі, використавши параметри орбіти штучного супутника Землі, період обертання якого $T = 102{,}2$хв., відстань до поверхні Землі в перигеї $210$км, в апогеї – $1548$км. Землю вважати кулею з радіусом $6371$км.

**Задача 3.122.** Визначити масу Землі за її полярним радіусом і прискоренням вільного падіння на полюсі.

**Задача 3.123.** Яким чином можна визначити масу Місяця?

**Задача 3.124.** Середній діаметр Марса 6760км, а діаметр Землі 12700 км. Маса Марса дорівнює 0,107 маси Землі. Визначити: а) середню щільність Марса порівняно з щільністю Землі; б) прискорення вільного падіння на Марсі.

**Задача 3.125.** Обчислити гравітаційну сталу, взявши радіус Землі $R = 6370$ км і середню щільність Землі $\rho = 5{,}5 \cdot 10^3$ кг/м$^3$.

**Задача 3.126.** Вважаючи, що Земля має форму кулі, а щільність її атмосфери є функцією тільки відстані до центра Землі, встановити, з якою силою $F$ атмосфера притягує частинку, що розташована на поверхні Землі.

**Задача 3.127.** Період обертання супутника, який рухається біля поверхні Землі, дорівнює $T$. Вважаючи планету однорідною кулею, визначити її щільність.

**Задача 3.128.** Беручи значення прискорення вільного падіння біля поверхні Землі рівним $g = 9{,}80$ м/с$^2$ і, користуючись табличними даними, скласти таблицю значень середніх щільностей планет Сонячної системи.

**Задача 3.129.** Для обчислення середньої щільності Землі $\rho$ Ейрі запропонував і здійснив наступний метод. Вимірюється прискорення вільного падіння $g_0$ на поверхні Землі і $g$ в шахті на глибині $h$. Покладається, що щільність Землі в поверхневому шарі товщиною $h$ однорідна і дорівнює $\rho_o = 2{,}5$ г/см$^3$. (Це припущення не відповідає дійсності.) У дослідах Ейрі було: $g - g_0 = 0{,}000052 g_0$, $R/h = 16000$ ($R$ – радіус Землі). Користуючись цими даними визначити середню щільність Землі. (Звернути увагу, що $g$ поблизу поверхні Землі зростає з глибиною! Чим це пояснити?).

**Задача 3.130.** Яку довжину матиме підвіс маятника Фуко, коли уявити собі, що маятник встановлений на планеті, щільність якої дорівнює щільності Землі, а радіус у два рази менший? Маятник здійснює 3 коливання за хвилину.

**Задача 3.131.** Супутник рухається навколо сферичної планети на висоті $h = 0{,}1R$ над її поверхнею ($R$ – радіус планети). Визначити середню щільність речовини планети, якщо період обертання супутника $T = 1{,}5$ год.?

**Задача 3.132.** Однорідна сферична планета обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega = 0{,}73 \cdot 10^{-4}$ рад/с. Вага тіла, зваженого на пружинних терезах на поверхні цієї планети, виявилася на полюсі на 0,3% більшою, ніж на екваторі. Визначити щільність речовини планети.

**Задача 3.133.** Перша космічна швидкість біля поверхні певної сферичної планети становить $\upsilon = 1$ км/с. Визначити середню щільність речовини цієї планети, якщо площа поперечного перерізу її $S = 3{,}75 \cdot 10^{12}$ м$^2$?

**Задача 3.134.** Радіус $R$ малої планети дорівнює 100 км, середня щільність $\rho$ речовини планети дорівнює 3 г/см$^3$. Визначити параболічну швидкість $\upsilon_2$ біля поверхні цієї планети.

**Задача 3.135.** Земля обертається навколо Сонця з швидкістю $\upsilon_1 = 30$км/с. Визначити швидкість $\upsilon_2$ руху навколо Сонця малої планети, якщо її радіус орбіти в $n = 4$ рази більший від радіуса орбіти Землі.

**Задача 3.136.** Якою буде перша космічна швидкість для планети, маса і радіус якої у два рази більші, ніж у Землі?

**Задача 3.137.** Чому дорівнює перша космічна швидкість для планети з такою ж щільністю, як і у Землі, але з удвічі меншим радіусом?

**Задача 3.138.** Над екватором планети рухається супутник у напрямі її обертання. Швидкість супутника відносно нерухомої системи відліку, яка не зв'язана з планетою – $\upsilon_1$, лінійна швидкість точки екватора – $\upsilon_2$, радіус планети – $R_1$, радіус орбіти супутника – $R_2$. Визначити швидкість супутника відносно планети.

**Задача 3.139.** Планета Сонячної системи, рухаючись по коловій орбіті з радіусом $r$ і швидкістю $\upsilon_1$, раптом втрачає свою орбітальну швидкість. Визначити швидкість $u$, з якою вона впаде на Сонце. Радіус Сонця $R$.

**Задача 3.140.** Визначити найменшу швидкість, яку необхідно надати тілу відносно поверхні Землі на екваторі, щоб воно могло залишити Сонячну систему? Опір повітря не враховувати.

**Задача 3.141.** На деякій планеті друга космічна швидкість дорівнює 12км/с. Тілу, яке знаходиться на поверхні цієї планети, надано вертикальну швидкість 13 км/с. Яку швидкість це тіло буде мати на нескінченності?

**Задача 3.142.** В однорідній планеті, радіус якої дорівнює 1000км, щільність – 2,0 г/см$^3$, уздовж діаметра прорито тунель. У шахту без початкової швидкості відпускають камінь. За який проміжок часу камінь повернеться в точку кидання? Атмосфери планета не має, обертання планети відсутнє.

**Задача 3.143.** Радіус земної орбіти – $r$, радіус Сонця $-R$. Визначити середню щільність Сонця.

**Задача 3.144.** Користуючись табличними даними про астрономічні величини та даними про планети Сонячної системи, обчислити значення гравітаційної сталої. Вважати відомими $R_З$, $\rho_З$, $g_З$.

**Задача 3.145.** Знайти масу Сонця за значенням сталої тяжіння $G$ і відстані $L$ від Землі до Сонця $L = 1{,}5 \cdot 10^{11}$м.

**Задача 3.146.** Визначити максимальну силу Коріоліса $F_{\max}$, що діє на Сонце в системі відліку, пов'язаній із Землею.

**Задача 3.147.** Вважаючи, що орбіти Землі і Місяця приблизно колові, обчислити відношення мас Землі і Сонця. Відомо, що Місяць здійснює 13 обертів протягом року і що відстань від Сонця до Землі в 390 раз більша за відстань від Місяця до Землі.

**Задача 3.148.** Радіус Землі $R = 6400$ км, щільність Землі $\rho = 5{,}6 \cdot 10^3$кг/м$^3$. Відстань від Землі до Сонця $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$м. Період обертання Землі навколо Сонця $T = 365$діб. Визначити середнє значення сили притягання $F$, яка діє з боку Сонця на Землю.

**Задача 3.149.** Вважаючи, що Земля рухається навколо Сонця по коловій орбіті з радіусом $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$м, визначити: а) масу Сонця; б) прискорення сили тяжіння на поверхні Сонця. Радіус Сонця $R_C = 6{,}95 \cdot 10^{8}$ м; період обертання Землі навколо Сонця $T_З = 365$діб.

**Задача 3.150.** Порівняти сили, з якими Сонце і Земля діють на Місяць.

**Задача 3.151.** Знайти відношення сил тяжіння, які діють на тіло масою $m$ на екваторі і полюсі планети, радіус якої $R$, маса $M$ і тривалість доби $T$.

**Задача 3.152.** Тілу з масою $m$, яке знаходиться на поверхні планети з масою $M$ і радіусом $R$, надано вертикальну швидкість $\upsilon_0$. Знайти: 1) потенціальну енергію тіла на висоті $h$ над поверхнею планети; 2) висоту підняття тіла, якщо $\upsilon_0$ менша від другої космічної швидкості $\upsilon_{II}$; 3) швидкість тіла $\upsilon_\infty$ на великій відстані від планети, якщо $\upsilon_0 > \upsilon_{II}$. Впливом інших тіл знехтувати. Прискорення вільного падіння на поверхні планети дорівнює $g_0$.

**Задача 3.153.** Планета $A$ рухається по еліптичній орбіті навколо Сонця. У момент, коли вона знаходилася на відстані $r_0$ від Сонця, її швидкість дорівнювала $\upsilon_0$ і кут між радіусом-вектором $\vec{r}_0$ і вектором швидкості $\vec{\upsilon}_0$ дорівнював $\alpha$. Знайти найбільшу і найменшу відстані, на які віддаляється від Сонця ця планета, здійснюючи такий рух.

**Задача 3.154.** Третій закон Кеплера був доведений для випадку, коли маса планети набагато менша від маси Сонця, тобто, Сонце можна вважати нерухомим. Довести цей закон для випадку, коли два тіла обертаються навколо їх центра мас.

**Задача 3.155.** Визначити відстань $D$ планети від Сонця, якщо дано: масу Сонця $M_C$, період обертання планети навколо Сонця $T$ і гравітаційну сталу $G$.

**Задача 3.156.** Визначити тривалість доби на планеті, радіус якої удвічі менший за радіус Землі, маса дорівнює масі Землі і пружинний динамометр на екваторі показує вагу на 1% меншу, ніж вага тіла на полюсі.

**Задача 3.157.** Штучна планета рухається навколо Сонця з періодом обертання 450діб. Визначити середню відстань цієї планети від Сонця, якщо відомо, що середня відстань Землі від Сонця 149,5Гм, а період її обертання складає 365діб 6 годин 9хв. 10 с. Орбіти планет вважати коловими.

**Задача 3.158.** Однорідна сферична планета обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega = 0{,}73 \cdot 10^{-4}$ рад/с. Вага тіла, зваженого на пружинних терезах на поверхні цієї планети, виявилася на полюсі на 0,3% більшою, ніж на екваторі. Визначити щільність речовини планети.

**Задача 3.159.** Супутник рухається навколо сферичної планети на висоті $h = 0{,}1R$ над її поверхнею ($R-$ радіус планети). Визначити середню щільність речовини планети, якщо період обертання супутника $T = 1{,}5$ год.

**Задача 3.160.** Відомо, що внаслідок обертання планети сила ваги на екваторі менша, ніж на полюсі. На якій висоті $h$ над поверхнею планети на полюсі сила ваги зрівняється з силою ваги на поверхні на екваторі? Уважати, що планета має форму кулі радіусом $R$. Час обертання планети навколо осі $T$, середня щільність речовини $\rho$.

**Задача 3.161.** Якби яка-небудь планета збільшилася в розмірах, але щільність її залишилася попередньою, то сила притягання планетою тіла на її поверхні збільшилася б внаслідок збільшення маси планети. З іншого боку, вона зменшилася б внаслідок збільшення відстані тіла від центра тяжіння планети. Який з цих ефектів буде переважати?

**Задача 3.162.** Визначити середню щільність планети, у якої на екваторі пружинні терези показують на 10% менше, ніж на полюсі. Доба на планеті складає $T = 24$год.

**Задача 3.163.** На яку частину зменшується вага тіла на екваторі внаслідок обертання Землі навколо своєї осі?

**Задача 3.164.** Радіус планети Марс приблизно в два рази менший за радіус Землі, а маса Марса становить приблизно 0,1 маси Землі. Порівняти вагу тіл однакової маси на Землі і на Марсі.

**Задача 3.165.** На поверхні планети Марс прискорення вільного падіння дорівнює приблизно 2/5 земного прискорення. Скільки важить гиря вагою 1 кГ на поверхні Марса?

**Задача 3.166.** Визначити різницю між вагами однакових тіл у діаметрально протилежних точках земної кулі, зумовлену неоднорідністю гравітаційного поля Місяця. Вважати, що центри Місяця, Землі і обидві розглядувані точки 1 і 2 лежать на одній прямій. Гравітаційним полем Сонця та інших небесних тіл знехтувати.

**Задача 3.167.** Тіло на екваторі зважують на пружинних терезах опівдні, коли гравітаційні сили Землі і Сонця тягнуть його в протилежні сторони. Одночасно таке ж тіло зважується опівночі в діаметрально протилежній точці земної кулі, коли обидві сили спрямовані в одну сторону. Вага якого тіла буде більшою? Неоднорідністю гравітаційного поля Сонця поблизу Землі знехтувати.

**Задача 3.168.** Визначити роботу $A$, яку виконують сили гравітаційного поля Землі, якщо тіло масою $m = 1$ кг упаде на поверхню Землі: 1) з висоти $h$, яка дорівнює радіусу Землі; 2) із нескінченності. Радіус $R$ Землі і прискорення вільного падіння $g$ на її поверхні вважати відомими.

**Задача 3.169.** Нехай потенціальна енергія тіла, яке знаходиться на поверхні Землі, дорівнює нулю. Який вигляд матиме вираз для потенціальної енергії тіла в довільній точці над Землею? Чому дорівнює потенціальна енергія тіла на нескінченності?

**Задача 3.170.** Нехай потенціальна енергія тіла, яке знаходиться на нескінченно великій відстані від Землі, дорівнює нулю. Який вигляд матиме вираз для потенціальної енергії тіла у довільній точці над Землею? Чому дорівнює потенціальна енергія тіла на поверхні Землі?

**Задача 3.171.** На якій відстані від центра Землі повинно знаходитися тіло, щоб сили його притягання до Землі і Місяця взаємно зрівноважувалися?

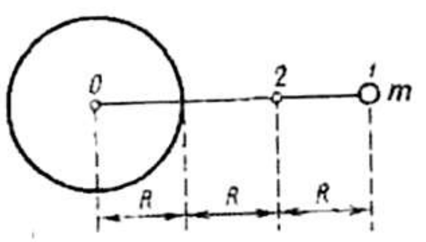
Вважати, що маса Землі у 81 раз більша від маси Місяця, а відстань між їх центрами дорівнює 60 радіусам Землі.

**Задача 3.172.** Визначити потенціальну енергію тіла (точки) масою $m$ на різних відстанях від центра Землі. Величину потенціальної енергії на нескінченно великій відстані від Землі вважати рівною нулю.

**Задача 3.173.** Довести за допомогою законів збереження, що повна механічна енергія планети масою $m$, яка рухається навколо Сонця по еліпсу, залежить тільки від його великої півосі $a$. Знайти формулу залежності цієї енергії від $a$.

**Задача 3.174.** Припустимо, що через земну кулю вдалося по діаметру прорити канал. Як рухалося б тіло, яке упало в у цей канал?

**Задача 3.175.** Обрахувати роботу $A_{12}$ сил гравітаційного поля Землі при переміщенні тіла масою $m = 10$кг з точки 1 у точку 2 (див. мал. 3.1.). Радіус Землі $R$ і прискорення $g$ вільного падіння поблизу поверхні Землі вважати відомими.




**Мал. 3.1.**

**Задача 3.176.** Яку кінетичну енергію потрібно надати тілу масою $m = 5{,}0$ т на полюсі Землі, щоб воно піднялося вертикально вгору на висоту $H = R_З = 6370$км? Яку швидкість необхідно надати тілу для цього? Опором повітря знехтувати.

**Задача 3.177.** Яку мінімальну роботу необхідно виконати, щоб закинути тіло масою $m = 1000$кг з поверхні Землі на Місяць? Вважати, що в цей час взаємне положення Землі і Місяця не змінюється. Опором повітря знехтувати.

**Задача 3.178.** Підрахувати роботу, яку необхідно виконати, щоб тіло масою $5 \cdot 10^3$кг, яке знаходиться на поверхні Землі, відправити у міжпланетний простір. Опором повітря знехтувати.

**Задача 3.179.** Знайти вираз для потенціальної енергії $П$ гравітаційної взаємодії Землі і тіла масою $m$, яке знаходиться на відстані $r$ від центра Землі за межами її поверхні. Побудувати графік $П\,(r)$; $r = R_З + h$.

**Задача 3.180.** Визначити напруженість $H_0$ і потенціал $\varphi_0$ гравітаційного поля Землі біля її поверхні.

**Задача 3.181.** На якій висоті над поверхнею Землі напруженість гравітаційного поля дорівнює 1 Н/кг? Радіус Землі вважати відомим.

**Задача 3.182.** Визначити значення потенціалу $\varphi$ гравітаційного поля на поверхні Сонця.

**Задача 3.183.** Тіло масою $m = 1$кг знаходиться на поверхні Землі. Визначити зміну $\Delta P$ сили тяжіння для двох випадків: 1) при підійманні тіла на висоту $h = 5$км; 2) при опусканні тіла в шахту на глибину $h = 5$км. Землю вважати однорідною кулею з радіусом $R = 6{,}37$Мм і щільністю $\rho = 5{,}5$г/см$^3$.

**Задача 3.184.** Завдяки значній опуклості Землі поблизу екватора витік річки розташований хоч і вище гирла, але все ж ближче до центра Землі. Як може в такому випадку річка текти «вгору»?

**Задача 3.185.** а) Розглядаючи взаємне гравітаційне притягання Землі і каменя, чи можна сказати, що Земля знаходиться в полі тяжіння каменя? б) Як відноситься гравітаційне поле, породжене каменем, до поля, породженого Землею?

**Задача 3.186.** За яких умов рух планети навколо Сонця буде фінітним, а за яких – інфінітним?

**Задача 3.187.** Сили припливного тертя, які викликані місячними припливами, уповільнюють обертання Землі навколо своєї осі. Цей процес буде продовжуватися до тих пір, поки кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі не стане рівною до швидкості орбітального руху Місяця навколо Землі. Визначити загальну кутову швидкість обертання Землі і орбітального руху Місяця $\omega$, тривалість земної доби $T$ і радіус місячної орбіти $a$ після того, як таке станеться. Використати наступні дані: зараз кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі $\omega_З = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ рад/с, момент кількості руху Землі відносно своєї осі $L_З = 5{,}91 \cdot 10^{40}$ г·см$^2$/с, радіус орбіти Місяця $a_0 = 3{,}84 \cdot 10^{10}$см, час обертання Місяця навколо Землі (відносно зірок) $T_M = 27{,}3$доби, маса Місяця дорівнює $m = 7{,}35 \cdot 10^{25}$г, момент інерції Землі відносно осі обертання $I_З = 8{,}11 \cdot 10^{44}$г·см$^2$. Для спрощення вважати, що земна вісь перпендикулярна до площини орбіти Місяця.

**Задача 3.188.** У результаті дії припливних сил тертя обертання Землі навколо осі сповільнюється, а разом з цим зменшується й момент кількості руху Землі. Як відіб'ється на рухові Місяця дія закону збереження моменту кількості руху? Чи будуть тут відігравати якусь роль припливи, що викликаються Сонцем?

**Задача 3.189.** Планета масою $m$ рухається по еліпсу навколо Сонця так, що найбільша і найменша відстані її від Сонця дорівнюють відповідно $r_1$ і $r_2$. Визначити момент імпульсу $L$ цієї планети відносно центра Сонця.

**Задача 3.190.** Довести, що коли планета рухається по еліпсу, то середнє за часом значення її повної і кінетичної енергій зв'язані співвідношенням: $<K> = -<E>$.

**Задача 3.191.** Планета рухається по еліпсу, у фокусі якого розташоване Сонце. Беручи до уваги роботу сили тяжіння, вказати, у якій точці траєкторії швидкість планети буде максимальною, а в якій – мінімальною?

**Задача 3.192.** Планета рухається навколо Сонця по еліпсу. Не інтегруючи рівнянь руху, а користуючись лише законами збереження енергії і моменту імпульсу, знайти вираз для довжини великої осі $2a$ цього еліпса.

**Задача 3.193.** Довести, що другий закон Кеплера (радіус-вектор, проведений від Сонця до планети, за рівні проміжки часу описує рівні площі) є наслідком закону збереження моменту імпульсу.

**Задача 3.194.** Планета рухається навколо Сонця по еліпсу, в одному із фокусів якого знаходиться Сонце. Довести, що момент кількості руху планети відносно Сонця є величина стала.

**Задача 3.195.** Користуючись результатами попередньої задачі, довести, що момент кількості руху планети відносно Сонця може бути наведений у вигляді $\vec{L} = \vec{r} \cdot m\vec{\upsilon} = 2m\vec{\sigma} = \mathrm{Const}$, де $m$ – маса планети, а $\vec{\sigma}$ – секторіальна швидкість планети.

**Задача 3.196.** Чи можна очікувати, що повна енергія і повний момент кількості руху Сонячної системи залишаються сталими?

**Задача 3.197.** Який момент сил необхідно прикласти до Землі, щоб її обертання зупинилося через $10^8$ років (рік – $366{,}25$ «зоряних» діб)?

**Задача 3.198.** Визначити момент інерції $I$ земної кулі відносно осі обертання.

**Задача 3.199.** Визначити момент кількості руху Землі відносно осі обертання (власний момент) і енергію її обертання, вважаючи Землю симетричною кулею.

**Задача 3.200.** Оцінити, з якою мінімальною швидкістю $\upsilon$ необхідно запустити на полюсі Землі тіло масою $m = 1000$т, щоб повернути земну вісь відносно системи «нерухомих зірок» на кут $\alpha = 1^o$. Маса Землі $M = 6 \cdot 10^{21}$т. Довжина градуса земного меридіана $l = 111$км. Землю вважати однорідною кулею.

**Задача 3.201.** Обчислити моменти імпульсу Землі відносно Сонця $L_C$ і власної осі обертання $L_O$. Вважати, що Земля обертається навколо Сонця по колу.

**Задача 3.202.** У скільки разів орбітальний момент імпульсу Землі відносно Сонця $L$ більший від моменту імпульсу Землі відносно власної осі обертання $L_O$?

**Задача 3.203.** Знайти момент імпульсу $L$ Землі відносно власної осі обертання, врахувавши щільність Землі $\rho = 5{,}5 \cdot 10^3$ кг/м$^3$.

**Задача 3.204.** Оскільки Земля є дещо сплюснутою порівняно з правильною формою кулі, то Місяць і Сонце в результаті гравітаційної дії на неї створюють певний обертовий момент. Встановити, яке з цих небесних тіл спричинює більший момент і приблизно у скільки разів?

**Задача 3.205.** Якщо весь лід на Землі розплавити, то середній рівень світового океану підніметься приблизно на $61$м. Вважати середню широту, де скупчений лід, рівною $80^o$; нерівномірним розподілом водяних мас океанів на Землі знехтувати і розрахувати, на скільки секунд у результаті такого процесу збільшилася б тривалість доби? Вважати Землю сферою з радіусом $6370$км і моментом інерції $8{,}11 \cdot 10^{37}$ кг$\cdot$м$^2$.

**Задача 3.206.** Визначити момент кількості руху планети, маса якої $m$ і яка рухається по коловій орбіті з радіусом $R$. Використовуючи цей результат, довести, що завдяки припливам, які гальмують обертання Землі, відстань між Місяцем і Землею з часом буде збільшуватися (хоч і дуже повільно). Проаналізуйте питання про збереження енергії в системі Земля-Місяць.

**Задача 3.207.** Екваторіальний і полярний радіуси Землі дорівнюють 6378,388 і 6356,912 км відповідно. Щільність $\rho$ на різних глибинах $D$, відміряних від поверхні Землі, наведена нижче (зірочкою відзначені стрибки щільності):

| $D$, км | 0 | 30* | 100 | 200 | 400 | 1000 | 2000 | 2900* | 3500 | 5000* | 6000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$, г/см$^3$ | 2,60 | 3,0 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 4,7 | 5,2 | 5,7 | 10,2 | 11,5 | 17,1 |
| | | 3,3 | | | | | | 9,4 | | 16,8 | |

Використовуючи ці дані, оцінити:

а) момент інерції Землі;

б) її обертовий момент кількості руху;

в) кінетичну енергію обертання.

**Задача 3.208.** Як змінюється вага тіла при його русі на шляху від Землі до Місяця? Чи змінюється при цьому його маса?

**Задача 3.209.** Штучна планета обертається навколо Сонця по еліпсу. Найменша відстань $r_{\min}$ планети від Сонця дорівнює 0,97, найбільша відстань $r_{\max}$ дорівнює 1,31а.о. (середньої відстані Землі від Сонця). Визначити період $T$ обертання (в роках) штучної планети.

**Задача 3.210.** За яких умов другий закон Кеплера втрачає силу?

# РОЗДІЛ 4. ЗОРІ

**Задача 4.1.** Якого прискорення $a$ надає Сонце тілам, що знаходяться на поверхні Землі?

**Задача 4.2.** Знайти прискорення сили тяжіння $g_c$ на поверхні Сонця, якщо відомі: тривалість земного року $T$, відстань від Землі до Сонця $R$ ($\approx 8{,}3$ світлових хвилин) і кут $\alpha$, під яким видно діаметр Сонця ($\approx 32'$).

**Задача 4.3.** Яке прискорення сили тяжіння на поверхні Сонця, якщо радіус його в 108 разів більший від радіуса Землі, а щільність відноситься до щільності Землі, як 1 до 4?

**Задача 4.4.** Визначити відношення наступних прискорень: прискорення $w_1$, викликаного силою тяжіння на поверхні Землі; прискорення $w_2$, викликаного доцентровою силою інерції на екваторі Землі; прискорення $w_3$, якого надає тілам Сонце на поверхні Землі.

**Задача 4.5.** Якби Сонце і планета не рухалися, то вони, взаємно притягаючись, через деякий проміжок часу упали б одне на одного. Але планета рухається. Сила притягання планети Сонцем проявляється в тому, що планета рухається навколо Сонця. Сонце, притягуючись до планети, повинно було б наближатися до неї (внаслідок руху планети Сонце повинно було б наближатися до неї по спіралі). Проте цього не спостерігається. Чому?

**Задача 4.6.** Чому буде дорівнювати числове значення величини добутку $GM_c$, якщо відстань вимірювати в астрономічних одиницях (а.о.), а час у роках?

**Задача 4.7.** Невелике тіло починає падати на Сонце з відстані, рівної радіусу земної орбіти. Початкова швидкість тіла в геліоцентричній системі відліку дорівнює нулю. Визначити за допомогою законів Кеплера, скільки часу буде продовжуватися падіння.

**Задача 4.8.** Визначити прискорення вільно падаючих тіл на поверхні Сонця, коли відомі: радіус земної орбіти $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км, радіус Сонця $r = 7 \cdot 10^5$ км і час обертання Землі навколо Сонця $T = 1$ рік.

**Задача 4.9.** Відомий білий карлик – Сіріус-В має радіус, який дорівнює 0,02 радіуса Сонця, маса цієї зорі дорівнює масі Сонця. Чому дорівнює прискорення на поверхні Сіріуса-В і яка його щільність?

**Задача 4.10.** На поверхні Сіріуса-В частинка мала швидкість $\upsilon = 10$ км/с, яка спрямована вертикально вгору. Обчислити прискорення вільного падіння $g_C$ на Сіріусі-В, якщо частинка, рухаючись вільно в полі тяжіння, перебувала на висоті $h = 10$ м двічі з часовим інтервалом $\Delta t = 1{,}4$ мс.

**Задача 4.11.** Третій закон Кеплера, уточнений на підставі закону всесвітнього тяжіння, можна використати для визначення співвідношення між масою Сонця і масою будь-якої планети, яка має супутника, наприклад Землі. Закон має вигляд: $\frac{T_З^2}{T_М^2} \cdot \frac{M_C + m_З}{m_З + m_М} = \frac{a_З^3}{a_М^3}$.

Якщо врахувати, що маса Землі мала порівняно з масою Сонця, а маса Місяця – порівняно з масою Землі, то цей закон можна записати в наступному вигляді: $M_C / m_З = (a_З / a_М)^3 \cdot (T_М / T_З)^2$. Визначити масу Сонця по відношенню до маси Землі, вважаючи, що середня відстань до Місяця $3{,}84 \cdot 10^5$ км $= 2{,}56 \cdot 10^{-3}$ а.о., а період обертання Місяця $27{,}3$ доби $= 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ року.

**Задача 4.12.** Третій закон Кеплера встановлює наступну залежність між періодами обертання планет навколо Сонця і їх середніми відстанями до Сонця: $T_1^2 / T_2^2 = a_1^3 / a_2^3$, де $T_1$ і $T_2$ – періоди обертання двох будь-яких планет, а $a_1$ і $a_2$ – їх середні відстані від Сонця. Якщо однією з планет буде Земля, для якої $T_1 = 1\,рік$, а $a_1 = 1$ астрономічній одиниці (а.о.), то закон Кеплера запишеться у вигляді $T_2^2 = a_2^3$. Використовуючи цю залежність, визначити на якій середній відстані від Сонця знаходиться Венера та найбільш віддалена від Сонця планета Плутон, якщо рік на Венері складає $0{,}62$, а на Плутоні $248{,}4$ земного року. Відстані виразити в кілометрах і в а.о.

**Задача 4.13.** Згідно з третім законом Кеплера відношення кубу великої півосі еліптичної орбіти $a$ до квадрата періоду обертання планети $T$ є величина, однакова для всіх планет Сонячної системи. Вона називається сталою Кеплера і позначається $K$. Третій закон Кеплера строго виконується, коли маса планети нехтовно мала порівняно з масою Сонця. Знайти вираз для сталої Кеплера.

**Задача 4.14.** Як зміниться вигляд третього закону Кеплера, якщо не нехтувати масою планети $m$ порівняно з масою Сонця $M$?

**Задача 4.15.** Визначити масу Сонця, знаючи період обертання Землі навколо Сонця $T$ і радіус земної орбіти $r$.

**Задача 4.16.** Визначити масу Сонця, вважаючи швидкість обертання Землі навколо Сонця рівною $30$ км/с і середній радіус земної орбіти $15 \cdot 10^7$ км.

**Задача 4.17.** Радіус земної орбіти 150 млн. км, а радіус Сонця $700000$ км. Яка середня щільність Сонця?

**Задача 4.18.** Визначити першу і другу космічні швидкості поблизу поверхні Сонця.

**Задача 4.19.** Сонце притягує тіла, які знаходяться на Землі, з деякою силою, яка вночі спрямована у той же бік, що й сили притягання цих тіл Землею, а вдень спрямована у протилежний бік. Чи викликає ця зміна напряму сили притягання Сонця зміну ваги тіл протягом доби?

**Задача 4.20.** Розв’язати попередню задачу (№ 4.19) з урахуванням неоднорідності гравітаційного поля Сонця, враховуючи, що крім Землі і Сонця, жодних інших небесних тіл немає.

**Задача 4.21.** На $1\,м^2$ поверхні, перпендикулярної до напряму сонячних променів, біля Землі за межами її атмосфери припадає приблизно $1{,}4$ кВт світлової енергії Сонця. Яку кількість маси втрачає Сонце за 1 с за рахунок випромінювання світла? На скільки часу вистачить $0{,}1$ маси Сонця, щоб підтримувати його випромінювання? Відстань від Сонця до Землі складає біля $150 \cdot 10^6$ км. Маса Сонця $2 \cdot 10^{30}$ кг.

**Задача 4.22.** Пульсарами називають космічні об'єкти, які посилають імпульси радіовипромінювання, які слідують один за одним з високо-стабільними періодами, що лежать у межах, приблизно, від $3\cdot10^{-2}$ с до $4$ с. Згідно з сучасними уявленнями пульсари являють собою обертові нейтронні зорі, які утворилися в результаті гравітаційного стиску. Нейтронні зорі подібні до гігантських атомних ядер, які складаються лише з нейтронів. Щільність речовини $\rho$ в нейтронній зорі неоднорідна, але при грубих оцінках її можна вважати однією і тією ж по всьому об'єму зорі і за порядком величини рівною $10^{14}$ г/см$^3$. Оцінити період обертання $T$, з яким почало б обертатися Сонце, якби воно перетворилося в нейтронну зорю. Щільність речовини Сонце зростає до його центру, а різні шари його обертаються з різними швидкостями. При оцінці цими обставинами знехтувати і вважати, що середня щільність сонячної речовини $\rho_0 = 1{,}41$ г/см$^3$, а період обертання Сонця $T_0 = 2{,}2\cdot10^6$ с.

**Задача 4.23.** На основі спостережень зроблено висновок, що речовина у Всесвіті розподілена більш-менш рівномірно. Який висновок, виходячи з теорії тяжіння Ньютона, можна зробити про місцезнаходження нашої Галактики у Всесвіті, якщо вважати, що результуюча сила тяжіння на неї не залежить від часу і дорівнює нулеві?

**Задача 4.24.** У нашій Галактиці нараховується приблизно $1{,}6\cdot10^{11}$ зірок. Нехтуючи гравітаційною енергією окремих зірок і вважаючи, що маса кожної зорі дорівнює масі Сонця, а середня відстань між будь-якими двома зірками порядку $10^{21}$ м, порівняйте гравітаційну енергію Галактики з гравітаційною енергією Сонця.

**Задача 4.25.** З якою силою $F$ притягуються дві галактики, маси яких $m_1 = 10^{11} m_C$ і $m_2 = 10^{10} m_C$, якщо центри їх містяться на відстані $r = 10^8$ кпк одна від одної? Тут $m_C$ – маса Сонця; 1 кпк $=$ 1кілопарсек $= 3{,}1\cdot10^{19}$ м.

**Задача 4.26.** Покладемо в основу моделі (яка потім буде корисною при розв'язанні задач про взаємний рух компонентів подвійних зірок, відносний рух планет та їх супутників тощо) уявлення про те, що два тіла, які взаємно притягуються, неперервно «падають» одне на одне, і в результаті обертаються навколо однієї загальної нерухомої точки (центра мас системи). Довести, що період обертання при фіксованій відстані $R$ (колові орбіти) між тілами залежить лише від суми їх мас, але не від відношення мас цих тіл. Довести, що це твердження справедливе також і для еліптичних орбіт.

**Задача 4.27.** У процесі гравітаційного стиску радіус зірки, що обертається навколо своєї осі, зменшився в 500 разів. Визначити, у скільки разів $n$ змінилася швидкість її обертання.

**Задача 4.28.** Дві зорі, що утворюють подвійну зорю з масою $3\cdot10^{33}$ кг кожна, обертаються навколо спільного центра мас на відстані $1{,}0\cdot10^{17}$ м від нього.

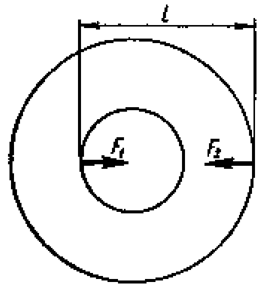
а) Визначити їх загальну кутову швидкість.

б) Нехай через спільний центр мас обох зір пролітає метеорит під прямим кутом до лінії, що з’єднує обидві зорі. Якою повинна бути швидкість метеорита, щоб він міг вийти за межі тяжіння подвійної зорі?

**Задача 4.29.** Дві зорі однакової маси $m$ рухаються по колу радіусом $R$, залишаючись одна напроти одної. Нехтуючи впливом інших небесних тіл, визначити швидкість руху цих зір.

**Задача 4.30.** Як зміниться відповідь попередньої задачі, якщо в центрі кола їх обертання буде знаходитися ще одна зоря з такою ж масою $m$?

**Задача 4.31.** Дві зорі з масами $M_1$ і $M_2$ рівномірно обертаються по концентричних колових траєкторіях навколо спільного центра. Відстань між зорями завжди постійна і дорівнює $L$ (мал. 4.1.). Визначити радіуси орбіт і періоди обертання цих тіл.




**Мал. 4.1.**

**Задача 4.32.** Дві зорі обертаються одна відносно одної з постійними за модулями швидкостями $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$ і з одним і тим же періодом $T$. Визначити маси цих зірок і відстань між ними.

**Задача 4.33.** Подвійна зірка, яка складається із зірок з масами $m_1 = 2\cdot10^{30}$кг і $m_2 = 5\cdot10^{30}$кг, обертається навколо спільного центра маси. Визначити період обертання, якщо відстань між центрами зірок $l = 3\cdot10^{11}$м.

**Задача 4.34.** Уявимо собі, що Сонце стиснеться (зколапсує) в пульсар. Оцінити мінімальний радіус пульсара і період його обертання.

**Задача 4.35.** Дві зорі $A$ і $B$ рухаються одна навколо одної під дією взаємного гравітаційного притягання. Велика піввісь орбіти цього відносного руху, виміряна в астрономічних одиницях (а.о.), дорівнює $R$, а період обертання дорівнює $T$ років. Отримати вираз для відношення суми мас зірок $M_A + M_B$ до маси Сонця $M_C$.

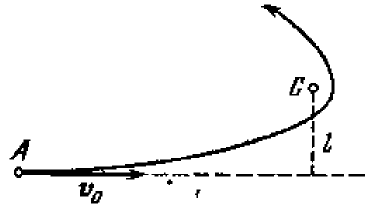
**Задача 4.36.** Дві зорі під дією сили їх взаємного гравітаційного притягання описують колові орбіти навколо їх спільного центра мас з періодом $T$, що дорівнює двом рокам. Сума мас зірок дорівнює двом сонячним масам. Знайти відстань між зорями, знаючи, що середня відстань від Землі до Сонця дорівнює $150\cdot10^6$км (масою Землі порівняно з масою Сонця знехтувати).

**Задача 4.37.** Зоря Сіріус віддалена від Землі приблизно на $8{,}4\cdot10^{16}$м. Виразити цю відстань у світлових роках.

**Задача 4.38.** Визначити відстань $R$ між компонентами подвійної зорі, якщо їх загальна маса $M_1 + M_2$ дорівнює подвійній масі Сонця $M_0$, і зорі обертаються по колових орбітах навколо їх центра мас з періодом $T = 2T_0$, де $T_0$ – тривалість земного року. Відстань від Землі до Сонця $R_0 = 1{,}5\cdot10^8$км.

**Задача 4.39.** Мінімальна відстань між компонентами подвійної зорі, які обертаються один відносно одного, дорівнює $r_1$. Відносна швидкість їх у цьому положенні дорівнює $\upsilon_1$. Сума мас обох компонентів дорівнює $M$. Знайти відстань між компонентами $r_2$ і їх відносну швидкість $\upsilon_2$ при максимальному віддаленні один відносно одного. При якому мінімальному значенні відносної швидкості $\upsilon_1$ подвійна зоря розпадеться?

**Задача 4.40.** Космічне тіло $A$ рухається до Сонця ($C$), маючи на віддаленні від нього швидкість $\upsilon_0$ і прицільний параметр $l$ – плече вектора $\vec{\upsilon}_0$ відносно центра Сонця (див. мал. 4.2). Визначити найменшу відстань, на яку це тіло наблизиться до Сонця.




**Мал. 4.2.**

**Задача 4.41.** При якій кутовій швидкості обертання зорі з її екватора почне відриватися речовина? Для розрахунку скористатися системою відліку, пов'язаною з обертовою зорею.

**Задача 4.42.** Вивести третій закон Кеплера для випадку, коли компоненти подвійної зорі обертаються навколо спільного центра мас. Маси компонент – $m_1$ і $m_2$; $r_1$ і $r_2$ – їх відстані від центра мас відповідно.

**Задача 4.43.** Довести, що період супутника, який обертається навколо планети (або будь-якого іншого тіла зі сферично симетричним розподілом мас) безпосередньо близько від її поверхні, залежить лише від середньої щільності планети $\rho$. Обчислити період такого супутника для нейтронної зорі, вважаючи, що щільність речовини нейтронної зірки така ж, як і щільність речовини, з якої складаються атомні ядра ($\rho \approx 10^{14}$ г/см$^3$).

**Задача 4.44.** За сучасними уявленнями пульсар – це зоря, яка складається практично цілком з нейтронів. Уважаючи, що маса пульсара дорівнює масі Сонця ($2 \cdot 10^{30}$ кг), а радіус його близько 10 км, оцінити кінетичну енергію нейтронів.

**Задача 4.45.** Тригонометричний паралакс Сіріуса (тобто кут, під яким із Сіріуса видно радіус земної орбіти) дорівнює 0,378 кутових секунд. Використовуючи ці дані та необхідні довідкові дані, визначити сумарну масу системи Сіріуса по відношенню до маси Сонця:

а) уважаючи, що площина орбіти відносного руху Сіріуса $A$ і Сіріуса $B$ перпендикулярна до напряму на Землю;

б) враховуючи, що реальний кут між площиною орбіти і напрямом на Землю відрізняється від прямого, з'ясувати, чи отримане значення маси є граничним? Якщо так, то це верхня, чи нижня межа?

# РОЗДІЛ 5. КОМЕТИ, МЕТЕОРИТИ, АСТЕРОЇДИ

**Задача 5.1.** Вперше комету Галлея було помічено у 1456 р. У 1986 році вона була зафіксована сьомий раз. 19 квітня 1910 р. було виміряно відстань між нею і Сонцем, яка виявилася рівною 0,60 а.о. (астрономічних одиниць). Визначити: а) на яку відстань віддаляється комета від Сонця у найбільш віддаленій точці своєї траєкторії? б) чому дорівнює відношення максимального значення її орбітальної швидкості до мінімального?

**Задача 5.2.** Найбільша відстань комети Галлея від Сонця $h = 35{,}4$, найменша – $l = 0{,}59$ (за одиницю відстані прийнято відстань від Землі до Сонця). Лінійна швидкість руху комети в афелії $\upsilon_1 = 0{,}91$ км/с. Яка швидкість $\upsilon_2$ комети в перигелії?

**Задача 5.3.** Комета, огинаючи Сонце, рухається по орбіті, яку можна вважати параболічною. З якою швидкістю $\upsilon$ рухається комета, коли вона проходить через перигелій, якщо відстань $r$ комети від Сонця в цей момент дорівнює 50Гм?

**Задача 5.4.** Комета пролітає повз Сонце так, що її мінімальна відстань від центра Сонця становить $10r_c$. Прицільний параметр комети на значній відстані від Сонця дорівнює $100r_c$. Яка швидкість комети на цій відстані? Радіус Сонця $r_C = 695$Мм, а його маса становить $1{,}99 \cdot 10^{30}$кг. Впливом інших космічних тіл на траєкторію комети знехтувати.

**Задача 5.5.** Комета рухається навколо Сонця по еліпсу, ексцентриситет якого $e = 0{,}9$. У скільки разів $n$ швидкість комети в перигелії (найближча до центра Сонця точка орбіти) більша, ніж в афелії (найвіддаленіша від центра Сонця точка орбіти)?

**Задача 5.6.** Комета рухається навколо Сонця по вітці гіперболи. Не інтегруючи рівнянь руху, а користуючись лише законами збереження енергії і моменту імпульсу, визначити відстань $2a$ між вершинами розглядуваної і спряженої з нею віток гіперболи.

**Задача 5.7.** Комета, яка захоплена Сонцем, на орбіті має лінійну швидкість в афелії (точці найбільшого віддалення від Сонця) $\upsilon_1 = 0{,}8$км/с; її відстань від Сонця при цьому дорівнює $R = 6 \cdot 10^{12}$м. У перигелії $\upsilon_2 = 50$км/с. Знайти відстань $r$ комети від Сонця в перигелії. Маса Сонця $M = 2 \cdot 10^{30}$кг.

**Задача 5.8.** З якою швидкістю $\upsilon$ наблизиться до Землі метеор, потрапивши у поле її тяжіння, якщо його швидкість відносно Землі на великій відстані від неї зовсім мала?

**Задача 5.9.** Метеорит падає на Сонце з дуже великої відстані, яку практично можна вважати нескінченно великою. Початкова швидкість метеорита нескінченно мала. Яку швидкість $\upsilon$ буде мати метеорит у той момент, коли його відстань до Сонця дорівнює середній відстані $R$ Землі від Сонця?

**Задача 5.10.** З якою швидкістю упаде на поверхню Місяця метеорит, швидкість якого на значному віддаленні від Місяця, мала? Атмосфера на Місяці відсутня.

**Задача 5.11.** На Землю з дуже великої відстані падає метеорит масою $m$. Визначити кінетичну енергію $E$ метеорита на відстані $h$ від поверхні Землі. Вважати, що початкова швидкість метеорита далеко від Землі дорівнює нулю.

**Задача 5.12.** Яка енергія виділилася б при лобовому непружному зіткненні з Землею метеорита діаметром $10^3$ м і щільністю $50$ кг/м$^3$? Перед зіткненням метеорит рухався по орбіті, на якій його механічна енергія була близька до нуля. Виразити результат у мегатоннах тринітротолуолу ($1\text{Мт} = 4 \cdot 10^{15}$ Дж).

**Задача 5.13.** Метеорит масою $m = 10^5$ т, який рухався з швидкістю $\upsilon = 50$ км/с, ударився об Землю на широті $\varphi = 60^o$. Вся його кінетична енергія перетворилася в теплову (внутрішню) енергію, а сам він випарувався. Який максимальний вплив міг спричинити удар такого метеорита на тривалість доби на Землі?

**Задача 5.14.** Визначити початкову швидкість метеоритів $\upsilon_\infty$, якщо прицільна відстань (довжина перпендикуляра, опущеного з центра Землі на початковий напрям дотичної до траєкторії метеорита, коли він знаходиться на нескінченності), за якої вони ще падають на Землю, дорівнює $l$ ($l > R, R -$ радіус земної кулі). Числовий результат отримати для $l = 2R$.

**Задача 5.15.** Метеорит і ракета рухаються під кутом $90^0$. Ракета влучає в метеорит і застряє в ньому. Маса метеорита $m$, маса ракети $m/2$, швидкість метеорита $\upsilon$, швидкість ракети $2\upsilon$. Визначити імпульс метеорита і ракети після співудару.

**Задача 5.16.** На поверхню Землі з дуже великої відстані падає метеорит. З якою швидкістю метеорит упав би на Землю, якби атмосфера не гальмувала його рух?

**Задача 5.17.** Метеорит згоряє в атмосфері, не досягаючи поверхні Землі. Куди «зник» при цьому його імпульс?

**Задача 5.18.** Обчислити прискорення вільного падіння $g_1$ на астероїді діаметром $d = 30$ км, вважаючи, що середня щільність речовини астероїда така сама, як і Землі.

**Задача 5.19.** Припустимо, що внаслідок вибуху астероїд, який рухався по коловій орбіті навколо Сонця, розпався на два осколки однакової маси. Один осколок безпосередньо після вибуху зупинився, другий продовжував рух. По якій траєкторії буде рухатися другий осколок: еліптичній, гіперболічній чи параболічній?

**Задача 5.20.** В умові попередньої задачі обидва осколки розлітаються в перпендикулярних напрямках з однаковими швидкостями. По яких орбітах вони будуть рухатися?

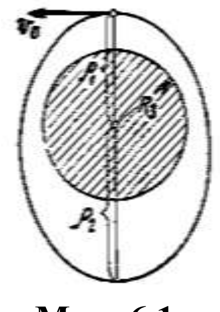
**Задача 5.21.** Однорідний астероїд сферичної форми має радіус $R$ і масу $M$. Яку мінімальну енергію слід витратити для перетворення астероїда у пилову хмару, розміри якої значно перевищують розміри астероїда?

**Задача 5.22.** Космонавт масою $80$кг знаходиться на поверхні сферичного астероїда радіусом $1$ км і щільністю $5$г/см$^3$. З якою максимальною горизонтальною швидкістю відносно астероїда космонавт може кинути камінь масою $4$кг, не ризикуючи, що сам стане супутником астероїда?

**Задача 5.23.** Радіус одного з астероїдів $r = 5$км. Допускаючи, що щільність астероїда дорівнює $\rho_a = 5{,}5$ г/см$^3$, 1) знайти прискорення сили тяжіння $g_a$ на його поверхні; 2) визначити, на яку висоту піднялася б людина, яка перебувала б на астероїді і підстрибнула з зусиллям, достатнім для стрибка на висоту $5$см на Землі (астероїд має форму кулі).

# РОЗДІЛ 6. РАКЕТИ, КОСМІЧНІ КОРАБЛІ

**Задача 6.1.** Ракета-носій підняла супутник вертикально до максимальної висоти, рівної $R = 1{,}25R_З$ ($R_З$ – радіус Землі), відрахованої від центра Землі. У верхній точці підйому ракета надала супутникові азимутальну (горизонтальну) швидкість, рівну по величині першій космічній швидкості: $\upsilon_0 = \upsilon_I$ і вивела його на еліптичну орбіту (див. мал. 6.1.).



**Мал. 6.1.**

Яке максимальне і мінімальне віддалення супутника від центра Землі?

