УДК 539.375

Л.А. Кипнис, Г.А. Хазин, Т.В. Полищук

О НАЧАЛЬНОМ ЕТАПЕ ПРОЦЕССА РАССЛАИВАНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ТЕЛА ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ

Большинство работ, посвященных задачам о расчете узких зон предразрушения вблизи остроконечных концентраторов напряжений, относится к случаям, когда такими концентраторами являются концы трещин и угловые точки границы тела [1,2,6,8,11]. Подобных работ, в которых рассматривается угловые точки границы раздела сред, значительно меньше. В работе [5] выполнен расчет межфазной пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела изотропных сред. В случаях кусочно-однородного изотропного упругого и упругопластического тела задачи о расчете начальных узких зон предразрушения, развивающихся из угловой точки границы раздела сред в одной из его частей, решены в работах [3,4]. В данной работе решена задача о развитии межфазных зон ослабленных связей из угловой точки границы раздела сред, которые представляют собой начальный этап процесса расслаивания кусочно-однородного изотропного упругого тела вблизи нее.

<u>Постановка задачи</u>. В условиях плоской деформации в рамках статической симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное тело с границей раздела сред в форме сторон угла, составленное из изотропных линейно-упругих частей, соединенных между собой тонким упругим связующим слоем (охрупчившийся клей).

В соответствующей задаче линейной теории упругости в силу обоих положений о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [9] угловая точка границы раздела сред представляет собой остроконечный концентратор напряжений со степенной особенностью. При этом справедлива следующая формула

$$\sigma \quad = \quad + \quad , \; r \to$$

(полярная система координат аналогична изображенной на рисунке).

Здесь

$$g = \quad \lambda\alpha + \quad \lambda + \quad \alpha ,$$

$$g_1 = \lambda + \quad - \lambda - \quad \lambda + \quad \lambda \, \pi - \alpha \quad \lambda + \quad \pi - \alpha \; - \lambda \quad \lambda \, \pi - \alpha \times$$
$$\times \quad \lambda + \quad \pi - \alpha \quad \lambda + \quad \alpha \quad \lambda + \quad \pi - \alpha \; + \quad + \quad \lambda + \quad \times$$
$$\times \quad \lambda + \quad \alpha \quad \lambda + \quad \pi - \alpha \; + \quad \lambda + \quad \alpha \quad \lambda + \quad \pi - \alpha \; \times$$
$$\times \quad \lambda \, \pi - \alpha \quad \lambda + \quad \pi - \alpha$$

$$g_2 = \quad - \lambda - \quad + \lambda + \quad \lambda + \quad \lambda \, \pi - \alpha \quad \lambda + \quad \pi - \alpha \; - \lambda \quad \lambda \, \pi - \alpha \times$$
$$\cos(\lambda + \quad \pi - \alpha \quad \lambda\alpha \quad \lambda + \quad \pi - \alpha \; - \quad + \quad \lambda + \quad \lambda\alpha \times$$
$$\sin(\lambda + \quad \pi - \alpha \; + \lambda \quad \lambda\alpha \quad \lambda + \quad \pi - \alpha \quad \lambda \, \pi - \alpha \quad \lambda + \quad \pi - \alpha$$

$e = \dfrac{1 + \ldots}{1 + \nu} \quad = \dfrac{E}{E_2} \quad = - \nu .$

В этих формулах E_1, E_2, $(E_1 >$ – модули Юнга; ν ν – коэффициенты Пуассона; 2α – угол между линиями границы раздела сред, которому соответствует материал 2.

Показатель степени сингулярности напряжений λ представляет собой единственный в интервале (-1;0) корень уравнения

$$\Delta - \; - \; = \; \Delta \; = \sigma \; + \sigma \; + \sigma$$

$$\sigma \; = \; \alpha + \; \alpha \; \pi - \alpha + \; \alpha$$

$$\sigma \; - \; \pi - \; \alpha + \; \alpha \; \pi - \alpha + \; \alpha -$$

$$- \; \pi - \alpha - \; \alpha \; \alpha - \; \alpha$$

$$\sigma \; = \; \pi - \alpha - \; \alpha \; \alpha - \; \alpha$$

Постоянная C должна определятся из решения каждой конкретной задачи линейной теории упругости, в которой фигурирует граница раздела сред в форме сторон угла.

Результаты расчетов показывают, что $g(\alpha <$ при $\alpha \in \; \alpha \cup \pi \; \alpha$ $g(\alpha >$ при $\alpha \in \alpha \; \pi \; \cup \alpha \; \pi$ $g(0) = \; \alpha = \; \pi \; = \; \alpha = \; \pi = \;$. Если e_0 увеличивается, то α, α уменьшаются. При $\nu = \nu =$ значениям e_0, равным 2; 3; 5; 10, соответствуют значения $180\alpha \; \pi$, равные 38,2; 34,4; 29,3; 21,7, и значения $180\alpha \; \pi$, равные 134,2; 133,4; 133,1; 131,3.

