МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Людмила БЛАГОДИР, Василь ШВЕЦЬ

ОРГАНІЗАЦІЯ ПРЕВЕНТИВНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ У НАВЧАННІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ АЛГЕБРИ

Монографія

Київ
2020

УДК 373.5.016:512(02)
Б68

Рецензенти:

Акуленко І. А.,	доктор педагогічних наук, професор, Черкаський Національний університет імені Богдана Хмельницького;
Нелін Є. П.,	кандидат педагогічних наук, професор, Харківський Національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди;
Школьний О. В.,	доктор педагогічних. наук, професор, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова.

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (протокол № від 2020 року)

Благодир Л. А.
Б68 Організація превентивної діяльності у навчанні шкільного курсу алгебри : монографія / Людмила Благодир, Василь Швець ; МОН України, Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова,. Київ : Видавництво, 2020. – 184 с.
ISBN

У монографії розкрито теоретичні основи організації превентивної діяльності під час навчання алгебри учнів основної школи та пропонуються поради щодо організації та проведення такої діяльності.

Для викладачів методики навчання математики, учителів математики та здобувачів вищої освіти, які готуються до педагогічної діяльності.

УДК 373.5.016:512(02)

ISBN 978-966

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

За нової парадигми освіти важливого значення набуває проблема організації навчальної діяльності учнів. У зв’язку з цим в основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено компетентісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання є сформовані певні компетентності як здатність учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях і нести відповідальність за свої дії. За таких умов принциповим є питання позиції та місця кожного школяра у цілісному педагогічному процесі. Сьогодення потребує вдосконалення змісту, форм і методів навчальної діяльності і на цій основі створення та використання нових педагогічних технологій. Важливе місце в цьому посідає розвивальне та особистісно орієнтоване навчання, за якого активна пізнавальна діяльність учнів розглядається не тільки як засіб формування предметних компетентностей, а й як важливе джерело розумового розвитку особистості.

Нові вимоги суспільства, що характеризуються посиленням уваги до особистості школяра, до його саморозвитку та самопізнання, перебудова шкільної освіти, її перехід на якісно новий рівень вимагає від учителів, методистів, науковців пошуку нових методичних систем, які забезпечили б сприятливі умови для досягнення учнями належного рівня сформованості компетентностей.

У науково-методичній літературі пропонуються різні шляхи вдосконалення навчального процесу, використовуються нові методики та сучасні технології навчання, однак аналіз практики навчання математики, результати ДПА та ЗНО свідчать про те, що робота над помилками учнів є проблемною зоною в організації навчальної діяльності. Удосконалення, програм нові підходи до навчання, нові підручники, як свідчить практика, не викорінюють автоматично математичні помилки учнів. Ось чому ця проблема і на сучасному етапі розвитку освіти потребує належної уваги методистів та педагогів-практиків. Особливо важливе значення має діяльність з *попередження* помилок учнів, яка повинно ґрунтуватися на знаннях учителем особливостей засвоєння учнями навчального матеріалу, змісту типових помилок, яких припускаються учні, розумінні причин їх появи. Адже кожна помилка, свідчить про недостатній рівень засвоєння відповідного навчального матеріалу. Допущена одного разу, вона може знову повторитись, а неправильне розуміння учнем навчального матеріалу усталитись.

У зв'язку з реалізацією ідей гуманізації та гуманітаризації освіти спостерігається тенденція до скорочення годин на вивчення предметів природничо-математичного циклу. Тому особливо гостро постає питання підготовки сучасного висококваліфікованого вчителя математики, який зможе ефективно, якісно і швидко реагувати на всі зміни в навчальному процесі, науково і методично грамотно організовувати навчальну діяльність учнів, спрямовану на успішне оволодіння знаннями з найменшою кількістю помилок.

Помилки учнів та робота над ними постійно знаходяться в полі зору психологів, методистів, педагогів, математиків. Однак, типові математичні помилки, яких припускаються школярі живучі, залишаються проблемною зоною на шляху успішного навчання. Тому в освітньому процесі діяльність учня та учителя спрямовується на виправлення допущених учнем помилок, корекцію знань. Ми рекомендуємо зосередити увагу на діяльності з попередження та запобігання типових математичних помилок, недопущення їх у майбутньому. Така діяльність отримала назву – превентивна діяльність.

Монографія розрахована на широке коло педагогічних працівників, спрямована на те, щоб допомогти учителям математики, здобувачам вищої педагогічної освіти з'ясувати теоретичні та практичні аспекти організації превентивної діяльності під час навчання учнів шкільному курсу алгебри.

Монографія написана на основі результатів наукового дослідження з теорії та методики навчання математики, яке проводили з 2009 року по 2019 рік Л. А. Благодир (пошукувач наукового ступеня) і В.О. Швець (науковий керівник). Зауваження та побажання просимо надсилати на адресу: 0601, м. Київ, вул. Пирогова, кафедра теорії та методики навчання математики.

