

Каминский А.А., Кипнис Л.А.,  
Хазин Г.А., Побережець С.І.

## О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ ТРЕЩИНЫ КОТТРЕЛЛА

Существуют экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что хрупкому разрушению тела предшествует микропластическая деформация – движение и остановка дислокации, приводящая в результате к образованию трещин.

В соответствии с одним из изучаемых физикой твердого тела дислокационных механизмов зарождения трещин – механизмом Коттрелла [1], в результате объединения двух дислокаций, движущихся в пересекающихся плоскостях скольжения, образуется нескользящая дислокация, которая служит препятствием на пути движения других дислокаций и очагом зарождения трещины. Дислокации, движущиеся в обеих плоскостях скольжения, останавливаются перед этим препятствием, создавая скопление дислокаций, которое вызывает высокую концентрацию напряжений вблизи препятствия. Вследствие такой концентрации напряжений происходит разрыв сплошности и образования трещины.

Ниже с позиций механики разрушения на основе точного решения задачи теории упругости, которая соответствует простейшей модели механизма Коттрелла, исследуется на устойчивость равновесие образовавшейся трещины.

В условиях плоской деформации рассмотрим однородную изотропную плоскость, содержащую две пересекающиеся прямые пластические линии скольжения конечной длины, симметричные относительно биссектрисы

угла между ними (рис. 1, где  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ). На бесконечности

(при  $x, y \rightarrow \infty$ )  $\sigma_y \rightarrow \sigma$ ,  $\tau_{xy} \rightarrow 0$ ,  $\sigma_x \rightarrow 0$ . Вне линий скольжения материал тела предполагается упругим. На линии скольжения допускается разрыв лишь касательного смещения, а касательное напряжение равно заданной постоянной материала  $\tau$ , отвечающей микропластической деформации упругого тела.

Задача теории упругости, изображенная на рис.1, рассмотрена в [2]. На основе ее решения можно показать, что точка О пересечения линий скольжения представляет собой концентратор напряжений со степенной особенностью.

При этом показатель степени сингулярности напряжений  $\lambda$  представляет собой единственный на интервале  $] -1; 0[$  корень уравнения

$$\begin{aligned} & (\cos 2\alpha - \cos 2\lambda + 1) \sin 2\lambda - \sin 2\lambda - \cos 2\lambda + 1 \sin 2\alpha + \\ & + \cos 2\alpha - \cos 2\lambda + 1 \sin 2\lambda - \sin 2\lambda - \cos 2\lambda + 1 \sin 2\alpha = 0 \end{aligned}$$

Зависимость  $\lambda$  от угла  $\alpha$  качественно изображена на рис. 2 ( $\alpha_* \approx 126^\circ$ ).

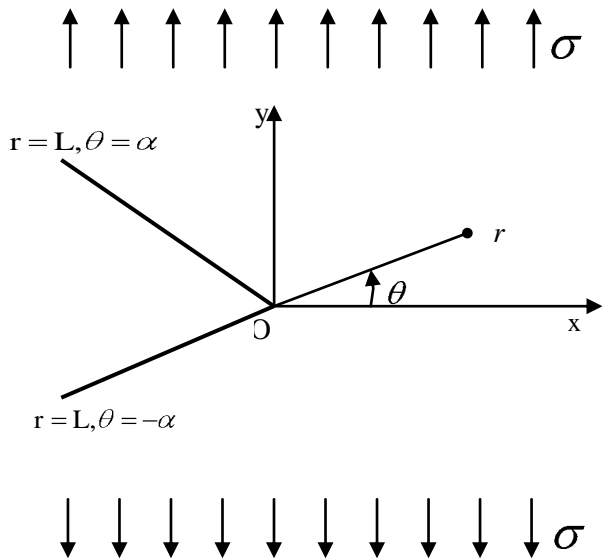


Рис.1

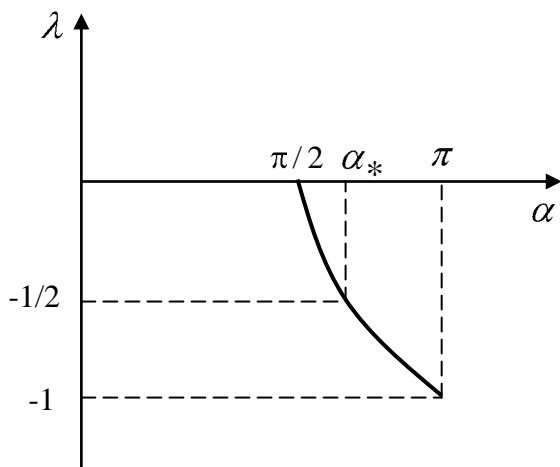


Рис.2

Вследствие концентрации напряжений в точке пересечения

линий скольжения, возможны разрыв сплошности вблизи неё и образование исходящей из нее трещины, длина которой значительно меньше длины линий скольжения. Образование трещины таким путем соответствует механизму Коттрелла зарождения трещины (трещина Коттрелла).

Ставится задача определения условий устойчивости равновесия образовавшейся трещины Коттрелла.

Чтобы исследовать на устойчивость равновесие трещины нормального разрыва, необходимо найти коэффициент  $K_I$  интенсивности напряжений в ее конце.

Для определения  $K_I$  служит задача теории упругости с полубесконечными линиями скольжения, изображенная на рис.3. При  $r \rightarrow \infty$  в этой задаче главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды совпадают с главными членами разложений напряжений в асимптотические ряды в задаче теории упругости, изображенной на рис.1, при  $r \rightarrow 0$ .

