

## **SÉRIE “Fyzikální a matematické vědy”**

[https://doi.org/10.52058/2695-1592-2022-4\(11\)-217-231](https://doi.org/10.52058/2695-1592-2022-4(11)-217-231)

**Михайло Дудик**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук  
Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини,  
м. Умань, Україна,  
<https://orcid.org/0000-0002-1399-6367>*

**Юлія Решітник**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук  
Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини,  
м. Умань, Україна,  
<https://orcid.org/0000-0002-7937-2880>*

### **ВПЛИВ ПЛАСТИЧНОСТІ З'ЄДНУВАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН В КІНЦІ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ ЛАМАНОЇ МЕЖІ РОЗДІЛУ**

**Анотація.** В умовах плоскої деформації розглянуто задачу про напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Враховано утворення у з'єднувальному матеріалі вузької маломасштабної пластичної зони, яка моделюється лінією розриву дотичного переміщення (модель Дагдейла). Розв'язок задачі отримано за допомогою методу Вінера – Гопфа з використанням апарату інтегрального перетворення Мелліна, принципу аналітичного продовження, теореми Ліувілля та деяких інших положень теорії функцій комплексної змінної. Отримано рівняння для розрахунку довжини пластичної зони, вирази для напружень в околі кутової точки і характеристичне

рівняння для обчислення показника степені сингулярності напружень. Досліджено залежність довжини зони і показника степені сингулярності від кута розхилу межі розділу середовищ, пружних параметрів з'єднаних матеріалів і навантаження.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, міжфазна тріщина, кутова точка ламаної межі розділу середовищ, пластична зона, модель Дагдейла, метод Вінера – Гопфа.

**Mykhailo Dudyk**

*Candidate (Ph.D) of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of Physics and Natural Sciences Integrative Learning Technologies Department, Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University.*

*Uman, Ukraine,*

*<https://orcid.org/0000-0002-1399-6367>*

**Yuliia Reshitnyk**

*Candidate (Ph.D) of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Physics and Natural Sciences Integrative Learning Technologies Department, Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University.*

*Uman, Ukraine,*

*<https://orcid.org/0000-0002-7937-2880>*

## **INFLUENCE OF BONDING MATERIAL PLASTICITY ON STRESS-STRAIN STATE AT THE TIP OF INTERFACIAL CRACK IN A CORNER POINT OF INTERFACE**

**Abstract.** Under the conditions of plane strain, the problem of computing the stress-strain state in the vicinity of the tip of an interface crack propagating from a corner point of the interface of two different homogeneous isotropic materials is considered. The formation of a narrow small-scale plastic zone in the bonding material, which is modeled by the line of discontinuity of tangential displacements (Dugdale model), is taken into account. The solution of the formulated boundary-value problem is obtained by the Wiener–Hopf method in combination with the apparatus of Mellin integral transformation, the principle of analytical continuation, Liouville's theorem and some other provisions of the theory of functions of a complex variable. An equation for the length of a plastic zone, expressions for stresses in the vicinity of the corner point



and the characteristic equation for calculation of the singularity index of stresses were received. The dependence of the length of a plastic zone and the singularity index on the interfacial angle, the elastic parameters of the joint materials and the load were investigated.

**Keywords:** stress-strain state, interfacial crack, the corner point of the interface of different materials, plastic zone, Dugdale model, Wiener – Hopf method.

**Постановка проблеми.** Одним із сучасних принципів механіки руйнування є визнання важливої ролі пластичності матеріалів у міцності конструкцій і споруд [1]. Утворення пластичної зони суттєво впливає на НДС біля концентраторів напружень, проте розрахунок виявляється складною математичною проблемою, що приводить до використання різноманітних моделей. При цьому досить реалістичні моделі зон передруйнування не піддаються аналітичним розрахункам через значні математичні труднощі і тому досліджуються переважно чисельними методами. У той же час, багато корисних результатів досягнуто аналітичними методами в рамках простих моделей, серед яких значною популярністю користуються моделі Дагдейла [2], Леонова і Панасюка [3] та різноманітні їх модифікації.

Численні дослідження засвідчили ефективність використання моделей Леонова – Панасюка – Дагдейла для прогнозування міцності виробів з однорідних матеріалів із тріщинами, які є концентраторами напружень і джерелом пластичних зон в околі їх вершин. Вплив пластичних зон проявляється у зниженні рівня напружень в тілі і, як наслідок, підвищення граничних навантажень, які призводять до зрушення тріщин. Разом з тим, у зв'язку з поширеним використанням у сучасній промисловості композитів актуальним є вивчення впливу пластичності матеріалів їх складових частин на напружено-деформований стан та міцність композитних з'єднань. Зважаючи на те, що досить часто поширення тріщин відбувається по межі розділу матеріалів, постає необхідність дослідження впливу пластичності з'єднувального матеріалу на напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини на ламаній межі розділу матеріалів.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Важлива роль пластичності матеріалів стала очевидною після виходу робіт Дж. Р. Ірвіна [4] та Е. Орована [5], які запропонували ефективний метод урахування пластичної деформації біля вершин тріщини при оцінці міцності елементів механізмів і конструкцій. Ключовим пунктом цих робіт є положення про утворення біля вершин тріщин пластичних зон – областей матеріалу, в яких відбувається накопичення дислокацій та інших дефектів структури з наступним порушенням закону Гука і рівнянь теорії пружності.