Автори

Превентивний *(спец.) – який*
попереджає що-небудь,
запобігає чомусь.
(*Словник української мови*)

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОРГАНІЗАЦІЇ ПРЕВЕНТИВНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ

1.1. Превентивна діяльність на уроках алгебри в основній школі

Під превентивною діяльністю вчителя математики розуміємо навчальну діяльність, яка ініціюється потребою: попередити математичні помилки учнів, виправити допущені, з'ясувавши причини їх появи та обрати необхідні методи, організаційні форми та засоби навчання математики.

Превентивна діяльність має організовуватися як процес взаємодії вчителя й учнів, в ході якого через спеціально дібрані методи, по-перше, виявляється природа та походження помилок, а по-друге, організовується робота з попередження та ліквідації цих помилок. Головним завданням формування превентивної навчальної діяльності школярів є розвиток у них уміння самостійно дотримуватися всіх її структурних компонентів і переходити від одного компонента до іншого (від прийняття рішення здійснювати певну діяльність до її планування, від дій і операцій до самоконтролю і самооцінки). Спочатку учні відпрацьовують усі дії разом з учителем. У результаті такої співпраці учень навчається ставити перед собою навчальну мету, планувати свою діяльність, виконувати дії й операції, контролювати хід виконання, оцінювати результат, робити висновки, коректувати на перспективу свої дії.

Хоча формування того чи іншого компонента діяльності учня, в силу індивідуальних особливостей, проходить по-різному, завдання учителя математики – підтримати будь-яку ініціативу учня в самоорганізації. *Дидактично виважена превентивна діяльність вчителя сприяє ефективній організації превентивної діяльності учнів.*

Повна неосвіченість – не найбільше лихо, а найгірше – нагромадження погано засвоєних знань.

(Платон)

Відповідно до структури діяльності виділяємо в ній такі компоненти, як *потреби, мотиви, мету, умови досягнення мети /задача/, планування діяльності, дії.* Відомо, що формування будь-яких потреб, зокрема потреби в навчальній діяльності, пізнавальних інтересів, можливе тільки в процесі самої діяльності. Скільки б учень не чув про необхідність навчальної діяльності, про його обов'язки, про важливість для нього самого цієї діяльності в майбутньому, і як би добре не осмислював справедливість цих слів, але якщо він не включився в цю діяльність, то ніяких мотивів до навчальної діяльності у нього, як правило, не виникає, тим більше не формується стійкий пізнавальний інтерес до цієї діяльності. Щоб мотиви виникли і закріпились, учень повинен починати діяти, і тоді, якщо сама ця діяльність викличе у нього інтерес, якщо в її процесі він буде відчувати яскраві позитивні емоції задоволення, радості, захоплення, то можна чекати, що у нього поступово виникнуть потреби в такій діяльності, а значить, сформується стійкий пізнавальний інтерес до неї.

Потреба у формуванні предметної математичної компетентності учня передбачає реалізацію потреби у попередженні та ліквідації прогалин у його знаннях.

Якщо для вчителя ця потреба вже визначена та чітко мотивована, то для учня потреба у вмінні вчасно виявляти та виправляти допущені помилки має бути сформована учителем і стати його індивідуальною потребою. Превентивна діяльність, організована вчителем, стає навчальною діяльністю, що розвиває особистість учня лише в тому випадку, якщо для її виконання у школяра є внутрішня спонука, тобто його особиста потреба. Необхідно сприяти розумінню учнем важливості такої діяльності. Як відомо, думати учень починає тоді, коли потрібно щось зрозуміти, зробити висновок.

Оскільки робота над помилками є складовою частиною навчальної діяльності, то можна вважати, що потреби і мотиви такої роботи визначаються потребами і мотивами, які спонукають учнів до самої діяльності. *Тому мотиви навчання, спрямовані на процес пізнання, на підвищення ефективності його результатів, стають мотивами здійснення заходів з ліквідації прогалин в знаннях.*

Мотивація діяльності учнів значно впливає на засвоєння матеріалу, розвиток інтересу до теми, що вивчається. Осмислення значущості, важливості даного матеріалу, стійкі інтереси і потреби, позитивні емоції, що виникають під час успішного засвоєння навчального матеріалу, негативні емоції, викликані хвилюванням, почуттям сорому та незадоволенням собою через неуважність, тимчасовими невдачами під час виконання посильних завдань – важливі стимули до навчання.

Як відомо, ефективність будь-якої методичної системи навчання залежить, зокрема від того, наскільки добре її використання забезпечує формування та стійкості в учнів позитивних мотивів до опанування знаннями та вміннями. Вчитель має навчитися керувати діяльністю учнів під час навчання, а для цього він повинен вміти формувати у них необхідну мотивацію. Адже, в протилежному випадку, якщо цього не робити, стає дійсністю небезпека про яку говорив В. О. Сухомлинський: «Всі наші задуми, всі пошуки і побудови перетворюються в прах, якщо в учня немає бажання вчитися» [107, С.7].