**Задача 6.2.** Визначити приблизно четверту космічну швидкість, тобто мінімальну швидкість, яку необхідно надати ракеті на поверхні Землі, щоб ракета могла упасти в задану точку на Сонці. Середній кутовий радіус Сонця $\alpha = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$ рад. Передбачається, що Земля рухається навколо Сонця по коловій орбіті з швидкістю $\upsilon_к = 29{,}8$ км/с. Обчислити, зокрема, значення четвертої космічної швидкості за додаткової умови, щоб ракета падала на Сонце радіально (тобто, щоб продовження її прямолінійної траєкторії проходило через центр Сонця).

**Задача 6.3.** Визначити другу космічну швидкість при старті ракети з поверхні Юпітера, використовуючи наступні дані. Третій супутник Юпітера – Ганімед обертається навколо планети практично по коловій орбіті з радіусом $R = 1{,}07 \cdot 10^6$ км з періодом обертання $T = 7{,}15$ діб. Радіус планети $r = 7 \cdot 10^4$ км.

**Задача 6.4.** Ракета, початкова маса якої $M_0$ кг, викидає продукти згорання палива з постійною швидкістю $\upsilon_0$ відносно ракети. За 1 с викидається $dm/dt = r_0$ кг/с газів.

а) Визначити прискорення ракети в початковий момент, нехтуючи силою тяжіння.

б) Якщо швидкість витікання газів $\upsilon_0 = 2{,}0$ км/с, то яку масу за секунду необхідно викинути газів, щоб створити тягу $10^5$ кГ?

в) Скласти і розв’язати диференціальне рівняння, яке зв’язує швидкість ракети з її залишковою масою.

**Задача 6.5.** Ракета з початковою масою $m$ запущена вертикально вгору. Швидкість газів на виході із сопла двигуна – $\upsilon$, секундна втрата палива – $\mu$. Визначити прискорення ракети через час $t$ з моменту її запуску.

**Задача 6.6.** Ракета вагою 6 тонн встановлена для запуску по вертикалі. Якщо швидкість вихлопу газів 1000м/с, то яка кількість газу повинна бути виштовхнутою за 1с, щоб забезпечити тягу достатню: а) щоб подолати вагу ракети; б) щоб надати ракеті початкового прискорення вгору, рівного $19{,}6$ м/с$^2$.

**Задача 6.7.** Довести, що швидкість ракети дорівнює швидкості вихлопних газів у випадку, коли $M_0/M = e \approx 2{,}8$, де $M_0$ і $M$ – відповідно стартова маса ракети і її маса до моменту чергового вихлопу. Точно встановити координатну систему, якої стосується цей результат. Довести також, що швидкість ракети буде дорівнювати подвійній швидкості вихлопу, якщо $M_0/M = e \approx 7{,}9$.

**Задача 6.8.** Ракета, запущена у вертикальному напрямі, рухається з прискоренням $2g$ протягом всіх 50с роботи двигуна. Нехтуючи опором повітря і зміною величини $g$ з висотою:

а) накреслити діаграму $\upsilon(t)$ для всього часу польоту ракети;

б) визначити максимальну висоту, якої досягне ракета;

в) розрахувати повний час польоту ракети від моменту її запуску до повернення на Землю.

**Задача 6.9.** Стартова маса ракети $M_0 = 160$т, швидкість витікання газів 4км/с. Після того як вигоріло 90т палива, відділяється перший ступінь ракети масою 30т. Потім вигорає ще 28т палива. Яка кінцева швидкість другого ступеня? Якої швидкості набула б одноступінчаста ракета за тієї ж маси палива?

**Задача 6.10.** Визначити початкове прискорення ракети, якщо її початкова маса 40т, швидкість витікання газів 4км/с і витрата палива 200кг/с.

**Задача 6.11.** У ракеті, яка стартує вертикально вгору з прискоренням $a$, встановлено маятниковий годинник. Який проміжок часу $T_1$ відлічить годинник з моменту старту ракети до падіння її на Землю, якщо двигун протягом підйому ракети працював час $T$, виміряний за годинником на Землі?

**Задача 6.12.** Для подорожей до зірок необхідні швидкості, порівняні з швидкістю світла. Оцінити перспективи використання ракет на хімічному паливі для досягнення зоряних світів. Припустити, що швидкість витікання газів $u = 10$км/с (що для хімічного палива дуже завищено) і ракета повинна досягнути швидкості $\upsilon = c/4$. Визначити відношення стартової маси ракети $m_0$ до її маси $m$ після досягнення вказаної швидкості.

**Задача 6.13.** З поверхні Місяця стартує двохступінчаста ракета. При якому відношенні мас першого $(m_1)$ і другого $(m_2)$ ступенів швидкість контейнера з корисним вантажем (масою $m$) буде максимальною? Швидкість витікання газів $u$ в двигуна обох ступенів постійна і однакова. Відношення маси палива до маси ступеня відповідно рівні $\alpha_1$ і $\alpha_2$ для першого і другого ступенів. Відділення ступенів і контейнера відбувається без надання додаткових імпульсів.

**Задача 6.14.** Від двохступінчастої ракети загальною масою 1т у момент досягнення нею швидкості 171м/с відділився її другий ступінь масою 0,4т, швидкість якого при цьому зросла до 185м/с. Визначити, з якою швидкістю став рухатися перший ступінь ракети. Швидкості вказані відносно спостерігача, що знаходиться на Землі.

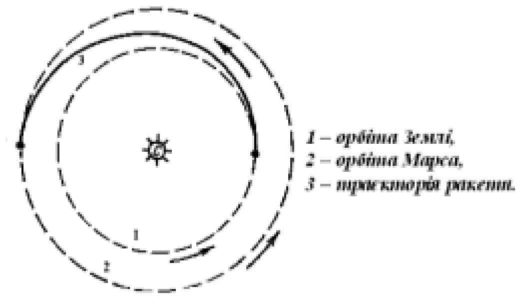
**Задача 6.15.** З якою швидкістю $\upsilon_p$ буде рухатися ракета, якщо середня швидкість витікаючих газів $\upsilon_г = 1$км/с, а маса пального $m$ складає 80% всієї маси ракети?

**Задача 6.16.** Ракета з конічною носовою частиною рухається в пиловій хмарі з постійною швидкістю $\vec{\upsilon}$, направленою уздовж її осі. Щільність хмари дорівнює $\rho$. Площа поперечного перерізу ракети дорівнює $S$, кут розхилу конічної частини $2\alpha$. Визначити силу тяги двигуна ракети. Зіткнення частинок пилу з корпусом ракети вважати пружними.

**Задача 6.17.** Ракета рівномірно рухається через розріджену хмару пилу. У скільки разів необхідно збільшити силу тяги, щоб швидкість ракети стала удвічі більшою?

**Задача 6.18.** На висоті $h = 2{,}6$Мм над поверхнею Землі космічній ракеті було надано швидкість $\upsilon = 10$км/с, яка напрямлена перпендикулярно до лінії, яка з'єднує центр Землі з ракетою. По якій орбіті відносно Землі буде рухатися ракета? Визначити вид конічного перерізу.

**Задача 6.19.** Ракета, запущена із Землі на Марс, летить, рухаючись навколо Сонця по еліптичній орбіті (див. мал. 6.2.). Середня відстань $r$ планети Марс від Сонця дорівнює 1,5 а.о. Протягом якого часу $t$ буде летіти ракета до зустрічі з Марсом?




**Мал. 6.2.**

**Задача 6.20.** На яку висоту над поверхнею Землі підніметься ракета, запущена вертикально вгору, якщо початкова швидкість $\upsilon$ ракети дорівнює першій космічній швидкості?

**Задача 6.21.** Якою буде швидкість $\upsilon$ ракети на висоті, рівній радіусу Землі, якщо ракета запущена із Землі з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 10$км/с? Опір повітря не враховувати. Радіус $R$ Землі і прискорення вільного падіння $g$ на її поверхні вважати відомими.

**Задача 6.22.** Ракета запущена з Землі з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 15$км/с. До якої межі буде прямувати швидкість ракети, якщо відстань ракети від Землі нескінченно збільшуватиметься? Опір повітря і притягання інших небесних тіл, крім Землі, не враховувати.

**Задача 6.23.** Фотонна ракета рухається відносно Землі зі швидкістю $\upsilon = 0{,}6$с. У скільки разів сповільниться хід часу в ракеті з точки зору земного спостерігача?

**Задача 6.24.** Чому ракета-носій першого штучного супутника Землі після відділення від супутника почала його випереджати?

**Задача 6.25.** Ракета встановлена на поверхні Землі для запуску у вертикальному напрямі. За якої мінімальної швидкості $\upsilon_1$, наданій ракеті при запускові, вона віддалиться від поверхні на відстань, яка дорівнює радіусові Землі ($R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м)? Врахувати лише силу гравітаційної взаємодії ракети і Землі.

**Задача 6.26.** Ракета, запущена вертикально вгору, піднялася на висоту $h = 3200$км і почала падати. Який шлях $s$ пройде ракета за першу секунду свого падіння?

**Задача 6.27.** Ракета масою $m = 1$т, яка запущена з поверхні Землі вертикально вгору, піднімається з прискоренням $a = 2g$. Швидкість $\upsilon$ струменя газів, що вириваються із сопла ракети, дорівнює 1200м/с. Визначити витрату $\mu$ пального ракети.

**Задача 6.28.** Ракета, маса якої $M = 6$т, піднімається вертикально вгору. Двигун ракети розвиває силу тяги $F = 500$кН. Визначити прискорення $a$ ракети і силу натягу $T$ тросу, який вільно звисає з ракети, на відстані, що дорівнює ¼ його довжини від точки кріплення тросу. Маса тросу $m = 10$кг. Опором повітря знехтувати.

**Задача 6.29.** Третій ступінь ракети складається із ракети-носія масою $m_1 = 500$кг і головного конуса масою $m_2 = 10$кг. Між ними розміщено стиснуту пружину. При випробуваннях на Землі пружина надавала корпусу швидкість $\upsilon_0 = 5{,}1$м/с по відношенню до ракети-носія. Визначити швидкості конуса і ракети, якщо їх відділення відбудеться на орбіті з швидкістю $\upsilon = 8$км/с відносно Землі.

**Задача 6.30.** Ракета з рідким паливом масою $M = 15 \cdot 10^3$ кг запускається у вертикальному напрямі. Витрата палива $\mu = 150$кг/с. На яку висоту підніметься ракета за час роботи двигуна $t = 60$с, якщо швидкість витікання газів із сопла $\upsilon = 3 \cdot 10^3$м/с?

**Задача 6.31.** Чи дійсно початкова швидкість ракети повинна дорівнювати принаймні 11,2км/с, щоб вона могла покинути Землю?

**Задача 6.32.** У висотній ракеті встановлено годинник з маятником, який можна вважати математичним, і годинник з пружинним маятником. Ракета рухається вертикально вгору з прискоренням $a = 10g$. На висоті $h = 50$км двигун вимикається, і ракета продовжує підніматися за інерцією. Які будуть покази обох годинників у найвищій точці підйому ракети? Опором повітря і зменшенням сили земного тяжіння з висотою знехтувати.

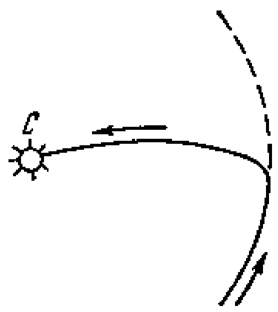
**Задача 6.33.** Ракета летить з швидкістю $\upsilon$. Після відокремлення головної частини швидкість ракети-носія зменшилася удвічі, а напрям руху ракети-носія і головної частини залишився попередній. У скільки разів зросла швидкість головної частини ракети, якщо її маса менша від маси ракети-носія в 6 разів?

**Задача 6.34.** Продукти згоряння викидаються із сопла ракетного двигуна порціями по $m = 200$г кожна з початковою швидкістю $\upsilon = 1000$м/с. Яку швидкість матиме ракета після викидання третьої порції, якщо в початковий момент її маса була $M = 300$кг, а швидкість $\upsilon_0 = 0$? Дію сили тяжіння не враховувати.

**Задача 6.35.** На висоті $h = 2{,}6$Мм над поверхнею Землі космічній ракеті була надана швидкість $\upsilon = 10$км/с, напрямлена перпендикулярно до лінії, яка з'єднує центр Землі з ракетою. По якій орбіті відносно Землі буде рухатися ракета? Визначити вид конічного перерізу.

**Задача 6.36.** Чому космічні ракети запускають у напрямі із заходу на схід? Чому найбільш вигідно запускати ракети у площині екватора?

**Задача 6.37.** Космічна ракета рухається навколо Сонця по орбіті, що майже співпадає з орбітою Землі. При вмиканні гальмівного пристрою ракета раптово втрачає швидкість і починає падати на Сонце (мал. 6.3.). Визначити час $t$, протягом якого буде падати ракета. (Ракета падає по еліпсу, велика вісь якого майже дорівнює радіусу орбіти Землі, а ексцентриситет майже рівний одиниці.




**Мал. 6.3.**

Період обертання по еліпсу не залежить від ексцентриситету).

**Задача 6.38.** Розрахуйте початкове, спрямоване вгору, прискорення ракети масою $1{,}3 \cdot 10^4$кг, якщо початкова величина тяги двигуна дорівнює $2{,}6 \cdot 10^5$Н. Чи можна при розрахунках знехтувати вагою ракети як силою, що притягує її до Землі?

**Задача 6.39.** При увімкнутому двигуні ракета масою $m$ нерухомо висить над поверхнею Землі. Визначити потужність $N$ ракети в цей час, якщо гази викидаються вертикально вниз із сопла з швидкістю $\upsilon$.

**Задача 6.40.** Знайти зв'язок між масою ракети $m(t)$, досягнутою нею швидкістю $\upsilon(t)$ і часом $t$, якщо ракета рухається вертикально вгору в полі тяжіння Землі. Швидкість газового струменя відносно ракети $u$ вважати постійною. Опір повітря і зміну прискорення вільного падіння $g$ з висотою не враховувати. Яку масу газів $\mu(t)$ повинна щосекунди викидати ракета, щоб залишатися нерухомою відносно Землі?

**Задача 6.41.** Визначити ККД ракети, тобто відношення кінетичної енергії $K$, якої набула ракета, до енергії витраченого палива $Q$. Швидкість, досягнута ракетою, дорівнює $\upsilon = 9$км/с. Теплота згорання палива $q = 4000$ккал/кг$= 16{,}74 \cdot 10^6$Дж/кг; швидкість викинутих продуктів згорання відносно ракети $u = 3$км/с.

**Задача 6.42.** У ракеті продукти згорання (гази) викидаються зі швидкістю $u = 3$км/с (відносно ракети). Знайти відношення $\eta$ її кінетичної енергії $K_{рак}$ до кінетичної енергії продуктів згорання $K_{газ}$ в момент досягнення ракетою швидкості $\upsilon_к = 12$км/с (кінцева швидкість).

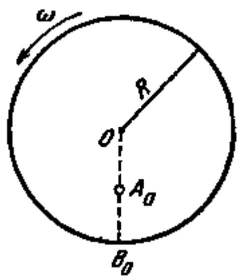
**Задача 6.43.** Визначити приблизно третю космічну швидкість, покладаючи, що ракета виходить із зони дії земного тяжіння під кутом $\theta$ відносно напряму орбітального руху Землі і Сонця. Вважати, що крім Землі і

Сонця, на ракету ніякі інші тіла не діють. (Третьою космічною швидкістю називається мінімальна швидкість, яку необхідно надати ракеті відносно Землі, щоб ракета назавжди покинула межі Сонячної системи).

**Задача 6.44.** Уздовж осі $x$ інерціальної системи відліку $K$ рухається ракета з швидкістю $V = 0{,}9c$ ($c$ – швидкість світла), яка проходить початок координат $O$ в момент часу $t = 0$. В момент часу $t_1 = 9$ слідом за ракетою посилається світловий сигнал з точки $O$, а з ракети – світловий сигнал у точку $O$. Покладаючи, що ракета рухається у вакуумі, визначити: 1) момент часу $t_2$, коли світловий сигнал, який посланий з точки $O$, досягне ракети; 2) момент часу $t_2$, коли сигнал, посланий з ракети, прийде в точку $O$; 3) на якій відстані $x_2$ від точки $O$ буде знаходитися ракета, коли до неї прийде сигнал з точки $O$; 4) коли повернеться в точку $O$ посланий з неї сигнал, якщо він відбивається від дзеркала, установленого на ракеті (момент часу $t_4$)?

**Задача 6.45.** З поверхні Місяця стартує двохступінчаста ракета. За якого відношення мас першого ($m_1$) і другого ($m_2$) ступенів швидкість контейнера з корисним вантажем (масою $m$) буде максимальною? Швидкість вихлопу газів $u$ у двигунах обох ступенів постійна і однакова. Відношення маси палива до маси ступеня дорівнюють відповідно $\alpha_1$ і $\alpha_2$ для першого і другого ступенів. Відділення ступенів і контейнера відбувається без надання додаткових імпульсів.

**Задача 6.46.** На мал. 6.4. схематично зображено поперечний переріз космічного корабля, який обертається навколо своєї поздовжньої осі. Оскільки в системі координат, жорстко зв’язаній з цим кораблем, діє поле відцентрової сили інерції, то всі предмети в цьому кораблі будуть тиснути на свої опори, тобто будуть мати деяку «штучну вагу». Нехай тепер



**Мал. 6.4.**

космонавт, який знаходиться в кораблі, випускає з рук м’яч у точці $A_O$.

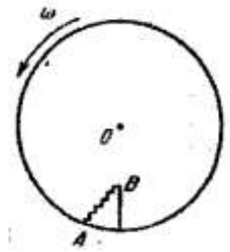
З точки зору космонавта наступний рух м’яча пояснюється таким чином: оскільки на м’яч діє відцентрова сила інерції, то він стане рухатися від центра $O$ і через деякий час, «упаде на підлогу» в точці $B_O$. Як пояснити поведінку цього м’яча з точки зору спостерігача, який не бере участі в обертанні корабля?

**Задача 6.47.** М’яч, про який говорилося в попередній задачі, випускають у точці $A_O$. Нехай $R = 10$м, $A_O B_O = 2$м. У якому місці корабля упаде м’яч?

**Задача 6.48.** Розв’язати попередню задачу у випадку, коли $R = 10$м, $A_O B_O = 7{,}8$м. Куди в цьому випадку упаде м’яч?

**Задача 6.49.** У космічному кораблі з штучним тяжінням (див. попередні задачі) було виявлене наступне явище: якщо м’ячу, який знаходиться у точці $A_O$, надати відповідної швидкості у напрямі, перпендикулярному до $A_O B_O$, то він буде рухатися «паралельно» до підлоги, залишаючись на одній і тій же «висоті» (тобто буде описувати коло з центром у точці $O$). Чим це пояснюється?

**Задача 6.50.** На малюнку 6.5. зображено поперечний переріз космічного корабля з штучним тяжінням (див. попередні задачі). Нехай космонавт, який знаходиться у цьому кораблі, піднімається по драбині з точки $A$ в точку $B$(див. мал.). Оскільки на нього і є «відцентрова сила тяжіння», то для такого підйому йому необхідно виконати певну роботу.



**Мал. 6.5.**

На що буде витрачена ця робота?

**Задача 6.51.** Космічний корабель підходить до Місяця по параболічній траєкторії, яка майже дотикається до поверхні Місяця. Щоб перейти на колову орбіту, в момент найбільшого зближення включають гальмівний двигун, який викидає гази з швидкістю $u = 4$км/с відносно корабля у напрямі його руху. Яку частину загальної маси системи буде складати пальне, яке було використане для гальмування корабля? $R$ і $g$ Місяця вважати відомими.

**Задача 6.52.** Космічний корабель без початкової швидкості вільно падає на Землю із віддаленої точки. Де слід повернути напрям руху корабля на $90^o$ (без зміни величини його швидкості), щоб він став рухатися навколо Землі по коловій траєкторії?

**Задача 6.53.** Космічний корабель рухається навколо Землі по еліптичній орбіті. У точці перетину еліпса з його малою віссю включається двигун. Яким чином треба змінити швидкість корабля в цій точці, щоб він перейшов на параболічну орбіту?

**Задача 6.54.** Космічний корабель рухається навколо Землі по еліптичній орбіті. В якій точці орбіти і на який кут треба змінити напрям швидкості корабля (без зміни її величини), щоб корабель почав рухатися по коловій орбіті?

**Задача 6.55.** Космічний корабель летить у міжпланетному просторі з деяким прискоренням, зумовленим наявністю у цій області простору поля тяжіння. Що будуть показувати, навантажені ще на Землі, пружинні терези в кораблі? Яким способом можна виміряти масу тіл в кораблі під час його польоту?

**Задача 6.56.** Що будуть показувати пружинні терези попередньої задачі при зважуванні тіла масою $m$, якщо корабель потрапляє в атмосферу планети і отримує, крім прискорення в полі тяжіння планети ще й прискорення $a$ внаслідок опору атмосфери планети руховi корабля?

**Задача 6.57.** Космічний корабель обертається навколо Місяця по еліптичній орбіті з максимальним віддаленням від його поверхні 312км і мінімальним – 112км. На скільки необхідно змінити швидкість корабля, щоб перевести його на колову орбіту з висотою польоту над поверхнею Місяця 112км, якщо двигун включається на короткий час, коли корабель перебуває саме на відстані 112км? Середній радіус Місяця $R = 1378$км, прискорення вільного падіння на його поверхні $g = 162$см/с$^2$.

**Задача 6.58.** Космонавт знаходиться в неосвітленому космічному кораблі, який рухається відносно Землі з швидкістю, дуже близькою до швидкості світла $c$. На невеликій відстані від космонавта розташоване дзеркало таким чином, що лінія, яка з'єднує космонавта і дзеркало, паралельна до напряму швидкості корабля. Чи побачить космонавт своє зображення в дзеркалі після увімкнення джерела світла, розташованого поряд з космонавтом?

**Задача 6.59.** Космічний корабель з постійною швидкістю $V = (24/25)$с (с – швидкість світла) рухається в напрямі до центра Землі. Яку відстань у системі відліку, зв'язаній із Землею, пройде корабель за проміжок часу $\Delta t' = 7$с, відлічений за годинником у кораблі? Обертання Землі і її орбітальний рух не враховувати.

**Задача 6.60.** Космічний корабель рухається до Місяця під впливом його притягання. На великій відстані від Місяця швидкість корабля відносно нього була рівна нулю. На якій висоті від поверхні Місяця повинен бути увімкнений гальмівний двигун для здійснення м'якої посадки, якщо двигун створює п'ятиразове перевантаження ($5g$)? Прискорення вільного падіння на поверхні Місяця в $n = 6$ разів менше, ніж на Землі. Радіус Місяця $R_M \approx 1{,}7 \cdot 10^3$км. Зміною маси корабля при гальмуванні знехтувати. Вважати, що поблизу поверхні Місяця $g_M = g/6 = \mathrm{Const}$.

**Задача 6.61.** В кабіні космічного корабля, який рухається по орбіті, підтримується нормальний атмосферний тиск, хоч повітря в кабіні невагоме, як і всі інші тіла, що в ній знаходяться. Поясніть це явище.

**Задача 6.62.** На якій стадії руху міжпланетного корабля космонавт відчує стан невагомості?

**Задача 6.63.** Як зміниться хід маятникового і пружинного годинників при русі у міжпланетному кораблі?

**Задача 6.64.** Яким чином космонавт, що знаходиться в космічному просторі поблизу корабля і не зв'язаний з ним, зможе повернутися на корабель без допомоги інших космонавтів?

**Задача 6.65.** Якою повинна бути швидкість космічного корабля на орбіті, щоб космонавт, який знаходиться в ньому, перебував у стані невагомості? Маса космонавта дорівнює $m$.

**Задача 6.66.** Як виміряти масу тіла в умовах невагомості?

**Задача 6.67.** Чи можна створити вагомість всередині космічного корабля?

**Задача 6.68.** Космічний корабель масою $M$, який летить зі швидкістю $\vec{\upsilon}_1$, зіштовхується з метеором масою $m$, який летить зі швидкістю $\vec{\upsilon}_2$. Метеор попадає в середину лобової частини корабля під кутом $\alpha$ до його поздовжньої осі. Вважаючи удар абсолютно пружним і нехтуючи тертям між метеором і обшивкою корабля, визначити швидкість корабля після удару.

**Задача 6.69.** Довести, що коли космічний корабель рухається по параболічній траєкторії, у фокусі якої знаходиться Земля (або інша планета), то повна механічна енергія корабля буде дорівнювати нулю.

**Задача 6.70.** Міжпланетна станція має форму кільця із зовнішнім радіусом $R$. Для створення штучного поля тяжіння станція здійснює обертовий рух навколо осі симетрії. З цією метою на зовнішньому ободі кільця (на протилежних кінцях діаметра) встановлені два ракетні двигуни. Відносна швидкість витікання газів $u$ спрямована по дотичній до кільця і з часом по величині не змінюється. Загальна щосекундна витрата палива $\mu = \mathrm{Const}$. Початковий момент інерції станції разом з паливом дорівнює $I_0$. Через який час після запуску двигунів тіла на станції будуть важити так само, як і на Землі?

**Задача 6.71.** Визначити силу взаємного притягання двох космічних кораблів масою $m = 10$т кожний, якщо вони знаходяться на відстані $r = 100$м.

**Задача 6.72.** Космічний корабель має масу $m = 3{,}5$т. При маневруванні із його двигунів виривається струмінь газів із швидкістю $\upsilon = 800$м/с, витрата пального $Q_m = 0{,}2$кг/с. Визначити реактивну силу $R$ двигунів і прискорення $a$, якого вона надає кораблеві.

**Задача 6.73.** Яку силу тяги розвивають двигуни космічного корабля, який на відстані, що дорівнює двом земним радіусам від центра Землі, розвиває прискорення, що дорівнює $2g$? Вага корабля $10^7$Н.

**Задача 6.74.** Космічному кораблеві з масою спокою $M_0 = 1000$т надана швидкість $V$ у напрямі дотичної до земної орбіти. Якою повинна бут різниця між швидкістю світла $c$ і швидкістю корабля $V$, щоб Земля стала рухатися відносно Сонця по параболічній траєкторії? Маса Землі $M = 6 \cdot 10^{21}$т, швидкість її орбітального руху $\upsilon = 29{,}8$км/с. Порівняти кінетичну енергію корабля з кінетичною енергією орбітального руху Землі.

**Задача 6.75.** Потрібно вивести космічний корабель на навколосонячну орбіту з перигелієм 0,01 а.о. і таким же періодом обертання, який має Земля (1 рік). З якою швидкістю і в якому напрямі відносно лінії Земля-Сонце необхідно запустити цей корабель із Землі? Орбітальна швидкість Землі дорівнює 30км/с.

**Задача 6.76.** Двигун космічного корабля припиняє працювати десь поблизу Землі. Якої мінімальної швидкості має набути космічний корабель, щоб залишити межі Сонячної системи, маючи «на виході» швидкість 16км/с відносно Сонця? Швидкість Землі в її орбітальному русі дорівнює 30км/с.

**Задача 6.77.** Швидкість, яку необхідно надати тілу, щоб воно вийшло за межі поля тяжіння Землі, дорівнює приблизно 11км/с. Якщо міжпланетний корабель після згоряння палива (при виході з атмосфери) рухався з швидкістю 12км/с, то яка буде його швидкість на відстані $10^6$км від Землі?

**Задача 6.78.** Космічний корабель (з умови попередньої задачі) повинен покинути Сонячну систему у «певному напрямі». Якою має бути максимальна швидкість запуску корабля із Землі, щоб забезпечити виконання цієї вимоги?

**Задача 6.79.** Чому при зростанні темпу розгону космічного корабля космонавти зазнають зростаючого перевантаження? Витрату пального вважати постійною.

**Задача 6.80.** З Місяця має піднятися і долетіти до Землі космічний корабель масою 1тонна. Визначити необхідний для цього запас палива. Порівняти із запасом палива для відправки такого ж корабля із Землі на Місяць. Ракету вважати одноступінчастою.

**Задача 6.81.** Космічний корабель рухається відносно нерухомого спостерігача з швидкістю $\upsilon = 0{,}99c$. 1) Який час $\tau$ пройде за годинником нерухомого спостерігача, якщо для космонавтів у кораблі $\tau_0 = 1$рік? 2) Як зміняться лінійні розміри $l_0$ тіл у кораблі для нерухомого спостерігача? 3) Як зміниться щільність речовини $\rho$ в кораблі для нерухомого спостерігача?

**Задача 6.82.** Космічний корабель рухається з прискоренням $a$. Як за періодом коливань математичного маятника, підвішеного в кабіні корабля, можна визначити прискорення корабля?

**Задача 6.83.** Нехай космічній ракеті надано вертикальну швидкість $11{,}2$км/с. Як відомо, така ракета буде необмежено віддалятися від Землі, а її швидкість буде необмежено зменшуватися (якщо не враховувати впливу інших небесних тіл). Таким чином, її гранична швидкість, або швидкість у нескінченності, буде дорівнювати нулеві. Нехай тепер ракеті надано вертикальну швидкість $12{,}2$км/с. Якою буде її швидкість у нескінченності? Чи буде вона дорівнювати $12{,}2 - 11{,}2 = 1$км/с?

**Задача 6.84.** На космічному кораблі-супутникові знаходиться годинник, синхронізований перед польотом із земним годинником. Швидкість $\upsilon_0$ супутника складає $7{,}9$км/с. На скільки відстане годинник на супутникові згідно вимірів земного спостерігача за своїм годинником протягом $\tau_0 = 0{,}5$року?

**Задача 6.85.** Визначити силу взаємного притягання двох космічних кораблів масою $m = 10$т кожний, якщо вони знаходяться на відстані $r = 100$м.

**Задача 6.86.** Космічний корабель має масу $m = 3{,}5$т. Під час маневрування з його двигунів виривається струмінь газів з швидкістю $\upsilon = 800$м/с; витрата пального $\mu = 0{,}2$кг/с. Визначити реактивну силу $R$ двигунів і прискорення $a$, якого вона надає кораблеві.

**Задача 6.87.** Для створення штучного тяжіння на пасивній ділянці польоту дві частини космічного корабля (відношення мас 1:2) розводять на відстань $L$ і приводять в обертання допоміжними двигунами відносно їх спільного центра мас. Визначити період обертання, якщо маятниковий годинник у кабіні космонавта, розміщений у масивнішій частині корабля, йде в два рази повільніше, ніж на Землі.

**Задача 6.88.** Космічний корабель рухається з швидкістю $\upsilon = 0{,}9c$ по напрямку до центру Землі. Яку відстань $l$ пройде цей корабель у системі відліку, пов'язаній із Землею ($K-$ система), за інтервал часу $\Delta t_0 = 1$с, відлічений за годинником, який знаходиться у космічному кораблі ($K'-$ система)? Добовим обертанням Землі і її орбітальним рухом навколо Сонця знехтувати.

**Задача 6.89.** Космічний корабель з лобовим перерізом $S = 50\text{м}^2$ і швидкістю $\upsilon = 10$км/год потрапляє в хмару мікрометеорів. В одному кубометрі простору є один мікрометеор. Маса кожного мікрометеора $M = 0{,}02$г. На скільки треба збільшити силу тяги двигуна, щоб швидкість корабля не змінилася? Удар мікрометеора об обшивку корабля вважати непружним.

**Задача 6.90.** Маса космічної станції після виведення на траєкторію польоту до Місяця становила 1583кг. За 48 секунд до посадки на поверхню Місяця було запущено гальмівний двигун. Швидкість станції зменшилася з 2600м/с до нуля біля поверхні Місяця. Паливо складало перед початком гальмування половину ваги станції, і можна вважати, що воно витрачене повністю. Яка реактивна сила діяла на станцію при її посадці? Силу тяжіння не враховувати.

**Задача 6.91.** Яку середню лінійну швидкість мав на орбіті корабель-супутник «Восток-2», якщо період його обертання навколо Землі $T = 88{,}6$хв.? Орбіту вважати коловою; $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ м.

**Задача 6.92.** З якою швидкістю корабель підходить до Марса, якщо він запущений із Землі по енергетично мінімальній орбіті? Орбіти Землі і Марса вважати коловими.

**Задача 6.93.** Космічний корабель вивели на колову орбіту поблизу поверхні Землі. Яку додаткову швидкість необхідно надати кораблеві, щоб він зміг подолати земне притягання?

**Задача 6.94.** Космічний корабель підлітає до Місяця по параболічній траєкторії, що майже дотикається до поверхні Місяця. У момент максимального зближення з Місяцем на короткий час було увімкнено гальмівний двигун і корабель перейшов на колову орбіту супутника Місяця. Знайти приріст модуля швидкості корабля при гальмуванні.

**Задача 6.95.** Ракета, яка летіла над поверхнею Землі на висоті $h$, у результаті короткочасної дії потужної гальмівної установки зупиняється. З якою швидкістю упаде ракета на Землю? Опором повітря знехтувати.

**Задача 6.96.** Космічний корабель рухається з постійною за величиною швидкістю $\upsilon$. Для зміни напряму його польоту включається двигун, який викидає струмінь газу з швидкістю $u$ відносно корабля у напрямі, перпендикулярному до його траєкторії. Визначити кут $\alpha$, на який повернеться вектор швидкості корабля, якщо початкова маса його $m_0$, кінцева $m$, а швидкість $u$ постійна.

**Задача 6.97.** Космічний корабель, який рухається в просторі, вільному від поля тяжіння, повинен змінити напрям свого руху на протилежний, зберігши при цьому свою швидкість за величиною. Для цього пропонується два способи: 1) спочатку загальмувати корабель, а потім розігнати його до попередньої швидкості; 2) повернути, примусивши корабель рухатися по дузі кола, надаючи йому прискорення в поперечному напрямі. В якому із цих двох способів потрібна буде менша витрата палива? Швидкість витікання газів вважати сталою і однаковою в обох випадках.

**Задача 6.98.** З якими труднощами зустрічаються космонавти в кабіні космічного корабля при ходьбі, або коли їм необхідно попити води?

**Задача 6.99.** Космічний корабель масою $10^6$ кг починає підніматися вертикально вгору. Сила тяги його двигунів $2{,}94 \cdot 10^7$ Н. Визначити прискорення корабля і вагу тіла, яке знаходиться в ньому, якщо на Землі на це тіло діє сила тяжіння $5{,}88 \cdot 10^2$ Н.

**Задача 6.100.** Для створення штучної гравітації на космічному кораблі, який обертається навколо Землі по коловій орбіті, було запропоновано прискорювати корабель до швидкості $\upsilon$, яка перевищує першу космічну швидкість. Для утримання корабля на коловій орбіті за такої швидкості включається двигун, який надає кораблю прискорення, нормального до траєкторії корабля. За якої швидкості $\upsilon$ космонавт на кораблі буде зазнавати такого ж «тяжіння», що й на Землі? Підрахувати витрату палива, яка необхідна для виведення корабля на колову орбіту і послідуючого (одноразового) обльоту по ній навколо земної кулі за цих умов. Швидкість газового струменя (відносно корабля) $u = 3$ км/с. Вважати, що орбіта проходить недалеко від поверхні Землі, і можна знехтувати зміною прискорення вільного падіння $g$ з висотою.

**Задача 6.101.** Яку найменшу роботу необхідно виконати, щоб перенести космічний корабель масою $m = 2 \cdot 10^3$ кг з поверхні Землі на Місяць?

**Задача 6.102.** Ракета, яка летіла по коловій орбіті на висоті $h$ від поверхні Землі, в результаті короткочасної дії гальмівної установки зменшила свою швидкість і почала знижуватися. Рухаючись весь час під дією сили тяжіння, ракета досягає Землі, причому її швидкість у цей момент спрямована по дотичній до поверхні Землі. Визначити час спуску ракети.

# РОЗДІЛ 7. ШТУЧНІ СУПУТНИКИ

**Задача 7.1.** Чи буде горіти свічка в умовах невагомості?

**Задача 7.2.** Штучний супутник без двигунів рухається по коловій орбіті навколо Землі. Чому тіла в ньому невагомі?

**Задача 7.3.** З'ясувати, чи виконується закон Архімеда при вільному падінні посудини або в супутникові, який рухається по коловій орбіті?

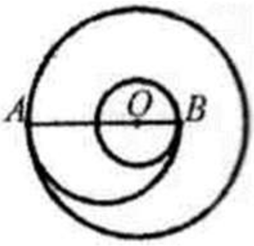
**Задача 7.4.** Чи можна вивести штучний супутник на орбіту пострілом з гігантської гармати?

**Задача 7.5.** Із штучного супутника Землі скидається бомба. Чи удариться коли-небудь ця бомба об Землю, якщо вважати опір повітря нехтовно малим?

**Задача 7.6.** Супутник запущено в площині екватора Землі по коловій орбіті таким чином, що він весь час знаходиться над однією і тією ж точкою екватора. Визначити: а) радіус орбіти супутника; б) його висоту над поверхнею Землі; в) орбітальну швидкість супутника.

**Задача 7.7.** Навколо планети по коловій орбіті обертається супутник. Визначити радіус орбіти, якщо період обертання супутника дорівнює $T$, маса планети $M$.

**Задача 7.8.** Космічна станція рухається навколо Місяця по коловій орбіті, радіус якої дорівнює двом радіусам Місяця. Внаслідок короткочасного включення гальмівного двигуна в точці $A$ станція переходить на еліптичну орбіту й робить посадку в точці $B$ (див. мал. 7.1.). Який проміжок часу триває посадка?




**Мал. 7.1.**

Радіус Місяця дорівнює $1{,}7$ мм, а його маса становить $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг.

**Задача 7.9.** Штучний супутник Місяця рухається по коловій орбіті, радіус якої в $n$ разів більший за радіус Місяця. При своєму русі супутник зазнає слабкого опору з боку космічного пилу. Вважаючи, що сила опору залежить від швидкості супутника за законом $F = \alpha \upsilon^2$, де $\alpha$ – стала величина, визначити час руху супутника до його падіння на поверхню Місяця.

**Задача 7.10.** Два супутники Землі рухаються в одній площині по колових орбітах. Радіус орбіти одного супутника $r = 7000$ км, радіус орбіти другого – на $\Delta r = 70$ км менший. Через який проміжок часу супутники будуть періодично зближуватися на мінімальну відстань?

**Задача 7.11.** Супутник обертається навколо Землі по коловій орбіті з радіусом $R$. Внаслідок короткочасної дії гальмівного пристрою швидкість супутника зменшилась так, що він починає рухатись по еліптичній орбіті, яка дотикається до поверхні Землі. Через який час після цього супутник приземлиться? Радіус Землі $R_З$. Тертям в атмосфері знехтувати.

**Задача 7.12.** Визначити швидкість $\upsilon$ руху штучного супутника Землі по коловій орбіті радіусом $R$, радіус Землі $R_0$ і прискорення вільного падіння $g$ на поверхні Землі.

**Задача 7.13.** З якою лінійною швидкістю $\upsilon$ буде рухатися штучний супутник Землі по коловій орбіті: а) біля поверхні Землі; б) на висоті $h = 200$км; в) на висоті $h = 700$км від поверхні Землі? Знайти період обертання $T$ штучного супутника Землі за цих умов.

**Задача 7.14.** Визначити середню лінійну швидкість штучного супутника Землі, якщо період його обертання по орбіті складає 111хв., а середня висота польоту 1200км.

**Задача 7.15.** Користуючись даними про штучний супутник, наведеними в попередній задачі, визначити середнє значення його нормального прискорення на орбіті.

**Задача 7.16.** Визначити доцентрове прискорення $a_n$, з яким рухається по коловій орбіті штучний супутник Землі, що знаходиться на висоті $h = 200$км від поверхні Землі.

**Задача 7.17.** Штучний супутник Землі рухається по коловій орбіті з радіусом $R$. Період обертання супутника $T_1$. У скільки разів необхідно збільшити швидкість супутника, включивши на короткий час двигуна, щоб перевести його на еліптичну орбіту з періодом обертання $T_2$? Якою буде при цьому відстань від супутника до центра Землі в апогеї?

**Задача 7.18.** Супутник обертається по коловій орбіті навколо Землі. Яка його лінійна швидкість, якщо на тій висоті, де летить супутник, сила тяжіння в $n$ разів менша, ніж на поверхні Землі?

**Задача 7.19.** Штучний супутник рухається навколо Землі по еліпсу з ексцентриситетом $e = 0{,}5$. У скільки разів лінійна швидкість супутника у *перигеї* більша, ніж в *апогеї*?

**Задача 7.20.** Місяць рухається навколо Землі з швидкістю $\upsilon_1 = 1{,}02$км/с. Середня відстань $l$ Місяця від Землі дорівнює $60{,}3R$ ($R$ – радіус Землі). Визначити за цими даними, з якою швидкістю $\upsilon_2$ повинен рухатися штучний супутник, який обертається навколо Землі на незначній висоті над її поверхнею.

**Задача 7.21.** Супутник рухається в екваторіальній площині Землі із сходу на захід по коловій орбіті, радіус якої $R = 10^4$км. Визначити його швидкість і прискорення в системі відліку, пов'язаній із Землею.

**Задача 7.22.** Супутник рухається по коловій орбіті навколо Місяця. З якою швидкістю необхідно запустити кабіну з космонавтами з поверхні Місяця, щоб можна було здійснити стиковку кабіни з кораблем без додаткової корекції швидкості модуля кабіни? Прискорення вільного падіння на поверхні Місяця дорівнює $1{,}7$м/с$^2$, радіус Місяця 1740км.

**Задача 7.23.** Визначити кутову швидкість $\omega$: добового обертання Землі; штучного супутника Землі, який рухається по коловій орбіті з періодом обертання $T = 88$хв. Яка лінійна швидкість $\upsilon$ руху цього штучного супутника, якщо відомо, що його орбіта розташована на відстані $h = 200$км від поверхні Землі?

**Задача 7.24.** Штучний супутник обертається навколо Землі по коловій орбіті на висоті 1200км. Період обертання супутника 105 *хв*. Знайти: а) середню кутову швидкість руху супутника; б) його середню лінійну орбітальну швидкість; в) середнє значення його нормального прискорення на орбіті.

**Задача 7.25.** Стаціонарний штучний супутник рухається по коловій орбіті в площині земного екватора, залишаючись весь час над одним і тим же пунктом земної поверхні. Визначити кутову швидкість $\omega$ і радіус $R$ орбіти супутника.

**Задача 7.26.** Знайти число обертів супутника за добу навколо Землі, якщо він рухається по коловій орбіті з радіусом $R = 7340$км.

**Задача 7.27.** а) З якою горизонтальною швидкістю повинен бути запущений супутник з висоти 161 км над рівнем моря, щоб він вийшов на колову орбіту навколо Землі? Радіус Землі $R_З = 6{,}4 \cdot 10^3$км. б) Чому буде дорівнювати період обертання цього супутника?

**Задача 7.28.** Штучний супутник Землі рухається по коловій орбіті. Через наявність розрідженої атмосфери траєкторія супутника переходить у повільно закручувану спіраль. Як впливає сила опору середовища на величину швидкості супутника і його момент кількості руху відносно центру Землі? Супутник з масою $m = 1$т знижується за добу на 100м. Визначити тангенціальну складову прискорення супутника і силу опору середовища, якої він зазнає.

**Задача 7.29.** Супутник рухається по коловій орбіті у площині екватора на висоті, що дорівнює радіусу Землі. З якою швидкістю повинен переміщуватися наземний спостерігач, щоб супутник з’являвся над ним кожні 5годин? Розглянути випадки, коли напрями руху супутника і обертання Землі співпадають і коли протилежні.

**Задача 7.30.** Тіло запустили уздовж екватора у напрямі зі сходу на захід з такою швидкістю, що дуже далеко від Землі його швидкість стала рівна нулеві. Таке ж тіло з тією ж швидкістю запустили теж уздовж екватора, але у напрямі із заходу на схід. З якою швидкістю тіло буде рухатися на дуже великій відстані від Землі у цьому випадку? Опором повітря знехтувати. Довжина екватора $l = 4 \cdot 10^4$км, період обертання Землі $T = 1$доба, радіус Землі $R_З = 6{,}4 \cdot 10^3$км. Уважати, що прискорення вільного падіння на Землі $g = 10$ м/с$^2$.

**Задача 7.31.** Чи можна запустити супутник таким чином, щоб він весь час знаходився над одним і тим же пунктом Землі?

**Задача 7.32.** Період $T$ обертання штучного супутника Землі дорівнює 2 години. Уважаючи орбіту супутника коловою, визначити, на якій висоті $h$ над поверхнею Землі рухається супутник.

**Задача 7.33.** Супутник робить 16 обертів за час одного оберту Землі. Визначити період, висоту і швидкість супутника, вважаючи його орбіту коловою.

**Задача 7.34.** Із збільшенням висоти польоту супутника його швидкість зменшилася із 7,79 до 7,36км/с. Визначити на скільки змінилися період обертання супутника і його відстань від поверхні Землі.

**Задача 7.35.** Як пов'язані між собою період $T_1$ супутника, який обертається навколо планети безпосередньо близько від її поверхні, і період коливань $T_2$ тіла всередині прямолінійного каналу, що проходить від одного полюса планети до другого, якщо щільність планети $\rho$ постійна? Якісно описати, як зміниться відношення між періодами, якщо щільність планети, при збереженні її маси, буде зростати у напрямі до центру.

**Задача 7.36.** Який період обертання має штучний супутник Землі, якщо він віддалений від поверхні Землі на відстань, що дорівнює радіусу Землі?

**Задача 7.37.** Штучний супутник рухається навколо Землі з першою космічною швидкістю. Довести, що період його обертання співпадає з періодом уявного математичного маятника, довжина якого дорівнює радіусу Землі?

**Задача 7.38.** Визначити період обертання і орбітальну швидкість штучного супутника, який рухається навколо Місяця на висоті $H = 200$км від його поверхні. $M_M = 7{,}3 \cdot 10^{22}$кг; $R_M = 1{,}7 \cdot 10^6$м.

**Задача 7.39.** Штучний супутник рухається навколо планети $A$, маючи період обертання $T_1$. Як зміниться період обертання супутника, якщо він буде рухатися навколо планети $B$, яка має таку ж щільність, як і планета $A$, але удвічі більший радіус? Супутник рухається по коловій орбіті поблизу поверхні планети в обох випадках.

**Задача 7.40.** Знайти залежність періоду $T$ обертання штучного супутника, який обертається по коловій орбіті біля центрального тіла, від середньої щільності цього тіла. За табличними даними середніх значень щільностей речовини планет Сонячної системи скласти таблицю значень періодів обертання супутників навколо планет Сонячної системи.

**Задача 7.41.** Супутник Сіріуса, так званий Сіріус-В, складається із речовини з щільністю $60 \cdot 10^6$кг/м$^3$. Яким був би період обертання штучного супутника Землі, якби Земля мала таку ж щільність?

**Задача 7.42.** Супутник рухається навколо Землі на висоті $H$ від її поверхні. Радіус Землі $R >> H$. Орбіту вважати коловою. Прискорення сили тяжіння біля поверхні Землі $g \approx 9{,}8$м/с$^2$. Визначити період обертання супутника.

**Задача 7.43.** Мінімальне віддалення від поверхні Землі космічного корабля-супутника «Восток-2» складало $h_{\min} = 183$км, а максимальне – $h_{\max} = 244$км. Знайти період обертання $T$ супутника навколо Землі.

**Задача 7.44.** Штучний супутник Місяця рухається по коловій орбіті на висоті 20км від поверхні Місяця. Визначити лінійну швидкість руху цього супутника, а також період його обертання $T$ навколо Місяця.

**Задача 7.45.** Відстань від центра Землі до Місяця змінюється від $363300$км у *перигеї* до $405500$км в *апогеї*, а період обертання Місяця навколо Землі складає $27{,}322$днів. Штучний супутник Землі рухається по орбіті так, що відстань від земної поверхні в *перигеї* дорівнює $225$км, а в апогеї $710$км. Середній діаметр Землі дорівнює $12756$км. Визначити період обертання супутника.

**Задача 7.46.** Тіло підняте за допомогою ракети на висоту $h = 500$км. Якої швидкості $\upsilon$ потрібно надати цьому тілу в напрямі, перпендикулярному до радіуса Землі, щоб воно рухалося навколо Землі по коловій орбіті? Який буде період $T$ обертання цього тіла навколо Землі? Опір атмосфери не враховувати.