Ідеї Дж. Р. Ірвіна та Е. Орована набули значного поширення у механіці

руйнування, що знайшло своє відображення у численних публікаціях і монографіях [1,6-8]. В них описано досягнення з розрахунку параметрів пластичних зон та дослідження їх впливу на напружено-деформований стан біля вершин тріщин в однорідних матеріалах.

Інтерес до ролі пластичних зон біля вершин міжфазних тріщин виник у зв'язку з проблемою осцилюючої особливості напружень і переміщень [9]. На можливість усунення цієї особливості за рахунок утворення привершинної пластичної зони передруйнування вперше вказав Дж. Райс [10]. Цей висновок Райса був згодом підтверджений в роботах А.О. Камінського, Л.А. Кіпніса і В.О. Колмакової [11, 12], де в умовах плоскої деформації були розвинуті моделі зон передруйнування типу Дагдейла – Леонова – Панасюка для міжфазної тріщини на плоскій межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Дослідження пластичних зон передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини на плоскій межі розділу були продовжені в роботах В.Ф. Бакірова, В.Б. Говорухи, Р.В. Гольдштейна, В.В. Лободи, М.Н. Перельмутера, А.Є. Шевельової та інших. В останні десятиліття популярною також стала когезійна модель зони передруйнування [13-16].

У той же час, значно менше уваги приділяється більш загальному випадку пластичної зони передруйнування в кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки межі розділу. Окремі дослідження у цьому напрямку були виконані в роботах [17-19], де вивчались зони передруйнування в одному з матеріалів композитного з'єднання, що поширювались з вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу.

**Метою даної роботи** є дослідження напружено-деформованого стану (НДС) в околі кутової точки ламаної межі розділу двох різних пружних матеріалів, з якої вздовж однієї зі сторін виходить тріщина, а на іншій у з'єднувальному матеріалі утворилась пластична зона.

**Виклад основного матеріалу.** В умовах плоскої деформації розглядається задача про визначення НДС в околі вершини міжфазної тріщини, яка виходить з кутової точки ламаної межі розділу двох однорідних ізотропних пружних матеріалів з модулями Юнга  $E_1, E_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  відповідно. Припускається, що з'єднувальний матеріал є пружно-пластичним і тому в ньому в околі вершини тріщини як концентратора напружень вже при як завгодно малих навантаженнях виникає маломасштабна пластична зона. Мала товщина тонкого шару з'єднувального матеріалу дозволяє подати її, в рамках моделі Дагдейла [2], лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює границі текучості з'єднувального матеріалу при зсуві  $\tau_s$ .

На початковому етапі розвитку довжина  $l$  вузької пластичної зони значно менша від довжини тріщини  $L$  та всіх інших суттєвих розмірів тіла, і оскільки

напружено-деформований стан досліджується безпосередньо в околі кутової точки, тому тіло будемо вважати будемо вважати кусково-однорідною площиною з межею розділу матеріалів у формі сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін виходить півнескінчена тріщина, вздовж іншої – лінія розриву дотичного переміщення скінченої довжини  $l$  (рис. 1).

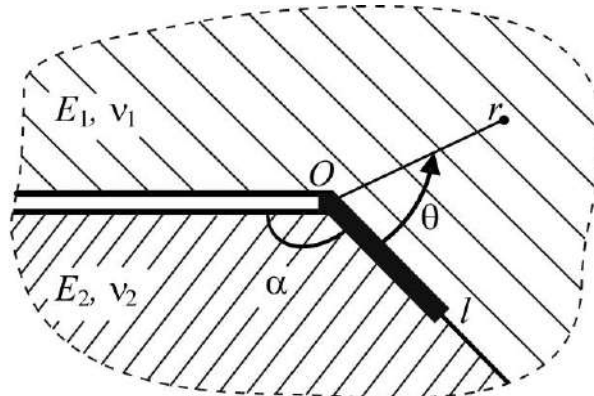


Рис. 1. Пластична зона у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини

Для формулювання умови на нескінченості в досліджуваній задачі скористаємось методом зрощування її розв'язку з головними членами розвинень в асимптотичні ряди в околі кутової точки ( $r \rightarrow 0$ ) розв'язку аналогічної задачі без пластичної зони. Сингулярні члени цих рядів визначаються коренями  $\lambda_i$  ( $-1 < \text{Re } \lambda_i < 0$ ) характеристичного рівняння [17, 19]:

$$D_0(\lambda) = 0, \quad (1)$$

$$D_0(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 t_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_1 t_2 - e^2(1 + \kappa_2)^2 t_3 +$$

$$+ 4(e - 1)^2 t_1 t_3 + 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)t_3 t_4 + 2e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_2 = \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$t_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \quad t_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_5 = t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Представлені на Рис. 2 результати розрахунків показують, що рівняння (1) може мати 2 або 3 корені у смузі  $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ ; відповідно, поведінку напружень поблизу вершини визначатимуть 2 або 3 сингулярних доданки. Виявлено також, що існує інтервал кутів розхилу ( $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ ), на якому рівняння (1) має у смузі  $-1 < \text{Re } \lambda < 0$  два комплексно спряжені корені  $\lambda_1, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ . Значення  $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$



для окремих параметрів пружних матеріалів приведені у таблиці 1.