Будем считать, что $Cg >$. Тогда $\sigma \; \to +\infty$ при $r \to$ и, поэтому, на границе раздела сред вблизи угловой точки нормальные напряжения являются растягивающими.

В этом случае вследствие высокой концентрации напряжений в угловой точке возможно начало процесса расслаивания кусочно-однородного изотропного упругого тела вблизи нее – возникновение и развитие из нее межфазных зон ослабленных связей, размер которых в значительной степени меньше размеров тела.

Ставится задача определения длины зон ослабленных связей.

Поскольку преимущественные деформации в зоне ослабленных связей развиваются по механизму отрыва, будем моделировать ее линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной материала тонкого упругого связующего слоя δ (сопротивление отрыву).

Учитывая малость зоны ослабленных связей, приходим к плоской статической симметричной задачи линейной теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей разделы конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на этой границе (рисунок). На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналоговой задачи без разделов (задача К), порождаемое единственным в интервале (-1;0) корнем ее характеристического уравнения $\Delta - \; - \; = \;$. Произвольная постоянная *C*, входящая в указанное решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определятся из решения внешней задачи.

Граничные условия задачи имеет следующий вид:

$$\theta = \pi - \alpha \quad \tau = \quad \theta = -\alpha \quad \tau = \quad =$$

$$\theta = \quad \sigma = \tau = \quad = \qquad (1)$$

$$\theta = \quad < \quad \sigma = \sigma \quad \theta = \quad > \quad = \qquad (2)$$

$$\theta = \quad \to \infty \quad \sigma = \quad + \qquad (3)$$

Здесь $-\alpha \le \theta \le \pi - \alpha$ – скачок a.

Решения сформулированной задачи линейной теории упругости представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого из условий (2) имеем

$$\theta = \quad < \quad \sigma = \sigma - \quad , \qquad (4)$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача – задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Для построения решения первой задачи будем использовать метод Винера–Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [5, 7, 10].

Решения уравнения Винера–Хопфа. Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе из условий (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера–Хопфа:

$$\Phi \quad + \frac{-}{p + \quad} \quad \frac{-}{+ \lambda \; +} \quad - \quad \pi \quad \Phi \quad ,$$

$$A = \frac{((1 \quad + \quad + \quad +}{(2[æ_1 + \quad + \quad + \quad}, \qquad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

$$G_1(p) = \quad + \quad + \quad + \quad + \quad \pi,$$

$$G_2(p) = \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad \pi,$$

$$a_0(p) = \quad + \quad \pi - \alpha \; + \quad \alpha \quad \alpha + \quad \alpha \; ,$$

$$a_0(p) = \quad + \quad \alpha + \quad \alpha \quad \pi - \alpha \; - \quad \alpha \; ,$$

$$b_0(p) = \quad \alpha + \quad \alpha \quad \pi - \alpha \; + \quad \alpha \; ,$$

$$b_1(p) = \quad + \quad + \quad \pi - \quad \alpha + \quad \alpha \quad \pi - \alpha + \quad \alpha -$$

$$- \quad \pi - \alpha - \quad \alpha \quad \alpha - \quad \alpha$$

$$b_2(p) = \quad \pi - \alpha - \quad \alpha \quad \alpha - \quad \alpha \quad \sigma = -$$

$$\Phi \quad = \int_1^\infty \quad \rho,$$

$$\Phi \quad = \frac{}{2\ 1 - \nu} \int^1 \left(\quad \right) \quad \rho \qquad (5)$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$; $\varepsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа.

Подобные уравнения решены, например, в [5, 10].

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\Phi \quad p = \mathrm{K} \quad p \ G \quad p \left\{ \frac{}{p \quad 1} \left[\frac{1}{1 \ G \quad 1} \quad \frac{1}{p \ G \quad p} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{}{p + \lambda_0 + 1} \left[\frac{1}{{}_0 \ 1 \ G \quad {}_0 \ 1} \quad \frac{1}{p \ G \quad p} \right] \right\} \quad \operatorname{Re} p < 0,$$

$$\Phi \quad p = \frac{pG^- \quad p}{\mathrm{K} \quad p} \left[\frac{}{p + 1 \ \mathrm{K} \quad -1 \ G \quad -1} + \right.$$

$$\left. + \frac{}{(p + \quad + \quad)K^+} \frac{\sigma}{(- \quad - \quad)G^+} \frac{}{(- \quad - \quad)} \right] \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

$$\exp\left[\quad \int \quad \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} p < \\ p > \end{array} \right. ,$$

$$\mathrm{K} \quad p = \frac{\Gamma \ 1 \mp p}{\Gamma \ {}^1\!/_2 \mp p}; \qquad (6)$$

$\Gamma \ z$ – гамма-функция.

