

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СЖАТОЙ ЗОНЫ НАД НОРМАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА

Азизов Т.Н., д.т.н., профессор, Дудик М.В., к.ф.-м.н., доцент,
Колмакова В.А.

Уманский государственный педагогический университет

Постановка задачи и анализ исследований.

Известно [2, 3], что разрушение железобетонных элементов в зоне чистого изгиба происходит в результате выкалывания призмы (рис. 1). При этом считается, что напряжение в сжатой зоне достигли призмочной прочности бетона.

Экспериментально доказано, что эпюра напряжений в сжатой зоне бетона имеет криволинейный характер [1, 7]. В расчетах для упрощения принимается прямоугольная эпюра сжимающих напряжений в бетоне [2, 3].

В настоящее время значительное количество работ [1, 7] посвящено расчету с применением реальных диаграмм деформирования бетона. Однако, ни нормативная методика, ни методика с применением диаграмм деформирования бетона не отражают физическую картину напряженного состояния сжатой зоны изгибаемого элемента, т.к. рассматривается лишь распределение деформаций в сжатой зоне бетона.

Вопрос о том, почему поперечная трещина в стадии разрушения элемента меняет свое направление (границы призмы выкалывания практически перпендикулярны нормальной трещине) остается не изученным.

В связи с вышесказанным целью настоящей статьи является изучение вопроса о направлении развития трещины и напряженного состояния элемента над нормальной трещиной с позиций механики разрушения.

Изложение основного материала.

Рассмотрим изгибаемый железобетонный элемент с нормальной трещиной (рис. 1).

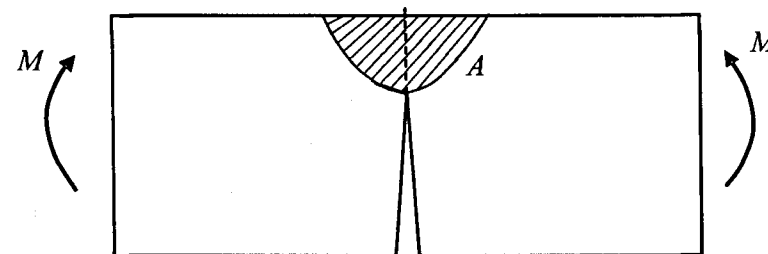


Рис.1. Схема железобетонного элемента с нормальной трещиной

Для определения направления развития трещины и напряженного состояния зоны A над нормальной трещиной используем методику [4]. Как известно [10] для этого требуется знание коэффициента интенсивности напряжений K_I , который может быть определен на основе расчетов по МКЭ с использованием вычислительных комплексов «Лира», «ANSYS» [6] и др. или теоретически, например по [9].

Так, по данным [9] коэффициент интенсивности в рассматриваемом случае определяется по формуле:

$$K_I = \frac{6M}{tW^2} \sqrt{\pi \cdot a} F_I(\xi), \quad (1)$$

где $\xi = a/W$; W - высота полосы (балки); a - высота трещины (рис. 2);

$$F_I(\xi) = 1.122 - 1.4\xi + 7.33\xi^2 - 13.08\xi^3 + 14\xi^4 \quad (2)$$

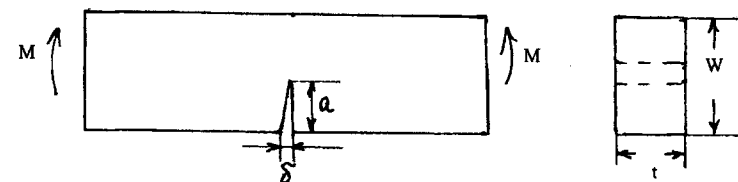


Рис. 2. Схема к определению коэффициента интенсивности напряжений для полосы с поперечной трещиной при чистом изгибе

Зная коэффициент интенсивности напряжений, можно рассчитать траекторию трещины, пользуясь общими принципами механики разрушения. Рассмотрим это предложение подробнее.