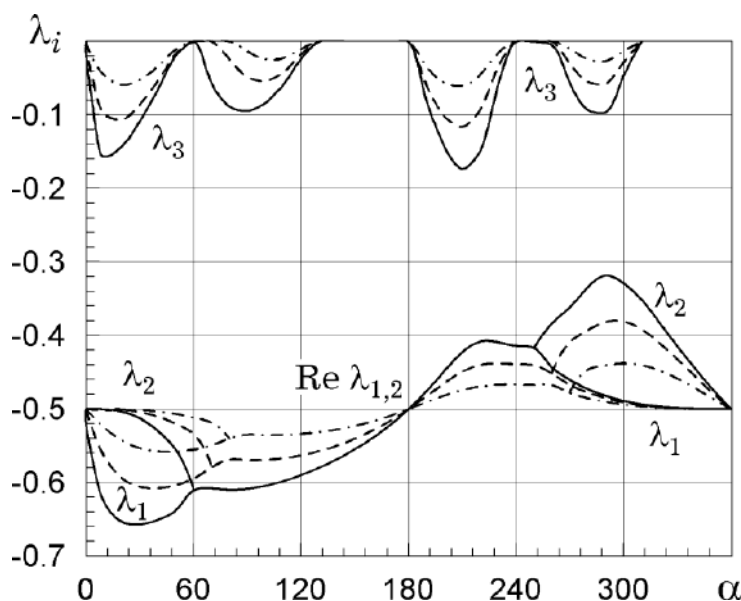


Рис. 2. Залежність показників сингулярності напружень  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) від кута розхилу межі розділу матеріалів  $\alpha$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $E_1 / E_2 = 0,1$  – суцільні лінії,  $E_1 / E_2 = 0,25$  – штрихові лінії,  $E_1 / E_2 = 0,5$  – штрих-пунктирні лінії)

Таблиця 1

Інтервал кутів розхилу межі розділу матеріалів, яким відповідають комплексні корені рівняння (1) у смугі  $-1 < \text{Re } \lambda < 0$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ).

$E_1 / E_2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha_{\min}, ^\circ$	61	70	75	79	82	84	86	88	89
$\alpha_{\max}, ^\circ$	252	255	258	260	262	264	266	267	268

Припускаючи береги тріщини вільними від навантаження, приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\theta = -\alpha \cup \theta = 2\pi - \alpha : \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\theta = 0 : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0; \tag{2}$$

$$\theta = 0, r < l : \tau_{r\theta} = \tau_0, \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, r > l : \langle u_r \rangle = 0, \tag{3}$$

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty : \tau_{r\theta} = \sum_i C_i F(\lambda_i) r^{\lambda_i} + o(1/r), \tag{4}$$

де  $\tau_0 = \pm \tau_s$ ;  $C_i$  – сталі, що характеризують інтенсивність зовнішнього силового поля і вважаються заданими за умовою задачі;

$$F(\lambda) = \frac{X(1+\kappa_1)[e(1+\kappa_2)h_2 - 2t_1h_1]}{\Delta}, \quad X = \sqrt{\frac{(e+\kappa_1)}{8\pi(1+e\kappa_2)}}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 2(1+\kappa_1)h_3 - e(1+\kappa_2)h_4 + 4(e-1)(\lambda \sin(\lambda+2)(2\pi-\alpha)h_5 + \sin \lambda \alpha h_6), \\ h_1 &= 2(e-1)(\lambda+2)\sin(\lambda+1)(2\pi-\alpha)\sin\alpha + (1+\kappa_1)\cos(\lambda+2)(2\pi-\alpha), \\ h_2 &= 2d_1 \cos(\lambda+2)(2\pi-\alpha) + [(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\alpha - \lambda \sin \lambda \alpha] \sin 2\lambda\pi, \\ h_3 &= \lambda \sin \alpha \cos(\lambda+1)(2\pi-\alpha) - \sin \lambda \alpha \cos 2\lambda\pi, \\ h_4 &= (\lambda+2)\sin \lambda(2\pi-\alpha) - \lambda \sin(\lambda+2)(2\pi-\alpha), \\ h_5 &= (\lambda+2)\sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda+1)\alpha, \\ h_6 &= (\lambda+2)\sin(\lambda+1)(2\pi-\alpha)\sin(\lambda+1)\alpha - \sin(\lambda+2)(2\pi-\alpha)\sin(\lambda+2)\alpha, \\ e &= \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}. \end{aligned}$$

Розв'язання сформульованої крайової задачі за допомогою перетворення Мелліна зводиться до розв'язання функціонального рівняння

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_0}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) l^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} = -A \operatorname{tg} p\pi G(p) \Phi^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2), \quad (5)$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho,$$

$$G(p) = \frac{(1+\kappa_1)D_1(p) \cos p\pi}{AD_0(-1-p) \sin p\pi}, \quad A = \frac{(1+\kappa_1 + e(1+\kappa_2))(1+\kappa_1)}{2(\kappa_1 + e)(1+e\kappa_2)},$$

$$D_1(p) = e(1+\kappa_2)\Delta_1\Delta_2 - (1+\kappa_1)\Delta_3\Delta_4,$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi-\alpha), \quad \Delta_2(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_4(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p(2\pi-\alpha),$$

( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – достатньо малі додатні числа). Точний розв'язок рівняння (5) отримано за допомогою методу Вінера – Гопфа [20] і має вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\tau_0}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) l^{\lambda_i}}{(p + \lambda_i + 1)} \left[ \frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0); \\ \Phi^-(p) &= \frac{K^-(p)G^-(p)}{A} \left\{ \frac{\tau_0 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} - \right. \end{aligned} \quad (6)$$



$$-\left. \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) l^{\lambda_i} K^+(-\lambda_i - 1)}{(p + \lambda_i + 1)(\lambda_i + 1)G^+(-\lambda_i - 1)} \right\} (\operatorname{Re} p > 0),$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), \operatorname{Re} p > 0, \end{cases} \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}$$

( $\Gamma(z)$  – гамма-функція Ейлера). З нього виводимо наступні трансцендентні рівняння для визначення її відносної довжини  $x = l/L$  в залежності від наявних коренів характеристичного рівняння (1) у смузі  $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ :

а) характеристичне рівняння має 2 або 3 дійсні корені:

$$\sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i) x^{\lambda_i} = \operatorname{sgn}(F(\lambda_1)) \frac{N(0)}{\tau}, \quad (7)$$

$$n_i = \frac{C_i L^{\lambda_i}}{C_1 L^{\lambda_1}}, \quad N(\lambda) = \frac{K^+(-\lambda - 1)}{(\lambda + 1)G^+(-\lambda - 1)}, \quad \tau = \frac{|C_1| L^{\lambda_1}}{\tau_s};$$

б) характеристичне рівняння має 2 комплексно-спряжених ( $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_m$ ) і один або жодного дійсного кореня  $\lambda_3$ :

$$x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \xi + \psi) + n_3 M x^{\lambda_3} = \frac{S}{\tau}, \quad (8)$$

$$\varphi = \arg(F(\lambda_1)), \quad \xi = \arg N(\lambda_1), \quad \psi = \arctg n, \quad n = \frac{K_2}{K_1}, \quad \tau = \frac{(2\pi L)^{\lambda_r} |K|}{\tau_s},$$

$$n_3 = \frac{C_3}{(2\pi)^{\lambda_r} |K|} \frac{L^{\lambda_3}}{L^{\lambda_r}}, \quad M = \frac{F(\lambda_3) N(\lambda_3)}{2|F(\lambda_1)| |N(\lambda_1)|}, \quad S = \frac{N(0)}{2|F(\lambda_1)| |N(\lambda_1)|};$$

$K = K_1 + iK_2$  – комплексний КІН,  $\psi$  – фазовий кут, який характеризує ступінь змішування мод навантаження,  $n$  – параметр змішування мод.

Знайдемо відносне зміщення берегів пластичної зони при вершині тріщини як стрибок дотичного переміщення  $\langle u_r(0,0) \rangle$ . З визначення (5) трансформанти

$\Phi^-(p)$  маємо  $\delta u_r(0,0) = -\frac{4(1 - \nu_1^2)l}{E_1} \Phi^-(0)$ . Використовуючи розв’язок рівняння

Вінера – Гопфа (6) та формули (7)-(8), отримаємо наступні вирази для  $\delta u_r(0,0)$ :

а) якщо рівняння (1) має тільки дійсні корені в інтервалі  $(-1, 0)$ :

$$\delta u_r(0,0) = -\frac{4(1 - \nu_1^2)L}{E_1 A \sqrt{\pi G(0)}} \tau \tau_0 \sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i) \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} x^{\lambda_i + 1}; \quad (9)$$

б) при наявності комплексних показників сингулярності маємо



$$\delta u_r(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)L}{E_1 A \sqrt{\pi G(0)}} \tau \tau_0 \left[ 2 |F(\lambda_1)| |N(\lambda_1)| \left| \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} \right| x^{\lambda_r+1} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \psi + \xi + \zeta) + n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3) \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3} x^{\lambda_3+1} \right], \quad \zeta = \arg \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}. \quad (10)$$

**Аналіз поведінки напружень в околі вершини тріщини.** Для трансформант напружень біля вершини клиновидних областей досліджуваного тіла (рис. 1) мають місце вирази

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{n*}(p, \theta) &= a_1^n(p) \sin(p+1)\theta + a_2^n(p) \sin(p-1)\theta + a_3^n(p) \cos(p+1)\theta + \\ &+ a_4^n(p) \cos(p-1)\theta, \\ \tau_{r\theta}^{n*}(p, \theta) &= \frac{1}{p-1} \left[ a_1^n(p)(p+1) \cos(p+1)\theta + a_2^n(p)(p-1) \cos(p-1)\theta - \right. \\ &\left. - a_3^n(p)(p+1) \sin(p+1)\theta - a_4^n(p)(p-1) \sin(p-1)\theta \right], \\ \sigma_r^{n*}(p, \theta) &= -\frac{1}{p-1} \left[ a_1^n(p)(p+3) \sin(p+1)\theta + a_2^n(p)(p-1) \sin(p-1)\theta + \right. \\ &\left. + a_3^n(p)(p+3) \cos(p+1)\theta + a_4^n(p)(p-1) \cos(p-1)\theta \right], \end{aligned} \quad (11)$$

