

## НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН В ОКОЛІ КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ, З ЯКОЇ ВИХОДИТЬ ТРІЩИНА

### STRESS-STRAIN STATE NEAR THE CORNER POINT OF BROKEN INTERFACE, FROM WHICH THE CRACK GOES

Михайло ДУДИК, Володимир ФЕНЬКІВ, Геннадій ХАЗІН

*Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини;  
Умань, Україна. E-mail: fenkiv@ukr.net*

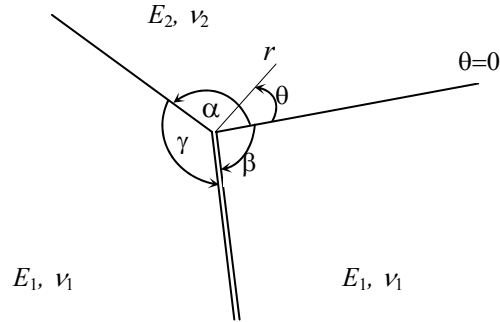
В умовах плоскої деформації розглянуто канонічну задачу теорії пружності про поле напружень в околі куткової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, з якої у довільному напрямку виходить прямолінійна тріщина. Розв’язання задачі здійснено методом розділення змінних із залученням формул Відгардта–Вільямса розвинень за власними функціями поля напружень біля вершини однорідного клина. Виведено характеристичне рівняння задачі для обчислення показника ступеня сингулярності напружень та здійснено числовий аналіз його залежності від пружних параметрів з’єднаних матеріалів і орієнтації тріщини. Отримано асимптотичні вирази для поля напружень біля вершини тріщини.

Дослідження тріщин у кусково-однорідних тілах становить значний інтерес для механіки руйнування композитів, зварних і клеєних з’єднань, будівельних матеріалів і конструкцій. При цьому переважна більшість робіт присвячена міжфазним тріщинам, розташованим на межі поділу середовищ. У той же час недостатньо дослідженою виявляється задача про напружено-деформований стан біля вершини тріщини, що виходить в одне з середовищ з куткової точки межі поділу двох різних матеріалів. Зокрема в [1] досліджена поведінка напружень в кінці тріщини нормального відриву, що виходить по бісектрисі з вершини кута зламу межі з’єднання двох матеріалів.

В поданій роботі в умовах плоскої деформації розглянуто статичну канонічну задачу теорії пружності про поле напружень в околі куткової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга  $E_1$ ,  $E_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ , з якої у довільному напрямку виходить прямолінійна тріщина (див. рисунок). Тріщина моделюється півнескінченним математичним розрізом нульової товщини з вільними від навантаження берегами. На межі поділу матеріалів уздовж ліній  $\theta = 0$  і  $\theta = \alpha$  припускається ідеальне зчеплення. У результаті приходимо до крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\begin{aligned}
\theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\
\theta = \alpha: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\
\theta = \alpha + \gamma \cup -\beta: \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Тут  $\langle f \rangle$  позначає скачок величини  $f$ .



Розрахункова схема задачі

Використовуючи формули Відгардта–Вільямса розвинень за власними функціями поля напружень біля вершини однорідного клина [2] подамо шукані напруження і похідні переміщень у вигляді:

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = r^\lambda f_1(\theta), \quad \sigma_\theta = r^\lambda f_2(\theta), \quad \sigma_r = r^\lambda f_3(\theta), \\
\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = -\frac{(1+\nu_i)\lambda r^{\lambda-1}}{E_i(\lambda+2)} f_4(\theta), \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{(1+\nu_i)\lambda r^\lambda}{E_i(\lambda+2)} f_5(\theta), \\
f_1(\theta) = -a_1^i \cos(\lambda+2)\theta - a_2^i \frac{\lambda}{\lambda+2} \cos \lambda\theta + a_3^i \sin(\lambda+2)\theta + a_4^i \frac{\lambda}{\lambda+2} \sin \lambda\theta, \\
f_2(\theta) = a_1^i \sin(\lambda+2)\theta + a_2^i \sin \lambda\theta + a_3^i \cos(\lambda+2)\theta + a_4^i \cos \lambda\theta, \\
f_3(\theta) = -\left[ a_1^i \sin(\lambda+2)\theta + a_2^i \frac{\lambda-2}{\lambda+2} \sin \lambda\theta + a_3^i \cos(\lambda+2)\theta + a_4^i \frac{\lambda-2}{\lambda+2} \cos \lambda\theta \right], \\
f_4(\theta) = a_1^i (\lambda+2) \cos(\lambda+2)\theta + a_2^i (\lambda+4-4\nu_i) \cos \lambda\theta - \\
- a_3^i (\lambda+2) \sin(\lambda+2)\theta - a_4^i (\lambda+4-4\nu_i) \sin \lambda\theta, \\
f_5(\theta) = a_1^i (\lambda+2) \sin(\lambda+2)\theta + a_2^i (\lambda-2+4\nu_i) \sin \lambda\theta + \\
+ a_3^i (\lambda+2) \cos(\lambda+2)\theta + a_4^i (\lambda-2+4\nu_i) \cos \lambda\theta,
\end{aligned} \tag{2}$$

де  $a_j^i = \text{const}$ ,  $j = 1 \dots 4$ ,  $i = 1$  для  $\alpha \leq 0 < \alpha + \gamma$ ,  $i = 2$  для  $0 \leq \theta < \alpha$ ,  $i = 3$  для  $-\beta \leq \theta < 0$ .