При малом приложенном моменте длина трещины также будет мала (рис. 3) по сравнению с высотой балки, деформации перед фронтом трещины носят отрывной характер, напряженно-деформированное состояние соответствует трещине I типа (нормальный отрыв), а напряжения вблизи ее вершины описываются формулами [5]:

$$\sigma_r = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3 \frac{\theta}{2},$$

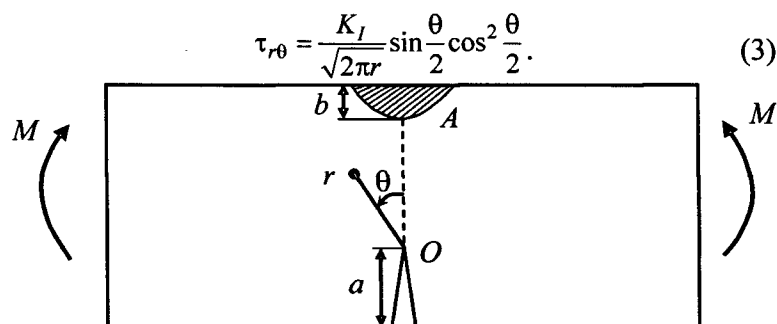


Рис. 3. Трещина на этапе прямолинейного распространения

Для обеспечения отрывного характера деформаций на продолжении трещины напряжения вблизи ее вершины должны быть растягивающими $\left(\sigma_\theta(r, 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} > 0 \right)$, что эквивалентно условию

$K_I > 0$. Согласно (1, 2), это условие выполняется при всех $0 \leq \alpha \leq 1$ ($0 \leq a \leq W$). Однако изгиб балки приводит к тому, что ее верхняя часть на продолжении трещины (область *A*) оказывается сжатой.

При малых нагрузках и, соответственно, размерах трещины размер этой области (в частности, высота *b*) также будет мал.

С увеличением нагрузки происходит подрастание как трещины, так и области *A* сжатого бетона, и наступает ситуация, когда вершина трещины выходит на область сжатого материала (рис. 4). Соответствующие критические изгибающий момент и длина трещины могут быть определены следующим образом. Приравнявая коэффициент интенсивности напряжений (1) критическому значению K_{IC} (вязкость разрушения), можно найти связь между длиной

трещины *a* и максимальной величиной момента *M*, при которой еще сохраняется равновесное состояние трещины. Затем с помощью программ конечно-элементного анализа (Лира, Abaqus, Ansys и др.) находим зависимость высоты сжатой области *b* от величины момента *M*. Предельную длину нормальной трещины *a_c* и критическое значение внешнего момента *M_c* найдем по достижению условия $a+b=W$.

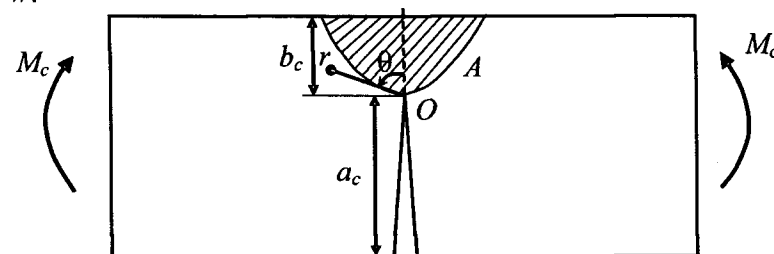


Рис. 4. Трещина, выходящая на область сжатого материала балки

Поскольку в сжатом материале на продолжении трещины $\sigma_\theta(r, 0) < 0$, что противоречит предположению об отрывном характере деформаций в этом направлении, трещина не может развиваться дальше прямолинейно, так что следует ожидать ее отклонения от направления $\theta=0$. Если предположить, что дальнейшее развитие трещины происходит также по механизму отрыва, то следует ожидать ее отклонение от первоначального направления на угол, соответствующий максимальным окружным напряжениям, что, согласно (3), соответствует условию

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -\frac{3K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = 0. \quad (4)$$

Это уравнение имеет корни $\theta_m = 0$, $\theta_m = \pm\pi$. Однако, как отмечено выше, в условиях сжатия материала в области *A* перед фронтом трещины развитие трещины в направлении $\theta=0$ является невозможным. Неудовлетворительны также корни $\theta_m = \pm\pi$, т.к. они соответствуют берегам трещины, свободным от нагружения ($\sigma(r, \pm\pi) = 0$). Отсюда следует вывод: трещина после выхода на границу области сжатия не может дальше развиваться по механизму отрыва.