Мотиви, які формуються у процесі навчання, спричиняються певними потребами. Формування мотиву починається під впливом внутрішнього стимулу (органічної потреби) або зовнішнього стимулу з невизначеною вимогою, проханням, наказом. Більшість мотивів, які формуються у процесі навчання математики, спричиняються дією саме зовнішніх стимулів, але ці стимули повинні знайти відображення у певних потребах учнів. Наприклад, один зовнішній стимул (пропозиція розв’язати задачу) може зумовлюватися різними потребами (емоційне задоволення від безпомилкового розв’язання, пізнавальний інтерес, потребу у схваленні, можливість знайти в роботі над задачею нові факти, що розширять математичний кругозір) або може і не зумовлювати ніяких потреб у деяких учнів і не викликати дій щодо розв'язування задач. Отже, одна з основних проблем навчання полягає у тому, щоб для кожної передбаченої для формування дії виділити відповідні мотиви та знайти такі зовнішні стимули, які б сприяли виникненню цих мотивів у більшості учнів.

Так, якщо актуалізувати мотиви попередніх досягнень перед уведенням нового матеріалу, викликати незадоволення наявним рівнем та прогалинами в знаннях на етапі закріплення нового матеріалу, підсилити мотиви, орієнтуючись на взаємозв'язки з потребами практики, то це сприятиме кращому засвоєнню навчального матеріалу з мінімальною кількістю помилок.

На наш погляд, на будь-якому етапі навчання корисно використовувати здивування, що ефективно впливатиме як на сильних учнів, так і на школярів з низьким рівнем знань. Оскільки допущені помилки є результатом не стільки низького рівня знань учнів, скільки недостатніми зусиллями як учнів, так і вчителів з їх попередження та виправлення, то формування мотивації до вивчення матеріалу повинно здійснюватись як на етапі виправлення помилок, так і на етапі їх попередження, що сприятиме більш осмисленому сприйняттю нових математичних знань. Такими мотивами можуть бути:

- *задоволення від досягнення успіху;*
- *очікування позитивних емоцій, вражень від певних подій;*
- *заохочення;*
- *безпосередня зацікавленість;*
- *можливість висловити свою думку;*
- *самовираження і самовдосконалення;*
- *незадоволення наявним рівнем знань.*

Розбір помилок корисний ще і тому, що, ознайомившись з якою-небудь помилкою і ретельно проаналізувавши її, учень так чи інакше застраховує себе від повторення подібних помилок у майбутньому. Окрім того, робота над помилками може слугувати дієвим засобом для досягнення точності означень, точності формулювань теорем, тверджень. Аналізуючи помилки, що з'являються в процесі навчання, учні вчаться шліфувати кожне слово у своїй відповіді, думати над кожним реченням, осмислювати причини появи помилок. На нашу думку, ***основним мотивом превентивної діяльності як для учня так і для вчителя є високий рівень засвоєння учнями навчального матеріалу з найменшою кількістю помилок***, що сприятиме успішному навчанню в подальшому.

Для сучасних умов шкільного навчання характерніші нетипові,у порівнянні з 90-ми роками, мотиви навчання. Якщо підліток 80-х і 90-х років розглядав себе як частину суспільства, ставлячи інтереси останнього вище власних, то для сучасного підлітка головною цінністю є він сам, і тому навіть в мотивації навчання на першому місці опиняються прагнення до саморозвитку й самореалізації.

Значною рушійною силою попередження і усунення помилок учнів у вивченні математики є *інтерес*. Саме завдяки інтересу, процес надбання знань може стати рушійною силою розвитку інтелекту, оскільки він позитивно впливає на всі психічні процеси і функції: увагу, пам'ять, працездатність.

Наявність позитивного мотиву є гарантією швидкого та якісного формування діяльності, і навпаки, успішне опанування діями та операціями діяльності призводить до утворення або ж закріплення стійкого позитивного мотиву її реалізації. Так, наприклад, сформованість позитивно вмотивованої діяльності учня на опанування вміннями і навичками розв'язувати задачі з математики сприяє утворенню стійкої мотиваційної спрямованості на безпомилкове розв'язання таких задач.

Отже, говорити про превентивність як про діяльність можна в тому випадку*, якщо в учня створена відповідна система мотивів.* Пізнавальні мотиви навчання, спрямовані на процес пізнання, підвищення ефективності його результатів – знань, умінь і навичок, а також на способи пізнання та набуття знань, прийоми і методи навчальної праці стають і мотивами превентивної діяльності.

Як зазначалось вище, головна мета навчання у школі полягає в максимальному розвитку особистості учня відповідно до його здібностей, можливостей, нахилів. Безумовно, ефективно організоване виправлення помилок та здійснення профілактичних заходів щодо їх попередження сприяє підвищенню якості знань учнів, активізує їхнє мислення та служить меті розвивального навчання. Тому відповідно до цього, робота над математичними помилками учнів має за мету: спрямовувати роботу над помилками на результати навчання, на хід і темп просування кожного учня в опануванні змістом освіти, на розкриття і рівень розвитку його потенційних можливостей, задоволення його потреб, взагалі, на якість і ефективність процесу навчання.