**Задача 7.47.** Супутник Землі, який обертається по коловій орбіті з радіусом $R \approx R_З$ (низький супутник), перейшов на еліптичну орбіту з великою віссю $2a = 4R_З$ ($R_З$ – радіус Землі). Визначити, у скільки разів збільшиться час обертання супутника? Опір повітря не враховувати.

**Задача 7.48.** Штучний супутник Землі обертається по коловій орбіті з радіусом $R$ і періодом $T_1$. У деякий момент на дуже короткий час був включений реактивний двигун, який збільшив швидкість супутника в $\alpha$ разів, і супутник став обертатися по еліптичній орбіті. Двигун надавав прискорення супутникові весь час у напрямі його руху. Визначити максимальну відстань супутника від центра Землі, якої він досягне після виключення двигуна. Визначити також період $T_2$ обертання супутника по новій (еліптичній) орбіті.

**Задача 7.49.** Тіло запускають на полюсі строго по вертикалі з першою космічно швидкістю $\upsilon_1 = \sqrt{gR_З} = 8$км/с. На яку максимальну відстань $h$ від поверхні Землі віддалиться це тіло?

**Задача 7.50.** З уявної висоти, яка розташована на полюсі Землі, запускаються з однаковою швидкістю $\upsilon_0$ два тіла. Початкова швидкість першого тіла спрямована так, що воно рухається по напряму радіуса Землі; початкова швидкість другого тіла перпендикулярна до радіуса Землі, і воно рухається по еліптичній траєкторії. 1) Яке з тіл досягне максимального віддалення від Землі? 2) Знайти відношення $R_1 / R_2$ максимально можливих відстаней від центра Землі відповідно першого і другого тіл.

Швидкість $\upsilon_0 > \sqrt{gR_0} = \upsilon_{кол}$, де $\upsilon_{кол}$ – швидкість руху супутника Землі по коловій орбіті (теоретична) з радіусом, що дорівнює радіусу Землі $R_o$. Опір повітря рухові тіл не враховувати і вважати, що на тіла діє лише поле тяжіння Землі.

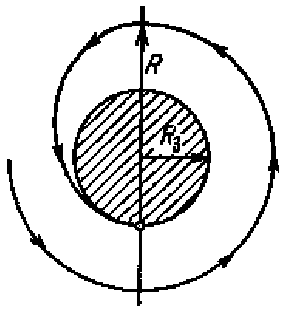
**Задача 7.51.** Найбільше віддалення від поверхні Землі першого штучного супутника Землі становило $947$км. Яку швидкість повинен мати супутник на цій висоті, щоб утримуватися на коловій орбіті?

**Задача 7.52.** Визначити відстань $x$ від центра Землі до штучного супутника і його швидкість $\upsilon$, якщо супутник запущено так, що він обертається в площині земного екватора і, крім того, так, що з Землі він весь час здається нерухомим.

**Задача 7.53.** Якими повинні бути радіус обертання штучного супутника Землі на коловій орбіті і його лінійна швидкість, щоб період обертання супутника був таким же, як і у Землі? Яку траєкторію буде описувати супутник при спостереженні із Землі? У якій площині повинна знаходитися траєкторія руху супутника, щоб спостерігачу, який знаходиться на Землі, супутник здавався нерухомим?

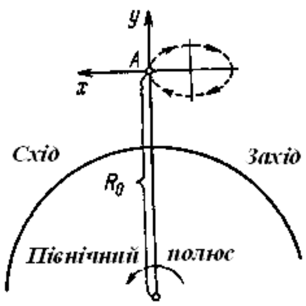
**Задача 7.54.** Швидкість руху штучного супутника Землі по коловій орбіті зменшилася від $\upsilon_1 = 7{,}7 \cdot 10^3$ м/с до $\upsilon_2 = 7{,}3 \cdot 10^3$ м/с. Як змінилась при цьому відстань супутника від Землі і період його обертання?

**Задача 7.55.** Легкий штучний супутник, який обертається по коловій орбіті з радіусом $R = 2R_З$ ($R_З$ – радіус Землі), переходить на еліптичну орбіту приземлення, яка дотикається до земної поверхні в точці, розташованій діаметрально протилежно до точки початку спускання супутника (див. мал. 7.2.). Скільки часу триватиме спуск супутника по еліптичній орбіті? Опір атмосфери не враховувати.




**Мал. 7.2.**

**Задача 7.56.** Супутник, колова орбіта якого розташована в екваторіальній площині, «висить» нерухомо над деякою точкою земної поверхні. Супутник отримує збурюючий імпульс, який надає йому порівняно невеликої швидкості $\upsilon_0$, спрямованої вертикально вгору (див. мал. 7.3.). Якою буде після цього збурення траєкторія супутника по відношенню до земного спостерігача?



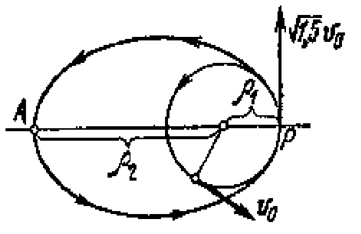

**Мал. 7.3.**

**Задача 7.57.** Штучний супутник вивели на колову орбіту навколо Землі з швидкістю $\upsilon$ відносно системи відліку, яка рухається поступально і зв'язана з віссю обертання Землі. Знайти відстань від супутника до поверхні Землі. Радіус Землі і прискорення сили тяжіння на її поверхні вважати відомими.

**Задача 7.58.** Велика піввісь $R_1$ еліптичної орбіти першого в світі штучного супутника Землі менша від великої півосі $R_2$ орбіти другого супутника на $\Delta R = 800$ км. Період обертання навколо Землі першого супутника на початку його руху був $T_1 = 96{,}2$ хв. Знайти велику піввісь $R_2$ орбіти другого штучного супутника Землі і період $T_2$ його обертання навколо Землі.

**Задача 7.59.** Легкий супутник Землі обертається по коловій орбіті з лінійною швидкістю $\upsilon_0$. Ракетний пристрій збільшує абсолютну величину цієї швидкості в $\sqrt{1{,}5}$ рази, і супутник переходить на еліптичну орбіту (див.

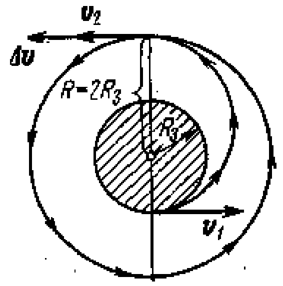
мал. 7.4.). З якою швидкістю супутник пройде найбільш віддалену від центра Землі точку $A$ (апогей) своєї орбіти? Опір атмосфери не враховувати.



**Мал. 7.4.**

**Задача 7.60.** Перший штучний супутник Землі мав швидкість $\upsilon = 8$км/с і період обертання $T = 90$хв. Знайти висоту польоту супутника, вважаючи, що його орбіта колова. Радіус Землі $R = 6370$км. Знайти також відношення частоти обертання супутника до кутової швидкості Землі та його прискорення.

**Задача 7.61.** Супутник запускається на колову орбіту в два етапи: спочатку на поверхні Землі йому надають горизонтальну швидкість і виводять на еліптичну орбіту, перигей якої співпадає з точкою запуску (див. мал. 7.5.), а апогей – з точкою на коловій орбіті. В апогеї ракетний пристрій збільшує величину швидкості супутника і виводить його на колову орбіту.



**Мал. 7.5.**

Якими повинні бути початкова швидкість запуску $\upsilon_1$ і збільшення в апогеї $\Delta\upsilon$, щоб вивести супутник на колову орбіту з радіусом $R = 2R_З$ ($R_З$ – радіус Землі)? Опір атмосфери не враховувати.

**Задача 7.62.** Перший у світі пілот-космонавт Ю.О.Гагарін на кораблі-супутнику «Восток-1» рухався навколо Землі по орбіті, середня відстань якої від поверхні Землі дорівнювала 251км. Вважаючи орбіту коловою, визначити швидкість корабля на орбіті і період обертання його навколо Землі.

**Задача 7.63.** Визначити радіус $R$ орбіти «стаціонарного» ($T = 24$години) супутника Землі. Стаціонарний супутник, який рухається в площині екватора в бік обертання Землі, буде залишатися нерухомим відносно неї. Виразити $R$ через радіус Землі $R_o$, кутову швидкість $\omega$ обертання Землі і прискорення вільного падіння $g$ на її поверхні.

**Задача 7.64.** З площадки на екваторі запускаються два супутники по еліптичних орбітах: перший у напрямі обертання Землі, другий – напроти обертання. Якими будуть найбільші віддалення $R_1$ і $R_2$ кожного із супутників від центра Землі, якщо відомо, що початкові горизонтальні швидкості їх відносно Землі однакові по величині і дорівнюють $\upsilon_0 = 10$км/с. Відстані виразити через радіус Землі $R_o$.

**Задача 7.65.** Якої швидкості необхідно надати штучному супутникові Землі, щоб вивести його на еліптичну орбіту з такими відстанями від центра Землі: у перигеї $r_1 = 31/30R$, у апогеї $r_2 = 33/30R$ ($R$ – радіус Землі)

**Задача 7.66.** Яка сила утримує супутник на орбіті навколо Землі? Яка сила надає йому нормальної складової прискорення?

**Задача 7.67.** Чи може штучний супутник без двигунів літати навколо Землі по орбіті, площина якої не проходить через центр Землі?

**Задача 7.68.** Після виведення на орбіту першого супутника очікувалося, що він не повернеться на Землю, а згорить при зниженні. Як таке можливо, якщо врахувати той факт, що він же не згорів під час підйому із Землі?

**Задача 7.69.** Відомо, що супутник, висота орбіти якого над поверхнею Землі $h = 3{,}6 \cdot 10^4$ км, здійснює оберт навколо Землі за одну добу і може перебувати над однією і тією ж точкою екватора. Припустимо, що супутник «зависає» над точкою, широта якої $60^o$. Яку силу тяги повинен розвивати двигун супутника, щоб утримати його на заданій висоті? Маса супутника $m = 1$т, радіус Землі $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$м.

**Задача 7.70.** Відомо, що штучний супутник Землі можна запустити так, що він нерухомо «висітиме» над одним і тим самим географічним пунктом Землі. Чи можна запустити супутник так, щоб він здавався нерухомим відносно зірок?

**Задача 7.71.** Чи може рухатися супутник по орбіті, площина якої не проходить через центр Землі?

**Задача 7.72.** Вирахувати радіус колової орбіти стаціонарного супутника Землі, який залишається нерухомим відносно її поверхні. Які його швидкість і прискорення в інерціальній системі відліку, пов'язаній у даний момент з центром Землі?

**Задача 7.73.** Якою повинна бути швидкість корабля-супутника Землі, щоб космонавт масою $m$, який знаходиться в кораблі, перебував у стані невагомості?

**Задача 7.74.** На висоті $h = 2 \cdot 10^5$м щільність атмосфери дорівнює $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-10}$кг/м$^3$. Оцінити величину сили опору, якої зазнає супутник з поперечним перерізом $S = 0{,}5$м$^2$ і масою $m = 10$кг, який летить на цій висоті.

**Задача 7.75.** Визначити масу Землі, якщо відомо, що штучний супутник, запущений на висоту 1Мм, має період обертання 106хв.

**Задача 7.76.** Супутник, який рухається в екваторіальній площині Землі із заходу на схід, з'являється над деяким пунктом на екваторі через кожні $\tau = 11{,}6$годин. Виходячи з цих даних, вирахувати масу Землі. Гравітаційну сталу вважати відомою.

**Задача 7.77.** При виведенні супутника на колову орбіту, що проходить поблизу поверхні Землі, була виконана робота $A = 3{,}2 \cdot 10^{10}$Дж. Знайти масу супутника. Радіус Землі $R_З = 6400$км.

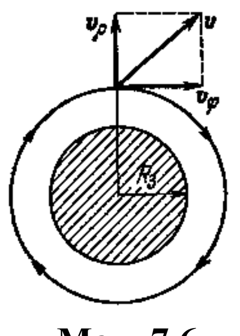
**Задача 7.78.** Середній час обертання штучного супутника Землі $T_1 = 89{,}2$хв. при середній висоті польоту над земною поверхнею $h = 254$км. Супутник Марса Фобос обертається навколо планети за час $T_2 = 7$год. 39хв., знаходячись від центра Марса в середньому на відстані $R_2 = 9350$км. Визначити відношення маси Марса $M_2$ до маси Землі $M_1$, якщо середній радіус земної кулі $R = 6371$км.

**Задача 7.79.** Штучний супутник, який має форму кулі з радіусом $r = 0{,}5$м, обертається навколо Землі по коловій орбіті на такій висоті, де щільність атмосфери $\rho = 10^{-13}$г/см$^3$. Оцінити, на скільки буде знижуватися супутник за один оберт навколо Землі. Щільність речовини супутника, усереднена за об'ємом, $\rho_0 = 1$ г/см$^3$.

**Задача 7.80.** Розрахунки показують, що супутник, який знаходиться на орбіті, висота якої над поверхнею Землі $h = 3{,}6 \cdot 10^4$км, обертається з періодом $T = 1$доба і може «висіти» над однієї і тією ж точкою екватора. Якщо подібний супутник «розмістили», наприклад, над Москвою, то яку силу тяги повинен розвивати двигун супутника, щоб утримувати його на заданій орбіті? Маса супутника $m = 1$т, широта Москви – біля $60^o$, радіус Землі $R_З = 6{,}4 \cdot 10^3$км.

**Задача 7.81.** Супутник Землі масою 10кг і середнім поперечним перерізом 0,50м$^2$ рухається по коловій орбіті на висоті 200км, де середній вільний пробіг молекул вимірюється багатьма метрами і щільність повітря дорівнює $1{,}6 \cdot 10^{-10}$кг/м$^3$. Приблизно можна вважати співудари молекул повітря з супутником абсолютно непружними (мається на увазі, що молекули не те, що «прилипають» до супутника, але відскакують від нього з дуже малими відносними швидкостями). Визначити, яка гальмівна сила буде діяти на супутник за рахунок тертя об повітря. Як буде залежати ця сила від швидкості супутника? Чи буде зменшуватися швидкість супутника під дією всіх прикладених до нього сил? (При розв'язанні необхідно враховувати залежність орбітальної швидкості супутника від висоти колової орбіти).

**Задача 7.82.** Супутник, обертаючись по коловій орбіті з радіусом $R = 3/2R_З$ ($R_З$ – радіус Землі), отримує радіальний імпульс, який надає йому додаткової швидкості $\upsilon_\rho$, напрямленої від центра Землі по радіусу (див. мал. 7.6.). Яким повинно бути мінімальне значення цієї додаткової швидкості, щоб супутник зміг покинути зону земного притягання?



**Мал. 7.6.**

**Задача 7.83.** Чому при запускові супутника Землі з екватора у напрямі обертання Землі витрачається менше енергії?

**Задача 7.84.** Як змінюються кінетична, потенціальна і повна механічна енергія супутника у випадку його руху по еліптичній орбіті? Опором рухові знехтувати.

**Задача 7.85.** Чи змінюється потенціальна енергія тіл відносно Землі, якщо вони переміщуються всередині штучного супутника, який рухається по орбіті навколо Землі?

**Задача 7.86.** а) На що необхідно затратити більше енергії, щоб підняти супутник на висоту 3200 км, чи щоб забезпечити його рух по коловій орбіті на тій же висоті? б) Те ж саме питання для висоти 6400км.

**Задача 7.87.** Чи виконує роботу сила тяжіння, що діє на супутник, при рухові супутника: а) по коловій орбіті? б) по еліптичній орбіті?

**Задача 7.88.** Перший у світі штучний супутник Землі, який був запущений 4 жовтня 1957 року в тодішньому Радянському Союзі, рухався по орбіті, середня висота якої над Землею була $H = 588$км. Визначити кінетичну енергію супутника на орбіті. Маса супутника $m = 83{,}6$кг $\approx 84$кг; $R_З = 6400$км; $g_З = 9{,}8$ м/с$^2$.Орбіту вважати коловою.

**Задача 7.89.** Супутник масою $m$ рухається по еліптичній орбіті навколо Землі таким чином, що його *перигей* і *апогей*, виміряні від центра Землі, дорівнюють відповідно $h$ і $H$. Визначити: а) повну механічну енергію супутника; б) швидкість супутника в той момент, коли він знаходиться на відстані $r$ від центра Землі; в) період обертання супутника; г) обчислити масу Землі, використавши параметри орбіти штучного супутника «Космос-380»: $T = 102{,}2$хв.; $h = 6588$м; $H = 7926$м.

**Задача 7.90.** Яку мінімальну енергію необхідно надати супутникові масою $m$, щоб він міг досягнути поверхні Місяця? Яка швидкість супутника в момент посадки на поверхню Місяця? При розрахунках вважати, що в процесі руху супутника взаємне розташування Землі і Місяця змінюється не значно, опір атмосфери не враховувати.

**Задача 7.91.** Супутник повинен рухатися в екваторіальній площині Землі поблизу її поверхні. У скільки разів енергія, необхідна для запуску супутника у напрямі обертання Землі, менша від енергії для запуску в протилежному напрямі. Опір повітря не враховувати.

**Задача 7.92.** У скільки разів кінетична енергія $E_к$ штучного супутника Землі, який рухається по коловій орбіті, менша від його гравітаційної потенціальної енергії $E_п$?

**Задача 7.93.** Відомо, що в міру збільшення радіуса орбіти швидкість штучного супутника Землі зменшується. Чи свідчить це про те, що при запускові супутника на орбіти більшого радіуса двигуни ракети повинні виконувати меншу роботу? Чому?

**Задача 7.94.** Період обертання супутника по коловій орбіті навколо Землі $T = 240$хв. Маса супутника $m = 1{,}2$т. Визначити: 1) висоту орбіти супутника над Землею; 2) кінетичну енергію супутника. Радіус Землі $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ км.

**Задача 7.95.** Супутник масою $m = 10^3$кг летить на висоті $h_1 = 200$км від поверхні Землі по коловій орбіті. Поступово внаслідок гальмування у верхніх шарах атмосфери радіус орбіти супутника зменшується (при цьому можна вважати, що орбіта залишається коловою). Яку енергію втрачає супутник на гальмування при переході на орбіту з $h_2 = 180$км.

**Задача 7.96.** Два супутники $A$ і $B$, кожен масою $m$, запускаються на колові орбіти навколо Землі. Супутник $A$ – на висоту $6400$км, в супутник $B$ – на висоту $19{,}3 \cdot 10^3$км.

а) Яке відношення потенціальних і кінетичних енергій супутників $A$ і $B$ на їх орбітах?

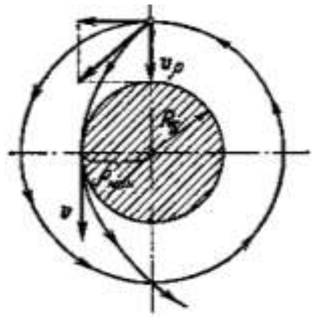
б) Який із супутників має більшу і на скільки більшу повну енергію, якщо маса кожного з них дорівнює $14{,}6$ кг?

**Задача 7.97.** Супутник масою $m = 12 \cdot 10^3$ кг обертається по коловій орбіті навколо Землі, маючи кінетичну енергію $E_к = 5{,}4 \cdot 10^{10}$ Дж. З якою швидкістю і на якій висоті обертається супутник?

**Задача 7.98.** Штучний супутник Землі було виведено на орбіту з максимальним віддаленням від поверхні Землі $h_{max} = 1300$ км і мінімальним $h_{min} = 292$ км. Через деякий час період обертання супутника зменшився на $\Delta T = 3$ хв. Яка частина повної енергії супутника була затрачена до цього моменту на роботу проти сил тертя? Радіус Землі $R = 6370$ км.

**Задача 7.99.** Знайти момент імпульсу супутника Землі масою $m = 1{,}5$ т, який рухається по коловій орбіті радіуса $r = 1{,}1 R_З$ відносно центру орбіти.

**Задача 7.100.** Супутник, обертаючись по коловій орбіті з радіусом $R = 2R_З$ ($R_З$ – радіус Землі),отримує радіальний імпульс, який надає йому,додаткової швидкості $\upsilon_\rho$ у напрямку центра Землі, рівної по величині швидкості $\upsilon_\varphi$ його руху по коловій орбіті (див. мал. 7.7.).



**Мал. 7.7.**

На яку мінімальну відстань $\rho_{min}$ наблизиться супутник до центра Землі і якою буде його швидкість у цій точці? Опором атмосфери знехтувати.

**Задача 7.101.** Супутник рухається навколо Землі по коловій орбіті, радіус якої дорівнює $r$. Після гальмування швидкість супутника зменшується і він переходить на еліптичну орбіту, яка дотикається до Землі. Через який час після цього супутник приземлиться? Радіус Землі дорівнює $R$. Опором атмосфери знехтувати.

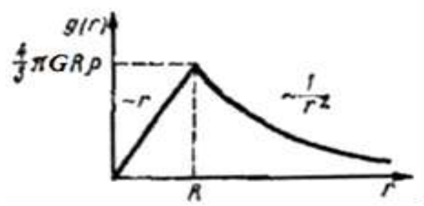
**Задача 7.102.** Визначити мінімальне віддалення $h$ від поверхні Землі, якщо відомі наступні дані: максимальне віддалення супутника від поверхні Землі $H = 900$ км; період обертання супутника навколо Землі $T_1 = 96$ хв.; велика піввісь орбіти Місяця $R = 384400$ км; період обертання Місяця навколо Землі $T_2 = 27{,}3$ доби; радіус Землі $R_o = 6370$ км.

**Задача 7.103.** По коловій орбіті на невеликій відстані один від одного в одному напрямі рухаються два супутники. З першого супутника на другий необхідно перекинути контейнер. У якому випадку контейнер швидше досягне другого супутника? Якщо його кинути у напрямку руху першого супутника, чи проти його руху? Швидкість контейнера відносно супутника $u$ набагато менша від швидкості супутника $\upsilon$.

**Задача 7.104.** Як зміниться з часом швидкість штучного супутника Землі при його русі у верхніх шарах атмосфери?

# ВІДПОВІДІ, РОЗВ'ЯЗАННЯ

# ДО РОЗДІЛУ 3




**3.1.** $g(r)=\frac{4}{3}\pi G\rho r$ при $r\le R$; $g(r)=4\pi G\rho R^3/(3r^2)$ при $r\ge R$; графік $g(r)$ подано на малюнку.

**3.3.** $g=\frac{4}{3}\pi G\rho R=0{,}21$ м/с$^2$.

**3.4.** $e$ = 0,0165, 1 − 5 січня; 1 − 5 липня.

**3.5.** Позначатимемо величини, що відносяться до небесного тіла, індексом «т», а ті, що стосуються Землі – індексом «З». Тоді $g_т=\frac{GM_т}{R_т^2}=\frac{G}{R_т^2}\frac{4}{3}\pi R_т^3\rho_т=\frac{4}{3}G\pi R_т\rho_т$.

Аналогічно $g_З=\frac{4}{3}G\pi R_З\rho_З$. Із цих двох рівнянь отримуємо $g_т=\frac{g_З R_т\rho_т}{R_З\rho_З}=mng_З$.

**3.6.** $\sqrt{g_0 r_0}$.

**3.7.** $g\sim r$.

**3.8.** Прискорення сили тяжіння на поверхні планети знайдемо за формулою: $g_n=\frac{4}{3}\pi R_n\rho_n G$.

Аналогічно для Землі: $g=\frac{4}{3}\pi R_З\rho_З G$.

Тут $R_З$ і $R_n$ – радіуси, а $\rho_З$ і $\rho_n$ – щільності Землі і планети. Оскільки $\rho_З=\rho_n$, а $R_З=2R_n$, то $g_n=g\frac{R_n}{R_З}=\frac{g}{2}$.

Довжина маятника пов'язана з періодом відомим співвідношенням: $l=\frac{T^2}{4\pi^2}\frac{g_З}{2}=49{,}6$м.

**3.10.** $g_M=\frac{4\pi^2R_ф^3}{T^2R_M^2}\approx 3{,}9$ м/с$^2$.

**3.11.** $h_M\approx 2{,}3h_З$.

**3.13.** $g_м=g/k\cdot n=1{,}61$ м/с$^2$.

**3.14.** Із закону всесвітнього тяжіння отримуємо: $mg_З=G\frac{mM_З}{R_З^2}$, звідки $g_З=\frac{GM_З}{R_З^2}$. Аналогічно для Місяця: $g_М=\frac{GM_М}{R_М^2}$. Порівнюючи $g_М$ і $g_З$, знаходимо $g_М=\frac{M_М}{M_З}\left(\frac{R_З}{R_М}\right)g_З\approx 1{,}67$ м/с$^2$. Прискорення вільного падіння на Місяці приблизно у 6 разів менше, ніж на Землі, тому й вага тіл на Місяці теж у 6 разів менша, ніж на Землі.

**3.15.** На космічний корабель діє лише одна сила тяжіння з боку планети, спрямована до її центра. Вона дорівнює $F = G\frac{Mm}{r^2}$, де $M$ – маса планети, $m$ – маса космічного корабля, $r$ – відстань від центра планети до корабля (радіус орбіти).

Перетворимо цей вираз, помноживши чисельник і знаменник на $R^2$:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{M}{R^2}m\frac{R^2}{r^2} = g_0 m\frac{R^2}{r^2}, \quad (1)$$

де $g_0$ – прискорення вільного падіння біля поверхні планети.

Запишемо для космічного корабля рівняння другого закону Ньютона в скалярній формі відносно осі $Y$, спрямованої до центра планет:

$$F = ma_y, \quad (2)$$

де
$$a_y = a_{\text{доц}} = \frac{\upsilon^2}{R}. \quad (3)$$

Підставивши у рівняння (2) вирази (1) і (3), отримаємо: $g_0 m\frac{R^2}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r}$ ,звідки $g_0 = \frac{\upsilon^2 r}{R^2} \approx 14$ м/с$^2$.

**3.16.** Оскільки фігура Землі мало відрізняється від кулястої, то прискорення вільного падіння всередині земної кулі можна вважати спрямованим до центра Землі і пропорційним відстані до її центра. У цьому наближенні з врахуванням відцентрової сили рівняння гідростатики набувають вигляду: $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g\frac{x}{R_0} + \rho\omega^2 x$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g\frac{y}{R_0} + \rho\omega^2 y$; $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g\frac{z}{R_0}$,

де $R_0$ – радіус Землі, $\omega$ – кутова швидкість її обертання.

Початок координат знаходиться в центрі Землі, а вісь $z$ спрямована уздовж осі її обертання. Інтегруючи ці рівняння, отримуємо: $P = \frac{\rho}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right)\left(x^2 + y^2\right) - \frac{\rho g}{2R_0}z^2 + C$,

де $C$ – стала інтегрування, яка визначає значення тиску $P$ на земній поверхні (його можна вважати рівним нулю, оскільки атмосферний тиск незрівнянно малий). Сплюснутість Землі визначиться із вимоги сталості тиску на земній поверхні. Обравши спочатку точку на екваторі, а потім на полюсі, запишемо $P(R_e,0,0) = P(0,0,R_n)$, де $R_e$ і $R_n$ – екваторіальний і полярний радіуси Землі. З урахуванням явного виду тиску отримуємо:

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right)R_e^2 = -\frac{g}{R_0}R_n^2, \text{ або } R_e - R_n = \frac{\omega^2}{g}\frac{R_e^2 R_0}{R_e + R_n} \approx \frac{\omega^2 R_0^2}{2g}.$$

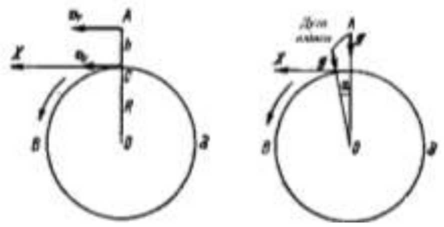
Отже, для сплюснутості $\varepsilon$ земної кулі отримується $\varepsilon = \frac{R_e - R_n}{R_0} = \frac{\omega^2 R_0}{2g} \approx \frac{1}{580}$.

Насправді сплюснутість Землі дещо більша, а саме 1/297. Розбіжність пояснюється неточністю моделі, покладеної в основу міркувань, а також недосконалістю методу розрахунку. За умови точнішої постановки задачі необхідно враховувати, що поле тяжіння сплюснутої кулі не є центральним (з урахуванням цієї обставини розрахунок дає значення $\varepsilon = 5/4\omega^2 R_0/g \approx 1/232$). Тим самим задача надто ускладнюється, оскільки саме гравітаційне поле завчасно невідоме, а залежить від невідомої форми поверхні Землі. Детальні дослідження показують, що задача, сформульована таким чином, не має однозначного вирішення. Можливі варіанти декількох різних форм рівноважної поверхні, у тому числі й еліпсоїд обертання з певним ступенем стиснення.

**3.17.** У нерухомій системі відліку відхилення падаючого тіла на схід (від вертикалі, проведеної через точку початкового положення тіла) пояснюється різницею в тангенціальних швидкостях точок земної поверхні і тіла, яке знаходиться над Землею на висоті $h$. Викликана добовим обертанням Землі лінійна швидкість точки $C$ (див. мал. *а*) $\upsilon_C = R\omega$, де $R$ – радіус Землі і $\omega$ – кутова швидкість її обертання. Відповідно для тіла, яке знаходиться на висоті $h$ в точці $A, \upsilon_т = (R+h)\omega$.

Отже, $\upsilon_т - \upsilon_C = h\omega$. (1)

Згідно із законом інерції падаюче тіло повинне зберігати свою тангенціальну швидкість незмінною. Тому в процесі падіння тіло зміститься на схід далі, ніж точка $C$. При $h << R$ різниця у швидкостях точок $A$ і $C$ (1) протягом часу падіння тіла $t = \sqrt{2h/g}$ повинна призвести до зміщення тіла на схід від точки $C$ на відстань $x = h\omega\sqrt{2h/g}$ . Проте наведений розрахунок є лише наближеним. Це пов’язано з нашим припущенням, що в тангенціальному по відношенні до Землі напрямі падаюче тіло рухається за інерцією рівномірно. Але сила тяжіння буде нормальною до початкової швидкості тіла лише в точці $A$. У наступних точках еліптичної траєкторії падаючого тіла сила тяжіння, яка завжди спрямована до центра Землі, уже не буде перпендикулярною до швидкості падаючого тіла і буде змінювати не лише її напрям, але й абсолютну величину. Зробимо кількісний розрахунок, враховуючи цю обставину. З малюнка *б*) видно, що



**а** **б**

прискорення падаючого тіла уздовж напряму $X$ дорівнює: $\ddot{x} = -g\sin\alpha \approx -g\dfrac{x}{R} \approx -g\dfrac{(R+h)\omega t}{R} \approx -g\omega t$ .

Після інтегрування цього рівняння при початкових умовах $(dx/dt)_0 = \upsilon_0 = (R+h)\omega$

при $t=0$ отримаємо для $\upsilon_т = dx/dt = -\dfrac{1}{2}g\omega t^2 + (R+h)\omega$.

Наступне інтегрування (виконане за початкових умов $x=0$ при $t=0$) дасть уточнене значення $x_т = -\dfrac{1}{6}g\omega t^3 + (R+h)\omega t$ . За час падіння тіла точка $C$ на поверхні Землі зміститься на відрізок $x_C = R\omega t$ ( при $h << R$). В результаті зміщення тіла відносно точки $C$, яке упало на схід, виявиться рівним $x_т - x_C = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{h^{3/2}\omega}{\sqrt{g}}$.

2) Застосування до падаючого тіла закону збереження моменту кількості руху ґрунтується на наступних міркуваннях. На падаюче тіло діє центральна сила притягання Землі. Тому момент кількості руху тіла відносно земної осі повинен залишатися незмінним. Тому (розглядається падіння тіла на екваторі)

$$m(R+h)^2\omega = m(R+y)^2\left(\omega + \frac{\upsilon}{R+y}\right), \qquad (2)$$

де $m$ – маса тіла, $R$ – радіус Землі, $h$ – початкова висота тіла над Землею, $y$ – відстань тіла до поверхні Землі, $\omega$ – кутова швидкість обертання Землі, $\upsilon$ – тангенціальна швидкість тіла відносно Землі. Покладаючи $h$ і $y << R$, із (2) знаходимо $\upsilon = 2\omega(h-y)$.

З іншого боку, $h - y = gt^2/2$. Тому $\upsilon = \omega g t^2$. Зміщення $x$ тіла, яке упало, від основи перпендикуляра, проведеного з поверхні Землі в точку початкового положення тіла, дорівнює $x = \int_0^t \upsilon dt = \omega g \int_0^{\sqrt{2h/g}} t^2 dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\omega h^{3/2}}{\sqrt{g}}$.

Якщо врахувати, що за умовою задачі дослід проводиться на широті $\varphi$, то в одержаний вираз для $x$ необхідно ввести множник $\cos\varphi$.

**3.18.** Рівняння руху тіла: $\vec{a} = \vec{g} + 2[\vec{\upsilon}\vec{\omega}]$ . Відкидаючи малий член $2[\vec{\upsilon}\vec{\omega}]$, знаходимо прискорення і швидкість у нульовому наближенні: $\vec{a} = \vec{g}$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t$. Підставляючи отримане значення $\vec{\upsilon}$ в праву частину рівняння руху, знаходимо прискорення, а його інтегруванням – швидкість у першому наближенні: $\vec{a} = \vec{g} + 2[\vec{\upsilon}_0\vec{\omega}] + 2t[\vec{g}\vec{\omega}]$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t + 2t[\vec{\upsilon}_0\vec{\omega}] + t^2[\vec{g}\vec{\omega}]$. Аналогічно знаходяться друге і вищі наближення. У другому наближенні

$$\vec{a} = \vec{g} + 2[\vec{\upsilon}_0\vec{\omega}] + 2t[\vec{g}\vec{\omega}] + 4t[[\vec{\upsilon}_0\vec{\omega}]\vec{\omega}] + 2t^2[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}];$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t + 2t[\vec{\upsilon}_0\vec{\omega}] + t^2[\vec{g}\vec{\omega}] + 2t^2[[\vec{\upsilon}_0\vec{\omega}]\vec{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}];$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + t^2[\vec{\upsilon}_0\vec{\omega}] + \frac{t^3}{3}[\vec{g}\vec{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\vec{\upsilon}_0\vec{\omega}]\omega] + \frac{t^4}{6}[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}].$$

Зокрема, якщо тіло падає без початкової швидкості, то для його зміщення з початкового положення $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$ отримаємо: $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \frac{t^3}{3}[\vec{g}\vec{\omega}] + \frac{t^4}{6}[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]$.

**3.19.** $g = 4\pi RG\rho/3 \approx 9{,}74$ м/с$^2$.

**3.20.** $g = 4\pi^2\frac{60R}{T^2} \approx 9{,}85$ м/с$^2$.

**3.22.** 1) $\frac{g_h}{g} = \frac{R_З^2}{(R_З + h)^2}$; 2) $h \approx \frac{0{,}75R_З}{2}$.

**3.23.** 32 км; 2650 км.

**3.24.** 13600 км.

**3.25.** Прискорення сили тяжіння визначається за формулою: $g_0 = G\dfrac{M}{R^2}$ і $g = G\dfrac{M}{(R+h)^2}$.

Звідси $\dfrac{g_0}{g} = \left(\dfrac{R+h}{R}\right)^2 = 1 + \dfrac{2h}{R} + \dfrac{h^2}{R^2} \approx 1 + \dfrac{2h}{R}$, оскільки $\dfrac{h}{R} << 1$, тому й $\dfrac{h^2}{R^2} << \dfrac{2h}{R}$, звідси $g = g_0\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2 \approx \dfrac{g_0 R}{R+2h}$; $g \approx 9{,}75$ м/с$^2$.

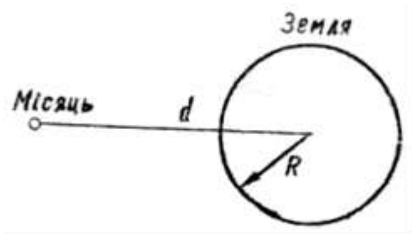
**3.26.** 2,45 м/с$^2$; 1,225м.

**3.27.** Шукане відношення сил $\dfrac{F_C}{F_З} = \dfrac{M_C R_З^2}{M_З R_C^2} \approx 2$.

Причина того, що Місяць є супутником Землі, не дивлячись на те, що Сонце притягує його удвічі сильніше, полягає у початкових умовах – початковій координаті і початковій швидкості, тобто значеннях цих величин у той момент, коли Місяць виявився у полі тяжіння обох цих тіл.

**3.28.** Припливи і відпливи виникають внаслідок того, що дане небесне тіло (Сонце, Місяць) надає неоднакового прискорення всій земній кулі в цілому і воді, яка є на її поверхні.

Усій земній кулі в цілому небесне тіло надає такого прискорення, якого воно надавало б тілу, вміщеному в центр земної кулі. За законом всесвітнього тяжіння, прискорення, що його надало тіло масою $M$ іншому, яке міститься на відстані $d$, становить $a = G\dfrac{M}{d^2}$. Отже, різниця прискорень води, що є на поверхні Землі, і всієї Землі в цілому становить: $G\dfrac{M}{(d-R)^2} - G\dfrac{M}{d^2} = G\dfrac{M(2dR - R^2)}{d^2(d-R)^2}$, де $d$ – відстань від небесного тіла до центра Землі, а $R$ – радіус Землі (див. мал.). Оскільки $R << d$, то наближено цю рівність можна записати так: $2RG\dfrac{M}{d^3}$.




Значення цієї різниці від Сонця й Місяця і визначає величину припливної дії, яку вони зумовлюють. Для Місяця ця різниця становить $2GR\dfrac{M_M}{216 \cdot 10^3 R^3}$, а для Сонця – $2GR\dfrac{M_C}{25^3 \cdot 10^9 R^3}$.

Врахувавши, що $M_C = 27 \cdot 10^6 M_M$, знайдемо, що ця різниця для Місяця втричі більша за припливну дію Сонця.

**3.29.** Максимальний припливний ефект спостерігається тоді, коли Місяць «новий» і коли «повний». Тому одночасна припливна дія Місяця і Сонця додаються. Коли ж Місяць перебуває у першій і четвертій чвертях, то час місячного припливу співпадає із сонячним відпливом і їх дії віднімаються одна від одної.

**3.30.** В курсах астрономії доводиться, що різниця прискорень, які надаються небесним тілом водяній масі і масі твердої товщі Землі, дорівнює:

$$\Delta g \approx G\frac{2Rm_i}{r_i^3}, \qquad (1)$$

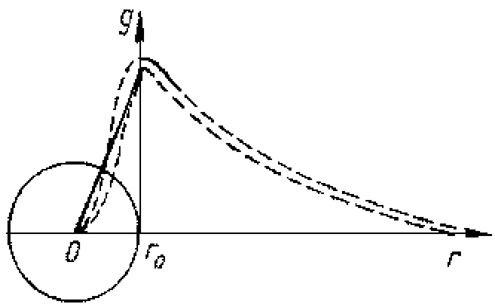
де $G$ – універсальна гравітаційна стала; $R$ – радіус Землі; $m_i$ і $r_i$ – відповідно маса і відстань небесного тіла (Місяця або Сонця) до центру земної кулі.

Нехай відношення маси Місяця до маси Землі $m_M/m_З = 1/80$, а для Сонця і Землі $m_C/m_З = 3{,}3\cdot 10^5$; відстань до Землі від Сонця $r_C$ і від Місяця $r_M$ зв'язані співвідношенням $r_C = 390 r_M$. Тоді, записавши рівняння (1) двічі, спершу для Місяця, а потім для Сонця, та поділивши одне на одне, отримаємо: $\Delta g_M/\Delta g_C = 2{,}2$.

**3.31.** Оскільки різні ділянки поверхні Землі знаходяться на різних відстанях від Сонця, то Земля і вода, яка її покриває, отримують під дією Сонця не однакові прискорення. Це ж стосується притягання й до Місяця: різні ділянки океанів отримують під дією цього притягання різні прискорення, які не співпадають з прискоренням, якого надає Місяць земній кулі в цілому (точніше, центру Землі). Таким чином, Земля і покриваюча її вода рухаються не зовсім синхронно, що й призводить до виникнення припливів і відпливів. Розрахунки показують, що «припливна» дія Місяця майже втричі більша від «припливної» дії Сонця. Тому можна вважати, що морські припливи викликаються лише дією Місяця.

**3.32.** Про хід зміни прискорення вільного падіння, яке співпадає з поняттям напруженості гравітаційного поля, зручно судити за зміною потенціалу поля: $g = \frac{F}{m} - grad u$.

Теорія потенціалу тяжіння спонукає до наступних висновків. Якщо щільність земної кулі вважати однорідною, то поза нею $g$ зменшується обернено пропорційно до квадрату відстані від центра тяжіння Землі до досліджуваної матеріальної точки; всередині ж земної кулі $g$ зменшується за лінійним законом (див. мал., суцільна лінія).



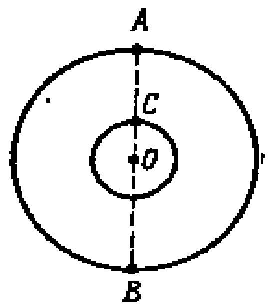

У дійсності щільність найбільш глибоких шарів Землі більша, ніж зовнішніх, тому зменшення відстані до центра Землі, рахуючи від її поверхні, призведе спочатку до збільшення значення $g$ і лише в подальшому – до його зменшення до нуля у центрі тяжіння Землі (на мал. пунктирна лінія). На ході зміни $g$ поза Землею несталість її щільності не відобразиться, оскільки це поле дає такий же ефект, як і в тому випадку, якби вся маса земної кулі була зосереджена в її центрі.

**3.33.** Співставляючи вирази сил із другого закону динаміки і закону всесвітнього тяжіння, отримуємо: $m_i g = G\frac{m_g M}{R^2}$, де $G$, $M$, $R$ – відповідно гравітаційна стала, маса Землі і відстань від центра тяжіння Землі до місця знаходження падаючого тіла. Всі ці величини не залежать від маси падаючого тіла. Величини ж $m_i$ і $m_g$ є характеристиками самого досліджуваного тіла: $m_i$ – є мірою інертності тіла, яка фігурує у виразі другого закону динаміки, і називається інертною масою; $m_g$ – тяжіюча або гравітаційна маса, це та величина, на яку діє сила тяжіння і яка входить до виразу закону всесвітнього тяжіння.

Прискорення $g$ падаючих у пустоті тіл буде однаковим і незалежним від маси тіла, якщо $m_i$ і $m_g$ тотожні, або у крайньому випадку, пропорційні одна одній. Безпосередньо ні перше, ні друге не є очевидним. Фізична тотожність цих величин була встановлена теорією відносності лише у першій чверті XX ст. До цього часу чисельна рівність обох мас багаторазово підтверджувалася на досліді з великою точністю. Тому незалежність прискорення вільного падіння від маси необхідно вважати встановленою абсолютно точно.

**3.35.** На 148м.

**3.36.** Нехай місце, де проводиться експеримент, розташоване у точці $C$ Землі (див. мал.). На тіла, які знаходяться в точці $C$, діють сили притягання Землі і Місяця, причому ці сили віднімаються, коли Місяць знаходиться в точці $A$, і додаються, коли Місяць знаходиться в точці $B$. Прискорення вільного падіння для цих випадків дорівнює:




$$g_1 = \frac{GM_З}{R_З^2} - \frac{GM_М}{(R-R_З)^2};$$

$$g_2 = \frac{GM_З}{R_З^2} + \frac{GM_М}{(R+R_З)^2},$$

де $R$ – відстань від центра Землі до Місяця.

Очевидно, що $g_1$ і $g_2$ – мінімальне і максимальне значення прискорення $g$, які воно набуває протягом доби. Таким чином, найбільша зміна прискорення вільного падіння тіл за рахунок зміни положення Місяця дорівнює: $\Delta g = g_2 - g_1 = \frac{GM_М}{(R+R_З)^2} + \frac{GM_М}{(R-R_З)^2} \approx \frac{2GM_М}{R^2}$ (врахувавши, що $R_З << R$).

Середнє значення прискорення вільного падіння дорівнює $\frac{GM_З}{R_З^2}$.

Таким чином, $\frac{\Delta g}{g} = 2\frac{M_М}{M_З}\left(\frac{R_З}{R}\right)^2 \approx 10^{-5}$.

Отже, величину $g$ необхідно вимірювати з точністю не меншою, ніж до п’ятого знаку, щоб виявити його добову зміну через наявність притягання Місяця.

**3.38.** $\upsilon = 1670\cos\varphi$ км/год.

**3.39.** $\upsilon \approx 30$ км/с.

**3.40.** Відхилення в сторону:

сходу $-\ s_{сх} = 1/3\omega t^3 g\cos\varphi = 2/3\omega t h\cos\varphi$;

екватора $-\ s_{ек} = 1/12\omega^2 t^4 g\sin 2\varphi = 1/2\omega t\sin\varphi\cdot s_{сх}$;

де $\varphi$ – географічна широта розглядуваного місця; $t$ – час; $h$ – висота падіння.

**3.41.** $620$ км/с.

**3.42.** $h = \dfrac{R}{2gR/\upsilon_0^2 - 1}$

**3.43.** а) $\omega = 7{,}3\cdot 10^{-5}$ рад/с; $\upsilon = 4{,}64\cdot 10^2$ м/с;

б) $\omega = 7{,}3\cdot 10^{-5}$ рад/с; $\upsilon \approx 3{,}3\cdot 10^2$ м/с.

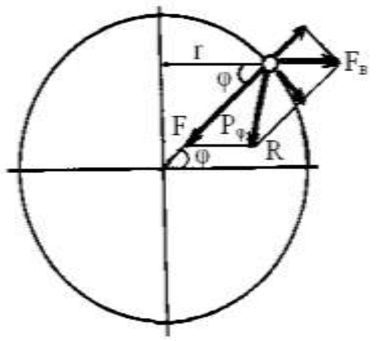
**3.44.** $\upsilon = \dfrac{2\upsilon_{ср} r_n}{r_1 + r_2} = 30{,}3$ км/с.

**3.45.** Орбітальна швидкість планети така, що за рівні проміжки часу $\tau$ її радіус-вектор описує рівні площі (другий закон Кеплера). Розглянемо рух Землі поблизу *перигелію* і *афелію* за такі малі інтервали часу $\Delta t$, щоб її траєкторію можна було вважати прямолінійною. Тоді описувані площі є трикутники з основами $\upsilon_{\min}\Delta t$ і $\upsilon_{\max}\Delta t$ і висотами $r_a$ і $r_n$ відповідно, так що $(1/2)\upsilon_{\min}\cdot\Delta t\cdot r_a = (1/2)\upsilon_{\max}\cdot\Delta t\cdot r_n$.

Звідки $\gamma = \dfrac{\upsilon_{\max}}{\upsilon_{\min}} = \dfrac{r_a}{r_n}$.

Але для еліпса $r_a = a(1+e)$, а $r_n = a(1-e)$; отже, $\gamma = (1+e)/(1-e) \approx 1+2e$ (оскільки $e \ll 1$. Це дає $\gamma \approx 1{,}0334$.

**3.46.** Позначимо радіус і масу Землі через $R$ і $M$, кутову швидкість обертання Землі через $\omega$, кут між радіусом Землі, який лежить у площині екватора, і радіусом, спрямованим у дану точку поверхні (широту) через $\varphi$ (див. мал.). Як видно з малюнка, лінійна швидкість довільної точки $\upsilon = \omega R\cos\varphi$. Якщо розглядати Землю як неінерціальну систему, то на тіло з масою $m$, яке знаходиться на широті $\varphi$, буде діяти (з точки зору земного спостерігача) фіктивна відцентрова сила інерції $\left|\vec{F}_в\right| = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi$. Ця сила, геометрично складаючись із силою притягання Землі $\left|\vec{F}\right| = GMm/R^2$, дає в сумі силу тяжіння $P_\varphi$, яка діє на тіло на широті $\varphi$: $\vec{P}_\varphi + \vec{F}_в + \vec{F}$.




За теоремою косинусів отримуємо

$$P_\varphi = \sqrt{\frac{G^2M^2m^2}{R^4} + m^2\omega^4R^2\cos^2\varphi + 2m^2G\frac{M}{R}\cos^2\varphi}\,.$$

Проте, як видно, що $F_в \ll F$, тобто $P_\varphi$ мало відрізняється від $F$. Дійсно, оскільки $F = mg$, то $\dfrac{F_в}{F} = \dfrac{\omega^2 R}{g}\cos\varphi$, де $g$ – прискорення вільного падіння при $F_в = 0$.