з коефіцієнтами  $a_j^n(p)$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ;  $n=1$  для першого матеріалу ( $0 \leq \theta \leq 2\pi - \alpha$ ) і  $k=2$  для другого матеріалу ( $-\alpha \leq \theta \leq 0$ )), які визначені в ході розв'язання задачі і виражаються через  $\tau_{r\theta}^*(p, 0) \equiv \tau^*(p)$ :

$$\begin{aligned} a_j^k(p) &= \frac{\tau^*(p)(p-1)}{2D_1(p)} \mathfrak{A}_j^k(p) \quad (j=1,3), \\ a_j^k(p) &= \frac{\tau^*(p)}{2D_1(p)} \mathfrak{A}_j^k(p) \quad (j=2,4), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1^1(p) &= 2(e-1)\Delta_3\Delta_4 + e(1+\kappa_2)(\Delta_2\Delta_7 - \Delta_4\Delta_8), \\ \mathfrak{A}_2^1(p) &= e(1+\kappa_2)((p+1)\Delta_4\Delta_8 + (p-1)\Delta_2\Delta_{10}) - \\ &- 2((1+\kappa_1) + (e-1)(p+1))\Delta_3\Delta_4, \\ \mathfrak{A}_3^1(p) &= 2(1+\kappa_1)\Delta_3 - 0,5e(1+\kappa_2)(4\Delta_8\Delta_{10} + \Delta_2\Delta_6) + 4(e-1)\Delta_3\Delta_{10}, \\ \mathfrak{A}_4^1(p) &= -2(1+\kappa_1)\Delta_3\Delta_{11} - 0,5e(1+\kappa_2)[4(p+1)\Delta_7\Delta_8 - (p-1)\Delta_2\Delta_6] + \\ &+ 4(p+1)(e-1)\Delta_3\Delta_7, \\ \mathfrak{A}_1^2(p) &= (1+\kappa_1)(\Delta_2\Delta_7 - \Delta_4\Delta_8) + 2(e-1)\Delta_1\Delta_2, \\ \mathfrak{A}_2^2(p) &= -(1+\kappa_1)((p+1)\Delta_2\Delta_7 + (p-1)\Delta_4\Delta_5) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &+2\Delta_1\Delta_2(e(1+\kappa_2)-(p+1)(e-1)), \\
 \mathfrak{A}_3^2(p) &= 0,5(1+\kappa_1)(4\Delta_7\Delta_5+\Delta_4\Delta_9)-2e(1+\kappa_2)\Delta_1+4(e-1)\Delta_1\Delta_5, \\
 \mathfrak{A}_4^2(p) &= 0,5(1+\kappa_1)[4(p+1)\Delta_7\Delta_8-(p-1)\Delta_4\Delta_9]+2e(1+\kappa_2)\Delta_1\Delta_{12}+ \\
 &+4(p+1)(e-1)\Delta_1\Delta_8, \\
 \Delta_5(p) &= p\sin^2\alpha+\sin^2p\alpha, \quad \Delta_6(p)=p\sin 2\alpha+\sin 2p(2\pi-\alpha), \\
 \Delta_7(p) &= p\sin^2\alpha-\sin^2p(2\pi-\alpha), \quad \Delta_8(p)=p\sin^2\alpha-\sin^2p\alpha, \\
 \Delta_9(p) &= p\sin 2\alpha-\sin 2p\alpha, \quad \Delta_{10}(p)=p\sin^2\alpha+\sin^2p(2\pi-\alpha), \\
 \Delta_{11}(p) &= p\cos 2\alpha-\cos 2p(2\pi-\alpha), \quad \Delta_{12}(p)=p\cos 2\alpha-\cos 2p\alpha.
 \end{aligned}$$

Вираз для функції  $\tau^*(p)$  знайдено з отриманого вище розв'язку (6) рівняння Вінера – Гопфа задачі. Подамо його у вигляді:

$$\tau^*(p) = \frac{\tau_0^*(p)}{p+1} + \sum_i \frac{\tau_i^*(p)}{p+1+\lambda_i}, \quad (13)$$

$$\tau_0^*(p) = -\frac{pG^+(p)l^{p+1}\tau_0K^+(-1)}{K^+(p)G^+(-1)}, \quad \tau_i^*(p) = \frac{pG^+(p)l^{p+1}C_iF(\lambda_i)l^{\lambda_i}K^+(-1-\lambda_i)}{K^+(p)(1+\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)}.$$

Підставивши (12) в (11), прийдемо до наступного подання трансформант напружень  $\sigma_m^{n*}(p, \theta)$  ( $m=1, 2, 3 \equiv \theta, r, r\theta$ ;  $n=1, 2$  залежно від досліджуваної компоненти напруження і області їх визначення):

$$\sigma_m^{n*}(p, \theta) = \frac{\tau^*(p)}{2D_1(p)} f_m^n(p, \theta), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 f_1^n(p, \theta) &= (p-1)\mathfrak{A}_1^n(p)\sin(p+1)\theta + \mathfrak{A}_2^n(p)\sin(p-1)\theta + \\
 &+ (p-1)\mathfrak{A}_3^n(p)\cos(p+1)\theta + \mathfrak{A}_4^n(p)\cos(p-1)\theta, \\
 f_2^n(p, \theta) &= (p+3)\mathfrak{A}_1^n(p)\sin(p+1)\theta + \mathfrak{A}_2^n(p)\sin(p-1)\theta + \\
 &+ (p+3)\mathfrak{A}_3^n(p)\cos(p+1)\theta + \mathfrak{A}_4^n(p)\cos(p-1)\theta, \\
 f_3^n(p, \theta) &= (p+1)\mathfrak{A}_1^n(p)\cos(p+1)\theta + \mathfrak{A}_2^n(p)\cos(p-1)\theta - \\
 &- (p+1)\mathfrak{A}_3^n(p)\sin(p+1)\theta - \mathfrak{A}_4^n(p)\sin(p-1)\theta.
 \end{aligned}$$