Основною метою превентивної діяльності у процесі навчання математики є організація найсприятливіших умов для вивчення програмового матеріалу, переходу школярів від розуміння матеріалу до міцного його засвоєння, осмислення та закріплення, що сприятиме зменшенню неуспішності учнів.

Досягнення мети, як відомо, здійснюється через виконання певних дій. Ці дії реалізують окремі проміжні цілі, які виділяються із загальної мети. До таких дій превентивної діяльності ми відносимо: *аналіз, попередження, виправлення математичних помилок.* Розглянемо кожну з них детальніше.

Аналіз математичних помилок. Метою такої дії в умовах особистісної спрямованості освітнього процесу є відстеження математичних помилок кожного учня, розкриття їх природи, пояснення причин появи. На нашу думку, аналіз математичних помилок учнів повинен охоплювати такі основні етапи:

– *виявлення змісту помилок;*
– *облік помилок;*
– *дослідження причин появи помилок;*
– *попереднє прогнозування можливостей попередження помилок.*

Щоб визначити сутність алгебраїчних помилок, які допускаються учнями під час розв’язання задач, необхідно простежити хід міркувань, що приводить до помилкового розв'язування, встановити етапи, на яких зароджуються помилки, тому що в більшості випадків кожне хибне судження – це результат якогось ходу учнівської думки, якоїсь «своєї» логіки міркування.

Іноді при розв’язуванні навіть однієї задачі учень може помилитися декілька разів, про що важко здогадатися, дивлячись на запис остаточного результату. Як показує досвід, часто учневі незрозумілий не весь матеріал, а лише якась його частина. Виявивши, що саме незрозуміле учневі (а у встановленні цього вчителю допоможе аналіз помилок, що допускаються учнем), учитель може зосередити на цьому матеріалі увагу, не відволікаючись на ті моменти, які вже засвоєні.

Встановлення змісту помилок здійснюється перевіркою (попередньою, поточною, тематичною або усною, письмовою чи за допомогою комп’ютерних технологій), спрямованою на виявлення результатів навчальної діяльності учнів, вивчення процесу досягнення цих результатів, темпу просування кожного учня в опануванні змістом матеріалу, розвитку і реалізації його можливостей, нахилів та інтересів. Саме поточною перевіркою є змога своєчасно виявити можливі помилки та недоліки учнів під час вивчення відповідної теми. Результати такої перевірки дають змогу прослідкувати розвиток навченості кожного учня, простежити рівень опанування навчальним матеріалом, здатність до безпомилкового розв’язання завдань, знайти шляхи удосконалення навчального процесу, своєчасно вносити певні корективи в навчальну діяльність відповідно до індивідуальних особливостей учнів. Зокрема, уточнити зміст помилки можна, запропонувавши школярам для розв’язування спеціально дібрані (з можливою появою помилок) вправи. Інтерес у цьому розумінні представляють ті задачі, в яких є помилки, що допускалися самими учнями в контрольних роботах і під час усних відповідей. Вчитель не повинен поспішати з виправленням кожного помилкового твердження учнів. Бажано обговорити це твердження всім класом, якщо недоліки і помилки типові, або з окремими учнями, якщо вони мали індивідуальний характер, та досягти усвідомленого виправлення допущених помилок.

У шкільній практиці майже завжди пропонують учням завдання, у яких в умові відсутні помилки. Це виробляє в школярів надмірну довіру до всіх повідомлень, вказівок, завдань, навіть до всіх відповідей, прикладів і задач, наведених у задачниках і підручниках. У життєвій практиці, наприклад, у кресленнях, схемах, розрахунках, з якими учні в майбутньому зустрінуться, можуть бути і помилки. Якщо не навчити учнів критично ставитися до умов завдань та знайдених результатів, то можуть бути серйозні наслідки в роботі. Щоб цього уникнути, необхідно формувати в учнів уміння аналізувати дані, здатність виявляти помилки, що зустрічаються, і обґрунтовувати помилковість тверджень. Звичка критично ставитися до будь-якого судження має велике життєве значення, оскільки учні поступово звикають давати оцінку як особистим думкам, так і висловлюванням інших. Якщо ж школярі не допускають помилок, то все одно необхідно виявити, настільки вони «стійкі» до типових помилок, запропонувавши задачі, складені вчителем з урахуванням найпоширеніших, типових помилок.

У роботі з попередження та недопущення помилок учнів значне місце займає **облік помилок**. Аналіз різного рівня перевірених робіт дозволяє вчителю всебічно вести облік учнівських помилок і заносити їх в спеціальні таблиці реєстрації помилок. Окрім того, бажано також вести облік помилок, які допускають окремі учні. Його можна вести в індивідуальних картках реєстрації прогалин в знаннях школярів. При цьому бажано фіксувати не тільки ті помилки, які свідчать про явні прогалини в знаннях, а також виправлення, які свідчать про недостатньо міцне засвоєння відповідного матеріалу. Необхідно відзначати й ті завдання, з якими учні не впоралися взагалі.