Підставивши сюди числові значення $\omega$, $R$ і $g$, знайдемо, що $\omega^2 R/g = 1/289$, тобто $F_в$ набагато менша, ніж $F$. Розкладемо силу $F_в$ на вертикальну $F_в \cos\varphi$ і горизонтальну $F_в \sin\varphi$ складові і будемо приблизно вважати, що вертикальна складова змінює силу $F$ лише за модулем, а горизонтальна – лише за напрямом. Таким чином, $P_\varphi \approx F - F_в \cos\varphi = mg - m\omega^2 R\cos^2\varphi$.

Горизонтальна складова $F_в \sin\varphi = m\omega^2 R\cos\varphi\sin\varphi$ відхиляє напрям сили тяжіння в бік екватора. Ця складова дорівнює нулю на полюсі, досягає максимуму при $\varphi = 45^o$ і на екваторі знову зменшується до нуля.

**3.47.** $a_n = 0{,}03\cos\varphi$ м/с$^2$; $a_R = 0{,}03\cos^2\varphi$ м/с$^2$. Відповідно для широти $\varphi = 55^o$ (північної півкулі Землі) $a_n = 0{,}017$ м/с$^2$; $a_R \approx 0{,}01$ м/с$^2$.

**3.48.** В основу аналізу можна покласти те, що лінійна швидкість руху будь-якого супутника по орбіті обернено пропорційна кореню квадратному з відстані від супутника до планети ($\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, де $M$ – маса планети). Лінійна швидкість елементів суцільного кільця, навпаки, прямо пропорційна їх відстані від планети ($\upsilon = 2\pi Rn$).

**3.49.**

| Планети | $\upsilon_1$, км/с | $\upsilon_2$, км/с | Планети | $\upsilon_1$, км/с | $\upsilon_2$, км/с |
|---|---|---|---|---|---|
| Меркурій | 3,0 | 4,25 | Юпітер | 42,6 | 60,4 |
| Венера | 7,2 | 10,2 | Сатурн | 25,7 | 36,4 |
| Земля | 7,9 | 11,2 | Уран | 15,2 | 21,5 |
| Марс | 3,57 | 5,05 | Нептун | 16,6 | 23,5 |

**3.50.** Тінь рухається із заходу на схід з швидкістю $\upsilon = 2\pi(R_M/T_1 - R_З/T_2) \approx 0{,}5$ км/с,
де $T_1$ – тривалість місяця; $T_2$ – тривалість доби; $R_З$ – радіус Землі.

**3.51.** Доцентрове прискорення $a = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \approx 2{,}7\cdot10^{-3}$ м/с$^2$.

**3.52.** $\upsilon = \sqrt{\frac{2GM_м}{R_м}} = 2{,}4$ км/с.

**3.53.** $\upsilon = 10^3$ м/с.

**3.54.** $\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = 1077$ м·с$^{-1}$; $a_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \approx 10{,}6$ м·с$^{-2}$.

**3.55.** Для Сонця: 436 км/с; 617 км/с.

**3.56.** $\upsilon_2 = 7{,}92$ км/с.

**3.57.** $\upsilon_1 = 7{,}9\cdot10^3$ м/с; $\upsilon_2 = 11{,}2\cdot10^3$ м/с; $G_M = 1{,}62$ м/с$^2$; $\varphi = -2{,}82\cdot10^6$ Дж/кг; $\upsilon_З/\upsilon_M = 4{,}7$.

**3.58.** $\upsilon_1 = \sqrt{G\dfrac{M_M}{R_M}}$; $g_M = G\dfrac{M_M}{R_M^2}$, або $0{,}17g_З = G\dfrac{M_M}{R_M^2}$, звідки маса Місяця $M_M = \dfrac{0{,}17R_M^2 g_З}{G}$. Підставивши це значення маси у формулу для $\upsilon_1$, знаходимо її чисельне значення $\upsilon_1 = 1{,}7$ км/с.

**3.59.** Позначимо радіус кривизни траєкторії планети в перигелії через $R_0$, кінетичну енергію планети в цій точці $E_к = m\upsilon_0^2/2$, потенціальну енергію $E_п = -GmM/r_0$.

Радіус кривизни в перигелії знайдемо з 2-го закону Ньютона $\dfrac{m\upsilon_0^2}{R_0} = \dfrac{GmM}{r_0^2}$, звідки $R_0 = \dfrac{m\upsilon_0^2 r_0^2}{GmM} = -\dfrac{2r_0 E_к}{E_п}$.

Виходячи із симетрії фігури еліпса, радіус кривизни в афелії $r_a$ такий же, як і в перигелії. Тому для цієї точки маємо: $\dfrac{m\upsilon_a^2}{R_0} = \dfrac{GmM}{r_a^2}$.

За законом збереження енергії повна механічна енергія планети $E = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2} - \dfrac{GmM}{r_0} = \dfrac{m\upsilon_a^2}{2} - \dfrac{GmM}{r_a}$.

Виключивши з цього виразу швидкості, отримаємо: $\dfrac{GmMR_0}{2r_0^2} - \dfrac{GmM}{r_0} = \dfrac{GmMR_0}{2r_a^2} - \dfrac{GmM}{r_a}$.

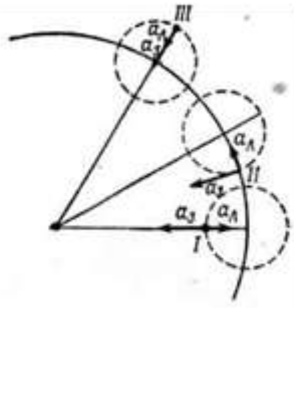
Після скорочень отримуємо квадратне рівняння: $r_a^2(2r_0 - R_0) - 2r_a r_0^2 + R_0 r_0^2 = 0$.

Перший корінь рівняння $r_a = r_0$. Це означає, що в цьому випадку еліпс вироджується в коло з радіусом $r_0$. Тоді і радіус кривизни $R_0 = r_0$, а швидкість руху по орбіті $\upsilon = \upsilon_0 = \sqrt{GM/r_0}$.

Другий корінь рівняння $r_a = r_0 R_0/(2r_0 - R_0) = -r_0 E_к/E$.

Оскільки відстань від афелію до Сонця – суттєво додатна величина, то $E < 0$. Це означає, що планета може рухатися по еліптичній орбіті лише в тому випадку, коли її повна механічна енергія є від'ємною величиною. Зокрема, для колової орбіти $E = -G\dfrac{mM}{2r_0}$.

**3.60.** Уявимо, що місце (положення), де в даний момент знаходиться супутник, жорстко зв'язане з планетою. Переносна швидкість обертання цього «місця» дорівнює $\upsilon_п = \upsilon_2 R_1/R_2$ і спрямована по дотичній до кола з радіусом $R_1$. Абсолютна швидкість супутника дорівнює $\upsilon_1$ і спрямована в той же бік. Тому відносна швидкість дорівнює $\upsilon_в = \upsilon_1 - \upsilon_2 R_1/R_2$.



**3.61.** На малюнку схематично показано і відмічено цифрами I, II, III положення Місяця, коли він «молодик», у першій чверті й уповні. Розглянемо рух Місяця відносно Землі. Будемо вважати, що навколо Землі

Місяць рухається по коловій орбіті, тому його прискорення завжди спрямоване по радіусу орбіти до Землі. Величина цього прискорення дорівнює $a_M = \frac{\upsilon^2}{R_M} = \frac{4\pi^2 R_M}{T_M^2}$, де $R_M$ – відстань від Землі до Місяця, а $T_M$ – період обертання Місяця.

Раніше у розв'язках задач було показано, що $\left(\frac{T_M}{T_З}\right)^2 = \left(\frac{R_M}{R_З}\right)^3 \cdot \frac{M_C}{M_З}$,

де $T_З$ – період обертання Землі навколо Сонця, $R_З$ – відстань від Землі до Сонця, а $M_З$ і $M_C$ – маси Землі і Сонця.

Враховуючи це, знаходимо $a_M = \frac{4\pi^2}{T_З^2}\left(\frac{R_З}{R_M}\right)^3 \cdot \frac{M_З}{M_C} R_M \approx 0{,}27$ см/с$^2$.

Рухаючись разом із Землею по коловій орбіті навколо Сонця, Місяць має ще одне доцентрове прискорення, спрямоване по радіусу до Сонця, величиною $a_З = \frac{4\pi^2}{T_З^2} R_З \approx 0{,}60$ см/с$^2$;

при цьому ми знехтували $R_M$ порівняно з $R_З$. Таким чином, результуюче прискорення Місяця по відношенню до Сонця в будь-який момент часу дорівнює $\vec{a} = \vec{a}_M + \vec{a}_З$. Тому: $a_I = a_З - a_M = 0{,}33$ см/с$^2$ – спрямоване до Сонця; $a_{II} = \sqrt{\vec{a}_З^2 + \vec{a}_M^2} \approx 0{,}66$ см/с$^2$ – спрямоване під кутом $\alpha$ до лінії Місяць-Сонце, причому $tg\alpha = a_M / a_З = 0{,}45$, $\alpha = 24^o 13'$; $a_{III} = a_З + a_M = 0{,}87$ см/с$^2$ – спрямоване до Сонця.

**3.62.** $T = 1{,}22$ року.

**3.63.** $T = 15$ місяців $= 450$ діб.

**3.64.** $T = \frac{2\pi GM}{\upsilon^3} = 225$ діб.

**3.65.** Доцентровою силою в цьому випадку є сила притягання між планетою і супутником. Тому $G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R$, (1)

де $m$ – маса супутника, $G$ – гравітаційна стала, $\omega$ – кутова швидкість. Оскільки $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то з (1) дістанемо $R = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$.

**3.66.** $T = \pi\sqrt{\frac{(r+R)^3}{2GM}}$. Досить розглянути рух по колу, радіус якого дорівнює великій півосі даного еліпса, тобто $\frac{r+R}{2}$, – за Кеплером період обертання буде тим же.

**3.67.** $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$.

**3.68.** Період обертання супутника $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}}$ залежить лише від щільності планети, а тому період обертання навколо другої планети буде таким самим, як і навколо першої.

**3.69.** $\upsilon = 27{,}6$ км/с; $T = 450$ діб.

**3.70.** $T_{пл} = T_З \left(\dfrac{R_{пл}}{R_З}\right)^{3/2}$; $\upsilon = \dfrac{2\pi R_{пл}}{T_З}\left(\dfrac{R_З}{R_{пл}}\right)^{3/2}$.

**3.71.** У моделі Сонячної системи всі відстані вимірюються числами у $k$ разів меншими, ніж у «натуральній» системі. Уявимо собі, що ця зміна чисел відбулася не внаслідок реального зменшення розмірів, а в результаті переходу до нової системи одиниць, такої, що $l' = kl$. Але тоді і всі інші одиниці, розмірність яких включає довжину, теж зазнають певних змін. Зокрема, густина $\rho = m/l^3$ стане рівною $\rho' = \dfrac{m'}{l'^3} = \dfrac{1}{k^3} \cdot \dfrac{m'}{l^3}$.

За умовою задачі $\rho' = \rho$. Це означає, що необхідно обрати нову одиницю вимірювання не лише для довжини, але й для маси тіла. Очевидно, що $m' = k^3 m$.

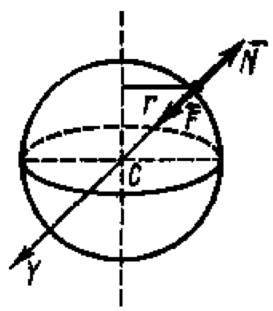
Як було раніше доведено, що період обертання $T$ планети навколо Сонця виражається через сумарну масу $M$ Сонця і планети і велику піввісь орбіти $R$ таким чином, що $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{GM}$.

У новій системі одиниць матимемо $T'^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R'^3}{G'M'} = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{GM} = T^2$.

При цьому використано отримане раніше співвідношення $G'M' = \dfrac{k^3}{\tau^2} GM$,

де роль величини $\lambda$ в попередніх задачах, тут відіграє – $k$, а $\tau = 1$. Таким чином отримане співвідношення свідчить, що періоди обертання «планет» у виготовленій моделі будуть такими ж, як і в реальній Сонячній системі.

**3.72.** На тіло, яке знаходиться на поверхні планети, діють: $\vec{F}$ – сила тяжіння з боку планети, $\vec{N}$ – сила нормальної реакції планети (див. мал.) (різницею між силою тяжіння і силою ваги нехтуємо):




$F = G\dfrac{Mm}{R^2}$, де $M$ – маса планети; $m$ – маса тіла; $R$ – радіус планети. Маса планети $M = \rho V$, де $V = 4\pi R^3/3$ – об'єм планети. Тоді

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \text{ а } F = G\frac{4\pi R^3 \rho m}{3R^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho m R. \qquad (1)$$

Сила нормальної реакції $N$ чисельно дорівнює силі тяжіння $mg$ тіла і спрямована по радіусу у бік від центра планети. Запишемо для тіла рівняння другого закону Ньютона в скалярній формі відносно $Y$:

$$F - N = ma_y. \qquad (2)$$

З урахуванням (1) рівняння (2) набуває вигляду:

$$\frac{4}{3}\pi G\rho mR - N = ma_y \qquad (3)$$

Розглянемо два частинних випадки руху тіла.

1. Тіло знаходиться на полюсі.

Оскільки на полюсі $r = 0$, то лінійна швидкість тіла $\upsilon = 2\pi r/T = 0$. Тоді рівняння (3) для тіла, що знаходиться на полюсі, набуде вигляду $\frac{4}{3}\pi G\rho mR - N_n = 0$, звідки $N_n = \frac{4}{3}\pi G\rho mR$, де $N_n$ – сила нормальної реакції поверхні на полюсі.

2. Тіло знаходиться на екваторі.

У цьому випадку $r = R$ і $\upsilon = 2\pi R/T$. Тоді рівняння (3) набуде вигляду

$$\frac{4}{3}\pi G\rho mR - N_e = m\frac{(2\pi R)^2}{RT^2}, \qquad (4)$$

звідки $$T = \sqrt{\frac{m4\pi^2 R}{\frac{4}{3}\pi G\rho mR - N_e}}, \qquad (5)$$

де $N_e$ – сила нормальної реакції поверхні на екваторі. За умовою задачі, $P_e = P_n/2$. Оскільки $P = N$, то $N_e = N_n/2$, або з урахуванням (4)

$$N_e = \frac{2}{3}G\pi\rho mR. \qquad (6)$$

Підставивши (6) у (5), отримуємо: $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 mR}{\frac{4}{3}\pi G\rho mR - \frac{2}{3}\pi G\rho mR}} = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}}$; $T \approx 9{,}7\cdot 10^3$ с.

**3.73.** На показах пружинного годинника перенесення його із Землі на Марс не відобразиться, оскільки діючою в ньому силою є сила пружності, яка за своєю природою не пов'язана з гравітацією. Що ж стосується маятникового годинника, то, вважаючи для простоти його маятник математичним, можна легко показати, що на Марсі годинник буде відставати і період його коливань буде дорівнювати $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{0{,}4g}}$.

**3.74.** $T = T_1T_2/(T_1 + T_2) = 116$ земних діб

**3.75.** $n = 1{,}88$; $\upsilon_1 = 24{,}14$ км/с.

**3.76.** $l = \frac{GMm}{4\pi^2\nu^2R^2} = 2{,}86$ м.

**3.77.** $\frac{T_М}{T_З} = \sqrt{\frac{g_З}{g_М}} = \sqrt{\frac{M_З R_М^2}{M_М R_З^2}}$; $\frac{T_М}{T_З} \approx 1{,}7$. Це означає, що на Марсі годинник уповільнить свій хід ($T_М > T_З$) приблизно в 1,7 рази.

**3.78.** а) $T' = T\left(1 + \frac{H}{R}\right)$; б) $T'' = T\sqrt{\frac{R}{R-h}}$.

**3.79.** Період коливань маятника на Землі $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2$ с, а на поверхні Місяця $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}$, де $l$ – довжина маятника; $g$ – прискорення сили тяжіння на Землі, $g_1$ – на Місяці. Отже, $\frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g}}$, звідки $T_1 = T\sqrt{\frac{g}{g_1}}$. Але $\frac{g}{g_1} = \frac{F}{F_1}$. Тоді $T_1 = \sqrt{\frac{F}{F_1}}T \approx 4{,}9$ с.

**3.80.** $250$ років; $\approx 3650$ км/с.

**3.81.** $\approx 165$ років (земних).

**3.82.** $T_1 = 7{,}8$ год.; $T_2 = 31{,}2$ год.

**3.84.** $1{,}88$ земних років.

**3.85.** $T = 164{,}32$ року.

**3.86.** По гіперболі; $R_C = 1{,}32 \cdot 10^{11}$ м; $E = -3{,}1 \cdot 10^{11}$ Дж.

**3.87.** Скористаємося співвідношенням $G\frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$.

Але $GM = gR^2$, підставивши це значення $GM$, дістанемо $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 5024$ с.

**3.91.** 1) Відносне зменшення ваги $\delta = \frac{\omega^2 R}{g} \approx 0{,}34\%$. 2) За умови, що $P = 0 \rightarrow \delta = 1$, тоді $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$. Тривалість доби $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 1$ год. $25$ хв.

**3.93.** Рухатися Місяць навколо Землі по коловій орбіті з прискоренням $a = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ змушує сила притягання Місяця Землею $G\frac{m_З m_М}{R^2}$. Отже, згідно з другим законом Ньютона можна записати: $G\frac{m_М m_З}{R^2} = m_М a = \frac{4\pi^2 m_М}{T^2}R$.

Використавши співвідношення $g_0 = G\frac{m_З}{R_З^2}\left(mg_0 = G\frac{mm_З}{R_З^2}\right.$, звідки $\left.g_0 = G\frac{m_З}{R_З^2}\right)$, дістанемо $\frac{4\pi^2 R}{T^2} = g_0\frac{R_З^2}{R^2}$, звідки $T = 2\pi\frac{R}{R_З}\sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 27{,}4$ доби.

Прискорення вільного падіння беремо для полюсів, тому що поблизу полюсів сила тяжіння дорівнює силі притягання тіла до Землі.

**3.94.** Елементи орбіти Місяця приведені в задачі. Для супутника ж відстань від центра Землі в перигеї і апогеї відповідно дорівнюють: $r_c^p = R_З + 225 км = 6603 км$; $r_c^a = R_З + 710 км = 7088 км$ ($R_З = 6378 км$). Для визначення періоду обертання супутника $T_C$ скористаємося третім законом Кеплера: $T_C^2 / T_M^2 = a_C^3 / a_M^3$, де $a_C$ і $a_M$ – великі півосі орбіт супутника і Місяця відповідно, а $T_M$ – період обертання Місяця.

Виразимо довжину великої півосі орбіти супутника через $r^p$ і $r^a$, скориставшись для цього властивостями еліпса: $r^p = a - c$; $r^a = a + c$, звідки $a = (r^p + r^a)/2$, де $a$ – велика піввісь еліпса, $c$ – відстань від центра еліпса до фокуса. Підставляючи $a$ у формулу для відношення періодів, маємо: $T_C^2 = \left(\frac{r_C^p + r_C^a}{r_M^p + r_M^a}\right)^3 T_M^2$. $T_C = 1{,}55$ години.

**3.95.** а) Уважатимемо, що Місяць обертається навколо Землі по коловій орбіті з радіусом $R_M = 380000$ км і періодом $T_M = 27{,}3$ доби, а Земля обертається навколо Сонця по такій же орбіті з параметрами $R_З = 149500000$ км; $T_З = 365{,}25$ діб. Скористаємося формулою для періоду обертання супутника, отриманого в попередній задачі $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$.

Записавши такі вирази для Місяця і Землі та взявши їх відношення, отримаємо $\frac{T_M^2}{T_З^2} = \frac{R_M^3}{R_З^3} \cdot \frac{M_C}{M_З}$, де $M_C$ і $M_З$ – маси Сонця і Землі відповідно, звідки

$$\frac{M_C}{M_З} = \frac{T_M^2}{T_З^2} \cdot \frac{R_З^3}{R_M^3} = 3{,}3 \cdot 10^5 .$$

б) Розглянувши аналогічно рух Місяця навколо Землі і супутника $I_0$ навколо Юпітера, отримаємо: $\frac{M_Ю}{M_З} = \left(\frac{T_M}{T_{I_0}}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_{I_0}}{R_M}\right)^3 = 318$;

тут $M_Ю$ – маса Юпітера; $T_{I_0}$ і $R_{I_0}$ – період обертання і радіус орбіти супутника Юпітера $I_0$.

**3.96.** Відповідно для відстаней від Юпітера і Землі до Сонця запишемо: $R_Ю = \sqrt[3]{\frac{GM_C T_Ю^2}{4\pi^2}}$, $R_З = \sqrt[3]{\frac{GM_C T_З^2}{4\pi^2}}$, звідки $R_Ю = 2R_З\sqrt[3]{18} \approx 7{,}86 \cdot 10^{11}$ м.

**3.97.** а) У $5{,}2$ рази; б) $13$ км/с; $2{,}2 \cdot 10^{-4}$ м/с$^2$.

**3.98.** Згідно з третім законом Кеплера, $\frac{T_C^2}{T_З^2} = \frac{R_C^3}{R_З^3}$, причому за умовою задачі $\frac{T_C}{T_З} = n$; звідси $R_C = R_З\sqrt[3]{n^2}$; $R_C \approx 1{,}4 \cdot 10^9$ км.

**3.99.** Якщо $E < 0$, то траєкторія планети – еліпс, якщо $E > 0$ – гіпербола. У проміжному випадку $E = 0$ траєкторія – парабола. Еліпс може вироджуватися у відрізок прямої, а гіпербола – у пряму лінію, яка прямує у нескінченність.

**3.100.** Прискорення, яких надає Землі і Місяцю Сонце, приблизно однакові. Тому Земля і Місяць утворюють єдину систему двох небесних тіл, що обертаються навколо спільного центра мас, а центр мас системи Земля-Місяць обертається навколо Сонця.

**Задача 3.101.** Радіус земної кулі може бути визначений за результатами тріангуляційного вимірювання дуги меридіана.

Відстань до Сонця $L$ може бути виміряна за його паралаксом $\varphi$ і за радіусом земної кулі $r$ ($L = r/\sin\varphi$).

Якщо відомі середній радіус Землі $r$, кутовий радіус Сонця $\rho$ і сонячний паралакс (тобто різниця між напрямами на центр Сонця з точки земної поверхні і з центра Землі) $\pi$, то істинний радіус Сонця дорівнює $R = \frac{\rho}{\pi} r$.

**Задача 3.102.** Якби на вантаж діяла лише одна сила притягання до Сонця, то він рухався б з прискоренням

$$a_в = \frac{F_в}{m_в} = G\frac{M_C m_в}{R_в^2} : m_в = G\frac{M}{R_в^2}, \qquad (1)$$

де $G$ – гравітаційна стала; $M$ – маса Сонця; $m_в$ – маса вантажу; $R_в$ – відстань від вантажу до Сонця. У той же час земна куля рухається з прискоренням

$$a_З = \frac{F_З}{m_З} = G\frac{Mm_З}{R_З^2} : m_З = G\frac{M}{R_З^2}, \qquad (2)$$

де $m_З$ – маса Землі, $R_З$ – відстань від Землі до Сонця. Але, оскільки $R_в = R_З$, то $a_в = a_З$, тобто Сонце надає однакового прискорення вантажу і Землі. звідси випливає, що притягання до Сонця не впливає на рух вантажа відносно Землі і, зокрема, не створює відхилення виска від вертикалі. (Міркуючи аналогічно, можна прийти до висновку, що на положення виска не впливає й Місяць або будь-яке інше тіло).

**3.103.** За законом всесвітнього тяжіння сила притягання тіла на Землі $F_З = G\frac{mM_З}{R_З^2}$, а на Марсі, за умовою, $M_М = 0{,}11M_З$, а $R_М = 0{,}53R_З$. Тому $F_М = G\frac{0{,}11mM_З}{(0{,}53R_З)^2}$. Отже, $\frac{F_З}{F_М} = \frac{M_З(0{,}53R_З)^2}{R_З^2 \cdot 0{,}11M_З} \approx 2{,}55$.

**3.104.** $M = 6{,}21 \cdot 10^{23}$ кг.

**3.105.** Запишемо для обох випадків формулу закону всесвітнього тяжіння: $F_П = G\frac{m_C m_П}{R_П^2}$; $F_З = G\frac{m_C m_З}{R_З^2}$.

Звідси маємо $\frac{F_П}{F_З} = \frac{R_З^2}{R_П^2}$; $\frac{F_П}{F_З} = \frac{R_З^2}{40^2 R_З^2}$; $\frac{F_П}{F_З} = \frac{1}{40^2} = \frac{1}{1600}$.

Отже, Плутон притягується до Сонця з силою, у 1600 разів меншою, ніж Земля.

**3.106.** $\approx 100$.

**3.107.** Якщо маса, період обертання навколо Сонця і довжина великої півосі орбіти Землі відомі, то для визначення маси іншої планети достатньо отримати із спостережень значення її періоду обертання навколо Сонця і довжину великої півосі орбіти.

**3.108.** $3{,}7$ Н/кг.

**3.109.** $c - V \approx \frac{m_0^2 c^2}{2(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})M^2 \upsilon^2} c = 8 \cdot 10^{-28}$с$= 2{,}4 \cdot 10^{-17}$ см/с;

$K_т / K_З \approx 2(\sqrt{2}-1)c/\upsilon \approx 8{,}3\cdot 10^3$.

**3.110.** 4683 км від центра Землі.

**3.111.** $m_2 \approx 3{,}6\cdot 10^2$ кг; $g_M \approx 1{,}65$ м/с$^2$.

**3.112.** $M_M \approx 7{,}3\cdot 10^{22}$ кг; $\rho_M \approx 3{,}3\cdot 10^3$ кг/м$^3$.

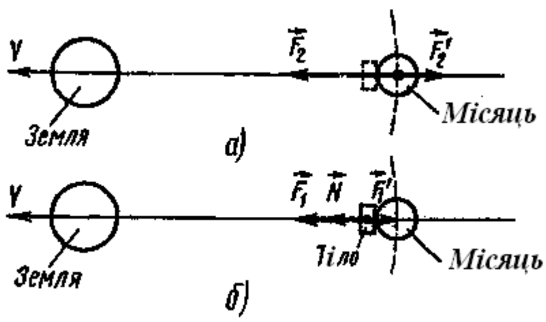
**3.114.** $F \approx 2\cdot 10^{20}$ Н.

**3.115.** $F \approx 1{,}7$ Н.

**3.116.** $h = 0{,}4R_З$.

**3.117.** За другим законом Ньютона, $M_C \dfrac{4\pi^2 R_C}{T_C^2} = G\dfrac{M_C M_З}{R_C^2}$, звідки $M_З = \dfrac{4\pi^2}{G}\cdot\dfrac{R_C^3}{T_C^2}$.

**3.118.** На Місяць діють: $\vec{F}_2$ – сила тяжіння з боку Землі, $\vec{F}_2'$ – сила тиску тіла на Місяць. Оскільки $F_2' << F_2$ (див. мал. *а*), ми нею нехтуємо. Відносно осі $Y$ другий закон Ньютона в скалярній формі матиме вигляд: $F_2 = m_2 a$, де $m_2$ – маса Місяця. За законом всесвітнього тяжіння $F_2 = GMm_2/r^2$, де $M$ – маса Землі. Отже, $G\dfrac{Mm_2}{r^2} = m_2 a$, звідки $a = GM/r^2$. Помножимо чисельник і знаменник останнього виразу на квадрат радіуса Землі $R^2$. $a = \dfrac{GM}{R^2}\dfrac{R^2}{r^2}$. Оскільки $\dfrac{GM}{R^2} = g_0$, знаходимо, що $a = g_0\dfrac{R^2}{r^2}$.




На тіло, яке знаходиться на поверхні Місяця, діють: $\vec{F}_1$ – сила тяжіння з боку Землі, $\vec{F}_1'$ – сила тяжіння з боку Місяця, $\vec{N}$ – сила нормальної реакції Місяця (див. мал. *б*).

Відповідно тієї ж осі $Y$ рівняння другого закону Ньютона в скалярній формі для тіла матиме вигляд: $F_1 - F_1' + N = m_1 a$, де $a$ – прискорення тіла, яке дорівнює прискоренню Місяця. Врахувавши раніше отримане значення для $a = g_0 R^2/r^2$, отримаємо: $F_1 - F_1' + N = m_1 g_0 R^2/r^2$. За третім законом Ньютона $F_1' = N = F_2'$, отже $F_1 = m_1 g_0\dfrac{R^2}{r^2} \approx 2{,}73\cdot 10^{-3}$ Н.

**3.119.** $M = 5{,}98\cdot 10^{24}$ кг.

**3.120.** $M \approx 5{,}97\cdot 10^{24}$ кг; $\rho_{ср} \approx 5{,}53\cdot 10^3$ кг/м$^3$.

**3.121.** $M = \dfrac{4\pi^2}{G}\dfrac{a^3}{T^2} \approx 6\cdot 10^{27}$ г, де $a$ – велика піввісь еліптичної орбіти супутника.

**3.123.** У попередніх задачах було доведено, що період обертання двох тіл відносно їх спільного центра мас дорівнює $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}$, де $R$ – відстань між тілами; $M_1$ і $M_2$ – їхні маси.

Застосувавши цю формулу до системи Земля-Місяць, визначимо масу Місяця: $M_М = \dfrac{(2\pi)^2 R_М^3}{GT_М^2} - M_З$, де $T_М$ – період обертання Місяця навколо Землі; $M_З$ – маса Землі; $M_М$ – маса Місяця; $R_М$ – відстань від Землі до Місяця.

Існує інший спосіб визначення маси Місяця. Якщо запустити штучний супутник Місяця з періодом його обертання $T$ і великою піввіссю його орбіти $R$, то для цих його параметрів можна записати $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{GM_М}$, звідки $M_М = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{GT^2}$ (тут ми знехтували масою супутника порівняно з масою Місяця).

Щоб виключити з розрахунків $G$, можна скористатися третім законом Кеплера: $\dfrac{T^2}{T_М^2} = \dfrac{R^3}{R_М^3} \cdot \dfrac{M_З}{M_М}$, звідки $M_М = \dfrac{R^3}{R_М^3} \cdot \dfrac{T_М^2}{T^2} M_З$.

**3.124.** а) $0{,}72$; б) $3{,}9$ м/с$^2$.

**3.125.** Тіло, що лежить на поверхні Землі, притягується до її центра з силою $mg = G\dfrac{mM}{R^2}$, звідки $G = \dfrac{gR^2}{M}$. Маса Землі $M = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Підставивши значення $M$, дістанемо $G = \dfrac{3g}{4\pi R\rho} \approx 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м$^3$/кг·с$^2$.

**3.126.** $F = 0$.

**3.127.** $\rho = \dfrac{3\pi}{GT^2}$

**3.128.**

| Планети | $\rho$, *кг/м*$^3$ | Планети | $\rho$, *кг/м*$^3$ |
|---|---|---|---|
| Меркурій | 5500 | Юпітер | 1320 |
| Венера | 4800 | Сатурн | 710 |
| Земля | 5500 | Уран | 1260 |
| Марс | 3900 | Нептун | 1600 |

**3.129.** $\rho \approx \dfrac{3\rho_0}{2 - \dfrac{g - g_0}{g_0}\dfrac{R}{h}} \approx 6{,}5$ г/см$^3$.

**3.130.** Прискорення сили тяжіння на поверхні планети знайдемо так: $g_n = \dfrac{4}{3}\pi R_n \rho_n G$.

Аналогічно для Землі: $g=\frac{4}{3}\pi R_З \rho_З G$. Тут $R_З$ і $R_п$ – радіуси, а $\rho_З$ і $\rho_п$ – густини Землі і планети. Оскільки $\rho_З=\rho_п$, а $R_З=2R_п$, то $g_п=g\frac{R_п}{R_З}=\frac{g}{2}$.

Довжина маятника зв'язана з періодом відомим співвідношенням: $l=\frac{T^2}{4\pi^2}\frac{g_З}{2}=49{,}6$ м.

**3.131.** $\rho=\frac{3\pi}{GT^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3\approx 6{,}4\cdot10^3$ кг/м$^3$.

**3.132.** Вага тіла на полюсі дорівнює силі тяжіння $G\frac{mM}{R^2}$, а на екваторі $\frac{GmM}{R^2}-m\omega^2 R$. Згідно з умовою задачі $m\omega^2R=0{,}0034G\frac{mM}{R^2}$. Але $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Підставивши це значення в попередню рівність і розв'язавши її відносно $\rho$, дістанемо $\rho=\frac{3\omega^2}{0{,}0034\cdot4\pi G}\approx5{,}27\cdot10^3$кг/м$^3$.

**3.133.** З рівняння руху супутника поблизу поверхні планети $\frac{m\upsilon^2}{R}=G\frac{mM}{R^2}$ знайдемо $\upsilon^2=G\frac{M}{R}$. Маса планети $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$.

Тоді $\upsilon^3=\frac{4}{3}\pi GR^2\rho$. Підставивши значення $S=\pi R^2$ і розв'язавши відносно $\rho$, дістанемо

$\rho=\frac{3\upsilon^2}{4GS}\approx3\cdot10^3$ кг/м$^3$.

**3.134.** $\upsilon_2=130$м/с.

**3.135.** $\upsilon_2=15$м/с.

**3.136.** $\upsilon_1\approx8$м/с.

**3.137.** $\approx4$м/с.

**3.138.** $\upsilon_{відн}=\upsilon_1-\frac{\upsilon_2R_1}{R_2}$.

**3.139.** $u=\upsilon\sqrt{\frac{2(r-R)}{R}}$.

**3.140.** $\upsilon=43{,}5-(29{,}7+0{,}46)=13{,}3$км/с.

**3.141.** 5км/с.

**3.142.** 140хв.

**3.143.** $\rho=\frac{M}{V}=\frac{3\pi}{GT^2}\left(\frac{r}{R}\right)^3$.

**3.144.** $G=3g/4\pi\rho R=6{,}67\cdot10^{-11}$Н·м$^2$/кг$^2$.

**3.145.** $M_C\approx2\cdot10^{33}$г.

**3.146.** $F_{\max}=4\pi m_C\upsilon_З/T_З=8{,}62\cdot10^{30}$Н, де $m_C$ – маса Сонця; $\upsilon_З=29{,}8$ км/с– швидкість Сонця в системі відліку, пов'язаній із Землею; $T_З$ – період добового обертання Сонця відносно Землі. Кут нахилу осі Землі до площини екліптики дорівнює $66{,}5^o$. Кут між векторами $\vec{\upsilon}_C$ і $\vec{\omega}$ змінюється у межах від $66{,}5^o$ до $113{,}5^o$. Максимальна сила $F_{\max}$ спостерігається в точках сонцестоянь (при куті $90^o$).

**3.147.** Як для Землі, так і для Місяця доцентрове прискорення визначається силою всесвітнього тяжіння. Отже, $M_З\omega_З^2 R_З = G\dfrac{M_З M_C}{R_З^2}$,

$M_M\omega_M^2 R_M = G\dfrac{M_З M_M}{R_M^2}$.

Тут введено позначення: $M_З$, $M_M$, $M_C$ – маси Землі, Місяця і Сонця, $R_З$ і $R_M$ – радіуси орбіт Землі і Місяця, $\omega_З$ і $\omega_M$ – кутові швидкості по орбіті Землі і Місяця.

Вихідна система рівнянь легко приводить до виразу $\dfrac{M_C}{M_З} = \dfrac{\omega_З^2 R_З^2}{\omega_M^2 R_M^3} \approx 351\cdot 10^3$.

При підставлянні числових даних в останній вираз було враховано, що $\dfrac{\omega_З}{\omega_M} = \dfrac{1}{13}$, $\dfrac{R_З}{R_M} = 390$.

**3.148.** Доцентрове прискорення Землі $a = \dfrac{\upsilon^2}{r} = \dfrac{4\pi^2 r^2}{rT^2} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$; за другим законом Ньютона $F = Ma = 4\pi^2 Mr/T^2$, де $M = 4\pi\rho R^3/3$. Отже $F = \dfrac{16\pi^3}{3}\cdot\dfrac{\rho R^3 r}{T^2} \approx 4\cdot 10^{22}$ Н.

**3.149.** $M_C \approx 1{,}96\cdot 10^{30}$ кг; $g_C \approx 2{,}72\cdot 10^2$ м/с$^2$.

**3.151.** Для ваги тіла на екваторі і полюсі планети можна записати $P_e = G\dfrac{mM}{R^2} - \dfrac{4\pi^2 mR}{T^2}$ і $P_n = G\dfrac{mM}{R^2}$, звідки $\dfrac{P_e}{P_n} = 1 - \dfrac{4\pi^2 R^3}{GMT^2}$.

**3.152.** а) Початкова кінетична енергія тіла дорівнює $m\upsilon_0^2/2$, а його початкова потенціальна енергія дорівнює $П_R = -GmM/R$. За рахунок кінетичної енергії тіло піднімається на висоту $h$, де повна енергія представляє собою потенціальну енергію $П_{R+h} = -GmM/(R+h)$. Приріст потенціальної енергії дорівнює $П_{R+h} - П_R = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2} = -GmM\left(\dfrac{1}{R+h} - \dfrac{1}{R}\right) = \dfrac{GmMh}{R(R+h)}$.

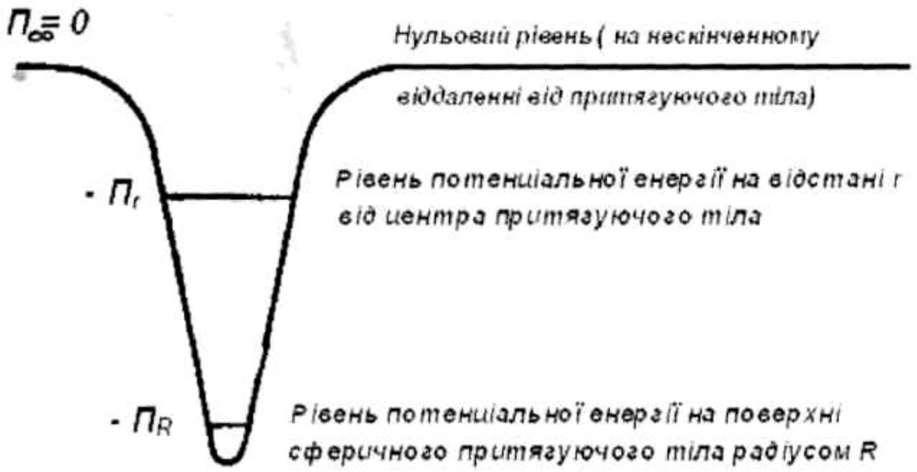
Оскільки на поверхні планети $GmM/R^2 = mg_0$, то потенціальна енергія тіла, піднятого на висоту $h$ над поверхнею планети, дорівнює $П_{R+h} - П_R = mg_0 R\dfrac{h}{R+h}$, де $g_0$ – прискорення вільного падіння на поверхні планети.

б) Висота підйому $h = \dfrac{\upsilon_0^2 R}{2g_0 R - \upsilon_0^2}$.

в) У цьому випадку тіло з масою $m$ на великому віддаленні від планети (на нескінченності) ще збереже кінетичну енергію $m\upsilon_\infty^2/2$. Різниця між початковою кінетичною енергією і кінетичною енергією на нескінченності витрачається на «підняття» тіла із потенціальної ями (див. мал.), тобто на збільшення потенціальної енергії тіла від рівня $-\;\Pi_R$, який відповідає поверхні планети, до нульового рівня $\Pi_\infty$, який відповідає досить великому віддаленню тіла (на нескінченність):

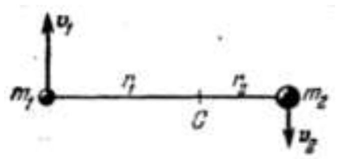
$$\frac{m\upsilon_0^2}{2}-\frac{m\upsilon_\infty^2}{2}=-(\Pi_\infty-\Pi_R)=-\left(0-\frac{GmM}{R}\right)=mg_0R\text{, звідки } \upsilon_\infty=\sqrt{\upsilon_0^2-2g_0R}=\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon_{II}^2}\,,$$

де $\upsilon_{II}=\sqrt{2g_0R}$.




**3.153.** $r_{\max}=\dfrac{r_0}{2-n}\left[1\pm\sqrt{1-(2-n)n\sin^2\alpha}\right]$, де $n=\dfrac{r_0\upsilon_0^2}{Gm_C}$, $m_C$ – маса Сонця.

**3.154.** Положення центра мас $C$ визначається з умови (див. мал.)




$m_1r_1=m_2r_2$. Нехай $r_1+r_2=R$, тоді за законами динаміки $\dfrac{m_1\upsilon_1^2}{r_1}=G\dfrac{m_1m_2}{R^2}$, $\dfrac{m_2\upsilon_2^2}{r_2}=G\dfrac{m_1m_2}{R^2}$. Ділимо $m_1\upsilon_1^2/r_1=m_2\upsilon_2^2/r_2$ на $m_1r_1=m_2r_2$.

Отримуємо $\upsilon_1^2/r_1^2=\upsilon_2^2/r_2^2$. Звідки випливає, що обидва тіла навколо центра мас обертаються з однаковим періодом $T=2\pi r_1/\upsilon_1=2\pi r_2/\upsilon_2$. Перетворимо: $\upsilon_1^2/r_1^2=4\pi^2/T^2=Gm_2/R^2r_1$; аналогічно $\upsilon_2^2/r_2^2=Gm_1/R^2r_2$. Звідки: $R^2r_1=Gm_2T^2/4\pi^2$, $R^2r_2=Gm_1T^2/4\pi^2$. Склавши ці рівняння, отримаємо вираз об'єднаного закону Кеплера $R^3=\dfrac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}T^2$.

**3.155.** $D=\sqrt[3]{\dfrac{M_CGT^2}{4\pi^2}}$.

**3.157.** 197 Гм.

**3.158.** Вага тіла на полюсі дорівнює силі тяжіння $G\dfrac{mM}{R^2}$, а на екваторі $\dfrac{GmM}{R^2}-m\omega^2 R$. Згідно з умовою задачі $m\omega^2 R = 0{,}0034G\dfrac{mM}{R^2}$. Але $M=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$. Підставивши це значення в попередню рівність і розв’язавши її відносно $\rho$, дістанемо $\rho=\dfrac{3\omega^2}{0{,}0034\cdot 4\pi G}\approx 5{,}27\cdot 10^3$ кг/м³.

**3.159.** $\rho=\dfrac{3\pi}{GT^2}\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^3\approx 6{,}4\cdot 10^3$ кг/м³.

**3.160.** Під силою ваги тут розуміють силу тиску тіла на поверхню планети, що дорівнює, очевидно, силі $N$, з якою планета тисне на тіло (цю силу можна виміряти за допомогою пружинного динамометра). На полюсі ця сила точно дорівнює силі всесвітнього тяжіння $GMm/R^2$ ($G$ – гравітаційна стала, $M$ – маса планети, $m$ – маса тіла). На екваторі різниця сил $GMm/R^2$ і $N$ надає йому доцентрового прискорення $\omega^2 R=\dfrac{4\pi^2}{T^2}R$. Крім того, як випливає з умови задачі, в останньому випадку $N=G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$.

Тому $G\dfrac{Mm}{R^2}-N=G\dfrac{Mm}{R^2}-G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}=m\dfrac{4\pi^2}{T^2}R$. (1)

Оскільки $M=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$, то з (1) дістанемо: $h=R\left(\pm\sqrt{\dfrac{G\rho T^2}{G\rho T^2-3\pi}}-1\right)$.

Величина $h$ за смислом задачі додатна, тому перед коренем слід брати знак «+».

**3.161.** Якщо маса $M$ планети при збереженні нею сферичної форми і густини $\rho$ зростає до величини $M'=\dfrac{4}{3}\pi\rho(R')^3$, то об’єм планети зросте пропорційно кубові її нового радіуса $R'$. Тоді сила притягання цієї планети, яка пропорційна до надаваного нею прискорення біля поверхні, буде виражатися формулою: $g\sim\dfrac{M'}{(R')^2}\sim\dfrac{(R')^3}{(R')^2}\sim R'$.

Таким чином, вплив збільшення маси переважить зворотний вплив збільшення геометричних розмірів планети, і сила притягання її зросте.

**3.162.** $\rho=\dfrac{30\pi}{T^2G}\approx 180$ кг/м³.

**3.163.** $0{,}34\%$.

**3.164.** Запишемо для тіла сталої маси $m$ на Марсі і на Землі: $P_М=G\dfrac{m_М m}{R_М^2}$; $P_З=G\dfrac{m_З m}{R_З^2}$. Звідси $\dfrac{P_М}{P_З}=\dfrac{m_М R_З^2}{m_З R_М^2}$; $\dfrac{P_М}{P_З}=\dfrac{m_М 4R_М^2}{10m_М R_М^2}$; $\dfrac{P_М}{P_З}=\dfrac{4}{10}=0{,}4$; $P_М=0{,}4P_З$.

Отже, вага тіла на Марсі становить 0,4 його ваги на Землі. Тому й падатиме воно на Марсі з прискоренням $g_М = 0{,}4 g_З$.

**3.165.** Приблизно $400\,\Gamma$.

**3.166.** $\dfrac{P_2 - P_1}{P} = \dfrac{M_М}{M_З}\dfrac{24\pi_2 r^2}{RgT^2} \approx 8\cdot 10^{-10}$, де $M_З$ і $M_М$, – маси Землі і Місяця; $R$ – відстань між їх центрами; $T$ – період обертання Місяця навколо Землі. Таким чином, вплив Місяця на різницю ваг $P_2 - P_1$ приблизно удвічі більший, ніж Сонця.

**3.167.** Вага обох тіл однакова.

**3.168.** 1) $A_1 = \dfrac{1}{2} mgR = 31{,}2$ МДж; 2) $A_2 = mgR = 62{,}4$ МДж.

**3.171.** У шуканій точці, віддаленій від Землі на відстань $r$ і від Місяця – на $r_1$, сили притягання тіла Землею і Місяцем однакові, тобто $G\dfrac{M_З m}{r^2} = G\dfrac{M_М m}{r_1^2}$.

Враховуючи, що $M_З = 81 M_М$ і $r + r_1 = 60R$, отримуємо: $\dfrac{81}{r^2} = \dfrac{1}{(60R - r)^2}$, звідки

$$r = \frac{9\cdot 60R}{10} = 54R,$$

тобто шукана точка знаходиться на відстані $54R$ від центру Землі.

Нехай тіло перебуває на відстані $x$ від Місяця. Сила взаємного притягання між тілом і Місяцем $F_1 = G\dfrac{mM_М}{x^2}$, а між тілом і Землею $F_2 = G\dfrac{mM_З}{(60R - x)^2}$.

За умовою задачі $F_1 = F_2$, тобто $\dfrac{M_М}{x^2} = \dfrac{M_З}{(60R - x)^2}$, звідки $60R - x = \sqrt{\dfrac{M_З}{M_М}}x$, а $x = 6R$.

**3.172.** Сила тяжіння, яка діє на тіло, що знаходиться на відстані $r$ від центра Землі, дорівнює $f = mgR_0^2 / r^2$. Тоді потенціальна енергія на відстані $R$ буде обчислюватися за формулою $\Pi(R) = \int\limits_{\infty}^{R} f dr = -\dfrac{mgR_0^2}{R}$, де $R_0$ – радіус Землі.

**3.173.** $E = K + \Pi = -\dfrac{Gmm_C}{2a}$, де $m_C$ – маса Сонця.

**3.174.** Тіло притягується до центра Землі і в початковий момент відносно центра Землі має потенціальну енергію $mgR$. При падінні відбувається перехід потенціальної енергії в кінетичну, і в центрі Землі тіло має кінетичну енергію $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = mgR$. За інерцією тіло пролетить повз центр і полетить далі. Якщо нехтувати опором повітря, то тіло долетить до другого кінця каналу, коли кінетична енергія повністю перейде в потенціальну. Потім тіло почне знову рухатися в зворотному напрямі. Отже, воно здійснюватиме коливання з періодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

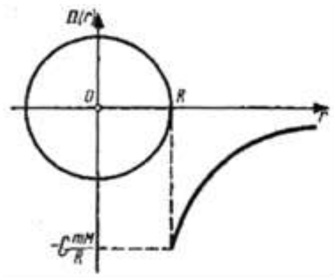
**3.175.** $A_{12} = 104$МДж.