Підставляючи (2) в (1), отримаємо систему 12-ти однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $a_j^i$ . Ця система має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю, що приводить до характеристичного рівняння відносно  $\lambda$ :

$$D(\lambda) = 0. \quad (3)$$

$$D(\lambda) = [\delta_{23}\delta_{14} - \delta_{13}\delta_{24}]\Delta_1 + [\delta_{24}\delta_{12} - \delta_{14}\delta_{22}]\Delta_2 + [\delta_{22}\delta_{13} - \delta_{12}\delta_{23}]\Delta_3 + \\ + [\delta_{21}\delta_{13} - \delta_{11}\delta_{23}]\Delta_4 + [\delta_{24}\delta_{11} - \delta_{14}\delta_{21}]\Delta_5 + [\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{12}\delta_{21}]\Delta_6,$$

$$\Delta_1 = -(1 - p_1)(1 + p_3)[(\lambda + 1)\sin 2\beta - \sin 2(\lambda + 1)\beta];$$

$$\Delta_2 = -4(\lambda + 1)^2 \sin^2 \beta + 2p_3 \cos 2(\lambda + 1)\beta + p_3^2 + 1;$$

$$\Delta_3 = (1 - p_1)(1 + p_3)[(\lambda + 1)\sin 2\beta + \sin 2(\lambda + 1)\beta];$$

$$\Delta_4 = \lambda[(\lambda + 1 + p_2)(\lambda + 1 - p_3) + (\lambda + 2)(\lambda + 1 - p_1)] - \\ - (\lambda + 1)[\lambda(\lambda + 1 + p_2) + (\lambda + 1 - p_1)(\lambda + 1 - p_3)]\cos 2\beta - \\ - [(2\lambda + 2 - p_1)p_3 - p_2]\cos 2(\lambda + 1)\beta;$$

$$\Delta_5 = -(\lambda + 2)[(\lambda + 1 + p_3)(\lambda + 1 - p_2) + \lambda(\lambda + 1 + p_1)] + \\ + (\lambda + 1)[(\lambda + 1 + p_1)(\lambda + 1 + p_3) + (\lambda + 2)(\lambda + 1 - p_2)]\cos 2\beta + \\ + [(2\lambda + 2 + p_1)p_3 + p_2]\cos 2(\lambda + 1)\beta;$$

$$\Delta_6 = \lambda(\lambda + 2)[2(\lambda + 1)^2 - p_1^2 - p_2^2] - 2[(\lambda + 1)^2 p_3 - p_1 p_2]\cos 2(\lambda + 1)\beta - \\ + (\lambda + 1)[\lambda(\lambda + 1 + p_1)(\lambda + 1 + p_2) + (\lambda + 2)(\lambda + 1 - p_1)(\lambda + 1 - p_2)]\cos 2\beta;$$

$$\delta_{11} = p_3 \sin(\lambda + 2)(\alpha + \gamma) - (\lambda + 1)\sin(\lambda + 2)(\alpha - \gamma) + \\ + (\lambda + 2)\sin[(\lambda + 2)\alpha - \lambda\gamma];$$

$$\delta_{12} = (\lambda + 2)\{p_1 \sin \lambda(\alpha + \gamma) + 2(\lambda + 1)\sin \gamma \cos[(\lambda + 1)\gamma - \lambda\alpha] + p_2 \sin[(\lambda + 2)\gamma + \lambda\alpha]\} - \\ - 2(\lambda + 1 + p_2)\cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\gamma;$$

$$\delta_{13} = p_3 \cos(\lambda + 2)(\alpha + \gamma) - (\lambda + 1)\cos(\lambda + 2)(\alpha - \gamma) + (\lambda + 2)\cos[(\lambda + 2)\alpha - \lambda\gamma];$$

$$\delta_{14} = (\lambda + 2)\{p_1 \cos \lambda(\alpha + \gamma) + 2(\lambda + 1)\sin \gamma \sin[(\lambda + 1)\gamma - \lambda\alpha] + p_2 \cos[(\lambda + 2)\gamma + \lambda\alpha]\} + \\ + 2(\lambda + 1 + p_2)\sin \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\gamma;$$

$$\delta_{21} = p_3 \cos(\lambda + 2)(\alpha + \gamma) + (\lambda + 1)\cos(\lambda + 2)(\alpha - \gamma) - \lambda \cos[(\lambda + 2)\alpha - \lambda\gamma];$$