Процес знаходження та виправлення помилок самими учнями під керівництвом учителя важливо зробити повчальним для учнів, внаслідок чого вивчення та аналіз помилок стає ефективним засобом в розвитку пізнавального інтересу взагалі та інтересу до вивчення математики зокрема.

Враховуючи, що наше дослідження спрямоване на вивчення причин та розробку методів попередження типових помилок учнів, *облік* та *виявлення* їх *змісту* були необхідні, головним чином, для перевірки типовості тієї чи іншої помилки, тобто віднесення певної помилки до випадкових чи систематичних.

Ми стверджуємо, що вивчення помилок учнів не повинно закінчуватись встановленням того, що неправильно виконав учень, а **повинно бути**

продовжено і спрямовано на знаходження відповіді на питання: чому він це зробив? Які обставини спонукали появу відповідної помилкової дії? Як попередити появу помилок? Тобто вчитель повинен насамперед розуміти причини виникнення помилок та умови, необхідні для правильного виконання конкретного завдання.

Систематичний *облік* помилок, виявлення їх змісту має допомогти вчителю:

– *одержати достатньо повне уявлення про помилки та недоліки в знаннях кожного учня та здійснювати заходи з їх ліквідації;*

– *уникнути випадків виставлення високої підсумкової оцінки за тему, якщо з неї у школяра є суттєві прогалини;*

– *виявити помилки, характерні для вивчення певної теми, і відповідно добирати зміст, форми,засоби, методи подальшого навчання. Іноді має зміст затрата часу на додаткове вивчення складного для учнів матеріалу, щоб досягти його засвоєння;*

– *під час навчання математики у подальшому в тих же класах внести необхідні корективи в методи і прийоми навчання з урахуванням допущених учнями помилок, а також труднощів, з якими вони зустрічаються.*

Тільки завдяки постійній і систематичній роботі з виявлення й систематизації допущених учнями помилок, ретельним їх вивченням, можна розкривати причини їх появи та накреслювати найефективніші заходи з попередження та виправлення, а отже, сприяти успішному вирішенню завдання підвищення рівня математичної підготовки учнів.

Попередженням появи помилок будемо називати дію в організації навчальної діяльності учнів, спрямовану на міцне засвоєння знань з мінімальною кількістю допущених помилок.

Важливу роль у попередженні помилок відіграє зміст та продумана організація вивчення нового матеріалу. Для учня, який починає вивчення нової теми, важливо знати, що з раніше засвоєного матеріалу йому знадобиться в цей момент, виявити прогалини у знаннях і своєчасно їх усунути. Інакше він не зможе успішно сприймати новий матеріал, що призведе до слабких знань і, врешті, їх втрати, а отже, до негативного результату навчання. У зв'язку з цим, учителю необхідно скласти систему завдань, яка б давала можливість визначити, наскільки міцними є знання учнів базового матеріалу, необхідного для свідомого засвоєння *нового*. Вивчення нового матеріалу потрібно будувати так, щоб учень був активним учасником цього процесу. Не треба боятися, якщо при першому сприйнятті матеріалу учнем будуть допускатися помилки, висловлюватися необґрунтовані висновки. Важливо, щоб ті чи інші помилки в розумінні матеріалу виправлялися відразу, щоб учні сприймали навчальний матеріал усвідомлено.

Такому підходу до вивчення нового матеріалу сприяє створення проблемних ситуацій і розв'язання їх учнями самостійно, чи під керівництвом учителя. На уроках математики учні проходять через такі стадії як: пошук нового (поставлена проблема, що має бути вирішена учнем!), можлива поява помилок у процесі пошуку нового, ґрунтовний аналіз і виправлення помилок, знову пошуки, у результаті яких приходять до правильного висновку, нарешті, доведення, добутого в пошуках твердження. Корисно перед учнями ставити питання, які допоможуть виявляти розуміння суті матеріалу, що вивчається, зокрема теорем, нових тверджень та фактів, встановлювати рівень їхніх міркувань, а також уміння відтворювати сприйняті знання в змінених умовах.

Важливу роль в умовах організації превентивної діяльності відіграє особистість вчителя, його досвід та майстерність, володіння даними про можливість появи типових помилок під час вивчення тієї чи іншої теми. Вчитель повинен володіти ситуацією, вчасно запропонувати завдання, поставити питання, навести контр приклад, чи влаштувати провокацію ще до того, коли учень може допустити помилку.

Важливою є організація та проведення повторення основних теоретичних відомостей з такою частотою, що забезпечить їх міцне запам’ятовування.

Під час здійснення превентивної діяльності вчителю необхідно постійно контролювати рівень складності викладу начального матеріалу та потенційні можливості школярів. Відомо, що якщо матеріал незрозумілий, то **він**

засвоюється формально, запам'ятовується неточно, відхилення не помічаються і виникає ілюзія запам'ятовування та засвоєння. Необхідною умовою запам'ятовування матеріалу є його розуміння.