**3.176.** $E_к \approx 1{,}56 \cdot 10^{11}$Дж; $\upsilon \approx 7{,}9 \cdot 10^3$ м/с.

**3.177.** $6{,}1 \cdot 10^{10}$ Дж; $A \approx m(R_З g_З - R_М g_М)$.

**3.178.** $A = mgR_З = 310$ГДж.

**3.179.** 1) Якщо вважати потенціальну енергію нескінченно віддалених одне від одного тіл рівною нулеві, то $П(r) = -G\dfrac{mM}{r}$.



2) Якщо вважати потенціальну енергію рівною нулеві на поверхні Землі, то при $h << R_З$ $П(h) = mgh$, де $g = G\dfrac{M}{R_З^2}$.

**3.180.** $H_0 = g \approx 9{,}8$ Н/кг; $\varphi_0 = -6{,}2 \cdot 10^7$ Дж/кг.

**3.181.** $h = 13{,}6$ Мм.

**3.182.** $\varphi_C = -190$ ГДж/кг.

**3.183.** 1) $\Delta P = \dfrac{8}{3}\pi G\rho mh = 15{,}4$ мН; 2) $\Delta P = \dfrac{4}{3}\pi G\rho mh = 7{,}71$мН.

**3.184.** Для того, щоб рідина, знаходячись на деякому рівні, сама по собі перетекла на інший рівень, суттєво не те, щоб цей рівень виявився ближче до центра тяжіння Землі. Важливо, щоб він знаходився на еквіпотенціальній поверхні, потенціал якої більший, ніж для першої поверхні. У зв'язку ж з неоднорідністю земного гравітаційного поля незмінність відстані до центра тяжіння Землі не зовсім співпадає з незмінністю потенціалу поля. На поверхні Землі такою еквіпотенціальною поверхнею є рівень всіх океанів, тому для того, щоб річка потекла в океан, необхідно і достатньо, щоб витік річки виявився вище рівня світового океану.

**3.185.** а) Так сказати можна. б) Уведемо позначення: $m$ – маса каменя, $M$ – маса Землі, $r$ – відстань між центрами мас Землі і каменя, $G$ – універсальна гравітаційна стала, $f = G\dfrac{mM}{r^2}$ – сила взаємного притягання. Силовою характеристикою поля є його напруженість, у даному випадку це сила, віднесена до одиниці маси тіла і рівна прискоренню $g$ його вільного падіння. Для поля, породженого Землею і діючого на камінь, можна написати: $g = f/m = GM/r^2$. Для поля, породженого каменем і діючого на Землю, можна написати: $f/M = g' = Gm/r^2$. Без обчислень видно, що прискорення Землі $g'$ у бік каменя нехтовно мале порівняно з прискоренням, якого зазнає камінь.

**3.186.** Кінетична енергія планети $K = m\upsilon_r^2/2 + L^2/(2I)$, де перший член виражає енергію радіального, а другий – обертального руху, причому момент імпульсу планети $L$ відносно Сонця зберігається. Оскільки момент інерції планети відносно Сонця $I = mr^2$, то рівняння закону збереження енергії запишеться у вигляді $\frac{m\upsilon_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} = E = Const$, де $M$ – маса Сонця, $m$ – маса планети. При $r = \infty$ $E = m\upsilon_r^2/2$. Ця рівність може виконуватися лише при $E > 0$. При $E < 0$ вона не виконується. Звідси випливає, що при $E < 0$ рух планети буде фінітним, а при $E > 0$ – інфінітним.

**3.187.** Використовуючи наведені в умові задачі дані, знаходимо: момент інерції Місяця відносно осі обертання Землі $I_M = ma_0^2 = 1{,}08 \cdot 10^{47}$ г·см$^2$ (моментом інерції Місяця відносно його власної осі нехтуємо); кутову швидкість обертання Місяця по орбіті $\omega_M = 2{,}67 \cdot 10^{-6}$ рад/с; момент кількості руху Місяця $L_M = I_M \omega_M = 28{,}9 \cdot 10^{10}$ г·см$^2$/с; повний момент кількості руху системи Земля-Місяць $L = L_З + L_M = 34{,}8 \cdot 10^{40}$ г·см$^2$/с. За законом збереження моменту кількості руху $(I_З + ma^2)\omega = L$. Згідно із законом Кеплера $a^3\omega^2 = a_0^3\omega_M^2$. Із цих двох рівнянь можна отримати невідомі $a$ і $\omega$. Нехтуючи моментом інерції $I_З$, отримуємо $ma^2\omega = L$ і знаходимо:

$$a = a_0 \frac{L^2}{m^2 a_0^4 \omega_M^2} = a_0 \left(\frac{L}{L_M}\right)^2 = 1{,}45 a_0 = 5{,}58 \cdot 10^{10} \text{см};$$

$$\omega / \omega_M = (a_0 / a)^{3/2} = 0{,}573; \quad T = 27{,}3/0{,}573 = 47{,}7 \text{ діб.}$$

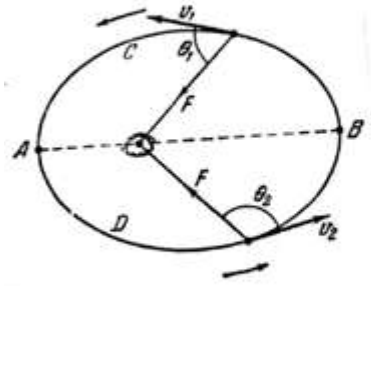
**3.188.** Наслідком закону збереження кількості руху системи Місяць-Земля повинно бути, крім зменшення кутової швидкості обертання Землі, ще й збільшення секторіальної швидкості обертання Місяця навколо Землі. Секторіальна швидкість залежить лише від радіуса кола, яке описує Місяць, а тоді згідно з третім законом Кеплера повинна збільшитися й тривалість Місячного місяця. Впив припливної дії Сонця, хоч він й у 2 з лишнім рази слабший, все ж буде досить помітним.

**3.189.** $L = m\sqrt{2Gm_C r_1 r_2 / (r_1 + r_2)}$, де $m_C$ – маса Сонця.

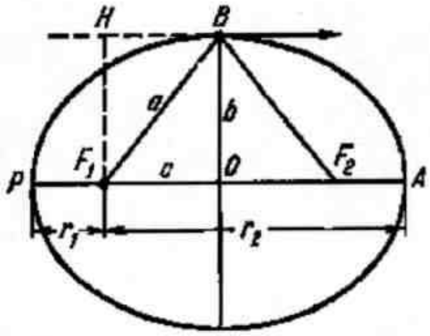
**3.190.** Якщо $p$ – імпульс, а $r$ – радіус-вектор планети відносно Сонця, то $\frac{d}{dt}(\vec{P}\vec{r}) = \vec{F}\vec{r} + \vec{p}\vec{\upsilon} = -G\frac{Mm}{r} + 2K = U + 2K = E + K$.

При періодичному рухові середнє за часом значення $\frac{d}{dt}(\vec{P}\vec{r})$, очевидно, дорівнює нулю, звідки і випливає результат: $\langle E \rangle + \langle K \rangle = 0$.

**3.191.** На ділянці траєкторії $BCA$ (див. мал.) сила тяжіння виконує додатню роботу (кут $\theta_1$ гострий), а, отже, швидкість планети зростає. У точці $A$ швидкість досягає свого максимального значення. На ділянці $ADB$ сила тяжіння виконує від'ємну роботу (кут $\theta_2$ тупий), а, отже, при русі по цій ділянці швидкість планети зменшується, досягаючи мінімального значення у точці $B$.



**3.192.** У перигелії $P$ і афелії $A$ (див. мал.) радіальна швидкість планети дорівнює нулю.




Тому момент кількості руху планети у цих точках можна записати у вигляді $m\upsilon r$. Ураховуючи закони збереження моменту кількості руху і енергії, отримаємо для цих точок: $r^2 + G\frac{Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$. (1)

При $E < 0$ це квадратне рівняння має два дійсних додатніх корені $r_1$ і $r_2$. Один із коренів відповідає перигелію $P$, другий – афелію $A$. Сума коренів $r_1 + r_2$ дає довжину великої осі еліпса: $2a = r_1 + r_2 = -G\frac{Mm}{E} = -G\frac{M}{\varepsilon}$ , (2)

де $\varepsilon = E/m$ – повна енергія, що припадає на одиницю маси планети. Оскільки для руху по еліпсу $\varepsilon < 0$, то вираз (2) суттєво додатній, як це й повинно бути.

**3.194.** Згідно з другим законом динаміки $\vec{M} = d\vec{L}/dt$, де $\vec{L}$ – вектор моменту кількості руху планети; $\vec{M}$ – момент сили, що діє на планету; $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор планети; $\vec{F}$ – сила тяжіння, що діє на планету з боку Сонця. Оскільки вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}$ спрямовані по одній прямій, то $\vec{M} = 0$, а, отже, $\vec{L} = \text{Const}$. Цей висновок справедливий для всіх рухів під дією центральних сил.

**3.195.** $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{\upsilon}) = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{r} \times \left(\frac{d\vec{\alpha}}{dt} \times \vec{r}\right)$, де $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}$ – кутова швидкість планети; $\vec{\alpha}$ – кут повороту її радіуса-вектора. Згідно з правилами векторної алгебри можна записати: $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot \vec{r}^{\,2} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega}\vec{r}^{\,2}$, оскільки $\vec{r} \perp \vec{\omega}$; $\vec{\omega}\vec{r}^{\,2}dt = \vec{r}^{\,2}d\vec{\alpha}$ – є подвійна площа, що описується радіусом-вектором $\vec{r}$ за час $t$. Тому : $m\vec{r} \times \left(\frac{d\vec{\alpha}}{dt} \times \vec{r}\right) = \frac{mr^2 d\alpha}{dt} = 2m\frac{d\vec{s}}{dt} = 2m\vec{\sigma}$.

Згідно з розв'язком попередньої задачі, отримуємо, що $\vec{\sigma} = \text{Const}$, отже і $\vec{L} = 2m\vec{\sigma} = \text{Const}$.

**3.196.** Закони збереження повної енергії і повного моменту кількості руху, а також й імпульсу, виконуються для будь-яких ізольованих систем, якою, зокрема, можна вважати й нашу Сонячну систему.

**3.197.** $M = 1{,}67 \cdot 10^{11}$ тонн сили на кілометр.

**3.198.** $I \approx 9{,}7 \cdot 10^{37}$ кг·м$^2$.

**3.199.** Момент кількості руху кулі відносно осі обертання, яка проходить через її центр маси, визначається за формулою

$$L = I\omega = \frac{2}{5} m r^2 \omega, \tag{1}$$

де $I$ – момент інерції кулі ($I = \frac{2}{5} m r^2$); $r$ – радіус кулі.

Енергія обертового руху тіла кулястої форми дорівнює

$$E = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{2}{5} m r^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{5}, \tag{2}$$

де $\omega$ і $\upsilon$ – кутова і лінійна швидкості відповідно.

Підставивши в (1) і (2) значення відповідних величин для Землі, отримаємо числові значення $L$ і $E$.

**3.200.** Максимальний поворот вийде, коли швидкість тіла $\vec{\upsilon}$ буде перпендикулярною до земної осі. Тіло має момент імпульсу $\vec{L} = m[\vec{r}\vec{\upsilon}]/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$, який перпендикулярний до швидкості $\vec{\upsilon}$. Земля отримує такий же момент імпульсу в зворотному напрямі. При цьому вектор кутової швидкості обертання Землі $\vec{\omega}$ відхиляється у бік на кут $\alpha = L/(I\omega)$. Підставивши $I = 2/5 M r^2$ і врахувавши, що різниця $c-\upsilon$ незначна, отримаємо $\frac{c-\upsilon}{c} \approx \frac{25 m^2 c^2}{8 M^2 l^2 \omega^2} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-22}$.

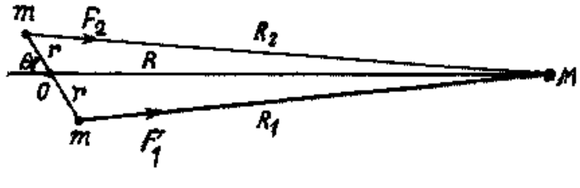
Відмітимо, що наведена оцінка справедлива для повороту земної осі «в просторі», тобто відносно системи «нерухомих зірок». Для дослідження поворотів осі «в тілі», тобто відносно самої Землі, необхідно враховувати приплюснутість земної кулі. Це пов'язано з тим, що обертання кулі навколо фіксованого в ній діаметра нестійке.

**3.201.** $L_C = m_З \upsilon_З r_0 = 2{,}67 \cdot 10^{40}$ кг·м$^2$/с, де $m_З$ – маса Землі; $\upsilon_З$ – середня швидкість руху Землі навколо Сонця; $r_0$ – середня відстань від Землі до Сонця; $L_0 = 0{,}8\pi m_З R_З^2/T = 7{,}06 \cdot 10^{33}$ кг·м$^2$/с, де $T$ – період обертання Землі навколо своєї осі.

**3.202.** $\frac{L}{L_0} = \frac{5}{2}\frac{l^2}{R^2}$, де $l$ – відстань від Землі до Сонця; $R$ – радіус Землі.

**3.203.** $L = \frac{16}{15}\pi^2 \rho R^5 \frac{1}{T} \approx 5{,}2 \cdot 10^{33}$ кг·м$^2$/с.

**3.204.** Щоб дати відповідь на питання задачі, розглянемо спочатку модель описуваного в ній явища: нехай два тіла з однаковими масами $m$, які з'єднані жорстким стержнем (який не має маси) на відстані $2r$ одне від одного, притягуються тілом з масою $M$, розташованим на відстані $R >> r$ від центра стержня (див. мал.). Стержень складає кут $\theta$ з напрямом $R$. Визначити приблизну величину обертового моменту відносно центра стержня. Зробимо розрахунки описаної моделі.




Сили притягання тіл масою $m$ до тіла масою $M$ визначаються за законом всесвітнього тяжіння. Для обраної моделі він матиме вигляд:

$$F_1=\frac{GmM}{R_1^2}=\frac{GmM}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}\approx\frac{GmM}{R^2\left(1-2\frac{r}{R}\cos\theta\right)}\approx\frac{GmM}{R^2}\left(1+2\frac{r}{R}\cos\theta\right);$$

$$F_2=\frac{GmM}{R_2^2}=\frac{GmM}{R^2+r^2+2Rr\cos\theta}\approx\frac{GmM}{R^2}\left(1-2\frac{r}{R}\cos\theta\right).$$

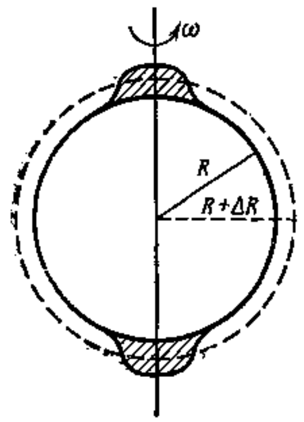
У процесі отримання цих наближених виразів ми знехтували $r^2$ порівняно з $R^2$ та врахували, що $(r/R)\cos\theta<<1$, скориставшись співвідношенням $1/(1\pm x)\approx 1\mp x$ при $x<<1$. Обертовий момент $\tau$ дорівнює різниці моментів сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ відносно точки $O$, тобто $\tau=F_1r\sin\theta-F_2r\sin\theta$ (плечі обох сил приблизно рівні $r\sin\theta$). Підставляючи замість $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ їхні значення, отримаємо $\tau=\frac{2GmMr^2}{R^3}\sin 2\theta$.

Звертаємо увагу, що момент дорівнює нулю при двох положеннях мас: коли $\theta=0$ (а, отже, й момент сили притягання кожної маси $m$ дорівнює нулю) і коли $\theta=\pi/2$, тобто коли модулі сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ дорівнюють один одному і їх моменти взаємно компенсуються.

Тепер власне щодо самої задачі. Сплюснутість Землі при обчисленні діючого на неї моменту сил можна приблизно врахувати, замінивши Землю двома точковими масами, які знаходяться на деякій відстані одна від одної. Далі, скориставшись результатами розрахунків на моделі, знайти відношення обертових моментів, створюваних Сонцем і Місяцем: $\frac{\tau_C}{\tau_M}=\frac{M_C}{M_M}\left(\frac{R_M}{R_C}\right)^3\approx 0{,}47$,

де $M_M$ і $M_C$ – маси Місяця і Сонця; $R_M$ і $R_C$ – відстані від Землі до Місяця і Сонця відповідно.

**3.205.** Нехай $I$ і $\omega$ – момент інерції і кутова швидкість обертання Землі до танення льоду, а $I+\Delta I$ і $\omega+\Delta\omega$ – ті ж величини після того, як лід розтанув. Із закону збереження моменту кількості руху слідує, що $I\omega=(I+\Delta I)(\omega+\Delta\omega)$, або (оскільки $\omega=2\pi/T$), $\frac{I}{T}=\frac{I+\Delta I}{T+\Delta T}$. Таким чином, $\Delta T=\frac{\Delta I}{I}T$ .




Зміна моменту інерції Землі відбулися за рахунок того, що вода, яка раніше була зосереджена у вигляді льоду поблизу осі обертання (і тому давала дуже малий внесок у момент інерції Землі), розтанувши, розподілилася на сферичному шарові з радіусом $R$ і товщиною шару $\Delta R$ (див. мал.). Момент інерції такого шару (див. попередню задачу) дорівнює: $\Delta I=\frac{8}{15}\pi\rho\left[(R+\Delta R)^5-R^5\right]\approx\frac{8}{3}\pi\rho R^4\Delta R$.

Отже $\Delta T=\frac{8}{3}\frac{\pi\rho R^4}{I}T\Delta R$.

Враховуючи, що для води $\rho = 1\text{г/см}^3 = 10^3\text{кг/м}^3$, а період обертання Землі навколо своєї осі $T = 8{,}64\cdot 10^4$ с, отримуємо $\Delta T \sim 1$с.

**3.206.** Момент кількості руху планети є сумою двох членів: $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$; $\vec{L}_1$– описує рух планети по орбіті ($L_1 = m\upsilon R$), а $\vec{L}_2$ – описує обертання планети навколо своєї осі ($L_2 = I\omega$). Враховуючи, що для руху по коловій орбіті $\upsilon^2 / R \sim GM / R^2$ (вважаємо, що центральне тіло дуже важке), отримуємо $L_1 = m\sqrt{GMR}$. Величина $L_2$ для всіх реальних випадків виявляється набагато меншою за $L_1$.

Розглянемо систему Земля-Місяць. Момент кількості руху цієї системи визначається такими видами руху: рухом Місяця відносно центра мас системи Земля-Місяць, обертанням Місяця навколо своєї осі, рухом Землі відносно центра мас системи і обертанням Землі навколо своєї осі.

Скористаємося тим фактом, що період обертання Місяця навколо своєї осі дорівнює періодові його обертання по орбіті. Отже, $\frac{L_{1M}}{L_{2M}} = \frac{m_M R^2}{I_M} \sim \frac{R^2}{r_M^2}$, де $R$ – радіус орбіти Місяця; $r_M$ – радіус Місяця. Таким чином $L_{1M} >> L_{2M}$, і цією останньою величиною можна знехтувати. Далі, оскільки періоди обертання Землі і Місяця навколо центра мас системи однакові, а відстань до нього обернено пропорційна до мас цих тіл, отримуємо: $L_{1З} = \frac{m_M}{m_З} L_{1M} \approx 5\cdot 10^{-3} L_{1M}$, тобто внесок орбітального руху Землі в момент кількості руху теж дуже незначний. Оцінимо тепер вклад від обертання Землі навколо своєї осі. Отримуємо: $L_{2З} = I_З\omega_З = \frac{2}{5} m_З r_З^2 \omega_З$.

Враховуючи, що $m_З \approx 80 m_M$, $r_З \approx 6 r_M$, $\omega_З = \omega_M / 28$, переконуємося, що

$$\frac{L_{2З}}{L_{1M}} \approx 0{,}1.$$

Отже, момент кількості руху системи Земля-Місяць дорівнює приблизно $L = L_{1M} + L_{2З} = m_M \sqrt{G m_З R} + I_З \omega_З$.

(у припущенні, що вісь обертання Місяця перпендикулярна до площини його орбіти). Через припливи, які гальмують обертання Землі, тривалість доби повільно збільшується, тобто зменшується кутова швидкість обертання, а з нею й момент кількості руху Землі $L_{2З}$. Оскільки повний момент кількості руху системи Земля-Місяць повинен залишатися сталим, то момент кількості руху Місяця $L_{1M}$ повинен повільно зростати, компенсуючи зменшення $L_{2З}$. Збільшення $L_{1M}$ можливе лише у випадку збільшення відстані між Місяцем і Землею. Енергія системи Земля-Місяць складається з кінетичної і потенціальної енергій орбітального руху Місяця і кінетичної енергії обертання Землі (тут нехтуємо кінетичною енергією обертання Місяця і руху Землі по орбіті як порівняно малими величинами).

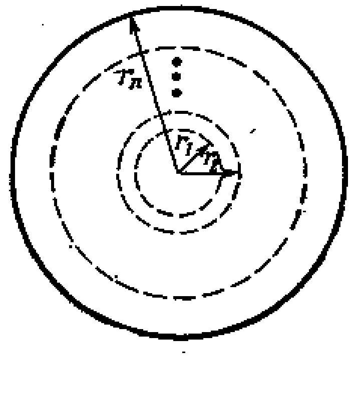
Раніше у розв’язках задач було показано, що повна енергія Місяця дорівнює $-\dfrac{Gm_З m_M}{2R}$, а енергія обертання Землі навколо своєї осі $\dfrac{1}{2}I_З\omega_З^2 = 0{,}2m_З r_З^2\omega_З^2$.

Повна енергія розглядуваної системи $0{,}2m_З r_З^2\omega_З^2 - \dfrac{Gm_З m_M}{2R}$ додатня, у чому легко переконатися, підставивши у цей вираз замість букв відповідні числові значення. У граничному випадку (мабуть у дуже далекому майбутньому), коли Земля зовсім перестане обертатися навколо своєї осі ($\omega_З = 0$), повна енергія системи Земля-Місяць стане від’ємною ($-Gm_З m_M / 2R_0$, де $R_0$ – відстань між Місяцем і Землею при $\omega_З = 0$) або, у крайньому випадку, при $R \to \infty$ стане рівною нулю. Це означає, що повна механічна енергія системи Земля-Місяць зменшується в міру віддалення Місяця від Землі. Це й зрозуміло, адже частина механічної енергії внаслідок припливного тертя перетворюється у теплоту.

**3.207.** а) Перепишемо таблицю питомої щільності у більш зручній формі, відлічуючи відстань від центру Землі, а не від її поверхні і взявши середній радіус Землі рівним 6370км:

| $R$, км | 70 | 370 | 870 | 470 | 370 | 370 | 970 | 170 | 270 | 340 | 370 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$, г/см$^3$ | 7,1 | 1,5<br>6,8 | 0,2 | ,7<br>,4 | ,2 | ,7 | ,6 | ,5 | ,4 | ,0<br>,3 | ,6 |

Землю уявимо собі такою, що складається із декількох сферичних шарів, щільність в середині кожного з яких постійна і дорівнює півсумі густин, відповідних внутрішньому і зовнішньому радіусам шару. Там, де має місце розрив щільності, більше її значення будемо приписувати внутрішній частині шару, а менше – зовнішній. Момент інерції сферичного шару із сталою щільністю $\rho$ і зовнішнім та внутрішнім радіусами $r_1$ і $r_2$ знайдемо, віднімаючи від моменту інерції шару радіусом $r_1$ момент інерції шару радіусом $r_2$. Таким чином, $I = \dfrac{2}{5}M_1 r_1^2 - \dfrac{2}{5}M_2 r_2^2 = \dfrac{8}{15}\pi\rho(r_1^5 - r_2^5)$, або для $i$-того шару $I_i = \dfrac{8}{15}\pi < \rho_i > (r_i^5 - r_{i-1}^5)$, $r_0 = 0$.

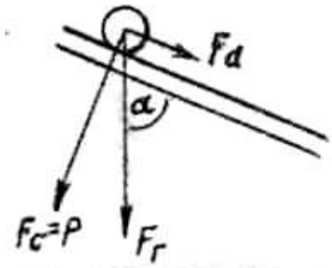


Повний момент інерції Землі дорівнює сумі моментів інерції сферичних шарів, так що: $I = \sum_{i=1}^{11} I_i = 8{,}1\cdot 10^{37}$ кг$\cdot$м$^2$.

б) Момент кількості руху Землі $L$ дорівнює: $L = I\omega = \frac{2\pi I}{T} \approx 5{,}9\cdot 10$ кг·м$^2$/с, де $T = 8{,}64\cdot 10^4$ с – період обертання Землі навколо своєї осі.

в) Кінетична енергія обертового руху Землі дорівнює: $K = \frac{1}{2} I\omega^2 \approx 2{,}1\cdot 10^{29}$ Дж.

**3.208.** Будемо розрізняти (умовно) сили гравітації $F_Г$, сили тяжіння і вагу тіл. Ці сили проявляються: 1) статично у вигляді тиску тіла на опору $F_C$, тобто у вигляді ваги тіла; 2) динамічно $F_d$ у вигляді прискореного під їх дією руху (падіння) (див. мал.).




Якщо падіння вільне, то статична складова сили тяжіння, тобто вага тіла, зникає і настає стан динамічної невагомості. Статична ж невагомість може мати місце на нескінченному віддаленні від всіх тяжіючих тіл. Після цих зауважень можна дати розширену відповідь на питання, розглянувши окремо, як змінюється сила тяжіння і вага тіла на його шляху від Землі до Місяця. Сила тяжіння буде змінюватися за законом $f = m[g'(R') - g(R)]$, де $g$ і $g'$ – прискорення, якого надають тілу відповідно Земля і Місяць, і яке змінюється в залежності від відстані тіла до Землі $R$ і до Місяця $R'$. Значення $g' - g = 0$ стосується точки, яка лежить між Місяцем і Землею, і в якій притягання обох небесних тіл зрівноважуються.

Припустимо тепер, що припинення роботи двигунів, які забезпечували політ тіла, відбулося на такій висоті, де опір земної атмосфери практично відсутній. Тоді з цього моменту на тіло вже діяли одні лише сили гравітації, які надавали тілу прискорення $g' - g$, незалежне від маси тіла. Таким чином, політ тіла аж до моменту його посадки на Місяць відбувається в умовах повної динамічної невагомості.

Стосовно питання про зміну маси тіла слід відзначити, що технічно досяжні швидкості, які в теперішній час надаються макротілам, настільки відрізняються від швидкості світла, що релятивістським приростом маси можна знехтувати.

**3.209.** $T = 1{,}22$ року.

**3.210.** Другий закон Кеплера втрачає силу, якщо рух планет співвідносити не до центра Сонця, а до центра мас всієї Сонячної системи. Вважається, що він віддалений від центра Сонця на відстань $2{,}15$ сонячних радіусів.

# ДО РОЗДІЛУ 4

**4.1.** Якщо знехтувати розмірами Землі порівняно з її відстанню до Сонця, то прискорення тілам на Землі Сонце буде надавати таке ж, як і самій Землі: $a = \dfrac{4\pi^2 R_З}{T_З^2} \approx 6\cdot 10^{-3}$ м/с$^2$.

**4.2.** $g_C \approx \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^2 \approx 275$м·с$^{-2}$.

**4.3.** Прискорення сили тяжіння $g_C$ на поверхні Сонця
$$g_C = \frac{GM_C}{R_C^2} = \frac{G}{R_C^2}\cdot\frac{4}{3}\pi R_C^3\rho_C = \frac{4}{3}\pi R_C\rho_C G, \qquad (1)$$
де $R_C$ – радіус Сонця, $\rho_C$ – щільність Сонця. Для Землі за аналогією з (1) маємо
$$g_З = \frac{4}{3}\pi R_З\rho_З G, \qquad (2)$$
де $R_З$ – радіус Землі, $\rho_З$ – щільність Землі. З (1) і (2)
$$g_C = \frac{g_З R_C\rho_C}{R_З\rho_З}. \qquad (3)$$
Оскільки $\dfrac{R_C}{R_З} = 108$, $\dfrac{\rho_C}{\rho_З} = 0{,}25$, з (3) остаточно дістанемо $g_C \approx 265$м/с$^2$.

**4.4.** $w_1 : w_2 : w_3 = 1 : 0{,}0034 : 0{,}0006$.

**4.6.** Скористаємося формулою для періоду обертання планети, отриманою в попередніх задачах: $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}$.

Застосовуючи цю формулу для системи Сонце-Земля і нехтуючи масою Землі порівняно з масою Сонця, отримуємо: $GM_C = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{T^2}$.

Але тут $R = 1$а.о., а $T = 1$рік. Таким чином: $GM_C = (2\pi)^2 \approx 40\,\dfrac{(а.о.)^3}{(рік)^2}$.

**4.7.** Падіння тіла на Сонце можна розглядати як рух по дуже витягнутому (в границі – по виродженому) еліпсу, велика вісь якого практично дорівнює радіусу $R$ земної орбіти. Тоді за Кеплером $(2\tau/T)^2 = \left[(R/2)/R\right]^3$, де $\tau$ – час падіння (час половини оберту по витягнутому еліпсу), $T$ – період обертання Землі навколо Сонця. Звідси $\tau = T/4\sqrt{2} = 65$діб.

**4.8.** Припустимо, що земна орбіта має форму кола. Доцентрове прискорення, з яким Земля рухається по орбіті, визначається силою всесвітнього тяжіння: $G\dfrac{M_C m}{R^2} = m\dfrac{4\pi^2}{T^2}R$. (1)

Тут $M_C$ – маса Сонця, $m$ – маса Землі; $G$ – гравітаційна стала. Прискорення вільного падіння $g_C$ на поверхні Сонця також описується законом всесвітнього тяжіння: $g_C = \dfrac{M_C G}{r^2}$. (2)

З (1) і (2) легко дістанемо $g_C = \dfrac{4\pi^2 R^3}{r^2 T^2} \approx 265$м/с$^2$.

**4.9.** $g_C \approx 7\cdot 10^4 g_З$; $\rho_С \approx 1{,}75\cdot 10^8$кг/м$^3$.

**4.10.** $g_C = 4h\left(\sqrt{1+\left(\upsilon_0^2 \Delta r^2/4h^2\right)}-1\right)/\Delta t^2 = 4{,}5$Мм/с$^2$.

**4.11.** $3{,}33\cdot 10^5$ мас Землі.

**4.12.** $1{,}082\cdot 10^8$км; $0{,}723$а.о.

**4.13.** $K \equiv a^3/T^2 = GM/4\pi^2$ (розглядається коловий рух планет).

**4.14.** Якщо маса планети нехтовно мала, то Сонце можна вважати нерухомим і записати $m\ddot{\vec r} = \vec F$. З врахуванням руху Сонця це рівняння запишеться у вигляді $\mu\ddot{\vec r} = \vec F$, де $\mu = Mm/(M+m)$ – приведена маса. Переписавши його у формі $m\ddot{\vec r} = \dfrac{M+m}{M}\vec F$, бачимо, що врахування руху Сонця формально еквівалентне збільшенню значення гравітаційної сталої в $(M+m)/M$ раз. Тому $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{M+m}{M} G \dfrac{M}{4\pi^2}$, або $\dfrac{a^3}{T^2(M+m)} = \dfrac{G}{4\pi^2}$.

**4.15.** Під дією сили тяжіння до Сонця Земля набуває прискорення $a = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$. За другим законом Ньютона, $G\dfrac{M_З M_C}{r^2} = M_З \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$, звідки $M_C = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$.

**4.16.** $\approx 2\cdot 10^{30}$кг.

**4.17.** $\approx 1{,}4$г/см$^3$.

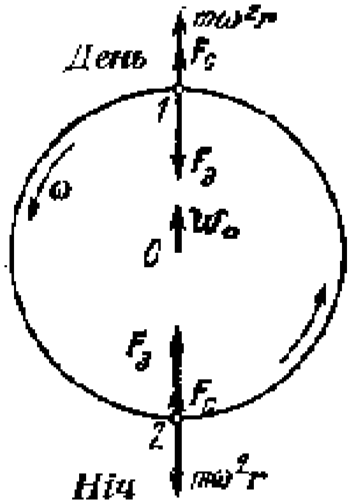
**4.18.** $\upsilon_1 = 436$км/с; $\upsilon_2 = 617$км/с.

**4.19.** Викликає, але ця зміна надто мала і нею нехтують.

**4.20.** Вага тіл у діаметрально протилежних точках земної кулі 1 (день) і 2 (ніч) буде відповідно рівна:

$$P_1 = F_З - F_C(R-r) - m\omega^2 r + mw_0;$$

$$P_2 = F_З - F_C(R+r) - m\omega^2 r - mw_0 \text{ (див. мал.)}$$




У цих рівняннях: $F_З$ і $F_C$ – сили гравітаційного притягання Землі і Сонця відповідно; $R$ – відстань між їхніми центрами; $R$ – радіус Землі; $w_0$ – прискорення центра Землі під дією гравітаційного притягання Сонця. Очевидно, що $mw_0 = F(R)$. Віднявши $P_1$ від $P_2$, знаходимо:

$$P_2 - P_1 = \left[F_C(R+r) - F_C(R)\right] + \left[F_C(R-r) - F_C(R)\right].$$

Розкладаючи обидві різниці в квадратних дужках за формулою Тейлора і обмежуючись квадратними членами по $r$, отримаємо $P_2 - P_1 = r^2\rho^2 F_C/\rho R^2$. Перетворимо цей вираз, застосувавши закон всесвітнього тяжіння: $F_C = GMm/R^2 = 4\pi^2 R/T^2 m$ та другий закон Ньютона: $P = mg$ ($M$ – маса Сонця, $T$ – період обертання Землі навколо Сонця, $m$ – маса тіла). Після нескладних перетворень знайдемо $\dfrac{P_2 - P_1}{P} = \dfrac{24\pi^2}{gT^2}\dfrac{r^2}{R} = \dfrac{12\pi^2 r^2}{sR}$, де $s=\frac{1}{2}gT^2$ – відстань, яку б проходила Земля протягом року, якби вона рухалася рівноприскорено з прискоренням $g$. Обчислюючи цю відстань, отримаємо $s=5\cdot10^{12}$км, а відношення $\frac{P_2-P_1}{P}\approx6{,}5\cdot10^{-12}$.

**4.21.** Якщо знехтувати втратами при поширенні світла, то повна енергія, випромінювана Сонцем за секунду, дорівнює сонячній сталій, помноженій на площу сфери, проведеної з центра Сонця радіусом, рівним відстані від Сонця до Землі. Ця площа дорівнює $\approx3\cdot10^{23}$м$^2$, а енергія $(1{,}4$Дж/(с$\cdot$м$^2$)$\cdot(3\cdot10^{23}$м$^2)\approx4\cdot10^{23}$Дж/с). Таким чином, Сонце за рахунок випромінювання світла втрачає за секунду масу, рівну: $\frac{4\cdot10^{23}\,Дж/с}{9\cdot10^{16}\,м^2/с^2}\approx4\cdot10^6$кг/с.

Десята частина маси Сонця складає $2\cdot10^{29}$кг. Вона буде витрачена упродовж $2\cdot10^{29}/4\cdot10^6=5\cdot10^{22}$с$\approx10^{15}$років.

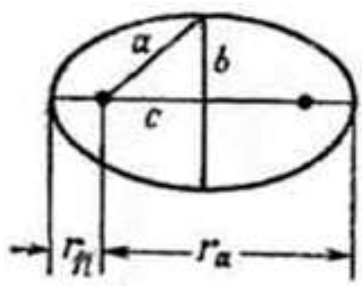
**4.22.** $T\approx T_0(\rho_0/\rho)^{2/3}=1{,}3\cdot10^{-3}$с.

**4.23.** Галактика розміщується у центрі сферично-симетричного Всесвіту.

**4.24.** $\frac{E_г}{E_C}\approx2\cdot10^{10}$.

**4.25.** $F=Gm_1m_2/r^2=2{,}75\cdot10^{16}$Н.

**4.26.** Спочатку представимо деякі властивості еліпса, які будуть використовуватися при розв'язанні задачі:




$a$ – велика піввісь;
$b$ – мала піввісь;
$c$ – відстань від центра до фокуса;
$e$ – ексцентриситет;
$r_n$ – найкоротша відстань від фокуса до лінії еліпса;
$r_a$ – найбільша відстань від фокуса до лінії еліпса.

$a^2=b^2+c^2, r_n=a-c=a(1-e)$, $e=\frac{c}{a}$ (за визначенням); $r_a=a+c=a(1+e)$.

Нехай $M_1$ і $M_2$ обертаються по колових орбітах з радіусами $r_1$ і $r_2$ відповідно, причому $r_1+r_2=R$ – постійна відстань між масами. Обертаючись навколо нерухомої точки (їх спільного центра мас), ці тіла постійно знаходяться на одній прямій, яка з'єднує ці маси і проходить через нерухому точку обертання. Тому періоди обертання обох тіл однакові і дорівнюють $T$.

Розглянемо рух одного з тіл, наприклад першого. Сила притягання, яка діє на нього з боку другого тіла, дорівнює $F^{(1)}=GM_1M_2/R^2$.

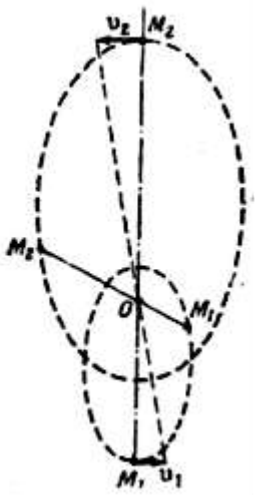
Під дією цієї сили тіло рухається з доцентровим прискоренням $a_g^{(1)}=\upsilon_1^2/r_1$.

Враховуючи, що період обертання $T = 2\pi r_1/\upsilon_1$ і що $F^{(1)} = M_1 a_g^{(1)}$, отримуємо $F^{(1)} = M_1 \dfrac{(2\pi)^2 r_1^2}{T^2 r_1} = G\dfrac{M_1 M_2}{R^2}$, звідки $\dfrac{(2\pi)^2 r_1}{T^2} = \dfrac{GM_2}{R^2}$.

Аналогічний вираз можна записати і для другого тіла: $\dfrac{(2\pi)^2 r_2}{T^2} = \dfrac{GM_1}{R^2}$.

Додавши два останніх вирази і врахувавши, що $r_1 + r_2 = R$, знаходимо: $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}$.

Отримана формула показує, що період обертання тіл залежить лише від відстані між ними і їх сумарної маси (а не від маси кожного з тіл, або від відношення їх мас).

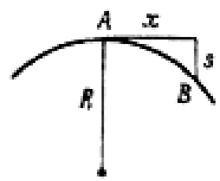


Розглянемо тепер випадок еліптичних орбіт. Тут мова йтиме, по суті, про три еліпси: по еліптичних орбітах рухаються обидва тіла (легше – по великому, важче – по малому) і, крім того, відносний рух тіл також відбувається по еліпсу. Всі три еліпси подібні один до одного, тобто мають один і той же ексцентриситет. Якщо при цьому врахувати, що центр мас системи залишається нерухомим (він лежить у спільному фокусі орбіт обох тіл), а відстань від центра мас обох тіл обернено пропорційна до їхніх мас, то можна погодитися з висновком, що розташування тіл і їх орбіт буде такий, як показано на малюнку.

Позначимо $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$ швидкості тіл $M_1$ і $M_2$ у той момент часу, коли вони знаходяться в апогеї. Як видно з малюнка, $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \dfrac{a_1 + c_1}{a_2 + c_2} = \dfrac{a_1(1+e)}{a_2(1+e)} = \dfrac{a_1}{a_2}$.

(Індекси 1 і 2 стосуються еліпсів, по яких рухаються тіла $M_1$ і $M_2$).

Щоб отримати для еліптичних орбіт ті ж вирази, що й для колових, зауважимо, що еліпс можна отримати з кола, якщо змінити масштаб вздовж однієї з осей координат. Щоб отримати прискорення тіла (наприклад, $M_1$) у нашому випадку, уявимо собі, що його орбіта отримана із колової збільшенням масштабу у «вертикальному напрямі» в $a_1/b_1$ разів. Величина переміщення $x$ тіла по горизонталі при цьому не зміниться, а величина переміщення $s$ по вертикалі збільшиться і стане рівною $s_1 = (a_1/b_1)s$. Підставивши у співвідношення $x^2 = 2Rs$ (справедливе для кола) значення $x$ і $s$ після збільшення масштабу $x_1 = x$, $s_1 = (a_1/b_1)s$ і $R = b_1$ («горизонтальні» розміри не змінилися, тому мала піввісь еліпса дорівнює радіусу початкового кола), отримаємо: $x^2 = 2\dfrac{b_1^2}{a_1}s_1$.



Таким чином, радіус кривизни еліпса у точці перетину з великою піввіссю дорівнює $b_1^2/a_1$. Вважаючи, що протягом дуже короткого проміжку часу перше тіло рухається по коловій орбіті цього радіуса, можна записати $\frac{\upsilon_1^2 a_1}{b_1^2}=\frac{GM_2}{(a+c)^2}=\frac{GM_2}{a^2(1+e)^2}$ (тут $a$ і $c$ – параметри орбіти відносного руху тіл: $a=a_1+a_2$, $c=c_1+c_2$). Аналогічно для другого тіла: $\frac{\upsilon_2^2 a_2}{b_2^2}=\frac{GM_1}{a^2(1+e)^2}$.

Додавши два останні вирази, замінивши при цьому $\upsilon_2$ на $\upsilon_1$, отримуємо $\frac{\upsilon_1^2(1+e)}{a_1^2(1-e)}=\frac{G(M_1+M_2)}{a^3}$.

Залишається з'ясувати, яке відношення має до періоду обертання величина, яка стоїть у лівій частині цього рівняння. Насамперед відмітимо, що площа, яку «описує» за одиницю часу радіус-вектор тіла $M_1$ (проведений з точки $O$), дорівнює $(1/2)\upsilon_1(a_1+c_1)=(1/2)\upsilon_1 a_1(1+e)$. Хоча фактично у даному випадку ми обрахували швидкість зміни «описуваної» площі для того моменту, коли тіло $M_1$ знаходиться в апогеї, ця швидкість, згідно з другим законом Кеплера, не змінюється при русі тіла по орбіті. Тому величина $(1/2)\upsilon_1 a_1(1+e)T$ (тут $T$ – період обертання) дорівнює площі орбіти тіла $M_1$. Площу еліпса легко обрахувати, якщо пригадати, що при збільшенні масштабу по одній із осей площа фігури збільшується у стільки ж разів, що й масштаб. Тому площа еліпса дорівнює $\pi b_1^2\frac{a_1}{b_1}=\pi a_1 b_1=\pi a_1^2\sqrt{1-e^2}$. Тепер легко переконатися, що $T=\frac{2\pi a_1}{\upsilon_1}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$, а $T^2=\frac{(2\pi)^2 a^3}{G(M_1+M_2)}$.

**4.27.** $n=\omega_2/\omega_1=(R_1/R_2)^2=2{,}5\cdot 10^5$ разів.

**4.28.** а) $7{,}1\cdot 10^{-15}$ рад/с; б) $2\cdot 10^3$ м/с.

**4.29.** $\sqrt{Gm/4R}$.

**4.30.** $\sqrt{5Gm/4R}$.

**4.31.** Оскільки обидві зорі обертаються по колах, то сила, яка діє на кожну з них, буде доцентровою. Згідно з третім законом Ньютона ці сили рівні між собою: $F_1=F_2$; $M_1\omega_1^2 R_1=M_2\omega_2^2 R_2$ або $\frac{4\pi^2 M_1 R_1}{T_1^2}=\frac{4\pi^2 M_2 R_2}{T_2^2}$.

Оскільки за умовою відстань $L$ між зорями стала, то періоди $T_1=T_2$ і $M_1R_1=M_2R_2$; $R_1+R_2=L$. Звідки $R_1=\frac{M_2L}{M_1+M_2}$; $R_2=\frac{M_1L}{M_1+M_2}$.

Якщо $M_1>>M_2$, то $R_2>>R_1$, тобто менша зоря обертається навколо більшої.

Оскільки $F_1=F_2=GM_1M_2/L^2$, то прирівнюючи цей вираз до доцентрової сили, знаходимо, наприклад, для першої зірки $G\frac{M_1M_2}{L^2}=\frac{4\pi^2 M_1 R_1}{T_1^2}$, звідки $T_1=2\pi\sqrt{\frac{L^3}{G(M_1+M_2)}}=T_2$.

**4.32.** $m_1 = \dfrac{T\upsilon_2}{2\pi G}(\upsilon_1+\upsilon_2)^2$; $m_2 = \dfrac{T\upsilon_1}{2\pi G}(\upsilon_1+\upsilon_2)^2$; $l = r_1 + r_2 = \dfrac{T}{2\pi}(\upsilon_1+\upsilon_2)$, де $r_1$ і $r_2$ – радіуси колових орбіт, по яких рухаються зорі.

**4.33.** З рівняння руху однієї із зірок навколо спільного центра $G\dfrac{m_1(m_1+m_2)}{l^2} = \dfrac{m_1 4\pi^2 l}{T^2}$

Дістанемо $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l^3}{G(m_1+m_2)}} = 4{,}8\cdot 10^7$ с.

**4.34.** Скористаємося законом збереження моменту імпульсу. Матимемо: $I_C\omega_C = I_n\omega_n$, або $\dfrac{2}{5}MR_C^2\dfrac{2\pi}{T_C} = \dfrac{2}{5}MR_n^2\dfrac{2\pi}{T_n}$. Звідси отримуємо $R_C^2/T_C = R_n^2/T_n$, або $T_n = T_C R_n^2/R_C^2$.

Щоб при збільшенні швидкості обертання не відбувалося відриву від пульсара його речовини, необхідно, щоб на його екваторі сила тяжіння забезпечувала обертання речовини з відповідною кутовою швидкістю, за якої $m\omega^2 R < F_{тяж} = \dfrac{GmM_C}{R_n^2}$, тобто, в цьому випадку $R_n^2/T_n^2 < GM_C/4\pi^2$.

Виключивши з обох рівнянь $T_n$, отримуємо $R \geq \dfrac{4\pi^2 R_C^4}{GM_C T_C^2} \approx 15$ км; $T_n \approx 10^{-3}$ с.

**4.35.** Квадрат періоду обертання двох тіл навколо їх центра мас може бути представлений виразом $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1+M_2)}$, де $R$ – велика піввісь відносного руху двох зірок.

Застосовуючи цю формулу до руху двох зірок $A$ і $B$ та до системи Сонце-Земля, можна записати $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_A+M_B)}$ і $T_З^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R_З^3}{G(M_C+M_З)}$, де $R_З$ і $T_З$ – велика піввісь земної орбіти і період обертання Землі. Взявши відношення цих періодів і нехтуючи масою Землі порівняно з масою Сонця, отримуємо

$$\frac{M_A+M_B}{M_C} = \left(\frac{R}{R_З}\right)^3\left(\frac{T_З}{T}\right)^2.$$

Поклавши $T_З = 1$ рік; $R_З = 1$ а.о. (за визначенням *а.о.* довжини), маємо:

$$\frac{M_A+M_B}{M_C} = \frac{R^3}{T^2}.$$

**4.36.** Якщо $m_1$ і $m_2$ – маси зірок, а $r_1$ і $r_2$ – їх відстані від спільного центра мас, то $m_1 : m_2 = r_2 : r_1$. Беручи до уваги, що $m_1 + m_2 = 2M$, де $M$ – маса Сонця, і позначаючи відстань між зорями через $R$, дістанемо $m_2 = \dfrac{2Mr_1}{R}$. **(1)**

Оскільки сила їх гравітаційного притягання є для кожної зорі доцентровою силою, зорі обертаються навколо їх спільного центра мас. При цьому

$$m_1\frac{4\pi^2}{T^2}r_1 = G\frac{m_1 m_2}{R^2}. \qquad (2)$$

З (1) і (2) дістаємо $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{2GM}{R^3}$. (3)

Для системи Сонце-Земля можна написати аналогічне співвідношення: $\frac{4\pi^2}{(T/2)^2} = \frac{GM}{R_0^3}$, **(4)** де $R_0$ – відстань від Землі до Сонця, а $M \approx m_3 + M$. З (3) і (4) дістаємо $R = 2R_0 = 3\cdot10^8$ км.