Введені в (14) функції  $f_m^n(p, \theta)$ , як і  $\tau_0^*(p)$  та  $\tau_i^*(p)$  не мають особливостей для будь-яких значень  $p$ . Застосувавши до трансформант напружень зворотне перетворення Мелліна [21], із залученням теореми про лишки можна визначити головні члени розвинень напружень у асимптотичні ряди при  $r \rightarrow 0$ :

$$\sigma_m^n(r, \theta) = \sum_s g_m^n(\theta, \lambda'_s) r^{\lambda'_s}, \quad (15)$$

де  $\lambda'_s$  – корені характеристичного рівняння задачі

$$D_1(-1 - \lambda'_s) = 0 \quad (16)$$

у площині  $\text{Re } \lambda' > -1$ , а  $g_m^n(\theta, \lambda'_s)$  – функції, які визначаються за формулами

$$g_m^n(\theta, \lambda'_s) = \frac{f_m^n(-1 - \lambda'_s, \theta) G^+(-1 - \lambda'_s)}{D_1'(-1 - \lambda'_s) K^+(-1 - \lambda'_s)} (1 + \lambda'_s) l^{-\lambda'_s} \times \\ \times \sum_i \frac{C_i F(\lambda_i) l^{\lambda_i} K^+(-1 - \lambda_i)}{(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} \frac{\lambda_i}{\lambda'_s (\lambda'_s - \lambda_i)}$$

( $D_1'(p) = dD_1(p)/dp$ ). Зокрема, нормальне напруження в околі кутової точки можна подати, в залежності від наявних коренів характеристичного рівняння (1), у наступному зручному для обчислень вигляді:

а) у випадку, коли характеристичне рівняння (1) має 2 або 3 дійсних корені:

$$\frac{\sigma_\theta^n(r, \theta)}{\tau_s} = \tau \text{sgn}(F(\lambda_1)) \sum_s \left[ \frac{R^n(\lambda'_s, \theta)}{N(\lambda'_s)} \left(\frac{r}{L}\right)^{\lambda'_s} \sum_i n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i) m(\lambda_i, \lambda'_s) x^{\lambda_i - \lambda'_s} \right],$$

б) якщо характеристичне рівняння (1) має 2 комплексно спряжених ( $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ ) і один або жодного дійсного кореня  $\lambda_3$ :

$$\frac{\sigma_\theta^n(r, \theta)}{\tau_s} = \tau \sum_s \frac{R^k(\lambda'_s, \theta)}{N(\lambda'_s)} \left(\frac{r}{L}\right)^{\lambda'_s} \left[ 2|F(\lambda_1)| |N(\lambda_1)| |m(\lambda_1, \lambda'_s)| x^{\text{Re } \lambda_1 - \lambda'_s} \times \right. \\ \left. \times \cos(\text{Im } \lambda_1 \cdot \ln x + \varphi + \xi + \psi + \mu_s) + n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3) m(\lambda_3, \lambda'_s) x^{\lambda_3 - \lambda'_s} \right].$$

Тут  $R^n(\lambda'_s, \theta) = \frac{f_1^n(-1 - \lambda'_s, \theta)}{D_1'(-1 - \lambda'_s)}$ ,  $m(\lambda_i, \lambda'_s) = \frac{\lambda_i}{\lambda'_s (\lambda'_s - \lambda_i)}$ ,  $\mu_s = \arg m(\lambda_1, \lambda'_s)$ .

**Аналіз отриманих результатів і висновки.** Результати числових розрахунків відносної довжини  $x$  пластичної зони подано на рис. 3 і рис. 4.

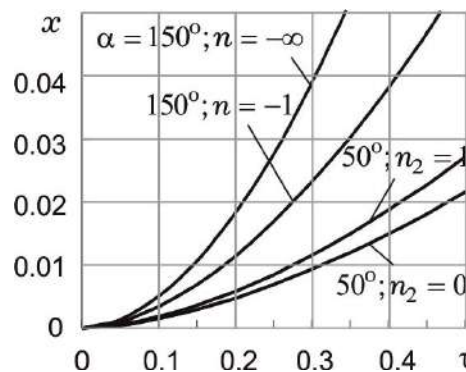


Рис. 3. Залежність відносної довжини пластичної зони від безрозмірного параметра навантаження  $\tau$  ( $E_1/E_2 = 0.25$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ;  $n_3 = 0$ ).