Своєчасний контроль, який є невіддільною складовою всього навчального процесу, здійснює значний вплив не тільки на результат, але й на хід навчання, оскільки забезпечує одержання даних про рівень ефективності функціонування будь-якої системи навчання. Правильно організований контроль допомагає школярам критично оцінити свої успіхи та недоліки у засвоєнні того чи іншого матеріалу, а потім правильно і раціонально під керівництвом учителя організувати свою подальшу роботу, сформувати навички самоконтролю, виховати низку якостей особистості, наприклад, таких, як відповідальність за роботу, що виконується, наполегливість, охайність тощо.

Не менш важливим напрямом для ефективного здійснення превентивної діяльності вчителя математики є правильна організація навчальної діяльності учнів як на уроках математики, так і під час виконання домашніх завдань. Домашні завдання продовжують ту роботу, яка була проведена на уроці, і її успішне виконання залежить від того, наскільки учні на уроці підготовлені до виконання цього завдання. Аналіз причин відставання учнів у навчанні математики дозволяє зробити висновок, що проблема підвищення ефективності навчання та інтенсифікації навчальної роботи школярів може бути успішно розв'язаною за умови, якщо висока якість шкільних занять буде підсилюватися добре організованою домашньою роботою.

Отже, попередження помилок доцільно здійснювати на етапах:

– *вивчення теоретичного матеріалу в умовах організації засвоєння теоретичного змісту підручника математики;*
– *самостійної навчальної діяльності учнів;*
– *засвоєння нового матеріалу;*
– *повторення та узагальнення вивченого матеріалу;*
– *виконання домашнього завдання;*
– *контролю рівня навчальних досягнень учнів.*

Досвід роботи вчителів математики, який ми вивчали, показує, що перевірка правильності розв'язання задач учнями найчастіше здійснюється через порівняння з відповіддю, яка є в підручнику, або яку повідомить учитель. На практиці доводиться мати справу із задачами, відповіді до яких не подаються. Тому учні повинні вміти перевіряти правильність розв'язаних ними задач самостійно, щоб бути впевненим в отриманому результаті. З метою попередження помилок необхідно сформувати в школярів ***навички самоконтролю***. Ці навички складаються з двох частин: *а*) *уміти знайти помилку*; б) *уміти її виправити*.

Важливо навчити учнів здійснювати: *перевірку обчислення і тотожного перетворення через виконання оберненої дії чи підставлянням допустимих числових значень у початковий і кінцевий вирази; перевірку правильності розв'язання задач через складання і розв'язування задач, обернених до даних; оцінювання розв'язку задачі з погляду здорового глузду; перевірку того, чи задовольняє розв'язок умову задачі; перевірку аналітичного розв'язання графічним способом; перевірку правильності міркувань за допомогою «кругів» Ейлера.* Іноді дієвим способом перевірки є інший спосіб розв'язування задачі. Відповідальним моментом у навчанні учнів самоконтролю є знайомство зі зразками, за якими будуть порівнюватись використані способи виконання завдань та одержані результати.

Виробленню навичок самоконтролю допомагає і прийом наближеної оцінки очікуваного результату. Встановлення можливих меж очікуваної відповіді попереджає недоліки типу описок, пропуску цифр тощо. Ефективними є провокаційні завдання, умови яких містять вказівки чи інші спонуки, які провокують учнів до помилкових розв'язань. Допускаючи помилки, усвідомлюючи провокаційні наміри вчителя і характер навчальної ситуації, учень емоційно сприймає, надовго запам'ятовує помилкову дію і в подальшому на підсвідомому рівні остерігається її. Захопливим матеріалом для такого типу діяльності є *софізми* та *парадокси*. Такі завдання створюють пошукову ситуацію, тобто ситуацію, коли учням потрібно розшукати помилку і виправити її, критично осмислюючи кожен етап міркувань. Зокрема, міцність засвоєння математичних фактів значно покращується емоційним сприйняттям абсурдного твердження софізму. Важливо навчити учнів виявляти і пояснювати помилки, розгорнуто і послідовно будувати спростування.

Самостійна робота учнів над помилками через формування навичок самоконтролю забезпечує більш осмислений їх аналіз та аналіз особистих дій з розв'язування конкретних задач. Це впливає на якість одержаних знань та стимулює розвиток логічного мислення, його характерних показників: критичність, доказовість, активність, глибину та гнучкість.

З метою попередження помилок у процесі навчання алгебри доцільно пропонувати учням такі завдання:

– *знайти помилку у формулюванні правила чи теореми;*

– *знайти суперечність у наведеному математичному тексті;*

– *знайти невідповідність змісту завдання з раніше вивченим матеріалом, із практикою, суміжними навчальними предметами, із здоровим глуздом;*

– *знайти зайві дані в умові задачі;*

– *виявити неповноту умови задачі;*

– *завершити неповне розв'язання задачі;*

– *знайти принципові прогалини в розв'язуванні задачі.*

Детальніше зупинимося на цих питаннях у другому розділі монографії.

Виправлення помилок – дія, спрямована на усунення недоліків і прогалин у знаннях, уміннях та навичках учнів, ліквідацію виявлених розбіжностей між досягнутими і запланованими результатами.