**4.37.** $\approx 8{,}9$ св. років.

**4.38.** $R = R_0\sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{M_1+M_2}{M_0}} = 2R_0 = 3\cdot10^8$ км.

**4.39.** $r_2 = \left(\frac{2GM}{2GM - r_1\upsilon_1^2} - 1\right)r_1$; $\upsilon_2 = \frac{r_1}{r_2}\upsilon_1$. Зоря розпадеться, якщо $\upsilon_1 \geq \sqrt{2GM/r_1}$.

**4.40.** $r_{\min} = \frac{Gm_C}{\upsilon_0^2}\left[\sqrt{1+(l\upsilon_0^2/Gm_C)^2} - 1\right]$, де $m_C$ – маса Сонця.

**4.41.** В обертовій системі відліку на частинки речовини на екваторі зорі діють сила тяжіння $F_т = GmM/R^2$ і відцентрова сила інерції $F_{вц} = m\omega^2 R$. Речовина почне відриватися, якщо $F_{вц} \geq F_т$, тобто, коли $\omega \geq \sqrt{GM/R^2}$.

**4.42.** Положення центра мас визначається з умови $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Позначивши $r_1 + r_2 = R$, із законів динаміки отримаємо: $\frac{m_1\upsilon_1^2}{r_1} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$, $\frac{m_2\upsilon_2^2}{r_2} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$, тобто $\frac{m_1\upsilon_1^2}{r_1} = \frac{m_2\upsilon_2^2}{r_2}$.

Розділивши останню рівність на $m_1 r_1 = m_2 r_2$, отримуємо: $\frac{\upsilon_1^2}{r_1^2} = \frac{\upsilon_2^2}{r_2^2}$, звідки випливає, що обидва тіла обертаються навколо центра мас з однаковим періодом $T = \frac{2\pi r_1}{\upsilon_1} = \frac{2\pi r_2}{\upsilon_2}$.

Перетворимо відношення, отримані в передостанньому виразі, до виду: $\frac{\upsilon_1^2}{r_1^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{m_2}{R^2 r_1}$; $\frac{\upsilon_2^2}{r_2^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{m_1}{R^2 r_2}$, звідки слідує: $R^2 r_1 = G\frac{m_2 T^2}{4\pi^2}$; $R^2 r_2 = G\frac{m_1 T^2}{4\pi^2}$.

Додавши обидві рівності, отримаємо: $R^3 = G\frac{m_1+m_2}{4\pi^2}T^2$.

Це і є шуканий вираз узагальненого третього закону Кеплера.

**4.43.** $T = \sqrt{3\pi/(G\rho)} \approx 1{,}2\cdot10^{-3}$ с.

**4.44.** Визначимо спочатку число нейтронів у пульсарі і їх концентрацію: $N = \frac{2\cdot10^{30}}{1{,}67\cdot10^{-27}} = 1{,}2\cdot10^{57}$; $n = \frac{N}{4/3\pi r^3} = 3\cdot10^{44}$ м$^{-3}$.

Область локалізації нейтрона $a = n^{-1/3} = 1{,}5\cdot10^{-15}$м. Імпульс нейтрона $p \geq \hbar/a \approx 10^{-20}$кг·м/с; релятивістський множник

$\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{p}{m_0 c} = \dfrac{7\cdot 10^{-20}}{1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 30\cdot 10^{8}} = 0{,}14$, звідки випливає, що $\beta \approx 0{,}14$, тобто нейтрон нерелятивістський. Його кінетична енергія $K \approx \dfrac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \approx 1{,}3\cdot 10^{-12}$ Дж $\approx 9$ МеВ.

**4.45.** а) Припустимо, що площина орбіти системи Сіріуса перпендикулярна до напряму на Землю. У такому випадку можна визначити величину великої півосі орбіти Сіріуса В (в кутових одиницях). Вона виявляється рівною приблизно $7{,}30''$, а період обертання системи – біля $45$ років.

У попередніх задачах було показано, що при орбітальному русі тіл $a$ і $b$ справедливим є відношення $\dfrac{M_a + M_b}{M_C} = \left(\dfrac{R}{R_З}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{T_З}{T}\right)^2$. Звідси сумарна маса подвійної зорі Сіріуса дорівнює $M_a + M_b = \left(\dfrac{R}{R_З}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{T_З}{T}\right)^2 \cdot M_C \approx 3{,}7 M_C$.

б) Це значення маси є її нижньою межею, бо коли площина орбіти не перпендикулярна до напряму на Землю, то її велика піввісь у дійсності більша від її видимого із Землі розміру. Маса подвійної зорі пропорційна кубові великої півосі, тому мінімальній величині півосі відповідає й мінімальне значення маси.

## ДО РОЗДІЛУ 5

**5.1.** а) За даними про появу комети знаходимо період $T$ її обертання навколо Сонця. Він дорівнює $T \approx 76$ років. Користуючись третім законом Кеплера, знайдемо для великої півосі $a$ орбіти комети:

$$\left(\frac{a}{a_З}\right)^3 \left(\frac{T_З}{T}\right)^2 = 1,$$

де $a_З$ і $T_З$ – велика піввісь орбіт і період обертання Землі.

Якщо вимірювати $a$ в а.о., а $T$ в роках, то $a = T^{2/3} \approx 18$ а.о.

Для відстаней в апогеї і перигеї маємо: $r_a = a + c$, $r_n = a - c$, що дає $r_a = 2a - r_n = 35{,}4$ а.о.

б) У попередніх задачах було показано, що відношення $\gamma$ максимальної і мінімальної швидкостей дорівнює відношенню відстаней у апогеї і перигеї. Таким чином, $\gamma = \dfrac{r_a}{r_n} = 59$.

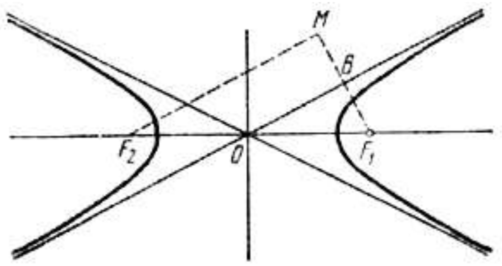
**5.2.** $\upsilon_2 = \upsilon_1 \dfrac{h}{l} = 54{,}6$ км/с.

**5.3.** $72{,}6$ км/с.

**5.4.** $19{,}6$ км/с.

**5.5.** $n=(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)=19$.

**5.6.** Нехай комета рухається по правій вітці гіперболи (див. мал.). Для її вершини справедливим буде рівняння $r^2+G\dfrac{Mm}{E}r-\dfrac{L^2}{2mE}=0$. Уявимо, що по спряженій вітці гіперболи рухається допоміжна частинка з такою ж масою $m$ і енергією $E$, але на цю частинку діє сила відштовхування, спрямована з фокуса $F_1$, величина якої співпадає з силою притягання, що діє на комету. Для такої частинки у вершині гіперболи справедливим буде рівняння $r^2-G\dfrac{Mm}{E}r-\dfrac{L^2}{2mE}=0$.




Різниця додатних коренів записаних рівнянь і дає шукану довжину $2a=G\dfrac{Mm}{E}=\dfrac{GM}{\varepsilon}$, де $\varepsilon=E/m$ – повна енергія, що припадає на одиницю маси комети.

**5.7.** Повна енергія комети, яка складається з кінетичної $W_к=\dfrac{m\upsilon^2}{2}$ і потенціальної $U=-G\dfrac{mM}{R}$ енергій, в афелії і перигелії, згідно з законом збереження енергії, буде однакова. Тому $\dfrac{m\upsilon_1^2}{2}-\dfrac{GmM}{R}=\dfrac{m\upsilon_2^2}{2}-\dfrac{GmM}{r}$.

Скорочуючи це рівняння на $m$, знаходимо $r$:

$$r=\frac{GM}{\frac{1}{2}\left(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2\right)+\frac{GM}{R}};\quad r\approx 10^{11}\text{ м.}$$

**5.8.** З умови задачі випливає, що на великій відстані від Землі повна енергія $E$ метеора дорівнювала нулю. Поблизу поверхні Землі, на відстані від її центра, що дорівнює радіусу Землі $R$, $E=W_к+U=\dfrac{m\upsilon^2}{2}-G\dfrac{mM}{R}$ ($m$ і $M$ – маси метеора і Землі). Згідно з законом збереження енергії:

$$\frac{m\upsilon^2}{2}-G\frac{mM}{R}=0, \text{ звідки } \upsilon=\sqrt{\frac{2GM}{R}};\ \upsilon\approx 11{,}2 \text{ км/с.}$$

**5.9.** $\upsilon=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}=42{,}1$ км/с.

**5.10.** $\upsilon=\sqrt{2G\dfrac{M_М}{R_М}}=2{,}35\cdot 10^3$ м/с.

**5.11.** $E \approx \dfrac{mgR}{1+h/R}$, де $R$ – радіус Землі.

**5.12.** $\approx 4\cdot 10^4$Мт.

**5.13.** Максимальна зміна тривалості доби $\Delta T$, викликана ударом метеорита, визначається за формулою $\dfrac{\Delta T}{T} = \pm\dfrac{m\upsilon R\cos\varphi}{2\pi I}T$,

де $T = 86164$с – тривалість доби; $R = 6400$км – радіус Землі; $m = 6\cdot 10^{21}$т – маса Землі; $I$ – момент інерції Землі. Якщо вважати Землю однорідною кулею, то $I = 2/5mR^2$ (у дійсності ж через зростання щільності до центра Землі момент інерції її дещо менший і складає приблизно $I = 1/3mR^2$). В результаті отримуємо $\Delta T/T \sim 2\cdot 10^{-15}$; $\Delta T \sim 2\cdot 10^{-10}$с.

**5.14.** $\upsilon_\infty = R\sqrt{\dfrac{2gR}{l^2 - R^2}}$. При $l = 2R$ $\upsilon_\infty = \sqrt{2/3gR} \approx 6{,}5$км/с.

**5.15.** $p = \sqrt{2}\cdot m\upsilon$.

**5.16.** $\upsilon = \sqrt{2gR_З} = 11{,}2$км/с.

**5.18.** На тіло масою $m$ діє сила тяжіння: на поверхні астероїда $mg_1 = G\dfrac{m\frac{3}{4}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}\rho$, на поверхні Землі $mg = G\dfrac{m\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3\rho}{\left(\frac{D}{2}\right)^2}$, де $\rho$ – середня щільність. Тоді $\dfrac{g_1}{g} = \dfrac{d}{D}$, звідки $g_1 = g\dfrac{d}{D} \approx 2{,}3$см/с$^2$.

**5.19.** По гіперболічній.

**5.20.** Обидва осколки будуть рухатися по параболах.

**5.21.** $G\dfrac{3M^2}{5R}$.

**5.22.** $23{,}6$м/с.

**5.23.** Нехай $M_a$ – маса астероїда. Як випливає із закону всесвітнього тяжіння, $g_a = G\dfrac{M_a}{R^2}$. (1)

Тут $g_a$ – прискорення вільного падіння на астероїді, $G$ – гравітаційна стала. Ураховуючи, що $M_a = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_a$, (2)

дістанемо $g_a = \dfrac{4}{3}\pi\rho_a RG \approx 0{,}008$м/с$^2$. (3)

За умовою задачі людина в момент стрибка на Землі і на астероїді має таку ж саму кінетичну енергію. Тому потенціальна енергія у найвищій точці підйому як на Землі, так і на астероїді також буде однакова:

$mg_a h_a = mgh$ (4)

де $m$ – маса людини, $h_a$ – висота стрибка на астероїді, а $h$ – на Землі. З (3) і (4) $h_a = \frac{g}{g_a} h \approx 64$ м.

Зауважимо, що насправді стрибок буде вищий, бо значення $g_a$ спадає з висотою за законом, який описує формула (1).

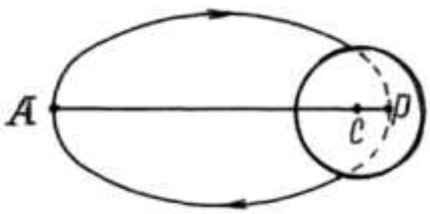
## ДО РОЗДІЛУ 6

**6.1.** Енергія супутника в полярних координатах дорівнює: $E = \frac{m}{2}\left[\dot{\rho}^2\left(\rho^2\dot{\varphi}\right)\right] - \frac{C}{\rho}$, де $C = GmM_З$.

Момент кількості руху відносно центра сил дорівнює: $L = m\rho(\rho\varphi)$. Виключивши з рівняння енергії $\dot{\varphi}$ і враховуючи, що в точках максимального і мінімального віддалення супутника від центра Землі $\dot{\rho} = 0$, рівняння енергії можна записати у такому вигляді: $\rho^2 - \frac{G}{|E|}\rho + \frac{L^2}{2m|E|} = 0$.

Тут враховано, що повна енергія супутника $E$ на еліптичних орбітах завжди від’ємна. Два корені цього рівняння дають відстань до перигею $\rho_1$ і апогею $\rho_2$ еліптичної орбіти. Згідно з теоремою Вієта: $\rho_1 + \rho_2 = 2a = \frac{C}{|E|}$, $\rho_1\rho_2 = \frac{L^2}{2m|E|}$, де $a$ – велика піввісь еліптичної орбіти. Використовуючи рівняння еліпса в полярних координатах, записане для перигею і апогею: $\rho_{1,2} = \rho/(1 \pm \varepsilon)$, можна виразити всі геометричні параметри орбіти через механічні константи руху. У даному випадку повна енергія супутника дорівнює: $E = -\frac{C}{R} + \frac{m\upsilon_0^2}{2} = -0{,}3\frac{C}{R_З}$, де $\upsilon_0^2 = \upsilon_I^2 = \frac{C}{mR_З}$ – квадрат першої космічної швидкості. Велика вісь орбіти $2a = \frac{C}{|E|} = \rho_1 + \rho_2$, звідси $\rho_1 = 1{,}25R_З$; $\rho_2 = \frac{C}{|E|} - \rho_1 = 2{,}1R_З$.

**6.2.** Ракета на старті рухається навколо Сонця разом із Землею з швидкістю $\vec{V}_к$. Щоб ракета упала на Сонце необхідно її рух загальмувати. Як і в попередній задачі, знаходимо, що при виході із поля земного тяжіння ракета буде мати швидкість $\vec{V} = \vec{V}_к + \vec{V}_\infty$ (відносно Сонця).




Найменша для сповільнення ракети затрата енергії відповідає випадку, коли швидкості $\vec{V}_к$ і $\vec{V}_\infty$ спрямовані протилежно. У відповідності з цим покладаємо $V = V_к - V_\infty$ (всі швидкості додатні) і знаходимо енергію, яка припадає на одиницю маси ракети: $\varepsilon = 1/2(V_к - V_\infty)^2 - GM/R = -1/2(V_к^2 + 2V_к\upsilon_\infty - \upsilon_\infty^2)$, де $R = CA$ – відстань ракети до центра Сонця (див. мал.). Якщо ця величина від'ємна, то ракета буде описувати навколо Сонця еліпс з великою піввіссю $2a = -\dfrac{GM}{\varepsilon} = \dfrac{2RV_к^2}{V_к^2 + 2V_к\upsilon_\infty - \upsilon_\infty^2}$.

Один із фокусів еліпса знаходиться в центрі Сонця. Нехай $x = CP$ – відстань від центра Сонця до найближчої вершини цього еліпса, тоді $2a = R + x$. Це приводить до квадратного рівняння, менший корінь якого дорівнює $\upsilon_\infty = V_к\left(1 - \sqrt{\dfrac{2x}{R+x}}\right)$.

Заданням відстані $x$ на поверхні Сонця визначається лінія, на якій повинна лежати задана точка. Таким чином, шукана швидкість $\upsilon$ визначається з виразу: $\upsilon^2 = \upsilon_\infty^2 + 2\upsilon_к^2 = V_к^2\left(1 - \sqrt{\dfrac{2x}{R+x}}\right)^2 + 2\upsilon_к^2$.

При $x = 0$ (прямолінійний рух по напрямку до Сонця) швидкість $\upsilon$ буде максимальною і дорівнює $\upsilon_{\max} = \sqrt{V_к^2 + 2\upsilon_к^2} \approx 31{,}8$ км/с.

Ракета упаде в передній точці Сонця. При $x = r$ ($r$ – радіус Сонця) швидкість буде мінімальною і дорівнює:

$$\upsilon_{\min} \approx \sqrt{V_к^2\left(1 - \sqrt{\frac{2r}{R+r}}\right)^2 + 2\upsilon_к^2} \approx \sqrt{V_к^2\left(1 - \sqrt{\alpha}\right)^2 + 2\upsilon_к^2} \approx 29{,}2$$

км/с.

Ракета упаде в протилежній точці Сонця, рухаючись по дотичній до його поверхні.

**6.3.** $\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T}\sqrt{\dfrac{2R}{r}} \approx 60$ км/с.

**6.4.** а) Можна вважати, що на самому початку руху маса ракети залишається весь час постійною і рівною $M_0$, тобто можна знехтувати масою витікаючих газів порівняно з початковою масою ракети. Крім того, можна вважати швидкість газів відносно Землі постійною і рівною $\upsilon_0$, оскільки швидкість ракети дуже мала. Якщо спочатку ракета не рухалася, то кількість руху ракети разом з паливом була рівна нулю. За час $t$ з ракети викидається

$r_0 t$ кг газу з швидкістю $\upsilon_0$, а сама ракета починає рухатися з швидкістю $\upsilon$ у протилежному напрямі. На підставі закону збереження кількості руху $\upsilon_0 r_0 t = M_0 \upsilon$ маємо $\upsilon = (\upsilon_0 r_0 / M_0) t$. Прискорення ракети дорівнює $a = d\upsilon / dt = \upsilon_0 r_0 / M_0$.

б) Силою тяги називається добуток маси ракети на прискорення. Як було показано в п. а), це прискорення дорівнює $\upsilon_0 r_0 / M_0$, звідки $F = \upsilon_0 r_0$. Отже, витрата палива для створення необхідної сили тяги, дорівнює

$$r_0 = \frac{F}{\upsilon_0} = \frac{9{,}8 \cdot 10^5\,\text{Н}}{2 \cdot 10^3\,\text{м/с}} = 490 \text{ кг/с}.$$

У даному випадку сила тяжіння і витрата палива розраховувалися лише в початковий момент часу. Нижче буде показано, що при постійній відносній швидкості витікання газів $\upsilon_0$ сила тяги буде теж сталою, тобто отриманий результат справедливий для будь-якого моменту часу.

в) Нехай $M$ – маса ракети, а $\upsilon$ – її швидкість у довільний момент часу $t$. За проміжок часу $dt$ із ракети буде викинуто $r_0 dt$ газів зі швидкістю (відносно Землі) $\upsilon - \upsilon_0$, внаслідок чого швидкість ракети зросте на $d\upsilon$. Згідно із законом збереження кількості руху можна записати $M\upsilon = (\upsilon - \upsilon_0) r_0 dt + (\upsilon + d\upsilon)(M - r_0 dt)$, звідки $M \frac{d\upsilon}{dt} = r_0 \upsilon_0$.

У лівій частині отриманого рівняння стоїть добуток маси на прискорення (у даний момент часу). Згідно з другим законом Ньютона у правій частині рівняння має стояти сила $F$. Очевидно, що при постійних $r_0$ і $\upsilon_0$ вона буде також постійною. Визначимо тепер швидкість ракети у довільний момент часу. Враховуючи, що $M(t) = M_0 - r_0 t$, знаходимо $\frac{d\upsilon}{\upsilon_0} = \frac{r_0 dt}{M_0 - r_0 t}$.

Інтегруючи праву і ліву частину цієї рівності, отримаємо залежність швидкості ракети від часу: $\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = -\ln(M_0 - r_0 t) + C$.

Користуючись наближеною формулою $\ln(1+x) \approx x$ при $x << 1$, інтеграл, що стоїть у правій частині, дає:

$$\frac{d \ln x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln[x(1 + \Delta x / x)] - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Стала інтегрування $C$ визначається з початкових умов. Якщо при $t = 0$ ракета не рухалася, то $C = \ln M_0$. Тому $\upsilon = \upsilon_0 \ln \frac{M_0}{M_0 - r_0 t} = \upsilon_0 \ln \frac{M_0}{M}$. (Формула Ціолковського).

**6.5.** Записуємо рівняння Мещерського у проекції на вертикаль для моменту часу $t$: $(m-\mu t)a = \upsilon\mu - F$.

З іншого боку, за другим законом Ньютона: $F = (m-\mu t)g$.

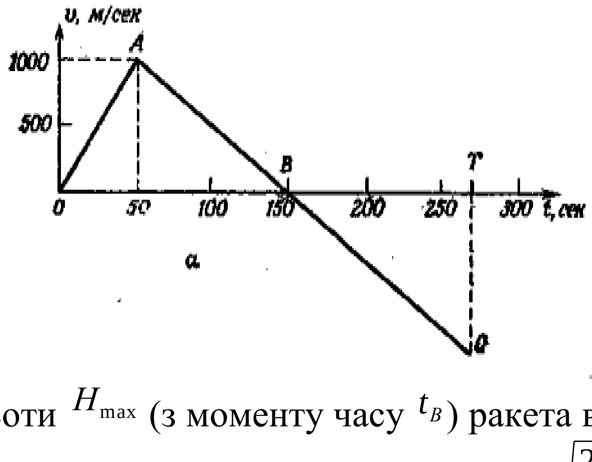
З цих двох рівнянь отримуємо вираз для прискорення ракети у момент часу $t$: $a = \frac{\upsilon\mu}{m-\mu t} - g$.

**6.6.** а) 58,8 кг/с; б) 176,4 кг/с.

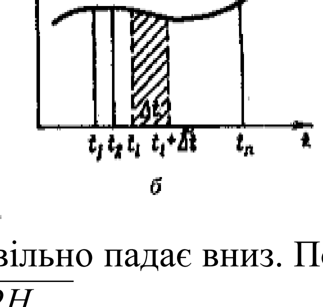
**6.8.** а) В проміжок часу від $t_0 = 0$ до $t_1 = 50$ с, тобто під час роботи двигуна, ракета рухалася з прискоренням $2g$. Отже, в цьому інтервалі часу швидкість ракети визначається за формулою $\upsilon = 2gt$. Графіком цієї залежності є пряма (відрізок $OA$; див. мал. *а*), тангенс кута нахилу якої до осі $t$ визначається як $\upsilon_A / t_A = 2g$. З моменту часу $t_1 = 50$ с і далі до падіння на землю ракета рухається з прискоренням – $g$, так що $\upsilon = 100g - g(t-50)$. Графік цієї функції – теж пряма лінія (правіше від точки $A$), але модуль тангенса кута її нахилу до осі $t$ дорівнює $g$, тобто у два рази менше, ніж для відрізку $OA$.

б) Оскільки вертикальна швидкість дорівнює нулю у найвищій точці траєкторії, то моментові часу $t_B$ відповідає максимальна висота польоту ракети. Таким чином, $H_{\max} = \frac{1}{2}2gt_1^2 + 100g(t_B - 50) - \frac{1}{2}g(t_B-50)^2 \approx 75000$ м.

Цей результат можна отримати й з графіка функції $\upsilon(t)$. Відомо, що пройдений тілом шлях дорівнює $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\sum \upsilon(t_i)\Delta t$. Добуток $\upsilon(t_2)\Delta t$ являє собою площу прямокутника з основою $\Delta t$ і висотою $\upsilon(t_i)$ (див. мал. *б*). Тому, якщо взяти границю суми площ в інтервалі часу від $t_1$ до $t_n$, то вийде площа фігури, обмежена віссю $t$, кривою $\upsilon(t)$ і двома вертикалями, проведеними в точках $t_1$ і $t_n$. У нашому випадку $H_{\max}$ – це площа трикутника $OAB$, тобто $H_{\max} = \frac{1}{2}\cdot 150\cdot 1000 = 75000$ м.



а



б

в) З висоти $H_{\max}$ (з моменту часу $t_B$) ракета вільно падає вниз. Поверхні Землі вона досягає через $t'$ секунд, причому $t' = \sqrt{\frac{2H_{\max}}{g}} = 122{,}5$ с.

Весь час руху ракети дорівнює $T = t_B + t' = 272{,}5$ с. Таким чином, графік швидкості закінчується в точці $C$, яка відповідає моментові $T$ падіння ракети на Землю.

**6.9.** а) За формулою Ціолковського знаходимо кінцеву швидкість першого ступеня ракети: $\upsilon_1 = 2{,}3u\lg(M_0 / M_1) = 2{,}3 \cdot 4 \cdot \lg(160/70) = 3{,}3$ км/с.

Маса другого ступеня $M_{02} = 160 - 90 - 30 = 40$ т, з яких $28$ тонн – це паливо. Зауважимо, що у формулі Ціолковського фігурує приріст швидкості. Оскільки початкова швидкість другого ступеня – це кінцева швидкість першого ступеня, то формула Ціолковського для другого ступеня ракети запишеться так: $\dfrac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{u} = 2{,}3\lg\dfrac{M_{02}}{M_2}$, або $\upsilon_2 = \upsilon_1 + 2{,}3 \cdot 4 \cdot \lg(40/12) = 8{,}1$ км/с.

б) Якби ракета була одноступінчаста і в неї вигоріло б $90 + 28 = 118$ т палива, то кінцева маса ракети була б рівна $160 - 118 = 42$ т. Скориставшись формулою Ціолковського, ми отримали б наступне значення кінцевої швидкості: $\upsilon = 2{,}3 \cdot 4 \cdot \lg(160/42) = 5{,}3$ км/с.

Як видно, двохступінчаста ракета ефективніша – вона дозволяє надати за тієї ж маси палива значно більшу швидкість космічному кораблеві.

**6.11.** Під час старту ракети з прискоренням годинник буде йти швидше в $\sqrt{1 + a/g}$ разів, ніж за звичайних умов. Після вимкнення двигуна годинник зупиниться. Отже, він покаже час рівний $T_1 = T\sqrt{1 + a/g}$ .

**6.12.** Згідно з формулою Ціолковського, узагальненою на випадок релятивістських швидкостей $m_0 / m = \left[(1+\beta)/(1-\beta)\right]^{c/2u}$, з урахуванням даних задачі, отримуємо: $m_0 / m = 5 \cdot 10^{3327}$.

Для порівняння відзначимо, що маса Галактики $\sim 3 \cdot 10^{44}$ г, Метагалактики $\sim 10^{56}$ г. Таким чином, навіть маса Метагалактики неймовірно мала порівняно з масою такого космічного корабля. Цей приклад демонструє абсолютну непридатність ракет на хімічному паливі в якості зорельотів.

**6.13.** Якби не було притягання Місяця, то задача звелася б до знаходження найвигіднішого відношення $m_2 / m_1$ для досягнення заданої швидкості ракети. Знехтуємо дією сили тяжіння і будемо вважати, що ракета рухається в просторі, де тяжіння відсутнє. Покладемо за одиницю маси повну масу ракети в момент старту. Тоді $m_1 + m_2 + m = 1$. (1)

Після вигорання палива у першому ступені маса системи зменшиться на $\alpha_1 m_1$. Якщо при цьому буде досягнута швидкість $\upsilon_1$, то за співвідношенням Ціолковського $e^{\upsilon_1/u} = \dfrac{1}{(1-\alpha_1)m_1 + m_2 + m}$.

Маса $(1-\alpha_1)m_1$ відділяється, і вмикається двигун другого ступеня. Після вигорання палива у другому ступені швидкість ракети зростає ще на величину $\upsilon_2$, причому $e^{\upsilon_2/u}=\dfrac{m_2+m}{(1-\alpha_2)m_2+m}$.

У достовірності записаного виразу можна переконатися, якщо перейти до системи відліку, в якій, у момент відділення першого ступеня, ракету можна вважати нерухомою. Повна досягнута ракетою швидкість буде знайдена шляхом перемноження двох останніх виразів з послідуючим логарифмуванням. Виключивши ще при цьому масу $m_2$ за допомогою співвідношення (1), отримаємо: $\dfrac{\upsilon}{u}=\ln(1-m_1)-\ln(1-\alpha_1 m_1)-\ln\left[(1-\alpha_2)(1-m_1)+\alpha_2 m\right]$.

Тут $m$ і $u$ відіграють роль постійних параметрів, а $m_1$ – аргументу, від якого залежить швидкість $\upsilon$. Диференціюючи по $m_1$ і прирівнявши похідну до нуля, отримаємо умову максимуму:

$$\frac{1}{m_1-1}+\frac{1}{\beta-m_1}+\frac{1}{\gamma-m_1}=0, \qquad (2)$$

де введено такі позначення: $\beta=\dfrac{1}{\alpha_1}$; $\gamma=1+\dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2}m$.

Умова (2) приводить до квадратного рівняння відносно $m_1$, розв’язавши яке, знайдемо: $m_1=1-\sqrt{1+(\beta\gamma-\beta-\gamma)}$.

Перед коренем беремо знак мінус, оскільки за смислом задачі $0<m_1<1$. За допомогою (1) визначаємо масу $m_2$, а потім і шукане відношення $m_2/m_1$. Повертаючись при цьому до попередніх параметрів $\alpha_1$ і $\alpha_2$, отримуємо:

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\dfrac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}}-\sqrt{m}}{1-\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\dfrac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}m}}\cdot\sqrt{m}. \qquad (3)$$

Розв’язок цього відношення має фізичний зміст за виконанням умови

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}m<1. \qquad (4)$$

За реальних умов, коли $m<<1$, а параметри $\alpha_1$ і $\alpha_2$ відрізняються не набагато, то умова (4) виконується. За умови ж $\alpha_1=\alpha_2$ отримується проста формула

$$m_2/m_1=\sqrt{m}. \qquad (5)$$

**6.14.** Спочатку обидва ступені ракети рухалися як одне ціле ($\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$) і їх загальна кількість руху дорівнювала $(m_1+m_2)\upsilon$. Після відділення кожен ступінь почав рухатися самостійно з швидкостями $\upsilon_1'$ і $\upsilon_2'$, а їх загальна кількість руху стала рівною $m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2'$. За законом збереження кількості руху

$(m_1+m_2)\upsilon = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$, звідки $\upsilon_1' = \dfrac{(m_1+m_2)\upsilon - m_2\upsilon_2'}{m_1} = 161$ м/с.

**6.15.** $\upsilon_p = 4$ км/с.

**6.16.** У системі відліку, зв'язаній з ракетою, $\Delta p = 2m\upsilon\sin\alpha$, $\Delta p_x = \Delta p\sin\alpha = 2m\upsilon\sin^2\alpha$, де $x$ – вісь ракети. Маса пилинок, які ударяються об ракету в одиницю часу, $\Delta m/\Delta t = \rho\upsilon S$. Отже $F_{тяги} = 2\rho\upsilon^2 S\sin^2\alpha$.

**6.17.** Число пилинок, які стикаються з ракетою в одиницю часу, пропорційне до швидкості ракети $\upsilon$; імпульс, який передає кожна пилинка ракеті, також пропорційний $\upsilon$. Тому $F_{тяги} = F_{опору} \propto \upsilon\cdot\upsilon = \upsilon^2$.

Отже, щоб $\upsilon'/\upsilon = 2$, необхідно, щоб $F'_{тяги}/F_{тяги} = 4$.

**6.8.** Вказівка. Спочатку необхідно вирахувати колову швидкість $\upsilon_{кл}$ і параболічну швидкість $\upsilon_{пб}$ ракети на вказаній в умові задачі висоті. Потім порівняти швидкість $\upsilon$ з $\upsilon_{кл}$ і $\upsilon_{пб}$. Якщо виявиться, що $\upsilon = \upsilon_{кл}$, то ракета рухається по коловій орбіті, якщо $\upsilon_{кл} < \upsilon < \upsilon_{пб}$, то ракета рухається по еліпсу; якщо $\upsilon_{кл} = \upsilon_{пб}$, то ракета рухається по параболі; якщо $\upsilon > \upsilon_{пб}$, то траєкторія ракети – гіпербола. У цьому випадку ракета рухається саме по гіперболі.

**6.19.** $t = 255$ діб.

**6.20.** $h = R_З$.

**6.21.** $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - gR} = 6{,}12$ км/с.

**6.22.** $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gR} = 10$ км/с.

**6.23.** В $1{,}25$ рази.

**6.24.** Це відбувається тому, що період обертання ракети-носія навколо Землі повинен бути меншим від періоду обертання супутника. Внаслідок цього ракета-носій буде знаходитися ближче до Землі, ніж супутник.

**6.25.** $\upsilon_1 = \sqrt{GM/R}$, де $M$ – маса Землі. Врахувавши, що $GM/R^2 = g$, отримуємо $\upsilon_1 = \sqrt{gR} = 7{,}9\cdot 10^3$ м/с.

**6.26.** $s = 2{,}18$ м.

**6.27.** $\mu = m(g+a)/\upsilon = 24{,}5$ кг/с.

**6.28.** $a = \dfrac{F}{M+m} - g = 73{,}5$ м/с$^2$; $T = \dfrac{3}{4}\dfrac{m}{M+m}F = 625$ Н.

**6.29.** Запишемо для третього ступеня ракети рівняння закону збереження імпульсу в скалярній формі відносно осі $X$, яка співпадає з напрямом руху ракети по орбіті:

$$(m_1+m_2)\upsilon = m_1u_1 + m_2u_2, \qquad (1)$$

де $u_1$ – швидкість ракети-носія відносно Землі після її відділення від конуса; $u_2$ – швидкість конуса відносно Землі після його відділення від ракети.

Оскільки $u_2 - u_1 = \upsilon_0$, звідки $u_1 = u_2 - \upsilon_0$, то рівняння (1) матиме вигляд: $(m_1 + m_2)\upsilon = m_1(u_2 - \upsilon_0) + m_2 u_2$, звідки $u_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)\upsilon + m_1\upsilon_0}{m_1 + m_2}$, або $u_2 = \upsilon + \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0$; $u_2 \approx 8\cdot 10^3$ м/с; $u_1 = 8\cdot 10^3 - 5{,}1 \approx 7995$ м/с.

**6.30.** $h = \dfrac{\upsilon t}{2}\ln\dfrac{M}{M - \mu t} - \dfrac{gt^2}{2} = 64$ км.

**6.31.** Наведене значення другої космічної швидкості отримано за умови запуску ракети із земної поверхні при відсутності атмосфери. За реальних умов, тобто при врахуванні останнього фактору, ця швидкість буде дещо більшою.

**6.32.** Годинник з математичним маятником («ходики») у ракеті, яка рухається вгору з прискоренням, йтиме швидше, ніж у нерухомій. Якщо $T_0$ – період коливань математичного маятника в нерухомій ракеті, а $T$ – у рухомій, то $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + a}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{11g}}$.

Звідси $\dfrac{T_0}{T} = \sqrt{11}$. (1)

Справжній час $t_0$, за який ракета пройшла перші $50$км, знайдемо за відомою формулою: $t_0 = \sqrt{\dfrac{2h}{a}} \approx 32$ с. (2)

«Ходики» в ракеті за той самий час $t_0$ зроблять в $\sqrt{11}$ раз більше коливань, ніж «нерухомий» годинник. Тому час $t$, показаний ними на момент вимкнення двигуна, буде $t = t_0\sqrt{11} \approx 106$ с. (3)

Після вимкнення двигуна ракета почне рухатись лише під дією сили тяжіння з прискоренням $g$. Усі процеси в ракеті відбуватимуться так само, як і при вільному падінні (настане «стан невагомості»). Тому годинник з математичним маятником зупиниться, і його покази в подальшому для будь-якої точки траєкторії визначатимуться формулою (3). Щодо пружинного годинника, то його хід не залежить від характеру руху ракети; тому у верхній частині траєкторії він покаже справжній час, що дорівнює $t_0 + t_1$, де $t_0$ визначається (2), а $t_1$ – час, що минув з моменту вимкнення двигуна до того моменту коли ракета досягне найвищої точки траєкторії. Оскільки швидкість ракети в момент вимкнення двигуна була $\upsilon = \sqrt{2ah} \approx 3130$ м/с, то, як легко помітити, $t_1 = \dfrac{\upsilon}{g} \approx 320$ с, звідси остаточно $t_0 + t_1 \approx 352$ с.

**6.33.** Імпульс ракети-носія разом з головною частиною $7m\upsilon$. Після відокремлення головної частини імпульс ракети-носія став $6m\dfrac{\upsilon}{2} = 3m\upsilon$, а головної частини $m\upsilon_1$, де $\upsilon_1$ – швидкість головної частини ракети. За законом збереження імпульсу $7m\upsilon = 3m\upsilon + m\upsilon_1$, звідки $\upsilon_1 = 4\upsilon$.

**6.34.** Після викидання першої порції газів $(M-m)\upsilon_1 + m\upsilon = 0$, звідки $\upsilon_1 = -\dfrac{m}{M-m}\upsilon$. Після викидання другої порції $(M-m)\upsilon_1 = m\upsilon + (M-2m)\upsilon_2$, звідки $\upsilon_2 = -\dfrac{2m}{M-2m}\upsilon$. Після викидання третьої порції $(M-2m)\upsilon_2 = m\upsilon + (M-3m)\upsilon_3$, звідки $\upsilon_3 = -\dfrac{3m}{M-3m}\upsilon$. Оскільки $M >> 3m$, то $\upsilon_3 = -\dfrac{3m}{M}\upsilon \approx 2$ м/с.

**6.35.** Необхідно визначити, які б швидкості на цій висоті мала ракета, якби вона рухалася по коловій орбіті ($\upsilon_{кл}$), по параболічній ($\upsilon_{пр}$). Порівняти $\upsilon$ з $\upsilon_{кл}$ і $\upsilon_{пр}$:

– якщо $\upsilon = \upsilon_{кл}$, то ракета рухається по колу;

– якщо $\upsilon_{кл} < \upsilon < \upsilon_{пр}$, то ракета рухається по еліпсу;

– якщо $\upsilon_{кл} = \upsilon_{пр}$, то ракета рухається по параболі;

– якщо $\upsilon > \upsilon_{пр}$, то ракета рухається по гіперболі.

Ракета рухається по гіперболі.

**6.37.** $t = 65$ діб.

**6.38.** а) $10{,}2$ м/с$^2$; б) ні.

**6.39.** Оскільки ракета нерухома, то вся робота двигуна затрачається на надання кінетичної енергії газам, що викидаються. Нехай за час $t$ двигун виконує роботу $A$ і викидає масу газу $m$. За означенням, $N = \dfrac{A}{t}$. Робота $A = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2$. Оскільки ракета висить нерухомо, то сила, що діє з боку газів на ракету, дорівнює силі тяжіння ракети. Імпульс сили, що діє з боку газів на ракету, дорівнює зміні імпульсу викинутих газів, тобто $mgt = m\upsilon$. Тоді $N = \dfrac{m\upsilon^2}{2t} = \dfrac{mgt\upsilon}{2t} = \dfrac{1}{2}mg\upsilon$.

**6.40.** Рівняння руху ракети $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = -u\dfrac{dm}{dt} - mg$ перепишемо у вигляді $m\dfrac{d}{dt}(\upsilon + gt) = -u\dfrac{dm}{dt}$ або $\dfrac{d(\upsilon + gt)}{dm} = -\dfrac{u}{m}$.

Це дає $\dfrac{m_0}{m} = e^{(\upsilon+gt)/u}$, $\upsilon = u\ln\dfrac{m_0}{m} - gt$. Величина $\mu$, яка дорівнює $\mu = -dm/gt$, визначається з умови, що для нерухомої ракети $d\upsilon/dt = 0$. Отже $\mu = -\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{m_0 g}{u}e^{-gt/M}$.

**6.41.** $$ККД = \frac{K}{Q} = \frac{\upsilon^2}{2q(e^{\upsilon/u} - 1)} \approx 13\%$$.

**6.42.** Приріст швидкості ракети $\upsilon$ пов'язаний із зміною її маси $m$ співвідношенням $md\upsilon = -udm$, причому $dm_{газ} = -dm$, де $m_{газ}$ – маса викинутих газів. Приріст кінетичної енергії газів:

$$dK_{газ} = \frac{1}{2} dm_{газ}\upsilon_{газ}^2 = \frac{m\upsilon_{газ}^2}{2u} d\upsilon. \quad (1)$$

Підставивши в (1) $\upsilon_{газ} = \upsilon - u$ і скориставшись формулою Ціолковського $m = m_0 e^{-\upsilon/u}$, отримаємо $$dK_{газ} = -\frac{m_0}{2u}(u-\upsilon)^2 e^{-\upsilon/u} d\upsilon. \quad (2)$$

Увівши заміну $x = \upsilon_к / u$, після інтегрування (2) отримаємо:

$$K_{газ} = \frac{m_0 u^2}{2}(1 - e^{-x} - x^2 e^{-x}). \quad (3)$$

Кінетична енергія ракети

$$K_{рак} = \frac{1}{2} m\upsilon_к^2 = \frac{1}{2} m_0 u^2 x^2 e^{-x}. \quad (4)$$

У результаті отримуємо

$$\eta = \frac{K_{рак}}{K_{газ}} = \frac{x^2}{e^x - (1 + x^2)}. \quad (5).$$

При $x = 4$ $\eta = 45\%$.

**6.43.** Домовимося всі швидкості відносно Землі позначати малими буквами, а відносно Сонця – великими. Розглянемо рух ракети в два етапи. На першому етапі рух будемо розглядати в системі відліку, в якій Земля нерухома, цілком нехтуючи при цьому неоднорідністю поля сонячного тяжіння. У цьому наближенні сила гравітаційного притягання Сонця повністю компенсується силою інерції, зв'язаною з прискореним рухом центра Землі. Покладаючи, що маса Землі $M$ нескінченно велика порівняно з масою ракети $m$, запишемо рівняння енергії в такому вигляді: $\frac{m\upsilon^2}{2} - G\frac{mM}{r} = \frac{m\upsilon_\infty^2}{2}$, де $\upsilon_\infty$ – швидкість ракети в той момент, коли вона практично виходить із зони дії земного тяжіння. Увівши колову швидкість $\upsilon_к^2 = GM/r$, отримуємо $\upsilon_\infty^2 = \upsilon^2 - 2\upsilon_к^2$. Після того, як ракета вийшла із зони дії земного тяжіння, будемо відносити її рух до системи відліку, в якій нерухомим є Сонце. Швидкість ракети в цій системі векторно складається із швидкості $\vec{\upsilon}_\infty$ і швидкості колового руху Землі $\vec{V}_к$: $\vec{V} = \vec{V}_к + \vec{\upsilon}_\infty$. Підносячи до квадрату цю рівність, отримуємо: $V^2 = V_к^2 + \upsilon_\infty^2 + 2\vec{V}_к\vec{\upsilon}_\infty = V_к^2 + \upsilon_\infty^2 + 2V_к\upsilon_\infty\cos\theta$.

Щоб визначити третю космічну швидкість, треба в цьому співвідношенні покласти $V = V_п = \sqrt{2}V_к$, де $V_п$ – параболічна, а $V_к = 29{,}8$ км/с – колова швидкість руху ракети відносно Сонця. Це приводить до наступного рівняння $\upsilon_\infty^2 + 2V_к\upsilon_\infty\cos\theta - V_к^2 = 0$, розв'язком якого є $\upsilon_\infty = \left(\sqrt{1+\cos^2\theta} - \cos\theta\right)V_к$.

(Перед коренем взято лише додатній знак з тієї причини, що величина $\upsilon_\infty$ за своїм смислом є суттєво додатньою). Після чого отримуємо: $\upsilon^2 = \left(\sqrt{1+\cos^2\theta} - \cos\theta\right)^2 V_\kappa^2 + 2\upsilon_\kappa^2$.

Найменше значення третьої космічної швидкості отримується при $\theta = 0$ (ракета запущена в напрямі орбітального руху Землі). Найбільше – при $\theta = \pi$ (ракета запущена проти орбітального руху Землі):

$$\upsilon_{\min} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)V_\kappa^2 + 2\upsilon_\kappa^2} \approx 16{,}7 \text{ км/с};$$

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)V_\kappa^2 + 2\upsilon_\kappa^2} \approx 72{,}7 \text{ км/с}.$$

**6.44.** У момент часу $t_1$ ракета буде знаходитися на відстані $x_1 = Vt_1$ від початку координат $O$. Момент часу $t_2$ можна визначити двома еквівалентними способами:

1) Швидкість, з якою світловий сигнал наздоганяє ракету, дорівнює $c - V$. Тому $t_2 - t_1 = \dfrac{x_1}{c-V} = \dfrac{V}{c-V}t_1$, звідки $t_2 = \dfrac{1}{1-V/c}t_1$.

2) У момент часу $t_1$ відстань між ракетою і початком координат $O$ дорівнює $x_1$. Нехай світловий сигнал наздожене ракету в точці $x_2 = Vt_2$. Тоді $x_2 = x_1 + (V/c)x_2$, звідки $x_1 = (1 - V/c)x_2$. Але $x_1 = Vt_1$, а $x_2 = Vt_2$, тому знову отримується $t_2 = \dfrac{1}{1-V/c}t_1$.

Швидкість сигналу, який іде від ракети до точки $O$, дорівнює $c$, тому $t_3 - t_1 = x_1/c = (V/c)t_1$, звідки $t_3 = (1+V/c)t_1$.

У момент часу $t_2$ ракета знаходиться на відстані $x_2 = Vt_2$ від точки $O$, і відбитий сигнал прийде в точку $O$ в момент часу $t_4$, який дорівнює

$t_4 - t_2 = (V/c)t_2$, звідки $t_4 = \dfrac{1+V/c}{1-V/c}t_1$.

**6.45.** Сила тяжіння Місяця зменшує кінетичну енергію системи, але не впливає на умову максимуму, тому її можна не враховувати. Оберемо за одиницю маси повну масу ракети в момент старту. Тоді

$$m_1 + m_2 + m = 1. \qquad (1)$$

Після вигорання палива у першому ступені маса системи зменшується на $\alpha_1 m_1$. Якщо при цьому буде досягнута швидкість $\upsilon_1$, то за формулою Ціолковського $e^{\upsilon_1/u} = \dfrac{1}{(1-\alpha_1)m_1 + m_2 + m}$.

Маса $(1-\alpha_1)m_1$ відділяється, і включається двигун другого ступеня. Після вигорання палива у другому ступені швидкість ракети зростає ще на величину $\upsilon_2$, причому $e^{\upsilon_2/u} = \dfrac{m_2 + m}{(1-\alpha_2)m_2 + m}$.

У цьому можна переконатися, якщо перейти до системи відліку, в якій ракета у момент відділення першого ступеня перебуває в стані спокою. Повна досягнута швидкість визначиться шляхом перемноження двох попередніх співвідношень з наступним логарифмуванням. Виключивши ще пари цьому масу $m_2$ за допомогою співвідношення (1), отримаємо:

$$\frac{\upsilon}{u} = \ln(1-m_1) - \ln(1-\alpha_1 m_1) - \ln\left[(1-\alpha_2)(1-m_1) + \alpha_2 m\right].$$

Тут $m$ і $u$ відіграють роль постійних параметрів, а $m_1$ – аргумента, від якого залежить швидкість $\upsilon$. Беручи похідну по $m_1$ і прирівнюючи її до нуля, отримуємо умову максимуму:

$$\frac{1}{m_1 - 1} + \frac{1}{\beta - m_1} + \frac{1}{\gamma - m_1} = 0, \qquad (2)$$

де $\beta = \dfrac{1}{\alpha_1}$; $\gamma = 1 + \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2} m$.

Умова (2) приводить до квадратного рівняння відносно $m_1$, розв’язавши яке, знайдемо

$$m_1 = 1 - \sqrt{1 + (\beta\gamma - \beta - \gamma)}.$$

Перед коренем взято мінус, оскільки за змістом задачі $0 < m_1 < 1$. Із (1) знаходимо $m_2$, а потім шукане відношення $m_2 / m_1$. Повертаючись при цьому до попередніх параметрів $\alpha_1$ і $\alpha_2$, отримаємо:

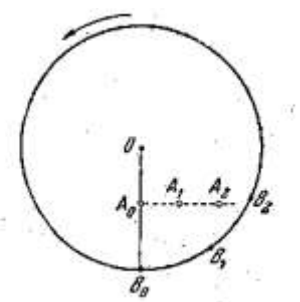
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_2)}} - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{\dfrac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_2)} m}} \cdot \sqrt{m}. \qquad (3)$$

Розв’язок має смисл за виконання умови $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\dfrac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} m < 1$.