$$\delta_{22} = \lambda p_1 \cos \lambda(\alpha + \gamma) + (\lambda + 1)[(\lambda + 2)\cos[(\lambda + 2)\gamma - \lambda\alpha] - \lambda \cos \lambda(\alpha - \gamma)] + \\ + p_2(\lambda + 2)\cos[(\lambda + 2)\gamma + \lambda\alpha] - 2(\lambda + 1 + p_2)\cos \lambda\alpha \cos(\lambda + 2)\gamma;$$

$$\delta_{23} = -p_3 \sin(\lambda + 2)(\alpha + \gamma) - (\lambda + 1)\sin(\lambda + 2)(\alpha - \gamma) + \lambda \sin[(\lambda + 2)\alpha - \lambda\gamma];$$

$$\delta_{24} = -\lambda p_1 \sin \lambda(\alpha + \gamma) - (\lambda + 1)[(\lambda + 2)\sin[(\lambda + 2)\gamma - \lambda\alpha] + \lambda \sin \lambda(\alpha - \gamma)] - \\ - p_2(\lambda + 2)\sin[(\lambda + 2)\gamma + \lambda\alpha] + 2(\lambda + 1 + p_2)\sin \lambda\alpha \cos(\lambda + 2)\gamma;$$

$$\text{тут } p_1 = \frac{1+ek_2}{1-e}, p_2 = \frac{k_1-ek_2}{1-e}, p_3 = \frac{k_1+e}{1-e}, k_{1,2} = 3-4\nu_{1,2}, e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} \frac{E_1}{E_2}.$$

Рівняння (3) має зліченну множину коренів  $\lambda_s$ , що дозволяє подати шукані напруження у вигляді ряду, який складається з доданків типу (2), наприклад,  $r_{r\theta} = \sum_s r^{\lambda_s} f_1^{(s)}(\theta)$ . На корені рівняння (3) накладається умова

$\text{Re} \lambda_s > -1$ , яка випливає з вимоги обмеженості переміщень. Зокрема, кореням, що лежать у смузі  $-1 < \text{Re} \lambda < 0$ , відповідають сингулярні при  $r \rightarrow 0$  доданки в розвиненнях поля напружень, які визначають асимптотичну поведінку напружень при наближенні до вершини тріщини.

Як показав числовий аналіз, рівняння (3) в залежності від значень кута зламу межі поділу  $\alpha$ , кута нахилу тріщини до межі  $\beta$  та пружних параметрів з'єднаних матеріалів може мати від одного до трьох дійсних коренів  $\lambda_s$  або два комплексно спряжені  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$  і один або жодного дійсних коренів у смузі  $-1 < \text{Re} \lambda < 0$  (див. таблицю). При цьому для більш точного опису напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини необхідно врахувати не лише найменший з цих коренів  $\lambda_1$  але і наступний за величиною  $\lambda_2$ .

**Показники сингулярності напружень  $\lambda_i$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$ )**

$E_1/E_2$	$\alpha$	$\beta$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
0,05	110°	50°	$-0,5320 \pm 0,0557i$		–
		130°	-0,411	-0,3872	-0,0686
	250°	50°	-0,4218	0,1445	–
		130°	$-0,4240 \pm 0,0105i$		-0,0994
0,2	110°	50°	$-0,5074 \pm 0,0277i$		–
		130°	-0,4246	-0,3916	-0,0249
	250°	50°	-0,4419	-0,2705	–
		130°	$-0,4505 \pm 0,011i$		-0,0925
5	110°	50°	-0,6764	-0,5010	-0,1320
		130°	-0,7005	-0,6812	–
	250°	50°	-0,6997	-0,5891	-0,0116
		130°	-0,5602	-0,4075	–
20	110°	50°	-0,8212	-0,6181	-0,1709
		130°	-0,8376	-0,8244	–
	250°	50°	-0,8111	-0,7046	-0,1586
		130°	-0,5784	-0,3478	–

Існування комплексно спряжених коренів передбачає можливість перекриття берегів тріщини, у зв'язку з чим модель повністю відкритої тріщини стає при відповідних параметрах задачі некоректною [3].

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок про те, що концентрація напружень в кутовій точці зростає зі зростанням  $E_1/E_2$ . Залежність від коефіцієнтів Пуассона є незначною.

З отриманого розв'язку знайдені вирази для поля дотичного і нормального напружень та досліджено його залежність від параметрів задачі та полярного кута  $\theta$ .

1. Каминский А.А. О поведении напряжений вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред/ А.А. Каминский, М.В. Дудик, В.Н. Дякон, Н.И. Затула // ТиПМ. – 2001. – Вып. № 32. – С. 103–108.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М., 1974. – 640 с.
3. Comninou M. The Interface Crack / M. Comninou // Transactions of the ASME. J. of Applied Mechanics. – 1977. – 44, № 12. – P. 631–636.