Определение длины зон ослабленных связей.

С помощью (6) получаем выражение для коэффициента K_I интенсивности напряжений в конце разреза

$$K_I = \frac{2\sqrt{\quad}}{1 + \quad + \quad + \quad} \left[\quad \right]. \qquad (7)$$

Длина зоны ослабленных связей определяется из условия ограниченности напряжений вблизи конца линии разрыва нормального смещения, т.е. из условия равенства нулю коэффициента K_I.

Приравнивая к нулю правую часть (7), получаем следующую формулу для определения длины l зон ослабленных связей:

$$l = \left(\quad \right), \qquad L = \left[\quad \right].$$

(8)

Формула (8) устанавливает закон развития начальных межфазных зон ослабленных связей из угловой точки границы раздела сред в кусочно-однородном изотропном упругом теле.

В таблице приведены некоторые значения $-\lambda$ (числитель) и L (знаменатель) при $\nu = \nu_{-} =$ $\tau =$ α π .

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. С ростом модуля параметра напряжения C длина зон ослабленных связей возрастает по степенному закону. Чем больше постоянная материала связующего слоя σ, тем меньше длина зон ослабленных связей. Если $C >$ $<$, то чем больше отличаются друг от друга материалы, тем шире (уже) область значений угла α, при которых возможно начало процесса расслаивания кусочно-однородного изотропного упругого тела вблизи угловой точки.

Если $(|C| / \sigma$ слабо изменяется с изменениями α ν ν_{-}, то в каждом из интервалов $(0;\alpha$ α π π α_{-} α_{-} π с расчетом угла α длина зон ослабленных связей сначала увеличивается, а затем уменьшается. При этом в случае $\nu = \nu_{-} =$ максимальным значением длины зон ослабленных связей соответствует значения 180α π, равные 18,4; 56,8; 123,1; 163,9 ($e_0 =$), 14,1; 47,6; 119,3; 158,2 ($e_0 =$), 4,3; 40,2; 118,4; 155,4 ($e_0 =$), 2,1; 32,4; 115,2; 151,7 ($e_0 =$). Чем больше отличаются друг от друга материалы, тем меньше угол α, при котором длина зон ослабленных связей является наибольшей, и тем больше эта максимальная длина.

При некотором значениям возрастающей внешней нагрузки возможны разрыв сплошности вдоль зон ослабленных связей и образование трещин – расслоений, исходящих из угловой точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитных материалов. – 1979. – №3. – С. 387-396.
2. Каминський А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А. Расчет пластической зоны в угловой точке в рамках модели «трезубец» // Прикладная механика. – 2002.– Т.38, №5. – С.110-116.
3. Каминський А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А., Красильников А.Е. Анализ поведения напряжений вблизи угловой точки границе раздела упругих сред при наличии зоны предразрушения // Теоретическая и прикладная механика. – 2010. – №1(47). – С.20-26.
4. Каминський А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А., Полищук Т.В. О развитии начальных пластических полос от негладкой границы раздела изотропных сред // Там же. – 2011. – №3(49). – С. 70-75.
5. Кипнис Л.А., Полищук Т.В. О расчете пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела сред // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, №2. – С. 59-69.
6. Лобода В.В., Шевелева А.Е. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Там же. – 2003. – Т. 39, №5. –С. 76-82.
7. Набл Б. Применения метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. Лит., 1962. – 279с.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – Т.28, №1. – С. 49-68.
9. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
10. Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Khazin G.A. A Criterion for the Onset for Growth of Two Shear Cracks in an Elastic Body under Plane-stain Condition // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, №4. – P. 439-446.
11. Lablond J.B., Frelat J. Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips // Europ. J. Mech. A/Solids. – 2001. – Vol. 20. – P. 937-951.

	e_0			
	2	3	5	10
140	0,101	0,146	0,190	0,229
	$4,1\cdot$	0,115	0,597	1,318
145	0,110	0,161	0,211	0,254
	0,017	10,848	16,948	32,055
150	0,117	0,173	0,228	0,278
	0,331	20,165	36,524	86,081
155	0,120	0,180	0,241	0,298
	1,187	22,443	44,086	92,543
160	0,116	0,179	0,247	0,313
	2,278	22,648	35,708	38,691
165	0,104	0,168	0,241	0,318
	1,466	19,896	29,203	34,502
170	0,082	0,140	0,215	0,305
	0,133	11,787	23,935	27,314
175	0,047	0,087	0,150	0,246
	$4,6\cdot$	0,352	12,921	15,093