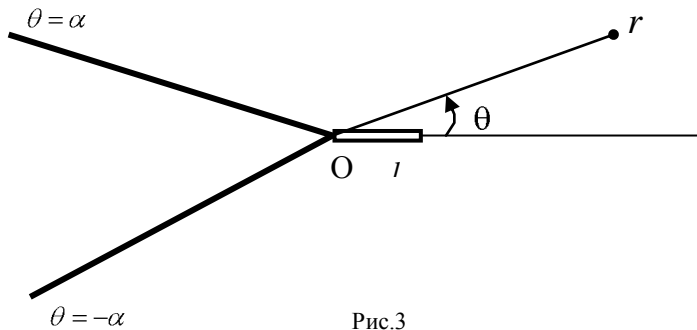


Рис.3

С использованием аппарата интегрального преобразования Меллина указанная задача сводится к функциональному уравнению Винера-Хопфа. Строится точное решение уравнения и выводится следующая формула для коэффициента интенсивности напряжений в конце трещины Коттрелла.

$$k = As + B \quad (1)$$

$$A = \frac{q_2}{2} \sqrt{d} - \frac{q_1 Q \sin 2\alpha}{2} d^{\lambda+1/2}, \quad B = \frac{q_2}{\sin 2\alpha} \sqrt{d} + q_1 Q d^{\lambda+1/2}$$

$$q_1 = \frac{\sqrt{2g}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+3/2)G^+}, \quad q_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}G^+},$$

$$G^+ = \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G}{z-p} dz\right] \quad (\text{Re } p < 0),$$

$$G = \frac{(\Delta_1\Delta_2 + \Delta_3\Delta_4) \cos p\pi}{(\Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_5) \sin p\pi},$$

$$\Delta_1 = \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha, \quad \Delta_2 = \sin 2p(\alpha - \alpha) - p \sin 2\alpha,$$

$$\Delta_3 = \cos 2p(\alpha - \alpha) - \cos 2\alpha, \quad \Delta_4 = 2(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha),$$

$$\Delta_5 = \cos 2p\alpha - \cos 2\alpha,$$

$$k = \frac{K_1}{\tau\sqrt{L}}, \quad s = \frac{\sigma}{\tau}, \quad d = \frac{1}{L}.$$

Здесь  $g(\alpha), Q(\alpha)$ - известные отрицательные функции,  $\Gamma(z)$ - гамма-функция

С помощью (1) получаем выражение для производной  $\frac{\partial K}{\partial d}$ , которое запишем в следующих двух эквивалентных формах:

$$\frac{\partial K}{\partial d} = \frac{1}{2\sqrt{d}} (A's + B'), \quad (2)$$

$$A' = \frac{q_2}{2} - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) q_1 Q \sin 2\alpha d^\lambda, \quad B' = \frac{q_2}{\sin 2\alpha} + 2\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) q_1 Q d^\lambda;$$

$$\frac{\partial K}{\partial d} = \frac{1}{2\sqrt{d}} \left[ \frac{q_2}{2} + \frac{2}{\sin 2\alpha} + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) q_1 Q \sin 2\alpha d^\lambda s + 2\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) q_1 Q d^\lambda \right] \quad (3)$$

Если  $\alpha \leq \alpha_*$ ,  $\alpha_* \approx 126^\circ$ , то, поскольку  $\lambda + 1/2 \geq 0$ ,  $q_1 < 0$ ,  $q_2 > 0$ ,  $Q < 0$ ,  $s + 2/\sin 2\alpha > 0$ , из (3) следует, что

$$\frac{\partial K}{\partial d} > 0.$$

Пусть  $\alpha > \alpha_*$ . Тогда  $\lambda + 1/2 < 0$  и, поэтому,  $B' < 0$ , а  $A'$  будет отрицательным, если

$$d < M(\alpha), \quad M(\alpha) = \left[ \frac{2(\lambda + 1/2)q_1 Q \sin 2\alpha}{q_2} \right]^{-1/\lambda} \quad (4)$$

Расчеты показывают, что при  $\alpha^\circ \geq 127^\circ$  функция  $M(\alpha)$  принимает значения, большие единицы. Поскольку  $d < 1$ , условие (4) выполняется. Таким образом, из (2) следует, что

$$\frac{\partial K}{\partial d} < 0.$$

На основании полученных результатов в силу критерия устойчивости равновесия трещины нормального разрыва [3] заключаем, что равновесие трещины Коттрелла будет устойчивым, если  $\alpha > \alpha_*$ ,  $\alpha_*^\circ \approx 126^\circ$ , и неустойчивым, если  $\alpha \leq \alpha_*$ .

Поскольку образование трещины по механизму Коттрелла происходит в объёмно-центрированной кубической решетке, соответствующие микропластические линии скольжения в упругом теле пересекаются под прямым углом ( $\alpha^\circ = 135^\circ$ ). Возможны исключения, вызванные внешними факторами, когда этот угол отклоняется от прямого. Из полученных результатов следует, что устойчивость равновесия трещины Коттрелла сохраняется при отклонении угла  $\alpha$ , равного  $135^\circ$ , (рис.3) влево на любой угол, а вправо – на угол, не превосходящий  $8^\circ$ . Если указанный угол отклоняется больше или равен  $9^\circ$ , то после достижения состояния предельного равновесия режим развития трещины Коттрелла будет динамическим.

**Список литературы:** 1. Cottrell A.H. Theory of brittle fracture in steel and similar metals // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng.–1958. – **80**, №4. – p.192-203. 2. Каминский А.А., Быковцев А.С., Кипнис Л.А., Хазин Г.А. Об интенсивности напряжений в концах сдвиговых трещин, исходящих из точки упругой плоскости // Доп. НАН України.– 2005.–№1.– С. 56-59. 3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.