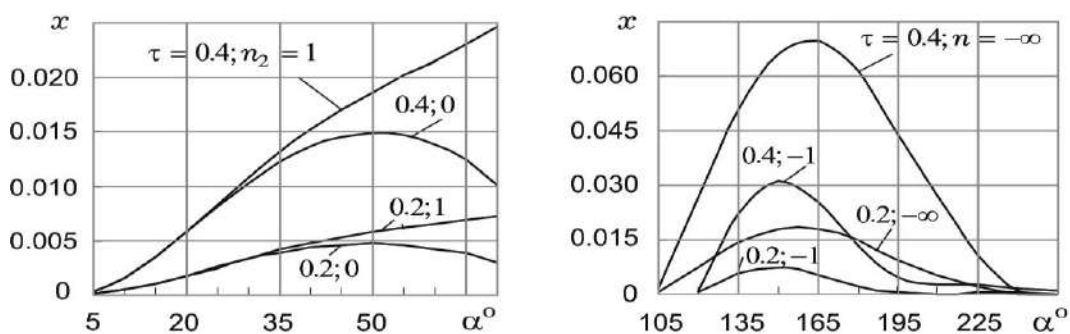


Рис. 4. Залежність відносної довжини пластичної зони  $x$  від кута розхилу межі розділу матеріалів  $\alpha$  ( $E_1/E_2 = 0.25$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ;  $n_3 = 0$ )

Згідно з рис. 4, довжина зони нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, яке входить у рівняння через безрозмірний параметр  $\tau$  і множники  $n_i$ , що характеризують відносний вклад різних коренів характеристичного рівняння (1). Довжина пластичної зони тим більша, чим менша границя текучості з'єднувального матеріалу. На розмір зони впливає конфігурація навантаження, яка задається в рівняннях (7-8) множниками  $n_i$  або параметром змішування мод  $n$ .

Як впливає з рис. 4, довжина пластичної зони суттєво залежить від кута розхилу  $\alpha$  межі розділу матеріалів, причому існують кути, що залежать від конфігурації навантаження, при яких розмір зони максимальний, тобто, відповідна орієнтація прикладених до тіла зовнішніх сил сприяє розвитку зони і, отже, максимальному розвантаженню матеріалу біля вершини тріщини.

Згідно (15), поведінка напружень у кутовій точці після утворення в її околі міжфазної зони передруйнування носитиме сингулярний характер, якщо характеристичне рівняння (16) матиме корені у смугі  $-1 < \text{Re } \lambda' < 0$ . На рис. 5 подано результати розрахунків показників степені сингулярності напружень  $\lambda'_s$  для окремих значень пружних параметрів з'єднаних матеріалів.

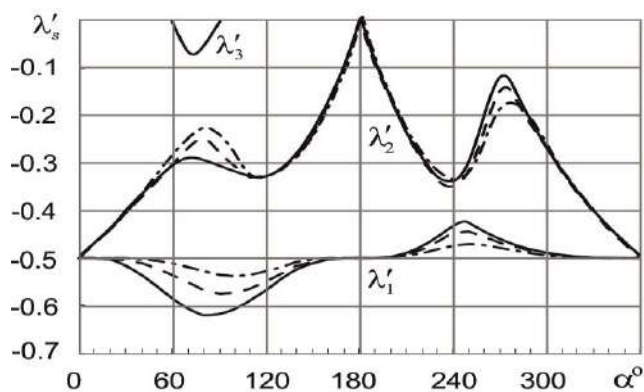


Рис. 5. Залежність показника сингулярності напружень  $\lambda'_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) від кута розхилу межі розділу матеріалів  $\alpha$  після утворення міжфазної пластичної зони ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ;  $E_1/E_2 = 0.1$  – суцільні лінії;  $E_1/E_2 = 0.25$  – штрихові лінії;  $E_1/E_2 = 0.5$  – штрих-пунктирні лінії).

Розрахунки показали, що показники сингулярності напружень  $\lambda'_s$  після утворення пластичної зони, які лежать у смузі  $-1 < \text{Re } \lambda' < 0$ , стають дійсними при будь-яких кутах розхилу межі розділу матеріалів. Це означає, що поява міжфазної пластичної зони усуває просторові осциляції у кутовій точці, які мають місце при наявності комплексних коренів характеристичного рівняння (1), проте при цьому зберігається степенева особливість напружень, яка приводитиме до появи нової зони передруйнування в околі вершини кута. Порівняння коренів  $\lambda_i$  характеристичного рівняння (1) зовнішньої задачі і  $\lambda'_s$  характеристичного рівняння (16) досліджуваної внутрішньої задачі вказує також на послаблення концентрації напружень при наближенні до кутової точки ( $\lambda'_s > \text{Re } \lambda_i$ ). Як  $\lambda_i$ , так і  $\lambda'_s$  залежать від модулів Юнга з'єднаних матеріалів через їх відношення  $E_1/E_2$ . Зауважимо, що розрахункам при  $e_0 = E'_1/E'_2 > 1$  і заданому куті розхилу  $\alpha$  відповідають результати обчислень при  $E_1/E_2 = 1/e_0 < 1$  і куті  $360^\circ - \alpha$ , тому вище досліджувалися корені характеристичного рівняння (16) лише для відношень  $E_1/E_2 < 1$ . Як і слід було очікувати, при  $E_1/E_2 \rightarrow 1$ , а також при  $\alpha \rightarrow 0^\circ$  та  $\alpha \rightarrow 360^\circ$  концентрація напружень наближається до кореневої ( $\lambda'_1 \rightarrow -0,5$ ), яка відповідає тріщині у однорідному матеріалі.