Проведенный выше анализ указывает, что дальнейшее развитие трещины по достижению ею границы области сжатия будет происходить по механизму поперечного сдвига в направлении, которое можно оценить из условия максимума касательных напряжений (см. выражение (3)):

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 0, \quad (5)$$

откуда:

$$\theta_m = \pm 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 70,5^\circ. \quad (6)$$

Таким образом, при достижении трещиной границы области сжатия следует ожидать развития из конца трещины двух симметричных по отношению к плоскости трещины боковых трещин сдвига.

Возникновению трещины сдвига предшествует образование в конце трещины нормального отрыва как концентратора напряжений двух симметричных боковых пластических полос, наклоненных под некоторым углом к исходному направлению трещины. В современной механике разрушения при расчетах пластических полос популярно использование модели Леонова-Панасюка-Дагдейла, представляющей полосы пластичности линиями разрыва касательного смещения, на которых напряжения удовлетворяют некоторому условию пластичности [8]. В частности, достаточно легко решаемыми аналитически с помощью метода Винера-Хопфа оказываются задачи о расчете пластических полос с использованием критерия пластичности Треска, согласно которому пластическое течение происходит при достижении касательными напряжениями некоторого предельного значения τ_s , называемого пределом текучести материала. Величина

τ_s является опытно определяемой характеристикой материала и в нашем случае может быть принята равной пределу прочности бетона при срезе R_{sh} .

Расчетная модель начальной трещины сдвига. Предположим, что длина пластической полосы l намного меньше длины трещины, размеров балки и расстояния от вершины нормальной трещины до внешней поверхности балки. При этих условиях напряженно-деформированное состояние вблизи вершины трещины можно считать плоским, соответствующим плоской деформации, а поле напряжений соответствующим асимптотическому решению (3) с коэффициентом интенсивности K_I , определяемым формулами (1-2). Пластическую полосу будем моделировать линией разрыва касательного смещения,

на которой касательное напряжение равно пределу текучести при сдвиге τ_s . Длина линии разрыва l и угол ее наклона α определяются в ходе решения задачи. Поскольку длина линии разрыва много меньше длины трещины, а напряженно-деформированное состояние исследуется только в области вершины трещины, то исходная задача сводится к задаче о расчете линии разрыва конечной длины, выходящей из вершины полубесконечной трещины в однородной плоскости (рис. 5).

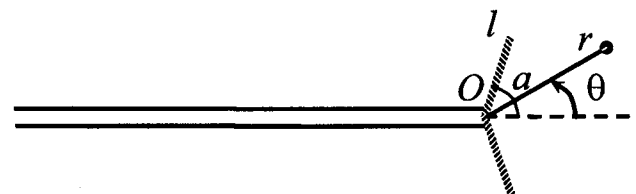


Рис. 5. Расчетная схема задачи о боковых пластических полосах

В силу симметрии для расчета трещины сдвига достаточно рассмотреть только одну ветвь трещины сдвига и область $\theta \geq 0$.

Граничные условия этой задачи имеют вид:

$$\theta = 0 : \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0$$

$$\theta = \pi : \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

$$\theta = \alpha : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0$$

$$\theta = \alpha : r < l, \tau_{r\theta} = \pm \tau_s \equiv \tau_r; r > l, \langle u_r \rangle = 0$$

$$\theta = \alpha : r \rightarrow \infty, \tau_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} \right) + o(1/r) \quad (7)$$

У вершины трещины сдвига реализуется асимптотика

$$\theta = \alpha : r \rightarrow l+0, \tau_{r\theta} \sim \frac{K_2}{\sqrt{2\pi(r-l)}};$$

$$r \rightarrow l-0, \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim - \frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{K_2}{\sqrt{2\pi(l-r)}}. \quad (8)$$

Решение сформулированной краевой задачи теории упругости в математическом отношении эквивалентно решению Черепанова задачи о расчете начальной пластичной зоны в конце трещины нормального отрыва в однородной среде [11]. Его уточненное решение с определением поля напряжений в вершине трещины, полученное с помощью метода Винера-Хопфа, приведено в [4], где в частности найдено, что длина трещины сдвига равна

$$l \approx 0,0583 K_I^2 / \tau_c^2, \quad (9)$$

а угол ее наклона к направлению исходной нормальной трещины, определяемый из условия максимума длины трещины сдвига, составляет 72° , что близко к оценке направления по критерию максимальных касательных напряжений (см. выражение 6).