Нерідко доводиться спостерігати, як учитель, пояснюючи незрозумілий учню матеріал, не дає учневі можливості розв'язувати завдання по-своєму, а відразу показує зразок правильного розв'язання. У цьому випадку учень не може зрозуміти, чому він неправильно розв'язує, в чому полягає його помилка, і тим самим **ігнорується найважливіший прийом – навчання на помилках**. За іншого підходу вчитель не ігнорує неправильне розв'язання, а прослідковуючи хід міркувань учня, вибирає в ньому найуразливіші місця, абсурдність отриманого результату, і співставляє вихідні й отримані дані. Так вчитель спонукає учня відмовитися від свого розв'язання. Шлях переконання учня в неправильності його розв'язання досить тривалий, тому що відбувається перебудова в знаннях, а не просте нашарування одних на інші, як це буває при готовому розв’язанні. Але цей шлях сприяє глибшому усвідомленню суттєвості помилки. Передбачаючи, коли учні можуть припуститися помилок, досвідчений вчитель спеціальними вправами створює проблемні ситуації, а це дає змогу не просто уникнути помилки, а й акцентувати увагу учнів на можливості її появи. **Пояснення допущених учнями помилок є обов’язковим, адже тільки так можна перевірити, наскільки учень їх усвідомив.**

Острах припуститися помилки часто сковує ініціативу учня. Боячись помилитися, він не буде сам вирішувати поставлену проблему, а стане чекати допомоги від учителя. Але без самостійного розв'язування задач з послідовно зростаючою складністю не може відбуватися інтелектуальний розвиток. У багатьох випадках з цієї причини учні виявляють систематичну боязкість і інтелектуальну пасивність, які, вкорінюючись, надалі призводять до неуспішності.

Цілеспрямована робота над помилками вимагає систематизації помилок, що з'являються у процесі вивчення алгебри. При цьому вирішальну роль повинні відігравати не окремі приклади помилок, а групи помилок, об'єднаних спільністю причин їх появи, спільністю методики роботи над ними. Така систематизація помилок дозволяє накреслити головні шляхи їх ліквідації і, що найголовніше – попередження помилок у подальшому. Знання вчителем типових учнівських помилок, причин виникнення і форм вияву дає можливість передбачати і попереджати їх появу. Це досягається через добір таких вправ, які перешкоджають утворенню однобічних уявлень і неправильних узагальнень. Корисно виправляти помилки і неточності у формулюванні означень, теорем, висловлень за допомогою наведення контр прикладів.

Особливого ставлення з боку вчителя вимагають помилки випадкового характеру (помилки через нестійкість самоконтролю). Для правильного вибору методики роботи над такими помилками необхідно насамперед з'ясувати, чи є вона випадковою, чи вона – результат нерозуміння навчального матеріалу. Якщо вчитель встановить, що помилка допущена через нерозуміння матеріалу, то в цьому випадку треба порекомендувати учню провести таку роботу над помилками: *встановити помилковість своїх висновків, прочитати відповідний матеріал тексту підручника, проаналізувати доведення теореми чи виведення формули, розв'язати систему вправ ще раз*.

1. 2. Функції і принципи превентивної діяльності

Проведений аналіз науково-методичної, дидактичної літератури і власні дослідження дають змогу стверджувати, що під час здійснення превентивної діяльності вчителя математики можуть успішно реалізуватися такі функції: *діагностична, прогностична, попереджувальна, стимулююча, навчальна, коригувальна, розвивальна, виховна, методична, емоційно-збережувальна та психологічна.* Розглянемо зміст кожної з них детальніше.

Діагностична функція передбачає здійснення регулярного встановлення рівня засвоєння навчального матеріалу.

Прогностична функція полягає у систематичному вивчені допущених помилок та вмінні передбачати появу аналогічних помилок у майбутньому.

Попереджувальна функція спрямована на актуалізацію знань, необхідних для застереження учнів від можливих математичних помилок.

Стимулююча функція визначає забезпечення позитивних мотивів, впевненість у власних силах у досягненні поставлених вимог та створення сприятливих умов для здійснення пізнавальної активності.

Освітня функція полягає в оволодінні учнями математичними знаннями,вміннями і навичками під час навчання в школі.

Коригувальна функція визначає процес, спрямований на попередження і своєчасне виправлення математичних помилок, а також ліквідацію прогалин у знаннях та вміннях окремих учнів.

Розвивальна функція спрямована на інтелектуальне зростання учнів, розвиток уваги, пам'яті, мислення, мовлення, оволодіння раціональними способами навчально-пізнавальної діяльності.

Виховна функція полягає у вихованні в учнів здатності до саморегулювання, формування відповідальності за результати власної навчальної діяльності.

Методична функція пов'язана зі здійсненням учителем педагогічної рефлексії особистої діяльності, самоаналізу ефективності різних організаційних форм та методичних прийомів з метою підвищення рівня засвоєння програмового матеріалу учнями, з урахуванням їхніх індивідуальних особливостей.