#### Література:

1. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М. : Наука, 1985. 502 с.
2. Dugdale D. Yielding of steel sheets contains slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1960. Vol. 8, № 2. P. 100-104.
3. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле. *Прикладная механика*. 1959. Т. 5, № 4. С. 391-401.
4. Irwin G.R. Fracture dynamics. *Fracturing of Metals. ASM: Cleveland*, 1948. P. 147-166.
5. Orowan E.O. Fundamentals of brittle behaviour of metals. *Fatigue and Fracture of Metals (Murray W.M., ed.)*. Wiley: New York, 1950. P. 139-167.
6. Плювинаж Г. Механика упругопластического разрушения. М. : Мир, 1993. 450 с.
7. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. К. : Наук. думка, 1991. 415 с.
8. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Издательство "Самарский университет", 2001. 562 с.
9. Williams M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1959. Vol. 49. P. 199-204.
10. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1988. Vol. 55, № 3. P. 98-103.
11. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред. *Прикладная механика*. 1995. Т. 31, № 6. С. 86-91.
12. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред. *Прикладная механика*. 1999. Т. 35, № 1. С. 63-68.

13. Needleman A. An analysis of decohesion along an imperfect interface. *International Journal of Fracture*. 1990. Vol. 42, № 1. P. 21-41.
14. Tvergaard V., Hutchinson J. W. On the toughness of ductile adhesive joints *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1996. Vol. 44, № 5. P. 789-900.
15. Kishimoto K., Omiya M., Yang W. Fracture mechanics of bonding interface: a cohesive model. *Sensors and Actuators*. 2002. Vol. 99. P. 198-206.
16. Tvergaard V. Predictions of mixed mode interfacial crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2004. Vol. 52. P. 925-940.
17. Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V. Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. Vol.184, № 2. P. 121-135.
18. Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V. Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media. *Materials Science*. 2012. Vol. 47. № 5. P. 627-635.
19. Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V. Investigation of the influence of plasticity of materials on the strength of a composite joint. *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. Vol. 201, № 1. P. 83-98.
20. Noble B. *Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for Solution of Partial Differential Equations*. 2nd ed. New York : Chelsea, 1988.
21. Уфлянд Я.С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. Л.: Наука, 1967. 402 с.

#### References:

1. Parton, V. Z. & Morozov, E. M. (1989). *Mechanics of elastic-plastic fracture*. Washington: Hemisphere Publishing Corporation.
2. Dugdale, D. (1960). Yielding of steel sheets contains slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2), 100-104.
3. Leonov, M. Ja. & Panasjuk, V. V. (1959). Razvitie mel'chajshih treshhin v tverdom tele [Development of the smallest cracks in a solid]. *Prikladnaja mehanika – Applied mechanics*, 5(4), 391-401 [in Russian].
4. Irwin, G. R. (1948). Fracture Dynamics. *Fracturing of Metals*. American Society for Metals. Cleveland, 147-166.
5. Orowan, E. O. (1950). Fundamentals of brittle behaviour of metals. *Fatigue and Fracture of Metals*. New York: Wiley, 139-167.
6. Pluvillage G. (1989). *Mecanique elastoplastique de la rupture [Mechanics of elastic-plastic fracture]*. Toulouse: Cepadues [in French].
7. Panasjuk, V. V. (1991). *Mehanika kvazihrupkogo razrushenija materialov [Mechanics of quasi-brittle fracture of materials]*. Kyiv: Naukova dumka [in Russian].
8. Astafev, V. I., Radaev, Ju. N. & Stepanova, L. V. (2001). *Nelinejnaja mehanika razrushenija [Nonlinear mechanics of fracture]*. Samara: Izdatel'stvo "Samarskij universitet" [in Russian].
9. Williams, M. L. (1959). The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 49, 199-204.
10. Rice, J. R. (1988). Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 55(3), 98-103.
11. Kaminskii, A. A., Kipnis, L. A. & Kolmakova, V. A. (1995). Slip lines at the end of a cut at the interface of different media. *International Applied Mechanics*, 31(6), 491-495.
12. Kaminskii, A. A., Kipnis, L. A. & Kolmakova, V. A. (1999). On the Dugdaill model for a crack at the interface of different media. *International Applied Mechanics*, 35(1), 58-63.



13. Needleman, A. (1990). An analysis of decohesion along an imperfect interface. *International Journal of Fracture*, 42(1), 21-41.
14. Tvergaard, V. & Hutchinson, J. W. (1996). On the toughness of ductile adhesive joints. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(5), 789-900.
15. Kishimoto, K., Omiya, M. & Yang, W. (2002). Fracture mechanics of bonding interface: a cohesive model. *Sensors and Actuators*, 99, 198-206.
16. Tvergaard, V. (2004). Predictions of mixed mode interfacial crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52, 925-940.
17. Dudyk, M. V. & Dikhtyarenko, Yu. V. (2012). Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *Journal of Mathematical Sciences*, 184(2), 121-135.
18. Dudyk, M. V. & Dikhtyarenko, Yu. V. (2012). Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media. *Materials Science*, 47(5), 627-635.
19. Dudyk, M. V. & Dikhtyarenko, Yu. V. (2014). Investigation of the influence of plasticity of materials on the strength of a composite joint. *Journal of Mathematical Sciences*, 201(1), 83-98.
20. Noble, B. (1988). *Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for Solution of Partial Differential Equations*. 2nd ed. New York : Chelsea.
21. Uflyand, Ya. S. (1965). *Survey of articles on the application of integral transforms in the theory of elasticity*. Raleigh: North Carolina State Univ.