Из этого решения может быть также найден скачок касательных смещений вдоль трещины сдвига, приравняв который критическому значению, определим граничный внешний момент, соответствующий страгиванию трещины.

Описанный выше метод можно далее применить для расчета новых симметричных отростков трещины сдвига, развивающихся теперь из вершин подросшей трещины (Рис. 6). Необходимые локальные поля напряжений в окрестностях этих вершин вычисляются на предыдущем этапе в ходе решения задачи.

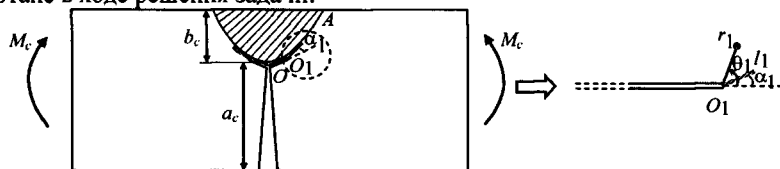


Рис. 6. Схема итерационного расчета формы выкола

Таким образом, приходим к итерационному алгоритму, позволяющему определить форму выкола, близкую, как следует из приведенных рассуждений, к призме с углом раствора ее боковой грани около $2 \cdot 72^\circ$, уменьшающемся по мере приближения к верхней границе балки.

Напряжения в зоне A на каждом шаге расчета следует определять методом конечных элементов с применением программных комплексов при наличии уже определенных вышеописанным методом направления и длины трещины. При этом прочность названной зоны может быть определена как с применением теорий прочности бетона,

так и с использованием законов прочности, принятых в программных комплексах.

За критерий разрушения следует принять меньшее из значений внешнего момента, при котором трещины выйдут на верхнюю грань балки или будет исчерпана несущая способность сжатой зоны A над трещиной.

Выводы и перспективы исследования. Предлагаемый подход позволяет решать задачи развития нормальной трещины с позиций механики разрушения, что описывает реальную суть происходящих в этой зоне физических процессов.

В перспективе предполагается развитие предложенной методики до конечного результата (определение теоретического критерия прочности) и экспериментальная проверка результатов.

Summary

The principles of determining the stressed state of the compressed area of concrete above the crack normal to the position of fracture mechanics were reviewed. It is shown that existing approaches in the calculation of the strength are conventional and does not fully reflect the physical nature of the stress state of the compressed zone.

1. Бамбура А.Н. К построению деформационной теории железобетона стержневых систем на экспериментальной основе // Бамбура А.М. Будівельні конструкції. – Вип. 59. – К.: НДІБК, 2003. – С.121-130.
2. Барашиков А.Я. Будівельні конструкції. Підручник для ВНЗ. – К.: Видавничий Дім «Слово», 2011. – 256 с.
3. Гольшев А.Б. Железобетонные конструкции / А.Б. Гольшев, В.П. Полищук, В.Я. Бачинский; под ред. А.Б. Гольшева. – К.: Логос, 2001. – 420 с.
4. Каминский А.А., Кипнис Л.А., Колмакова В.А. Расчет пластической зоны в конце вершины в рамках модели "трезубец" // Прикл. механика. – 1997. – Т.33, №5. – С.70-76.
5. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4-х т. / Под общей редакцией Панасюка В.В. – К.: Наук. думка, 1988. – Т.2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М.П. – 1988. – 620 с.
6. Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. – 2-е изд., испр. – М.: ЛЕНАНД, 2010. – 456 с.
7. Павліков А.М. Нелінійна модель напружено-деформованого стану косо завантажених залізобетонних елементів у за критичній стадії. – Полтава: ПолтНТУ, 2007. – 259 с.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – №1. –

С.49-68. 9. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ./Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 448 с., ил. 10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения . – М.: Наука, 1974. – 640 с. 11. Черепанов Г.П. Пластические линии разрыва в конце трещины // Прикл. математика и механика. – 1976. – Т.40, №4. – С.720-728.