В реальних умовах, коли $m << 1$, а параметри $\alpha_1$ і $\alpha_2$ відрізняються не дуже сильно, ця умова виконується. При $\alpha_1 = \alpha_2$ отримується проста формула

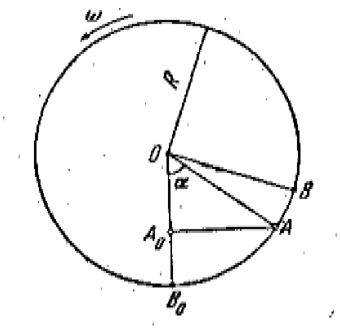
$$\frac{m_2}{m_1} = m. \qquad (4)$$

**6.46.** Оскільки космонавт і м’яч беруть участь в обертальному русі космічного корабля, то в той момент, коли м’яч випускається з рук, він має швидкість, спрямовану перпендикулярно до $OA_0$ (див. мал.). Тому в подальшому він буде рухатися прямолінійно, проходячи через положення $A_0$, $A_1$, $A_2$, У той же час точка $B_0$ буде рухатися по колу, проходячи через положення $B_0$, $B_1$, $B_2$, … Тому м’яч буде наближатися до точки $B_0$, тобто



буде «падати».

**6.47.** Оскільки м'яч буде рухатися перпендикулярно до $OA_0$ (див. розв'язок попередньої задачі), то в деякий момент часу від досягне точки $A$(див. мал. *а*). Точка ж $B_0$ встигне за цей час переміститися в положення $B$. Обрахуємо відстань $AB$. Дуга $B_0B$ дорівнює $\overset{\cup}{B_0B} = \omega Rt$, де $\omega$ – кутова швидкість корабля, $t$ – час, за який м'яч пройде шлях $A_0A$. Оскільки він дорівнює $t = \dfrac{A_0A}{\upsilon} = \dfrac{A_0A}{\omega \cdot OA_0}$, то




**а)**

$$\overset{\cup}{B_0B} = \omega R\frac{A_0A}{\omega \cdot OA_0} = R\frac{A_0A}{OA_0} = Rtg\alpha \, . \qquad (1)$$

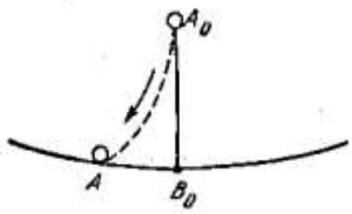
Оскільки $\overset{\cup}{B_0A} = R\alpha$, (2)

то згідно з (1) і (2) $\overset{\cup}{AB} = \overset{\cup}{B_0B} - \overset{\cup}{B_0A} = R(tg\alpha - \alpha)$, (3)

де $\alpha$ визначається з рівності $\cos\alpha = \dfrac{R - A_0B_0}{R}$ . (4)

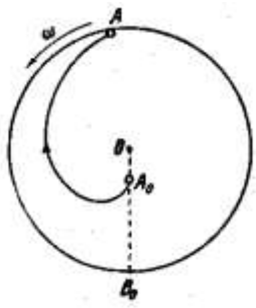
Підставивши у (3) і (4) числові дані, отримаємо: $\cos\alpha = \dfrac{10-2}{10} = 0{,}8$; $\alpha = 36^o52' = 0{,}643$; $\overset{\cup}{AB} = 10(tg36^o52' - 0{,}643) = 1{,}07$ м.

Отриманий результат показує, що падаючи «вниз», м'яч доволі сильно відхиляється вліво. Тому його траєкторія буде приблизно такою, як показано на мал. *б*.



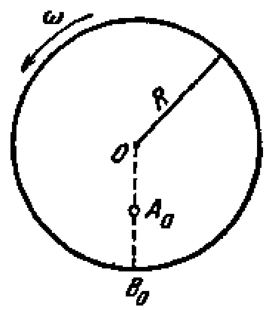

(Може виникнути питання: якщо в обертовому кораблі на м'яч діє відцентрова сила інерції, яка спрямована уздовж $A_0B_0$ (мал. *б*), то як спостерігач, який знаходиться в цьому кораблі, пояснить рух м'яча по траєкторії $A_0A$? Справа в тому, що в обертовій системі координат має місце не лише поле відцентрової сили інерції, але й поле так званої сили інерції Коріоліса. Ця сила діє лише на тіла, які мають деяку швидкість, вона пропорційна величині цієї сили і спрямована перпендикулярно до вектора цієї швидкості (мається на увазі швидкість відносно обертової системи координат). Оскільки швидкість м'яча спрямована приблизно уздовж $A_0B_0$, а сила Коріоліса перпендикулярна до швидкості м'яча, то м'яч буде зміщуватися у поперечному напрямі і упаде не в точці $B_0$, а в точці $A$).

**6.48.** Згідно з формулами (4) і (3), отриманими у попередній задачі, отримуємо: $\cos\alpha = \dfrac{10-7{,}8}{10} = 0{,}22$; $\alpha = 77^o18' = 1{,}35$; $\overset{\cup}{AB} = 10(tg77^o18' - 1{,}35) \approx 31$ м.



Отже, м’яч упаде не в точці $B_0$ (див. мал.), а на 31 метр лівіше від цієї точки. Ураховуючи, що коло з радіусом 10м має довжину біля 63метрів, приходимо до висновку, що точка падіння м’яча знаходиться не на «підлозі», а на «стелі». Приблизну траєкторію м’яча показано на малюнку.

**6.49.** Розглянемо рух м’яча в системі координат, у якій космічний корабель рухається лише поступально. Позначимо через $\upsilon$ початкову швидкість м’яча відносно корабля і через $\upsilon'$ – відносно розглядуваної системи координат. Тоді, уважаючи, що вектор $\upsilon$ перпендикулярний до $A_0B_0$ (див. мал.) і спрямований вліво, отримаємо $\upsilon' = \upsilon - \omega \cdot OA_0$, де $\omega$ – кутова швидкість корабля. Нехай тепер $\upsilon = \omega \cdot OA_0$. Тоді $\upsilon' = 0$, тобто м’яч не буде мати початкової швидкості у вибраній системі координат. Отже, у цій системі він весь час буде нерухомим, і тому спостерігачеві, який знаходиться в обертовому кораблі, буде видаватися, що м’яч рухається по колу з центром у точці $O$.



**6.50.** Нехай $I$ – момент інерції корабля з космонавтом, а $\omega$ – кутова швидкість цього корабля. Згідно із законом збереження моменту кількості руху $I\omega = const$.

Коли космонавт піднімається по драбині, то він наближається до осі обертання корабля, й тим самим зменшує момент інерції $I$. Внаслідок цього зростає $\omega$. Оскільки ж кінетична енергія корабля дорівнює $\frac{I\omega^2}{2} = I\omega\frac{\omega}{2}$, то вона при цьому теж збільшується. Отже, робота, яку виконує космонавт, піднімаючись по драбині, витрачається на збільшення кінетичної енергії обертового руху космічного корабля.

**6.51.** $\frac{m_0 - m}{m_0} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{\sqrt{gR}}{u} \approx 0{,}17$.

**6.52.** Посередині між центром Землі і початковим положенням корабля.

**6.53.** Швидкість необхідно збільшити у $\sqrt{2}$ разів.

**6.54.** Оскільки енергія корабля залежить лише від довжини $2a$ великої осі його орбіти, то перехід на колову орбіту відбудеться на відстані $a$, тобто в точці перетину еліпса з його малою віссю. Напрям швидкості корабля необхідно повернути на такий кут, щоб він виявився перпендикулярним до лінії, яка з’єднує корабель з центром Землі.

**6.55.** Всі тіла в кораблі, знаходячись у тому ж полі тяжіння, що й корабель, зазнають такого ж, як і корабель, прискорення, тому тіло, підвішене до нерухомих відносно корабля пружинних терезів, не викликає їх розтягу. Масу тіла можна виміряти, наприклад, так. З допомогою пружини можна надати тілу деякого прискорення відносно корабля, і по відношенню сили (відліченої за розтягом пружини) до прискорення знайти масу тіла ($m = F/a$). При цьому мається на увазі, що маса корабля набагато більша від вимірюваної маси.

**6.56.** Терези покажуть «вагу» $P = ma$. Підвішені в кораблі пружинні терези в цьому випадку будуть розтягуватися у напрямі, протилежному до напряму прискорення корабля, викликаного опором атмосфери планети.

**6.57.** Зміною потенціальної енергії корабля під час короткочасної роботи двигуна можна знехтувати. Тому $\Delta\varepsilon = \Delta(\upsilon^2/2) = \upsilon\Delta\upsilon$. З іншого боку, оскільки $2a = -GM/\varepsilon$, $\Delta\varepsilon = \left(GM/2a^2\right)\Delta a = \dfrac{1}{2}g'\Delta a$, де $g'$ – прискорення вільного падіння на Місяці на висоті $112$км. Прирівнявши обидва вирази для $\Delta\varepsilon$, після деяких перетворень, отримаємо: $\Delta\upsilon = \dfrac{R}{2a}\sqrt{\dfrac{g}{a}}\Delta a = -42$ м/с.

**6.58.** Так, побачить; якщо знехтувати часом реакції ока, миттєво!

**6.59.** Якщо на кораблі відлічений проміжок власного часу $\Delta t'$, то за земним годинником буде відлічено проміжок часу $\Delta t = A\Delta t'$, де $A = \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \dfrac{25}{7}$, тому $s = V\Delta t = \dfrac{24}{25}c \cdot \dfrac{25}{7}\Delta t' = 24c\tau$, де $\Delta t' = 7\tau$; $\tau = 1$с.

**6.60.** Звернемося за аналогією до електростатики. Відомо, що потенціальна енергія взаємодіючих двох точкових зарядів, які знаходяться на відстані $r$ один від одного, описується формулою

$$\Pi_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r},$$

де різниця від виразу для кулонівської сили

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

лише в показникові степеня $r$. Використовуючи аналогію між законом Кулона і законом всесвітнього тяжіння $F = Gm_1 m_2/r^2$, запишемо вираз для потенціальної енергії двох точкових мас, які притягуються (тому тут з'являється знак «–»):

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Навколо тіла кулястої форми поле сил тяжіння таке, якби вся його маса була зосереджена в центрі кулі. Тому для тіла, яке знаходиться на поверхні кулі або дуже близько до неї, в якості $r$ необхідно брати радіус кулі. Для земної кулі біля її поверхні матимемо

$$\Pi_0 = -G\frac{mM_З}{R_З}.$$

У той же час сила тяжіння на поверхні Землі $mg = GmM_З/R_З^2$; звідси $GM_З = gR_З^2$.

Підставивши отриманий для $GM_З$ вираз у формулу для $П_0$, отримуємо $П_0 = -mgR_З$.

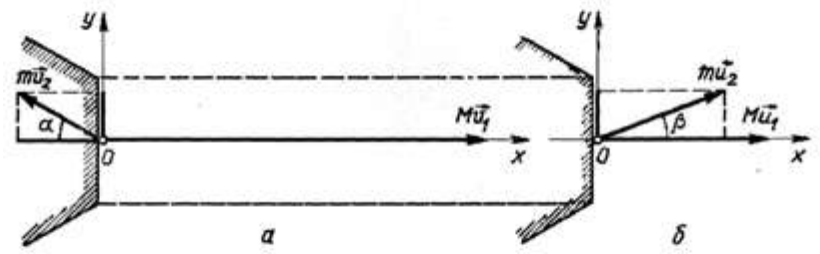
Якщо мова йде про Місяць, то замість $R_З$ необхідно взяти радіус Місяця $R_M$ і прискорення вільного падіння на Місяці $g_M = g/6$. Таким чином, для Місяця отримуємо $П_0 = -mg_M R_M = -mgR_M/6$.

За умовою задачі в момент початку руху корабля до Місяця його кінетична енергія дорівнює нулеві. Внаслідок великої відстані $R$ до центру Місяця, нулеві дорівнює і його потенціальна енергія. У момент включення двигуна кінетична енергія корабля дорівнює $m\upsilon^2/2$, а потенціальна дорівнює $-mgR_M/6$. Закон збереження енергії дає $0 = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{mgR_M}{6}$, звідки $\upsilon^2 = \frac{gR_M}{3}$.

Враховуючи, що $a = 5g$ (впливом добавки до прискорення, рівної – $g/6$, можна знехтувати), із кінематичних співвідношень для рівноприскореного руху з початковою швидкістю $\upsilon$ отримуємо $\upsilon^2 = 2ah = 10gh$. Прирівнюючи отримані вирази для $\upsilon^2$, маємо $gR_M/6 = 10gh$, звідки $h = \frac{R_M}{30} \approx 60$ км.

**6.65.** $\upsilon = R\sqrt{g/(R+h)}$. Це означає, що космонавт рухається з такою ж швидкістю, що й корабель, тобто він перебуває в стані невагомості незалежно від значення своєї маси $m$.

**6.68.** $u_1 = \frac{(M-m)\upsilon_1 - 2m\upsilon_2\cos\alpha}{M+m}$.




**6.69.** Повна механічна енергія корабля в перигелії (тобто у вершині параболи): $E = m\upsilon_0^2/2 - GmM/r_0$. За 2-им законом Ньютона $GmM/r_0^2 = m\upsilon_0^2/R_0$, де $R_0$ – радіус кривизни в цій точці. Звідси $GmM/r_0 = m\upsilon_0^2 r_0/R_0$, і повна енергія $E = m\upsilon_0^2(1/2 - r_0/R_0)$. Але $r_0 = f = p/2$, а $R_0 = p$, де $p$ – параметр параболи.

Підставивши всі значення величин у формулу для $E$, переконаємося, що вона дорівнює нулю. Згідно із законом збереження енергії вона буде рівною нулю й у будь-якій точці траєкторії.

**6.70.** $t = \left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{gR}}{u}\right)\right]\frac{I_o}{\mu R^2}$.

**6.71.** $667$ пН.

**6.72.** $R=-Q_m\upsilon=-160$ Н; $a=-\dfrac{Q_m\upsilon}{m}=-4{,}57$ м/с$^2$.

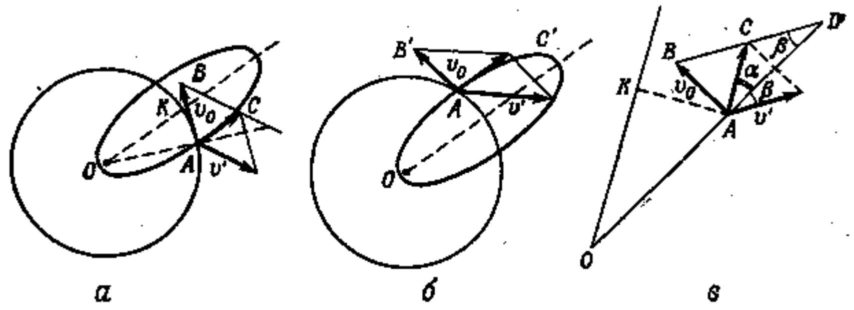
**6.73.** $2{,}25\cdot10^7$ Н.

**6.74.** $c-V\approx\dfrac{m_0^2c^2}{2\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)M^2\upsilon^2}c=8\cdot10^{-28}\cdot3\cdot10^{11}$(м/с) (у формулі $c$ – швидкість світла); $E_к/E_З\approx2\left(\sqrt{2}-1\right)c/\upsilon\approx8{,}3\cdot10^3$.

**6.75.** Період обертання планети навколо Сонця залежить лише від розміру великої півосі еліпса орбіти. За умовою задачі періоди обертання Землі і космічного корабля співпадають. Це означає, що великі півосі орбіт Землі й корабля теж рівні. Величиною великої півосі повністю визначається і друга характеристика планети – повна енергія на одиницю маси. Тому, коли Земля і космічний корабель знаходяться на однакових відстанях від Сонця (а, отже, мають по відношенню до Сонця одну і ту ж потенціальну енергію на одиницю маси), їх швидкості відносно Сонця однакові за величиною.

Звертаємо увагу, що при цих міркуваннях ми не врахували притягання корабля Землею. Для початку будемо вважати, що корабель бере старт не з поверхні Землі, а з деякої периферійної точки «навколоземного простору», де потенціал тяжіння Сонця починає перевищувати потенціал тяжіння Землі. Оцінимо, наскільки така точка віддалена від Землі. Потенціал Сонця ($-GM_С/R_1$) і потенціал Землі ($-GM_З/R_З$) будуть рівними, якщо $R_З=R_1M_З/M_С$. Оскільки $M_З/M_С\approx2{,}5\cdot10^{-5}$, то якщо віддалитися від Землі, наприклад, на одну десятитисячну радіуса земної орбіти, то потенціал Сонця буде перевищувати потенціал Землі (а «з точки зору Сонця» Земля і корабель, як і раніше, будуть в одному і тому ж місці!).

Існує чотири варіанта запуску. Два з них показані на малюнках *а* і *б*, два інших – відрізняються від наведених напрямом руху корабля по орбіті. Розрахуємо варіант (*а*) (як більш економний).




Оскільки корабель у перигеї підходить близько до Сонця, то його швидкість при перетині земної орбіти (яку тут і надалі вважаємо коловою) практично паралельна до лінії, яка проходить через фокуси орбіти корабля. Визначимо кут $\alpha$ (див. мал. *в*). З прямокутного трикутника $OAK$ $\cos\alpha=(a-r_p)/a=0{,}99$ ($a$ – велика піввісь орбіти корабля, яка рівна радіусові орбіти Землі). Із трикутника $ABC$ знаходимо $BC=\upsilon'$ – швидкість запуску корабля з точки периферії навколоземного простору. Враховуючи, що $AB=AC=\upsilon_0$ ($\upsilon_0$ – орбітальна швидкість Землі), маємо:

$$\upsilon'^2 = 2\upsilon_0^2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] = 2\upsilon_0^2(1-\sin\alpha).$$

Врахувавши, що $\upsilon_0 = 30$ км/с, знаходимо $\upsilon' = 39{,}2$ км/с.

Кут $\beta$, під яким запущено корабель відносно лінії Земля-Сонце, визначимо з трикутника $ABD$ (відмітимо, що $\angle ABC = \beta + \alpha$): $\beta = \frac{90-\alpha}{2} = 41^o$.

Врахуємо тепер, що згідно з умовою задачі, корабель стартує з поверхні Землі. Тоді дійсна швидкість його запуску дорівнює: $\upsilon = \sqrt{\upsilon'^2 + \upsilon_1^2}$, де $\upsilon_1$ – друга космічна швидкість. Отже, $\upsilon \approx 42$ км/с.

**6.76.** Позначимо через $\upsilon$ швидкість космічного корабля відносно Сонця в момент припинення роботи двигунів, а через $\upsilon'$ – його швидкість «на виході». Потенціальна енергія корабля визначається притяганням Землі і Сонця. Коли корабель знаходиться біля Землі, його потенціальна енергія дорівнює

$$-\frac{GmM_З}{R_З} - \frac{GmM_С}{R_1},$$

де $m$, $M_З$ і $M_С$ – маси відповідно корабля, Землі і Сонця; $R_З$ – радіус Землі; $R_1$ – радіус земної орбіти, яку будемо вважати коловою.

Із закону збереження енергії слідує

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{GM_З}{R_З} + \frac{GM_С}{R_1} + \frac{\upsilon'^2}{2}.$$

Відмітимо, що $\frac{GM_З}{R_З} = \frac{1}{2}\upsilon_1^2$, де $\upsilon_1$ – друга космічна швидкість (див. попередню задачу), а з умови стаціонарності земної орбіти слідує, що $\upsilon_0^2 = \frac{GM_С}{R_1}$, де $\upsilon_0$ – орбітальна швидкість Землі.

Таким чином, $\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + 2\upsilon_0^2 + \upsilon'^2$, звідки $\upsilon = 47$ км/с. Швидкість корабля відносно Землі буде мінімальною, якщо він запущений у напрямі орбітального руху Землі. Тоді $\upsilon_{\min} = \upsilon - \upsilon_0 = 17$ км/с.

**6.77.** Зменшення кінетичної енергії корабля по мірі його віддалення від Землі відбувається за рахунок зростання його потенціальної енергії, тобто $\frac{\upsilon_0^2}{2} - \frac{\upsilon^2}{2} = \frac{GM}{R} - \frac{GM}{r}$, де $\upsilon_0$ і $\upsilon$ – швидкості корабля відповідно Землі ($R \approx 6500$ км) і на відстані $r \approx 10^6$ км.

Якби корабель покинув Землю з другою космічною швидкістю $\upsilon_1$, то на дуже великих відстанях від Землі він рухався б з дуже маленькою швидкістю, тобто $\frac{\upsilon_1^2}{2} = \frac{GM}{R}$.

Таким чином, $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - \upsilon_1^2 + 2\frac{GM}{r} = \upsilon_0^2 - \upsilon_1^2 + \upsilon_1^2 \frac{R}{r} \approx 23{,}8$ (км/с)$^2$. $\upsilon \approx 4{,}88$ км/с.

**6.78.** Швидкість запуску корабля відносно Землі буде максимальною, якщо корабель запускається по дотичній до орбіти Землі у напрямку, протилежному до напряму орбітального руху Землі. У цьому випадку $\upsilon_{\max} = \upsilon + \upsilon_0 = 47 + 30 = 77$ км/с.

**6.79.** Якщо впродовж розгону корабля витрата палива залишається сталою, то сталою є і реактивна сила тяги $F = -\mu u$. У той же час у міру вигорання палива маса ракети зменшується, отже прискорення ракети зростає. Внаслідок цього зростає і перевантаження космонавтів у кораблі, яке рівне $\frac{N}{P} = \frac{a+g}{g}$.

**6.80.** Друга космічна швидкість для Місяця $\upsilon = \sqrt{2GM_M / R_M} = 2{,}4$ км/с. Покладаючи швидкість витікання газів $4$ км/с, за формулою Ціолковського отримаємо: $M_{пал} = 0{,}83$ т. Для Землі друга космічна швидкість $11{,}2$ км/с і маса палива $M_{пал} = 15{,}6$ т.

**6.81.** Згідно співвідношення СТВ маємо:

1) $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 7{,}1$ року. 2) $l = l_0\sqrt{1-\beta^2} \approx 0{,}14 l_0$.

3) $\rho = \frac{m}{lS}$; $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, отже $\rho = \frac{m_0}{l_0 S(1-\beta^2)}$, або $\rho = \frac{\rho_0}{1-\beta^2} = 50{,}2\rho_0$.

**6.82.** $T = 2\pi\sqrt{l/a}$, звідки $a = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

**6.83.** Позначимо початкову швидкість ракети $\upsilon_0$, а її швидкість у нескінченності через $\upsilon_\infty$. Тоді можна записати

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} - \frac{m\upsilon_\infty^2}{2} = \Pi_\infty, \qquad (1)$$

де $\Pi_\infty$ – потенціальна енергія ракети у нескінченності. $\Pi_\infty$ знайдемо, поклавши в (1) $\upsilon_0 = \upsilon_{II}$, де $\upsilon_{II}$ – друга космічна швидкість. Оскільки в цьому випадку $\upsilon_\infty$ перетворюється в нуль, то отримаємо значення потенціальної енергії ракети у нескінченності: $\frac{m\upsilon_{II}^2}{2} = \Pi_\infty$. (2)

Підставивши (2) в (1), отримаємо $\frac{m\upsilon_0^2}{2} - \frac{m\upsilon_\infty^2}{2} = \frac{m\upsilon_{II}^2}{2}$, звідки $\upsilon_\infty = \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon_{II}^2}$. (3)

Підставивши в (3) $\upsilon_0 = 12{,}2$ км/с, $\upsilon_{II} = 11{,}2$ км/с, отримаємо $\upsilon_\infty = \sqrt{(12{,}2)^2 - (11{,}2)^2} = 4{,}84$ км/с.

**6.84.** $\tau = \frac{1}{2}\frac{\upsilon_0^2}{c^2}\tau_0 = 0{,}57$ с.

**6.85.** $F = 667$ пН.

**6.86.** $R = -\mu\upsilon = -160$ Н; $a = -\mu\upsilon/m = -4{,}57$ см/с$^2$.

**6.87.** Період коливань маятника обернено пропорційний кореню квадратному з прискорення сили земного тяжіння. Отже, прискорення в кабіні корабля в чотири рази менше, ніж на Землі:

$$g_1 = \frac{1}{4}g. \qquad (1)$$

Але $g_1$ є доцентровим прискоренням, тому

$$g_1 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2, \quad r_2 + r_1 = L, \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Отже, $r_2 = \frac{1}{3}L$. (3)

З (1) – (3) дістаємо $T = 4\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}$.

**6.88.** Відстань $l$, яку пройде космічний корабель у системі відліку, пов’язаній із Землею ($K$–система), визначається за формулою

$$l = \upsilon\Delta t, \qquad (1)$$

де $\Delta t$ – інтервал часу, відлічений у $K$–системі відліку.

Цей інтервал часу зв’язаний з інтервалом часу, відліченим у $K'$–системі, співвідношенням

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}. \qquad (2)$$

Підставивши (2) в (1), отримуємо $l = \frac{\upsilon\Delta t_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = 619$ Мм.

**6.89.** Зміну сили тяги двигуна можна знайти, скориставшись другим законом Ньютона, записаним так:

$$\Delta(m\upsilon) = F\Delta t, \qquad (1)$$

де $\Delta t$ – деякий проміжок часу, а $\Delta(m\upsilon)$ – зміна кількості руху мікрометеорів, які заткнулися з кораблем за час $\Delta t$. Оскільки, за умовою, швидкість корабля стала, то з (1)

$$F = \upsilon\frac{\Delta m}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Тут $\Delta m$ – маса мікрометеорів, які зіткнулися з кораблем за час $\Delta t$. Якщо $\rho$ – щільність мікрометеорів (тобто маса в одиниці об’єму), то, очевидно, що

$$\Delta m = \upsilon S\rho\Delta t. \qquad (3)$$

З (2) і (3) остаточно дістаємо $F = \upsilon^2 S\rho \approx 98\cdot10^3$ Н.

**6.90.** $F = -\dfrac{\upsilon_0 m_0}{2t_0 \ln 2} \approx -6{,}2\cdot10^4$ Н.

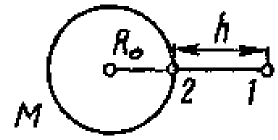
**6.91.** $\approx 7{,}8\cdot10^3$ м/с.

**6.92.** $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2GM_C R_З}{R_M(R_З + R_M)}}$.

**6.93.** $\Delta\upsilon = \sqrt{gR}(\sqrt{2}-1) = 3{,}27$ км/с, де $R$ – радіус Землі.

**6.94.** $\Delta\upsilon = \sqrt{GM/R}(1-\sqrt{2}) = -0{,}70$ км/с, де $M$ і $R$ – маса і радіус Місяця.

**6.95.** Після припинення роботи гальмівної установки на ракету діє лише гравітаційне поле Землі. Як відомо, це поле потенціальне: повна енергія тіла, яке рухається в цьому полі, дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій і з часом не змінюється. Виходячи із закону збереження енергії у застосуванні до системи ракета-Земля, випливає, що падаюча ракета набуває кінетичної енергії за рахунок зменшення потенціальної енергії у полі тяжіння Землі,тобто




$$K = -\Delta П, \qquad (1)$$

де $K$ – кінетична енергія ракети біля поверхні Землі, $\Delta П = П_{П2} - П_{П1}$ – зміна потенціальної енергії ракети за час її падіння з точки 1 у точку 2 (див. мал.). Підставивши у формулу (1) відповідні значення кінетичної і потенціальних енергій у точках 1 і 2, отримаємо:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \left(-G\frac{Mm}{R+h}\right) - \left(-G\frac{Mm}{R}\right), \qquad (2)$$

де $M$ і $R$ – маса і радіус Землі, $m$ – маса ракети. З (2) знаходимо вираз для $\upsilon$:

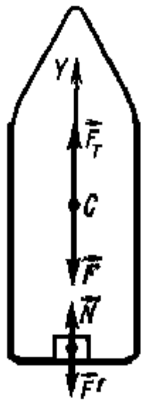
$$\upsilon = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}. \qquad (3)$$

**6.96.** Прискорення корабля за абсолютною величиною дорівнює $\omega^2 r = \omega\upsilon$ ($\upsilon = const$). Тому рівняння руху $md\upsilon/dt = udm/dt$ набуває вигляду $m\upsilon\omega dt = -udm$. Зауваживши, що $d\alpha = \omega dt$ – це кут повороту за час $dt$, та інтегруючи, отримаємо відповідь: $\alpha = \dfrac{u}{\upsilon}\ln\dfrac{m_0}{m}$.

**6.97.** Менша затрата палива матиме місце у випадку реалізації першого способу.

**6.98.** Коли ніякі сили, крім тяжіння, не діють на тіло, наступає стан невагомості. Якщо вести мову про людину в кабіні космічного корабля, виведеного на замкнуту орбіту, то невагомість наступить при зникненні опору повітря і при виключеній тязі двигунів. Єдино діюча сила – тяжіння – буде виконувати роль доцентрової сили, яка утримує корабель на орбіті. Характерним для сили тяжіння буде також те, що всім тілам, які знаходяться в кабіні, вона буде надавати одного й того ж прискорення. Але таке ж прискорення буде надаватися і самій кабіні, тому всі тіла в ній будуть вести себе так, як якби для них не існувало навіть сили тяжіння. Наприклад, ходьба по підлозі згідно із земним звичаєм стане неможливою, і для просування вздовж кабіни необхідно скористатися законом збереження кількості руху, тобто пересуватися можна буде, лише відштовхуючись від стінок кабіни. Наповнити стакан водою і нахилити його до рота, щоб напитися, теж буде неможливо. Вода збереться в одну велику краплю, і направляти її частинами до рота можна буде, лише втягуючи воду через трубочку.

**6.99.** На космічний корабель діють: $\vec{F}_т$ – сила тяги двигунів, $\vec{F}$ – сила тяжіння (див. мал.). За законом всесвітнього тяжіння $F = G\dfrac{Mm_1}{r^2}$, де $r = R + h$; $m_1$ – маса корабля. Оскільки на початку підйому $h << R$, то нехтуючи величиною $h$ порівняно з $R$, можна вважати, що $r \approx R$. Тоді $F = G\dfrac{Mm_1}{R^2}$. Записуючи для корабля рівняння другого закону Ньютона в скалярній формі відносно обраної осі $Y$, отримаємо $F_т - F = m_1 a$, або $F_т - G\dfrac{Mm_1}{R^2} = m_1 a$, звідки $a = \dfrac{F_т}{m_1} - \dfrac{GM}{R_2} = \dfrac{F_т}{m_1} - g_0$, оскільки $g_0 = G\dfrac{M}{R^2}$; $a = 19{,}6$ м/с$^2 = 2g_0$.




Визначимо вагу тіла, яке знаходиться в рухомому кораблеві. У нашому випадку це сила $F'$, з якою тіло тисне на корабель. Вона дорівнює $F' = G\dfrac{Mm_2}{r^2} \approx G\dfrac{Mm_2}{R^2}$ – силі тяжіння. Крім цієї сили на тіло ще діє сила $\vec{N}$ – сила нормальної реакції корабля.

Записуючи для тіла рівняння другого закону Ньютона в скалярній формі відносно осі $Y$, отримаємо $N - F = m_2 a$, звідки $N = F + m_2 a = G\dfrac{Mm_2}{R^2} + m_2 a = m_2\left(\dfrac{GM}{R^2} + a\right)$.

Ураховуючи, що корабель і тіло піднімаються з прискоренням $a = 2g_0$, знаходимо: $N = m_2(g_0 + 2g_0) = 3m_2 g_0$.

За третім законом Ньютона $F' = N = 3m_2 g_0$. Отже $F' = 1{,}76$ Н.

**6.100.** Якщо корабель рухається по коловій орбіті з постійною швидкістю $\upsilon$, то на тіло масою $\mu$ в кораблі діє відцентрова сила інерції $\mu\upsilon^2/R$, напрямлена від Землі. «Вага» тіла на кораблі отримується шляхом віднімання від неї сили гравітаційного притягання $\mu g$, тобто отримується $\mu(\upsilon^2/R - g)$. За умовою задачі ця величина повинна дорівнювати $\mu g$. Звідси знаходимо $\upsilon = \sqrt{2gR}$, тобто корабель повинен рухатися по коловій орбіті з параболічною (другою космічною) швидкістю $\upsilon_п = \sqrt{2gR} = 11{,}2$ км/с. Якщо $M_0$

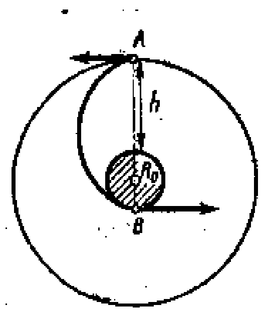
– стартова маса корабля, а $m_0$ – маса, з якою він виводиться на колову орбіту, то $M_0/m_0 = \exp(\upsilon_n/u)$ (1)

Визначимо тепер витрату маси палива при обльоті корабля навколо земної кулі. Рівняння руху має вид: $ma_{абс} = -udm/dt + mg$,

де швидкість газового струменя $u$ спрямована радіально від центра Землі. Оскільки при обертанні корабля $a_{абс} \equiv a_{норм} = \dfrac{\upsilon_n^2}{R} = 2g$, то $mg = -udm/dt$, або $dm/m = -gdt/u$. Звідси $m = m_0 \exp(-gt/u)$. Якщо $t$ – період обертання, то $gt = 2\pi Rg/\upsilon_n = \pi\upsilon_n$. Отже, для кінцевої маси $m_к$ отримуємо $m_0/m_к = \exp(\pi\upsilon_n/u)$, або з урахуванням (1) $M_0/m_к = \exp\dfrac{(\pi+1)\upsilon_n}{u} = e^{14,8} = 2,6\cdot 10^6$.

**6.101.** $A \approx G\cdot m\left(\dfrac{M_З}{R_З} + \dfrac{M_М}{R_М}\right) = 1,3\cdot 10^8$ кДж.

**6.102.** Рух ракети в полі тяжіння Землі підкоряється законам Кеплера. З першого закону випливає, що під час спуску ракета рухалася по еліпсу, в одному із фокусів якого знаходиться центр земної кулі (див. мал.). З’ясуємо, яку частину еліпса складала траєкторія ракети на ділянці спуску. Оскільки під дією гальмівної установки змінився лише модуль швидкості, але не її напрям, то можна зробити висновок, що в момент початку спуску швидкість ракети була перпендикулярна до радіуса-вектора. Такий же напрям швидкості ракети відносно радіуса-вектора буде і в кінці спуску, оскільки за умовою в цей момент ракета рухалася по дотичній до поверхні.




Існує лише дві точки ($A$ і $B$), в яких радіус-вектор перпендикулярний до дотичної. Вони лежать на великій осі еліпса, яка є віссю його симетрії. Оскільки швидкість ракети спрямована по дотичній до траєкторії, то можна зробити висновок, що траєкторія ракети на ділянці спуску являє собою половину еліпса.

Тепер, застосувавши третій закон Кеплера, можна визначити час спуску ракети. З цією метою співставимо рух двох тіл у полі тяжіння Землі: ракети і Місяця, маючи на увазі, що для Місяця період $T_М$ і радіус $R_М$ – відомі. Отже

$$T^2/T_М^2 = a^3/R_М^3. \quad (1)$$

Тут $a$ – велика піввісь орбіти ракети, $T$ – період її обертання по еліпсу. Як видно з малюнка, де $R_0$ – радіус Землі,

$$a = R_0 + h/2. \quad (2)$$

Ураховуючи, що час $t$ спуску ракети дорівнює половині періоду $T$ її обертання по еліпсу, з (1) і (2) знаходимо: $t = (T_М/2)(R_0 + h/2)^{3/2}/R_М^{3/2}$.

## ДО РОЗДІЛУ 7

**7.3.** Як відомо виштовхувальна сила Архімеда є наслідком різного тиску на верхню і нижню частини тіла, зануреного в рідину. При вільному падінні посудини з рідиною, а також на супутникові в умовах невагомості, тиск на тіло зникає, і дія закону Архімеда припиняється.

**7.4.** Для того, щоб надати супутникові-снаряду необхідної початкової швидкості, необхідно застосувати вибухову речовину такої сили, що вона в першу чергу зруйнує саму гармату, розкидавши енергію вибуху в різні боки. Щоправда, час дії (тривалість) вибуху можна подовжити, а силу його зменшити, але тоді доведеться створити гармату такої довжини, що відразу зробить весь захід технічно не реальним.

**7.5.** Систему супутник-бомба можна вважати ізольованою. Такою ж вона залишається й після відділення бомби від супутника, оскільки розділення цих тіл відбувається під дією внутрішніх сил. Отже, центр маси системи буде продовжувати рухатися по тій же траєкторії, що й раніше. Якщо ж при відділенні бомби їй ще й не було надано ніякої початкової швидкості $\upsilon_0$ у напрямі Землі, то взаємного віддалення обох елементів системи, яке б супроводжувалося наближенням бомби до Землі, не відбудеться, і бомба ніколи не впаде на Землю. В іншому випадку, коли спрямована до Землі швидкість бомби $\upsilon_0 \neq 0$, то вона рано чи пізно удариться об Землю. Загальний розв'язок такого ускладненого варіанту вимагає знання додаткових умов стосовно параметрів системи.

**7.6.** а) $R \approx 42{,}4 \cdot 10^6$ м; б) $h = \sqrt[3]{\dfrac{gR^2}{\omega^2}} - R \approx 36 \cdot 10^6$ м; в) $\upsilon \approx 3{,}1 \cdot 10^3$ м/с.

**7.7.** Доцентровою силою в цьому випадку є сила притягання між планетою і супутником. Тому

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R, \qquad (1)$$

де $m$ – маса супутника, $G$ – гравітаційна стала, $\omega$ – кутова швидкість. Оскільки $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, то з (1) дістанемо $R = \sqrt[3]{\dfrac{GM}{4\pi^2}T^2}$.

**7.8.** $3$ год. $36$ хв.

**7.9.** Зменшення повної енергії $E$ супутника за час $dt$ дорівнює $-dE = F\upsilon dt$. Представивши $E$ і $\upsilon$ як функції відстані $r$ між супутником і центром Місяця, перетворимо це рівняння до виду, зручного для інтегрування. Тоді отримаємо: $\tau \approx \left(m/\alpha\sqrt{gR}\right)\left(\sqrt{n} - 1\right)$.

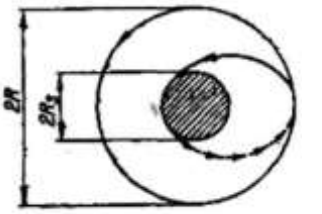
**7.10.** $$\Delta t \approx \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \cdot \frac{\sqrt[3]{r^2}}{3\Delta r/(2r+\delta)} = \begin{cases} 4{,}5 \ \text{діб} \ (\delta = 0), \\ 0{,}80 \ \text{годин} \ (\delta = 2). \end{cases}$$

**7.11.** Після гальмування супутник рухається по еліптичній орбіті. велика піввісь якої $a=\frac{R+R_З}{2}$. Якщо застосувати закони Кеплера до руху супутника по коловій і еліптичній орбітах, дістанемо $(T/T_0)^2=(a/R)^3$.

Період обертання супутника по коловій орбіті $T_0=\frac{2\pi R}{\upsilon}=\frac{2\pi}{R_З}\sqrt{\frac{R^3}{g}}$.

Отже, період обертання його по еліптичній орбіті $T=\frac{2\pi}{R_З}\sqrt{\frac{R^3}{g}}\left(\frac{R+R_З}{2R}\right)^{3/2}$.

З моменту гальмування до посадки супутник пройде саме половину орбіти (див. мал.).




Тому $t=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{R_З\sqrt{g}}\left(\frac{R+R_З}{2}\right)^{3/2}$.

**7.12.** $\upsilon=\upsilon_0\sqrt{R_0/R}$, де $\upsilon_0=\sqrt{gR_0}\approx 7{,}9$ км/с – швидкість руху супутника по коловій орбіті (теоретичній) з радіусом Землі $R_0$. (Сила тяжіння, яка діє з боку Землі на супутник масою $m$ дорівнює $mgR_0^2/R_2$).

**7.13.**

| $h$, км | $\upsilon$, км/с | $T$ |
|---|---|---|
| 0 | 7,91 | 1 год. 25 хв. |
| 200 | 7,79 | 1 год. 28 хв. |
| 7000 | 5,46 | 4 год. 16 хв. |

**7.14.** $\upsilon\approx 7{,}2$ км/с.

**7.15.** $a_n\approx 0{,}7g$.

**7.16.** $a_n=9{,}20$ м/с$^2$.

**7.17.** $\sqrt{2-(T_1/T_2)^{2/3}}$; $R_{\max}=[2(T_2/T_1)^{2/3}-1]R$.

**7.18.** Лінійна швидкість супутника $\upsilon=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$. Порівнявши сили тяжіння на поверхні Землі $G\frac{Mm}{R^2}$ і на висоті польоту супутника $G\frac{Mm}{(R+h)^2}$, дістанемо $n=\left(\frac{R+h}{R}\right)^2$, звідки $R+h=\sqrt{n}R$. Підставивши це значення $R+h$ і врахувавши, що $GM=gR^2$, матимемо $\upsilon=\frac{\sqrt{gR}}{\sqrt[4]{n}}$.

**7.19.** $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}=3$.

**7.20.** $\upsilon_2=7{,}92$км/с.

**7.21.** $\upsilon'=2\pi R/T+\sqrt{gR}=7{,}0$м/с; $w'=g(1+2\pi r/T\sqrt{gR})^2=4{,}9$м/с$^2$.

$R$– радіус Землі; $T$ – період обертання Землі навколо власної осі; $g\approx 9{,}8$м/с$^2$.

**7.22.** $\approx 2{,}1$км/с.

**7.23.** $7{,}26\cdot 10^{-5}$рад/с; $1{,}19\cdot 10^{-3}$рад/с; $7{,}8$км/с.

**7.24.** а) $\omega=93\cdot 10^{-5}$с$^{-1}$$\approx 0{,}001$ с$^{-1}$; б) $\upsilon\approx 7{,}4$км/с; в) $a_n\approx 0{,}7g$.

**7.25.** $\omega=7{,}27\cdot 10^{-5}$рад/с; $R=42{,}2$Мм.

**7.26.** Число обертів $n=\dfrac{\omega}{2\pi}$. Оскільки за умовою руху супутника є $G\dfrac{Mm}{R^2}=m\omega^2R$, то $\omega^2=G\dfrac{M}{R^3}$. Врахувавши, що $GM=gr^2$ ($r$ – радіус Землі), дістанемо

$$n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gr^2}{R^3}}\approx 14$$ обертів за добу.

**7.27.** а) $7800$м/с; б) $1{,}47$ год.

**7.28.** Рух супутника майже коловий, а тому $K=-E$. Опір середовища зменшує повну енергію супутника, а отже, збільшує його кінетичну енергію. Момент кількості руху супутника зменшується. Запишемо попереднє співвідношення у вигляді $m\upsilon^2=-\Pi$ і про диференціюємо по часові: $2m\upsilon d\upsilon/dt=-d\Pi/dt$. Підставивши сюди $\Pi=\dfrac{mgR^2}{r}$ ($R$ – радіус Землі) і ввівши швидкість зниження супутника $w=-dr/dt$, отримаємо: $\dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{g}{2\upsilon}\dfrac{R}{r^2}w\approx\dfrac{g}{2\upsilon}w\approx 8\cdot 10^{-5}$ см/с$^2$.

Можна вважати, що тут $\upsilon\approx 8$км/с (перша космічна швидкість). Тангенціальне прискорення спрямоване в напрямі руху супутника. Сила опору середовища може бути знайдена з рівняння енергії і дорівнює

$F=md\upsilon/dt\approx 8\cdot 10^{-4}$Н.

**7.29.** На супутник, який рухається по коловій орбіті, діє сила тяжіння з боку Землі $F=G\dfrac{Mm}{r^2}$. Перетворимо цей вираз з урахуванням даних умови задачі, що $r=2R$:

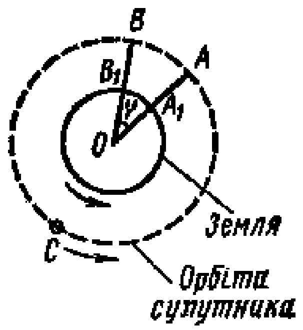
$$F=G\frac{Mm}{4R^2}=G\frac{M}{R^2}\frac{m}{4}=g_0\frac{m}{4};\ (g_0\approx 9{,}8\ \text{м/с}^2). \qquad (1)$$

Запишемо для тіла рівняння другого закону Ньютона в скалярній формі відносно осі $Y$, спрямованої до центра Землі:

$$F=na_y, \qquad (2)$$

де

$$a_y = a_{дц} = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{\upsilon^2}{2R}. \qquad (3)$$




Поставимо (1) і (3) у (2): $g_0 \frac{m}{4} = m\frac{\upsilon^2}{2R}$, звідки $\upsilon = \sqrt{g_0 R/2}$. Кутова швидкість супутника

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{\upsilon}{2R} = \sqrt{g_0/8R}.$$

Розглянемо два випадки.

1. Супутник рухається у напрямі обертання Землі (див. мал.). За час $t$ супутник пройде по своїй орбіті відстань $ABCAB = s = \upsilon t$ і попаде в точку $B$, віддалену від $A$ на відстань

$$AB = \upsilon t - 2\pi r = \omega r t - 2\pi r = r(\omega t - 2\pi) = 2R(\omega t - 2\pi). \qquad (4)$$

Щоб супутник виявився над спостерігачем, останній повинен попасти в точку $B$ за той же час, тобто пройти відстань $A_1B_1$. Цю відстань він проходить з швидкістю $\upsilon_1 + \upsilon_2$, де $\upsilon_1$ – швидкість спостерігача відносно Землі, $\upsilon_2$ – швидкість Землі. Отже,

$$A_1B_1 = (\upsilon_1 + \upsilon_2)t. \qquad (5)$$

З малюнка видно, що кутові переміщення супутника і спостерігача за час $t$ однакові, тобто $\varphi_1 = \varphi_2$. Оскільки $\varphi_1 = \frac{A_1B}{R}$, $\varphi_2 = \frac{AB}{2R}$, то з урахуванням формул (4) і (5) отримаємо: $\frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)t}{R} = \frac{2R(\omega t - 2\pi)}{2R}$, або з урахуванням, що $\upsilon_2 = \frac{2\pi R}{T}$ і $\omega = \sqrt{g_0/8R}$, знаходимо $\frac{\upsilon_1 + \frac{2\pi R}{T}}{R} = \sqrt{g_0/8R}\cdot t - 2\pi$, звідки $\upsilon_1 = \left(\sqrt{\frac{g_0}{8R}} - \frac{2\pi}{t} - \frac{2\pi}{T}\right)R$; $\upsilon_1 \approx 1{,}1\cdot 10^2$ м/с.

2. Супутник рухається у напрямку, протилежному до напряму обертання Землі. Тоді $\upsilon_1 = \left(\sqrt{g_0/8R} - \frac{2\pi}{t} + \frac{2\pi}{T}\right)R \approx 1{,}1\cdot 10^3$ м/с.

**7.30.** Запишемо закон збереження енергії, враховуючи швидкість тіла відносно Землі і його потенціальну енергію:

$$\frac{m(\upsilon_0 + \upsilon_З)^2}{2} - mgR_З = \frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad \frac{m(\upsilon_0 - \upsilon_З)^2}{2} - mgR_З = 0,$$

де $\upsilon_З = l/T$; звідси

$$\upsilon = 2\left[\upsilon_З\left(\upsilon_З + \sqrt{2gR_З}\right)\right]^{1/2} = 2\left[\frac{l}{T}\left(\frac{l}{T} + \sqrt{2gR_З}\right)\right]^{1/2}.$$

Оскільки $R_З = l/2\pi$, то $\upsilon = 4{,}6$ км/с.

**7.31.** Це можливо у тому випадку, якщо період обертання супутника дорівнює періоду обертання Землі навколо своєї осі, а площина його орбіти паралельна до площини земного екватора.

**7.32.** $h = 1{,}69$ Мм.

**7.33.** $T = 5{,}39 \cdot 10^3$ с; $h = 2{,}65 \cdot 10^5$ м; $\upsilon = 7{,}7 \cdot 10^3$ м/с.

**7.34.** $\Delta T = 9 \cdot 10^2$ с; $\Delta h = 8 \cdot 10^5$ м.

**7.35.** Якщо $\rho = const$, то $T_1 = T_2$. Якщо $\rho$ зростає до центра планети, то $T_1 > T_2$.

**7.36.** Прискорення вільного падіння обернено пропорційне квадрату відстані від центра Землі: $g = G\dfrac{M}{R^2}$.

На відстані, вдвоє більшій за радіус Землі, $a = \dfrac{1}{4}g$. За умовою обертання супутника по коловій орбіті $a = \dfrac{\upsilon^2}{2R} = \dfrac{(\omega 2R)^2}{2R} = \dfrac{8\pi^2 R}{T^2}$.

Звідси час обертання штучного супутника $T = \sqrt{\dfrac{8\pi^2 R}{a}} = 4\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$.

Вважаючи, що $R \approx 6000$ км, а $g \approx 10$ м/с$^2$, маємо $T \approx 4$ год.

**7.37.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_З}{0{,}08g}} \approx 5$ год.

**7.38.** $T \approx 7{,}44 \cdot 10^3$ с; $\upsilon \approx 1{,}6 \cdot 10^3$ м/с.

**7.39.** $T_2 = T_1$.

**7.40.** 1) $T = \sqrt{3\pi / G\rho}$; $\rho$ – щільність центрального тіла;
2)

| Планети | $T$, год. | Планети | $T$, год. |
|---|---|---|---|
| Меркурій | 1,41 | Юпітер | 2,86 |
| Венера | 1,50 | Сатурн | 3,90 |
| Земля | 1,41 | Уран | 2,94 |
| Марс | 1,66 | Нептун | 2,61 |

**7.41.** $T \approx 48$ с.

**7.42.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_З}{g}}$.

**7.43.** $T = 88$ хв.

**7.44.** $\upsilon = 1{,}7$ км/с; $T = 1$ год. 50 хв.

**7.45.** Елементи орбіти Місяця наведені в умові задачі. Для супутника ж відстань від центра Землі в *перигеї* і *апогеї* відповідно рівні: $r_c^n = R_З + 225$ км $= 6603$ км, $r_c^a = R_З + 710$ км $= 7088$ км, де $R_З = 6378$ км – радіус Землі.

Для визначення періоду супутника скористаємося третім законом Кеплера: $T_C^2/T_M^2 = a_C^3/a_M^3$, де $a_C$ і $a_M$ – великі півосі орбіт супутника і Місяця відповідно, а $T_M$ – період обертання Місяця.

Виразимо довжину великої півосі $a$ через $r^n$ і $r^a$, використавши формули зв'язку між параметрами еліпса: $r^n = a - c$; $r^a = a + c$, звідки $a = (r^n + r^a)/2$, де $c$ – відстань від центра еліпса до одного з його фокусів.

Підставивши $a$ у формулу для відношення періодів, знаходимо: $T_C^2 = \left(\dfrac{r_C^n + r_C^a}{r_M^n + r_M^a}\right)^3 T_M^2$; $T_C = 1.55$ години.

**7.46.** Тіло рухатиметься навколо Землі по коловій орбіті з лінійною швидкістю $\upsilon$, якщо сила тяжіння $G\dfrac{mM_З}{(R_З + h)^2}$ забезпечить потрібне доцентрове прискорення $\dfrac{\upsilon^2}{R_З + h}$, тобто $G\dfrac{mM_З}{(R_З + h)^2} = \dfrac{m\upsilon^2}{R_З + h}$,

де $m$ – маса тіла супутника.

Беручи до уваги співвідношення $g_0 = G\dfrac{M_З}{R_З^2}$, дістанемо $\upsilon = R_З\sqrt{\dfrac{g_0}{R_З + h}} \approx 7635$ м/с.

Для періоду обертання $T$ маємо: $T = \dfrac{2\pi(R_З + h)}{\upsilon} = 2\pi\dfrac{R_З + h}{R_З}\sqrt{\dfrac{R_З + h}{g_0}} \approx 1{,}6$ год.

**7.47.** Якщо виразити момент кількості руху через секторіальну швидкість для еліптичної орбіти: $L = 2m ds/dt$, то для періоду отримаємо: $T_e = \dfrac{2m}{L}S = 2\pi\dfrac{m}{L}ab$. Оскільки $b^2 = a\dfrac{L^2}{mC}$, то $T_e^2 = (2\pi)^2\dfrac{m}{c}a^3$, де $c = GmM_З$.

Для колової орбіти: $T_к^2 = (2\pi)^2\dfrac{m}{c}R^3$.

Звідси, з врахуванням даних задачі, отримуємо: $\left(\dfrac{T_e}{T_к}\right)^2 = \dfrac{a^3}{R^3} = \dfrac{2^3R_З^3}{R_З^3} = 2^3$, або $\dfrac{T_e}{T_к} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$.

**7.48.** Позначимо через $E_к$ повну енергію супутника при його рухові по коловій орбіті, тоді

$E_к = -K$, $П = -2K$.

Після того як двигун «відпрацював», швидкість супутника зросла в $\alpha$ разів, а кінетична енергія $K$ – в $d^2$ разів. Потенціальна енергія $П$ не змінилася, оскільки за час роботи двигуна супутник перемістився на нехтовно малу відстань. Таким чином повна енергія супутника на еліптичній орбіті дорівнюватиме:

$$E_e = \alpha^2 K + \Pi = (\alpha^2 - 2)K = (2-\alpha^2)E_к .$$

Великі осі еліптичних орбіт обернено пропорційні повним енергіям. Тому:

$$a/R = 1/(2-\alpha^2), \quad a = R/(2-\alpha^2).$$

Орбіта буде еліптичною, якщо $\alpha^2 \le 2$. Максимальна відстань супутника від центра Землі (в апогеї) дорівнює:

$$R_{\max} = 2a - R = \alpha^2 R/(2-\alpha^2).$$

Період обертання $T_2$ визначається із третього закону Кеплера, він дорівнює:

$$T_2 = T_1/(2-\alpha^2)^{3/2}.$$

**7.49.** $h = R_З = 6{,}4 \cdot 10^3$ км.

**7.50.** 1) Перше тіло. 2) За законом збереження енергії для першого тіла маємо $\frac{\upsilon_0^2}{2} - gR_0 = -g\frac{R_0^2}{R_1}$, або $R_1 = \frac{2gR_0^2}{2gR_0 - \upsilon_0^2}$,

оскільки у верхній точці його швидкість дорівнює нулю. Для другого тіла, за законом збереження енергії маємо:

$$\frac{\upsilon_0^2}{2} - gR_0 = \frac{\upsilon_1^2}{2} - g\frac{R_0^2}{2},$$

де $\upsilon_1$ – швидкість у найбільш віддаленій точці; крім того, за законом збереження моменту кількості руху, $\upsilon_0 R_0 = \upsilon_1 R_2$. Звідси отримуємо $R_2 = \frac{\upsilon_0^2 R_0}{2gR_0 - \upsilon_0^2}$. Відношення $R_1/R_2 = 2gR_0/\upsilon_0^2$.

**7.51.** Сила притягання супутника до Землі надає йому доцентрового прискорення. Тому $G\frac{mM}{R^2} = \frac{m\upsilon^2}{R}$, де $R = r + h$ – відстань між центрами Землі і супутника.

Після перетворень $\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, але $GM = gr^2$, тоді $\upsilon = r\sqrt{\frac{g}{R}} = 7300$ м/с.

**7.52.** Супутник з поверхні Землі здається нерухомим. Це означає, що $\omega_C = \omega_З$. На супутник діє сила тяжіння Землі $F = G\frac{m_C M_З}{x^2}$.

Але $GM_З = gR^2$, тоді $F = m_C g\left(\frac{R}{x}\right)^2$.

Оскільки супутник рухається по коловій орбіті, то $m_C g\left(\frac{R}{x}\right)^2 = m_C\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$;

$x=\sqrt[3]{\dfrac{gT^2R^2}{4\pi^2}}\approx 42450$ км.

Швидкість супутника $\upsilon=\dfrac{2\pi x}{T}\approx 3{,}1$ км/с.

**7.53.** $R_C=\sqrt[3]{\dfrac{R_З}{\omega^2}}\approx 42000$ км; $\upsilon\approx 3{,}1$ км/год.; повинна виконуватися умова $\omega_C=\omega_З=\omega$; із Землі буде здаватися, що супутник рухається назад-вперед уздовж меридіана. Він буде здаватися нерухомим, якщо його орбіта буде лежати у площині екватора.

**7.54.** З рівнянь руху супутника по орбітах $\dfrac{m\upsilon_1^2}{R_1}=G\dfrac{mM_З}{R_1^2}$ і $\dfrac{m\upsilon_2^2}{R_2}=G\dfrac{mM_З}{R_2^2}$ знайдемо $R_1=G\dfrac{M_З}{\upsilon_1^2}$ і $R_2=G\dfrac{M_З}{\upsilon_2^2}$. Але $GM_З=gR_З^2$, де $R_З$ – радіус Землі. Тоді $\Delta R=R_2-R_1=gR_З^2\left(\dfrac{1}{\upsilon_2^2}-\dfrac{1}{\upsilon_1^2}\right)\approx 7{,}4\cdot 10^5$ м. Періоди обертань супутника $T_1=\dfrac{2\pi R_1}{\upsilon_1}=\dfrac{2\pi gR_З^2}{\upsilon_1^3}$ і $T_2=\dfrac{2\pi gR_З^2}{\upsilon_2^3}$. Тоді $\Delta T=T_2-T_1=2\pi gR_З^2\left(\dfrac{1}{\upsilon_2^3}-\dfrac{1}{\upsilon_1^3}\right)\approx 4{,}4\cdot 10^2$ год.

**7.55.** Велика піввісь еліптичної орбіти спуску супутника дорівнює $2a=R_З+2R_З=3R_З$. Час обертання супутника по еліптичній орбіті $T_{ел}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{C}a^3}=2\tau$, де $C=GmM_З$. Час спускання $\tau=\pi\sqrt{\dfrac{m}{GmM_З}\left(\dfrac{3}{2}\right)^3R_З^3}\approx\dfrac{3}{2}\pi\sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{R_З^3}{gR_З^2}}=\dfrac{3}{2}\pi\sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{R_З}{g}}$.

**7.56.** Використовуємо рівняння динаміки:

$m\vec{a}_0=\vec{P}-\left[2m\vec{\omega}\vec{\upsilon}_0\right]$,

де $\vec{P}$ – «вага» тіла, яка для точки рівноваги супутника $A$ дорівнює нулю: $P_A=-\dfrac{C}{R_0^2}+m\omega^2R_0=0$, де $C=GmM_З$.

Для збуреного руху супутника

$$P=-\frac{C}{(R_0+y)^2}+m\omega^2(R_0+y)\approx\frac{2l}{R_0^3}y+m\omega^2y=3m\omega^2y.$$

У проекціях на осі координат $X$, $Y$, $Z$ з початком у точці $A$ рівняння динаміки записують у вигляді: $\ddot{x}=-2\omega\dot{y}$, $\ddot{y}=3\omega^2y+2\omega\dot{x}$, $\ddot{z}=0$.

Звідси $\dot{x}=-2\omega y$, $\ddot{y}+\omega^2y=0$, що при початкових умовах $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=\upsilon_0$ отримуємо $y(t)=\dfrac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t$.

Для координати $x$ при $x(0)=0$ отримуємо: $x(t)=-\dfrac{2\upsilon_0}{\omega}\left(1-\cos\omega t\right)$.

Таким чином, супутник буде описувати малий еліпс $x(t) = -\frac{2\upsilon_0}{\omega}(1-\cos\omega t)$; $y(t) = \frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t$, вершина якого лежить у точці рівноважного положення супутника, а центр зміщений на захід на відстань $2\upsilon_0/\omega$, де $\omega$ – кутова швидкість обертання Землі.

**7.57.** $h = \frac{R}{gR/\upsilon^2 - 1}$.

**7.58.** $R_2 = 1{,}46\cdot 10^4$ км; $T_2 = 104$ хв.

**7.59.** Для колової орбіти $\upsilon_0^2 C/mR_0$, $R_0$ – радіус колової орбіти, $C = GmM_З$, $m$ – маса супутника, $G$ – гравітаційна стала. Для еліптичної орбіти: $\upsilon_1 = \upsilon_0\cdot\sqrt{1{,}5} = \upsilon_p$. Повна енергія супутника $E = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{C}{R_0} = \left(\frac{1{,}5}{2} - 1\right)\frac{C}{R_0} = -\frac{1}{4}\frac{C}{R_0}$.

Велика вісь орбіти $2a = \rho_1 + \rho_2 = \frac{C}{|E|} = 4R_0 = 4\rho_1$, звідси $\rho_2 = 4\rho_1 - \rho_1 = 3\rho_1 = 3R_0$. Для кінців великої осі орбіти має місце рівність $L = m\rho_1\upsilon_p = m\rho_2\upsilon_A$, де $L$ – момент кількості руху, $\upsilon_p$ – швидкість у перигеї, звідси $\upsilon_A = \upsilon_p\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{1{,}5}}{3}\upsilon_0$.

**7.60.** $h = \frac{\upsilon T}{2\pi} - R = 970$ км;
$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{96}$ хв.$^{-1}$; $\omega = \frac{1}{24}$ год.$^{-1}$ $\frac{1}{1440}$ хв.$^{-1}$; $\frac{\nu}{\omega} = 15$. $a_\tau = 0$; $a_n = \frac{\upsilon^2}{R+h} = 8{,}74$ м/с$^2$.

**7.61.** Для еліптичної орбіти велика вісь дорівнює $2a = 2R_З + R_З = 3R_З = C/|E|$, де $C = GmM_З$.

Енергія супутника $|E| = C/3R_З = C/R_З - m\upsilon_1^2/2 = C/2R_З - m\upsilon_2^2/2$, звідки швидкість запуску супутника дорівнює $\upsilon_1^2 = \frac{4}{3}\frac{C}{mR_З} = \frac{4}{3}\upsilon_I^2$; швидкість в апогеї $\upsilon_2^2 = \frac{1}{3}\frac{C}{mR_З} = \frac{1}{3}\upsilon_I^2$; швидкість по коловій орбіті $\upsilon_к^2 = \frac{1}{2}\upsilon_I^2$, звідси додаткова швидкість $\Delta\upsilon = \upsilon_к - \upsilon_2 = (1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{3})\upsilon_I$.

Підставивши числові значення, отримуємо: $\upsilon_1 = (2/\sqrt{3})\upsilon_I \approx 1{,}16\upsilon_I$; $\Delta\upsilon = (1/\sqrt{2} - 1\sqrt{3})\upsilon_I \approx 0{,}13\upsilon_I$, де $\upsilon_I$ – перша космічна швидкість.

**7.62.** $\upsilon_{орб} \approx 7{,}7\cdot 10^3$ м/с; $T = 5{,}4\cdot 10^3$ с.

**7.63.** $R = \sqrt{\frac{g}{\omega^2 R_0}}R_0 \approx 6{,}61R_0$, де $\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 3600}$ рад/с.

(Доцентрове прискорення супутника $\omega^2 R$ повинне дорівнювати прискоренню, якого супутникові надає сила тяжіння $gR_0^2/R^2$).

**7.64.** $R_1 = \dfrac{R_0}{\mu_1 - 1} \approx 6{,}8R_0$; $R_2 = \dfrac{R_0}{\mu_2 - 1}$, де $\mu_{1,2} = \dfrac{2gR_0}{(\upsilon_0 \pm \omega R_0)^2}$, $\omega$ – кутова швидкість Землі; $R_0$ – радіус Землі.

**7.65.** $\upsilon = \upsilon_{II}\sqrt{1 - R/2a} = 8{,}1$ км/с, де $\upsilon_{II} = \sqrt{2gR} = 11{,}2$ км/с – друга космічна швидкість; $2a$ – довжина великої осі еліптичної орбіти.

**7.68.** Наростання швидкості при підйомі регулювалося послідовним включенням секцій багатоступінчастої ракети. Повернення ж супутника в густі шари атмосфери без штучного регулювання його швидкості, без сумніву, призвело б до його сильного нагрівання і, можливо, до знищення. Тому тут застосовуються спеціальні гальмівні пристрої з вмиканням двигуна або перехід на режим плануючого спуску, таким чином встигає згоріти лише спеціальна зовнішня захисна оболонка.

**7.69.** $F = mg\dfrac{R_З^2}{(R_З + h)^2}\sin\alpha \approx 0{,}02mg \approx 200$ Н.

**7.70.** Не можна. В інерціальній системі відліку, пов'язаній із зорями, кутова швидкість, нерухомого відносно зірок супутника, дорівнює нулеві. Тому доцентрове прискорення такого супутника повинне дорівнювати нулеві і він не може обертатися навколо будь-якої точки простору, у тому числі і навколо Землі. Отже, таке тіло не може бути супутником Землі.

**7.72.** $r = \sqrt[3]{GM(T/2\pi)^2} = 4{,}2\cdot 10^4$ км, де $M$ і $T$ – маса Землі і її період обертання навколо власної осі; $\upsilon = 3{,}1$ км/с; $a = 0{,}22$ м/с$^2$.

**7.73.** $\upsilon = R\sqrt{g/(R+h)}$. Це означає, що космонавт у кабіні супутника рухається з тією ж швидкістю, що й кабіна, тобто він перебуває в стані невагомості незалежно від значення своєї маси $m$.

**7.74.** а

**7.75.** $M_З = \dfrac{4\pi^2(R_З + h)^3}{GT^2} = 6\cdot 10^{24}$ кг.

**7.76.** $M_З = (4\pi^2 R^3/GT^2)(1 + T/\tau)^2 = 6\cdot 10^{24}$ кг, де $T$– період обертання Землі навколо власної осі.

**7.77.** Нехтуючи зміною потенціальної енергії супутника, можна записати, що $A = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$. Для того, щоб рухатися по орбіті з радіусом $R \approx R_З$, супутник повинен мати швидкість $\upsilon = \sqrt{gR_З}$, тоді $A = \dfrac{mgR_З}{2}$. Звідки $m = \dfrac{2A}{gR_З} = 1000$ кг.

**7.78.** $\dfrac{M_2}{M_1} = \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^3\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^2 \approx 0{,}11$, де $R_1 = R + h = 6625$– середня відстань від супутника до центра Землі.

**7.79.** $\Delta R/R \sim 3\pi R\rho/(r\rho_0) = 1{,}2\cdot 10^{-5}$, $\Delta R \sim 8$ м, де $R$ – радіус земної кулі. (При розв'язанні задачі скористатися виразом для сили опору атмосфери $F \sim \rho\upsilon^2 S$, де $S = \pi r^2$ – площа поперечного перерізу супутника). Дати відповідь на питання, чому зниження супутника не залежить від гравітаційної сталої?

**7.80.** Розкладемо силу тяги $\vec{F}$ двигуна на складову $\vec{F}_{II}$, що лежить у площині кола, яке описує супутник при своєму рухові, і складову $\vec{F}_{\perp}$, перпендикулярну до цієї площини. Сила гравітаційного притягання Землі, яка діє на супутник на відстані $R = h + R_З$, дорівнює $F_{гр} = mgR_З^2 / R^2$.

Другий закон Ньютона для супутника в проекціях на обрані напрями має вид: $F_{\perp} - F_{гр}\sin\alpha = 0$, $F_{гр}\cos\alpha - F_{II} = \dfrac{m\upsilon^2}{R\cos\alpha}$.

За умовою задачі період обертання супутника $T = \dfrac{2\pi R}{\upsilon}\cos\alpha = 1$ доба, тому $F_{II} = F_{гр}\cos\alpha - \dfrac{m\upsilon^2}{R\cos\alpha} = m\left(\dfrac{R_З^2}{R^2} - \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}\right)\cos\alpha = 0$.

Таким чином $F_{\perp} = mg\dfrac{R_З^2}{(R_З + h)^2}\sin\alpha \approx 0{,}02mg \approx 200$ Н.

**7.81.** Рухаючись по орбіті, супутник за одиницю часу стикається з молекулами повітря, які займають об'єм $\upsilon S$ ($\upsilon$ – швидкість супутника, $S$ площа його поперечного перерізу). Маса цього об'єму повітря $m_1 = \rho S\upsilon$, де $\rho$ – щільність повітря. Зміна кількості руху супутника за цей же проміжок часу $\Delta p = m(\upsilon - \upsilon')$ дорівнює, очевидно, зміні кількості руху маси $m_1$ повітря, тобто $\Delta p = m_1\upsilon = \rho S\upsilon^2$. Зауважимо, що до зіткнення середня швидкість молекули повітря відносно Землі дорівнювала нулю, а після зіткнення вона стала рівною швидкості супутника $\upsilon$. Згідно з другим законом Ньютона зміна кількості руху тіла за одиницю часу дорівнює силі, яка діє на це тіло. Таким чином, гальмівна сила $F_2 = \rho S\upsilon^2$, тобто вона пропорційна квадрату швидкості супутника. Обчислимо її величину. Для стаціонарної орбіти

$$\frac{m\upsilon^2}{R+h} = \frac{GmM}{(R+h)^2}, \text{ звідки } \upsilon^2 = \frac{GM}{R+h},$$

де $M$ і $R$ – маса і радіус Землі. Якщо тіло знаходиться на поверхні Землі, то $mg = \dfrac{GmM}{R^2}$ і $GM = gR^2$.

Підставляючи це значення $GM$ у вираз для швидкості супутника, отримуємо

$$\upsilon^2 = \frac{gR^2}{R+h} \approx gR\left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

(Тут використано формулу наближених обчислень: $1/(1+x) \approx 1 - x$ при $x << 1$). Таким чином,

$$F_2 = \rho g S R\left(1-\frac{h}{R}\right) \approx 0{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{Н},$$

де $\rho = 1{,}6\cdot 10^{-10}$ кг/м$^3$; $S = 0{,}5$ м$^2$; $R = 6{,}37\cdot 10^6$ м; $h = 0{,}2\cdot 10^6$ м.

Як видно з формули, яка пов'язує швидкість супутника з висотою, швидкість супутника із зменшенням його висоти зростає. Може здатися дивним, що дія сили гальмування призводить до збільшення швидкості. Але справа в тому, що при наявності гальмування швидкість супутника вже не перпендикулярна до напряму сили тяжіння, тобто з'являється складова сили тяжіння, яка й змінює величину швидкості супутника. Прискорююча дія цієї складової переважає гальмуючу дію сили гальмування.

**7.82.** Умовою подолання супутником земного притягання є рівність нулю його повної механічної енергії $E$:

$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{C}{R} = E = 0$, де $C = GmM_З$, звідси $\upsilon^2 = \upsilon_\rho^2 + \upsilon_\varphi^2 = \frac{2C}{mR}$. На коловій орбіті $\upsilon_\varphi^2 = \frac{C}{mR}$, тому $\upsilon_\rho^2 = \frac{2C}{mR} - \frac{C}{mR} = \frac{2}{3} g R_З = \frac{\upsilon_{\mathrm{II}}^2}{3}$; $\upsilon_\rho = \sqrt{2/3 g R_З} = \upsilon_{II}/\sqrt{3}$,

де $\upsilon_\rho$ – друга космічна швидкість.

**7.83.** Якщо потенціальну енергію тіла з масою $m$ у полі тяжіння вважати рівною нулю нескінченно далеко від Землі (маса $M$), то на відстані $R$ від центра Землі вона повинна бути рівною $-G\frac{mM}{R}$.

Для підняття супутника на висоту $h$ над поверхнею Землі необхідно виконати роботу, яка дорівнює зміні потенціальної енергії супутника:

$$A = \Pi_{R_З+h} - \Pi_{R_З} = -G\frac{Mm}{R_З+h} - \left(-G\frac{Mm}{R_З}\right) = mgR_З^2\left(\frac{1}{R_З} - \frac{1}{R_З+h}\right) = mg\frac{hR_З}{R_З+h}$$

(де враховано, що $GM/R_З^2 = g$).

Тепер, для того, щоб запустити супутник на цій висоті, йому необхідно надати кінетичну енергію $m\upsilon^2/2$, тобто виконати роботу $A_1 = \frac{m\upsilon^2}{2}$.

Для того, щоб супутник міг обертатися по орбіті на висоті $h$ від Землі, йому необхідно надати швидкість $\upsilon = R_З\sqrt{\frac{g}{R_З+h}}$, тоді $A_1 = \frac{1}{2}\frac{mgR_З^2}{R_З+h}$. Відношення робіт $\frac{A}{A_1} = \frac{2h}{R_З}$. При $h = 3200$ км $A/A_1 = 1$, при $h = 6400$ км $A/A_1 = 2$.

**7.88.** $\approx 2{,}4\cdot 10^9$ Дж.

**7.89.** а) $E = -G\frac{mM_З}{h+H}$; б) $\upsilon = \sqrt{2GM_З\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{h+H}\right]}$;

в) $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_З}}\left(\frac{h+H}{2}\right)^{3/2}$; г) $M_З \approx 6\cdot 10^{24}$ кг.

**7.90.** $$E = Gm\left\{\sqrt{M_З}\left[\frac{(r-R_З)\sqrt{M_З}-R_З\sqrt{M_М}}{r\cdot R_З}\right]-\frac{\sqrt{M_З M_М}}{r}\right\};$$

$$\upsilon=\sqrt{2G\left(\frac{M_М-M_З}{r}+\frac{M_М}{R_М}\right)}.$$

**7.91.** У $1{,}27$ рази.

**7.92.** $E_п / E_к = 2$

**7.93.** Ні. Тому, що при запускові штучного супутника на орбіту більшого радіуса його кінетична енергія зменшується, але зростає потенціальна енергія, і сумарна робота, яка необхідна для запуску супутника, зростає.

**7.94.** $H = 6{,}4\cdot 10^6$ м; $E_к = 1{,}87\cdot 10^{10}$ Дж.

**7.95.** Зміна енергії відбувається внаслідок роботи сил тертя: $\Delta E = \Delta E_к + \Delta E_п$, де $\Delta E_к = \frac{1}{2}m(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2)$, а $\Delta E_п = m(g_1 h_1 - g_2 h_2)$. Але $\frac{m\upsilon_1^2}{R_0 + h_1} = mg_1$ і $\frac{m\upsilon_2^2}{R_0 + h_2} = mg_2$, де $R_0$ – радіус Землі, $g_1 \approx g_2 \approx g$. Тоді

$$\Delta E = \frac{1}{2}mg(h_1 - h_2) + mg(h_1 - h_2) = \frac{3}{2}mg(h_1 - h_2) \approx 2{,}9\cdot 10^8 \text{ Дж.}$$

**7.96.** а) $1/2$; $2$; б) $\sim 12\cdot 10^7$ Дж.

**7.97.** $E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$, звідки $\upsilon^2 = 2E_к / m$, (1)

Звідки $\upsilon = \sqrt{2E_к / m} \approx 3\cdot 10^3$ м/с.

Висота підйому супутника $h$ і його швидкість $\upsilon$ зв’язані співвідношенням $\upsilon^2 = g_0 \frac{R^2}{R+h}$.

Прирівнявши праві частини (1) і (2), отримуємо: $\frac{2E_к}{m} = g_0 \frac{R^2}{R+h}$, звідки висота підйому супутника дорівнює:

$$h = mg_0 \frac{R^2}{2E_к} - R = R\left(\frac{mg_0 R}{2E_к} - 1\right);\quad h \approx 3{,}8\cdot 10^7 \text{ м.}$$

**7.98.** $\Delta E / E = -\frac{2}{3}\frac{\Delta T}{T} \approx -0{,}02$ ($E < 0$).

**7.99.** $L = m\sqrt{1{,}1GM_З R_З} = 7{,}95\cdot 10^{13}$ кг·м$^2$/с.

**7.100.** Момент кількості руху супутника масою $m$ на новій орбіті визначається з умови:

$$L = m\upsilon_\varphi R = m\upsilon\rho_{\min} = const. \qquad (1)$$

Квадрат швидкості супутника на коловій орбіті дорівнює:

$$\upsilon_\varphi^2 = C / mR, \text{ де } C = GmM_З. \qquad (2)$$

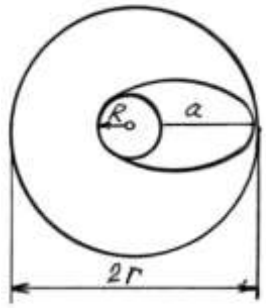
Повна енергія супутника на новій орбіті буде:

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{C}{\rho_{\min}}=\frac{m}{2}\left(\upsilon_\varphi^2+\upsilon_\rho^2\right)-\frac{C}{R}=0 . \qquad (3)$$

Із (1) – (3) отримуємо відповідь: $\rho_{\min}=\frac{m\upsilon_\varphi^2R^2}{2C}=\frac{R}{2}=R_З$; $\upsilon=\frac{R}{\rho_{\min}}\upsilon_\varphi=\sqrt{\frac{2C}{mR_З}}=\upsilon_{II}$; $\upsilon_{II}$ – друга космічна швидкість.

**7.101.** Велика піввісь еліпса, який з одного боку дотикається до поверхні Землі, а з другого – початкової колової орбіти, дорівнює (див. мал.)

$$a=\frac{r+R}{2} .$$




Згідно з третім законом Кеплера

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2=\left(\frac{a}{r}\right)^3 .$$

Період обертання супутника по коловій орбіті

$$T_0=\frac{2\pi r}{R}\sqrt{\frac{r}{g}}, \text{ де } r=R+h .$$

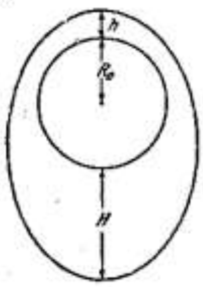
Період обертання по еліптичній орбіті

$$T=T_0\left(\frac{a}{r}\right)^{3/2}=T_0\left(\frac{R+r}{2r}\right)^{3/2}=\frac{2\pi r}{R}\sqrt{\frac{r}{g}}\left(\frac{R+r}{2r}\right)^{3/2} .$$

З моменту гальмування до приземлення супутник пройде відстань, яка рівна половині орбіти. Тому

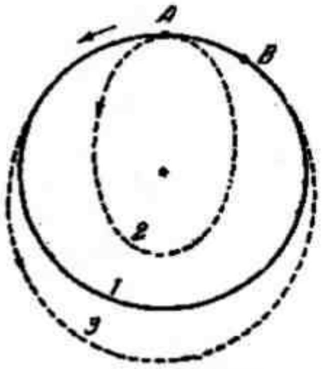
$$t=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{R\sqrt{g}}\left(\frac{R+r}{2}\right)^{3/2} .$$

**7.102.** Оскільки і Місяць і супутник рухаються в полі тяжіння Землі, то можна застосувати третій закон Кеплера: $\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{(h+H+2R_0)^3}{8R^3}$.



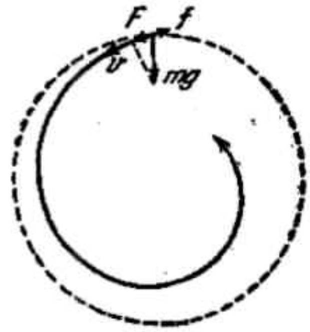

Звідси $h=2R\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{2/3}-H-2R_0=220$ км.

**7.103.** Якщо кинути контейнер проти руху супутника $A$, то він почне рухатися по деякому еліпсу $2$, розташованому всередині орбіти супутника (див. мал.). Період обертання контейнера буде дещо меншим за період обертання супутника $B$. Тому вони можуть зустрітися у точці дотику орбіт лише після здійснення великого числа обертів. Контейнер необхідно кинути у напрямку руху супутника $A$. Він почне рухатися по еліпсу $3$. Швидкість $u$ необхідно підібрати так, щоб за час одного оберту контейнера супутник $B$ також здійснив один оберт і додатково ще пройшов шлях $AB$. Це цілком можливо, оскільки період обертання по еліпсу $3$ дещо більший від періоду обертання по коловій орбіті $1$. Контейнер зустрінеться з супутником $B$ у точці дотику орбіт $3$ і $1$.




**7.104.** Під впливом опору атмосфери супутник поступово з плином часу наближатиметься до Землі. Радіус його орбіти зменшуватиметься.

Оскільки у верхніх шарах опір малий, то за один оберт це зменшення радіуса буде незначним. Вважаючи орбіту приблизно коловою, можна записати: $\frac{m\upsilon^2}{R}=G\frac{mM}{R^2}$, де $R$ – радіус орбіти. Звідси $\upsilon=\sqrt{\frac{GM}{R}}$, тобто швидкість супутника зростає при зменшенні $R$. Цей результат можна пояснити наступним чином. Внаслідок опору атмосфери рух супутника, виведеного, наприклад, на колову орбіту (пунктирна лінія на малюнку), в дійсності буде відбуватися по деякій спіралі (суцільна лінія на малюнку). Тому проекція сили тяжіння $F$ на напрямок швидкості супутника $\upsilon$ буде відмінна від нуля. Робота сили $F$, яка більша від роботи сили опору атмосфери $f$, саме й призводить до зростання швидкості супутника.




Під час руху в атмосфері повна механічна енергія супутника зменшується, але потенціальна енергія з наближенням до Землі зменшується швидше, ніж повна. За рахунок цього зростає його кінетична енергія.

Варто відзначити, що в щільних шарах атмосфери через значні величини сили опору, навіть приблизно не можна розглядати рух супутника як обертання по колу. Тому зроблений висновок не вірний.

## Список використаної та рекомендованої літератури


1. Ащеулов, С. В. Задачи по элементарной физике / С. В. Ащеулов, В. А. Барышев. – Л. : Изд. Ленинград. ун-та, 1974. – 192 с.
2. Балаш, В. А. Задачи по физике и методы их решения / В. А. Балаш. – М. : Просвещение, 1983. – 431 с.
3. Батыгин, В. В. Сборник задач по электродинамике / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. – М. : Наука, 1970. – 503 с.
4. Бойко, Г. М. Курс астрономії : лабораторний практикум з практичної астрофізики : навч. посібн. для ВНЗ / Г. М. Бойко, Г. О. Грищенко. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – 208 с.: іл.
5. Варгин, А. Н. Механика Ньютона // Как решать задачи по физике, и почему их надо решать / А. Н. Варгин. – М., 2009. – 146 с.
6. Варикаш, В. М. Избранные задачи по физике с решениями / В. М. Варикаш, М. С. Цедрик. – Минск : Вышэйшая школа, 1967. – 240 с.
7. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1985. – 382 с.
8. Гольдфарб, Н. И. Сборник вопросов и задач по физике / Н. И. Гольдфарб. – М. : Высшая школа, 1975. – 368 с.
9. Гончаренко, С. У. Конкурсні задачі з фізики / С. У. Гончаренко. – К.: Вища шк., 1979. – 446 с.
10. Гончаренко, С. У., Корженевич Є.Л. Задачі для фізичних олімпіад : посіб. для вчителів / С. У. Гончаренко, Є. Л. Корженевич. – К. : Радянська школа, 1975. – 168 с.
11. Гончарский, А. В. Некорректные задачи астрофизики / А. В. Гончарский, А. М. Черепащук, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1985.
12. Гофман, Ю. В. Законы, формулы, задачи физики : [справочник] / Ю. В. Гофман. – К. : Наукова думка, 1977. – 574 с.
13. Гусев, Е. Б. Расширяя границы Вселенной : история астрономии в задачах: учебно-метод. пособие для учителей астрономии и физики и студентов физико-матем. ф-тов вузов / Е. Б. Гусев, В. Г. Сурдин. – М. : МЦНМО, 2003. – 176 с.: ил.
14. Дагаев, М. М. Книга для чтения по астрономии : Астрофизика : учеб. пособие для учащихся 8-10 кл. / М. М. Дагаев, В. М. Чаругин. – М. : Просвещение, 1988. – 207 с.: ил.
15. Дагаев, М. М. Сборник задач по астрономии : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М. : Просвещение, 1980. – 128 с.: ил.
16. Загальна фізика : зб. задач : навч. пос. / В. М. Барановський, П. В. Бережний, П. О. Возний [та ін.] ; за ред. І. Т. Горбачука. – К. : Вища школа, 1993. – 359 с.
17. Загальний курс фізики : зб. задач / І. П. Гаркуша, І.Т. Горбачук, В. П. Курінний [та ін.] ; за ред. І. П. Гаркуші. – К. : Вища школа, 2003. – 560с.
18. Засов, А. В. Общая астрофизика / А. В. Засов, К. А. Постнов. – М.: Век-2, 2011.

19. Зубов, В. Г. Задачи по физике : пособие для самообр. / В. Г. Зубов, В. П. Шальнов. – М. : Госиздат. физмат. лит-ры, 1985. – 256 с.
20. Иродов, И. Е. Сборник задач по общей физике / И. Е. Иродов, И. В. Савельев, О. И. Замша. – М. : Наука, 1975. – 320 с.
21. Івах, І. В. Методика розв'язування задач з фізики / І. В. Івах, М. Г. Кікець, М. А. Килимник. – К. : Радянська школа, 1969. – 368 с.
22. Кобушкин, В. К. Методика решения задач по физике / В. К. Кобушкин. – Л. : Изд. ЛГУ, 1972. – 280 с.
23. Коган, Б. Ю. Задачи по физике / Б. Ю. Коган. – М. : Просвещение, 1971. – 202 с.
24. Коган, Б. Ю. Сто задач по механике / Б. Ю. Коган. – М. : Наука, 1973. – 78 с.
25. Коган, Б. Ю. Сто задач по физике / Б. Ю. Коган. – М. : Наука, 1965. – 62 с.
26. Коган, Б. Ю. Сто задач по электричеству / Б. Ю. Коган. – М. : Наука, 1976. – 62 с.
27. Коршак, Є. В. Методика розв'язування задач з фізики / Є. В. Коршак, С. У. Гончаренко, Н. М. Коршак. – К. : Вища школа, 1976. – 240 с.
28. Краснобокий, Ю. М . Розв'язування задач з фізики : (молекулярна фізика, термодинаміка) : навч. пос. / Ю. М. Краснобокий, М. М. Яровий, П. П. Товбушенко. – К. : Науковий світ, 2002. – 170 с.
29. Краснобокий, Ю. М. Загальна фізика : навч. модуль ПП.05.01 – Механіка : (практичні заняття) : посібн. для студ. / Ю. М. Краснобокий. – Умань : РВЦ «Софія», 2010. – 205 с.
30. Краснобокий, Ю. М. Збірник нестандартних задач з фізики : посібн. для студ. / Ю. М. Краснобокий, М. М. Яровий, П. П. Товбушенко. – Умань : Видавець «Сочінський», 2012. – 165 с.
31. Краснобокий, Ю. М. Розв'язування задач з фізики : (Квантова фізика. Фізика атома та атомного ядра) : навч. пос. / Ю. М. Краснобокий, П. П. Товбушенко, М. М. Яровий. – Умань : РВЦ «Софія», 2008. – 134 с.
32. Краснобокий, Ю. М. Розв'язування задач з фізики : (механіка) : навч. пос. / Ю. М. Краснобокий, П. П. Товбушенко, М. М. Яровий. – К. : Науковий світ, 2001. – 127 с.
33. Краснобокий, Ю. М. Розв'язування задач з фізики : (оптика) : навч. пос. / Ю. М. Краснобокий, М. М. Яровий, П. П. Товбушенко. – Умань : РВЦ «Софія», 2006. – 106 с.
34. Краснобокий, Ю. М. Збірник задач з астрофізичним змістом / Ю.М. Краснобокий, І.А. Ткаченко, В.І. Хитрук. – Умань: ПП Жовтий О.О., 2013. – 168 с.
35. Кузьменков, С. Г. Зорі: Астрофізичні задачі з розв'язаннями: навч. посіб. / С. Г. Кузьменков. – К.: Освіта України, 2010. – 206 с.

36. Лободюк, В. А. Справочник по элементарной физике / В. А. Лободюк, К. П. Рябошапка, О. И. Шулишова. – К. : Наукова думка, 1978. – 448 с.

37. Мартынов, Д. Я. Курс общей астрофизики: Учеб. для вузов / Д. Я. Мартынов. – М.: Наука, 1988. – 640 с.

38. Мартынов, Д. Я. Сборник задач по астрофизике / Д. Я. Мартынов, В.М. Липунов. – М.: Наука, 1986. – 128 с.

39. Меледин, Г. В. Физика в задачах : экзаменационные задачи с решениями / Г. В. Меледин. – М. : Наука, 1990. – 270 с.

40. Мислінчук, В. О. Фізика зір : комплексне довгострокове завдання з астрономії : кредитно-модульні технології навчання : модулі 1-2 : навч.-метод. посібн. / В. О. Мислінчук, В. І. Тищук. – Рівне : РВВ РДГУ, 2009. – 140 с.

41. Новодворская, Е. М. Методика проведения упражнений по физике во втузе / Е. М. Новодворская, Э. М. Дмитриев. – М. : Высшая школа, 1981. – 320 с.

42. Пастушенко, С. М. Розв’язуємо задачі з фізики : Молекулярна фізика і термодинаміка. Електрика і магнетизм / С. М. Пастушенко. – К. : Діал ; Кам’янець-Подільський : Абетка, 2002. – Вип. 2. – 200 с.

43. Пастушенко, С. М. Розв’язуємо задачі з фізики. Коливання і хвилі. Оптика. Квантова фізика / С. М. Пастушенко.– К.: «Діал»; Кам’янець-Подільський: «Абетка», 2004. – Вип. 3. – 183 с.

44. Пастушенко, С. М. Розв’язуємо задачі з фізики. Механіка / С. М. Пастушенко. – К. : Діал ; Кам’янець-Подільський : Абетка, 2002. – Вип. 1. – 220 с.

45. Пинский, А. А. Задачи по физике / А. А. Пинский. – М. : Наука, 1977. – 288 с.

46. Розв’язування задач з курсу загальної фізики / А. А. Остроухов, В. Л. Стрижевський, М. Г. Цвелих [та ін.]. – К. : Радянська шк., 1966. – 504 с.

47. Сборник задач по общему курсу физики / Л. Г. Гурьев, А. В. Кортнев, А. Н. Куценко [и др.]. – М. : Высшая школа, 1972. – 432 с.

48. Сборник задач по общему курсу физики : механика / С. П. Стрелков, Д. В. Сивухин, В. А. Угаров [и др.] ; под общ. ред. И. А. Яковлева. – М. : Наука, 1977. – 288 с.

49. Сборник задач по общему курсу физики : оптика / В. Л. Гинзбург, Л. М. Левин, Д. В. Сивухин [и др.] : под ред. Д. В. Сивухина. – М. : Наука, 1977. – 320 с.

50. Сборник задач по общему курсу физики : термодинамика и молекулярная физика / В. Л. Гинзбург, Л. М. Левин, Д. В. Сивухин [и др.] ; под ред. Д. В. Сивухина. – М. : Наука, 1976. – 207 с.

51. Сборник задач по общему курсу физики : электричество и магнетизм / С. П. Стрелков, Д. В. Сивухин, С. Э. Хайкин [и др.] ; под ред. И. А. Яковлева. – М. : Наука, 1977. – 272 с.

52. Сборник задач по общему курсу физики. Атомная физика. Физика ядра и элементарных частиц / В. Л. Гинзбург, Л. М. Левин, М. С. Рабинович [и др.] : под общ. ред. Д. В. Сивухина. – М. : Наука, 1981. – 223 с.

53. Сборник задач по оптике и атомной физике / под ред. А. Г. Граммакова. – Л. : Изд. Ленингр. ун-та, 1973. – 144 с.

54. Сборник задач по физике / под общ. ред. М. С. Цедрика. – Минск : Вышэйшая школа, 1976. – 320 с.

55. Сборник задач по элементарной физике / Б. Б. Буховцев, В. Д. Кривченков, Г. Я. Мякишев [и др.]. – М. : Наука, 1974. – 439 с.

56. Серова, Ф. Г. Сборник задач по термодинамике / Ф. Г. Серова, А. А. Янкина. – М. : Просвещение, 1976. – 160 с.

57. Соболев, В. В. Курс теоретической астрофизики / В. В. Соболев. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука, 1977. – 544 с.

58. Сперанський, М. М. Як розв'язувати задачі з фізики / М. М. Сперанський. – К. : Радянська школа, 1972. – 288 с.

59. Тарасов, Л. В. Вопросы и задачи по физике / Л. В. Тарасов, А. И. Тарасова ; под ред. Г. И. Епифанова. – М. : Высшая школа, 1968. – 294 с.

60. Ткаченко, И. А. Из опыта проведения астрофизического практикума / И. А. Ткаченко, Ю. Н. Краснобокий // Сборник тезисов XII Международной учебно-методической конференции «Современный физический практикум» – М. : Издательский дом МФО, 2012. – С. 148.

61. Ткаченко, І. А. Астрофізика : лабораторно-практичні роботи : навч.-метод. посібник / Ткаченко І. А. – Умань : Пронікс, 2012. – 128 с.

62. Ткаченко, І. А. Використання розрахункових завдань на лабораторно-практичних заняттях з астрофізики / І. А. Ткаченко, Ю. М. Краснобокий // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка / Чернігівський державний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка ; гол. ред. Носко М. О. – Чернігів : ЧДПУ, 2012. – Вип. 99. – С. 323-327.

63. Ткаченко, І. А. Геометричний спосіб розв'язування задач із сферичної астрономії / І. А. Ткаченко // Фізика та астрономія в школі. – 2006. – № 5. – С. 25–28.

64. Ткаченко, І. А. Лабораторно-практичні заняття з астрономії : навч. посібн. з астрономії / І. А. Ткаченко. – К. : Науковий світ, 2002. – 61с.

65. Ткаченко, І. А. Підготовка вчителя астрономії до розв'язування задач з астрофізичним змістом / І. А. Ткаченко, Ю. М. Краснобокий // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наукових праць. Вип. 10 : в 3 т. – Кривий Ріг : В-во НМетАУ, 2012. – Т. 2. Теорія та методика навчання фізики. – С. 272–278.

66. Ткаченко, І. А. Розв'язування задач з астрофізичним змістом – дієвий спосіб формування фундаментальних знань студентів / І. А. Ткаченко, Ю. М. Краснобокий // Фізика та астрономія в школі. – 2012. – № 5. – С. 13–17.

67. Фейнман, Р. Задачи и упражнения с ответами и решениями // Фейнмановские лекции по физике. Вип. 10 : пер. с англ. / Р.Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс ; под ред. А. П. Леванюка. – М. : Мир, 1978. – 540 с.

68. Фирганг, Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е. В. Фирганг. – М. : Высшая школа, 1978. – 351 с.

69. Холидей, Д. Вопросы и задачи по физике / Д. Холидей, Р. Резник ; пер. с англ. С. Н. Немирова. – М. : Просвещение, 1969. – 240 с.

70. Чепрасов, В. Г. Практикум з курсу загальної астрономії / В. Г. Чепрасов. – К. : Радянська школа, 1967. – 192 с.

71. Чертов, А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Высшая школа, 1988. – 527 с.

72. Шаскольская, М. П. Сборник избранных задач по физике / М. П. Шаскольская, И. А. Эльцин. – М. : Наука, 1969. – 256 с.

73. Яровий, М. М. Розв’язування задач з фізики : (електрика і магнетизм) : навч. посібн. / М. М. Яровий, Ю. М. Краснобокий, П. П. Товбушенко. – К. : Науковий світ, 2004. – 219 с.

# *МЕХАНІКА НЕБЕСНИХ ТІЛ*

## ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Підписано до друку 25.04.2014. Формат 60х90 1/32
Папір офсет.
Обл.-вид. арк. 7,6. Ум. друк. арк. 7,2.
Тираж 300. Зам. № 1849.

**Видавець та виготовлювач**
**ФОП Жовтий О.О.**

20300, м. Умань, вул. Садова, 2
(УДПУ, навчальний корпус № 1)
Тел. 097 255 65 07
047 44 5 21 66
093 540 78 82
e-mail: nastek@meta.ua
www.foto-na.net.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК, № 2444 від 22.03.2006 р.