Емоційно-збережувальна функція спрямована на збереження позитивних емоційних реакцій учнів на допущені помилки та недопущення проявів негативізму, невпевненості у власних силах, байдужості до навчання.

Психологічна функція визначає створення психологічного контакту, встановлення атмосфери довіри, відмову від упередженого ставлення.

Досягнення мети навчання та успішне вирішення поставлених завдань неможливе без урахування загально дидактичних принципів і закономірностей навчання, психологічних і дидактичних принципів розвивального навчання, психологічних теорій навчання та відповідних моделей навчання. Вчитель повинен дотримуватись принципів та закономірностей навчання. Зокрема, в умовах організації превентивної діяльності у навчанні математики необхідно враховувати наступні дидактичні принципи:

Індивідуального підходу до учнів. Робота над помилками з математики передбачає роботу над ситуативними помилками кожного учня окремо.

Диференційованого навчання учнів. Превентивна діяльність має бути спрямована на організацію допомоги учням, які відстають у навчанні математики відповідно до ознак цього відставання та з урахуванням особливостей тем, що вивчаються. В умовах класно-урочної системи необхідно здійснювати рівневу диференціацію, використовувати групові й індивідуальні форми роботи, виділяючи типологічні групи учнів, які мають орієнтовно однаковий рівень загального розвитку, навченості, темпу просування у навчанні, цікавості до математики.

Систематичності і послідовності. Превентивна діяльність спрямована на ліквідацію прогалин в знаннях учнів протягом всього періоду навчання. Безпомилкове засвоєння навчального матеріалу на попередньому етапі навчання сприятиме осмисленому вивченню нового матеріалу.

Розвитку мнемонічної діяльності. У процесі навчання математики необхідно домагатися запам'ятовування учнями основних означень, тверджень, алгоритмів розв'язання ключових задач, озброювати учнів спеціальними мнемонічними прийомами, які полегшують запам'ятовування навчального матеріалу.

Цілеспрямованого формування алгоритмічних і евристичних прийомів розумової діяльності. Цей принцип передбачає розвиток мислення, опанування учнями загальними розумовими діями і прийомами розумової діяльності, що сприяє кращому засвоєнню математичних знань та мінімізує кількість допущених помилок у навчанні математики.

Усвідомлення всіма учнями процесу навчання. Забезпечення цього принципу вимагає від учителя математики копіткої роботи з тими, хто не встигає, допускає багато помилок, з'ясування причин цього та організацію своєчасної педагогічної підтримки таких учнів.

Мотивації позитивного ставлення до навчання. Важливою умовою успішного навчання учнів, є наявність певних пізнавальних потреб, позитивних мотивів.

Зв'язку теорії з практикою. Використання задач і вправ практичного змісту повинно сприяти підвищенню інтересу до вивчення математики, допомагати більш осмисленому, глибокому та міцному її засвоєнню.

Заслуговує на увагу система закономірностей в організації навчальної діяльності вчителів та навчальної діяльності учнів, запропонована Я. Й. Грудьоновим [48]. Автор розглядає психолого-дидактичні *закономірності,* в яких розкриваються залежності між зовнішніми умовами навчального процесу та внутрішніми процесами, які відбуваються у свідомості учнів. Знаючи ці закономірності, володіючи методикою їх використання, вчитель математики зможе цілеспрямовано керувати розумовою діяльністю учнів, їхньою увагою, процесом сприйняття та запам'ятовування навчального матеріалу:

1) *матеріал відносно великого обсягу запам'ятовується неохоче, без бажання.*

2.) *якщо навчальний матеріал погано зрозумілий, то він засвоюється формально, запам'ятовується неточно*.

3) *якщо деяка особливість, яка притаманна окремим задачам не відтворена в системі вправ чи в способах розв'язування задач, то в учнів може утворитися помилкова асоціація, в першу ланку якої не входить осмислення даної особливості*.

4) (*закономірність Смирнова-Зінченко*) *учень може запам'ятати навчальний матеріал мимовільно, якщо виконує над ним активну розумову діяльність і вона направлена на розуміння цього матеріалу.*

Необхідно відзначити важливість закономірностей формування вмінь та навичок розв'язування задач. Зокрема, знання закономірності Шеварьова дає можливість розробити систему вправ з метою попередження появи типових математичних помилок учнів.

Закономірність Шеварьова:

Якщо під час діяльності виконуються три умови:

• *учневі пропонують задачі тільки одного типу;*

• *в цих завданнях незмінно повторюється деяка особливість;*

• *усвідомлення цієї особливості не обов'язкове для одержання правильної відповіді, то рівень усвідомлення особливості, що повторюється знижується, тобто в учня утворюється помилкова узагальнена асоціація.*

В умовах організації превентивної діяльності вчителя математики доцільно раціонально поєднувати *індивідуальну, колективну, фронтальну, групову та парну роботу* над математичними помилками з метою їх попередження та вчасного виправлення. Звичайно, в кожному окремому випадку необхідно вибирати найвдаліше поєднання різних форм навчальної роботи.

У структурі методів повинна відтворюватись єдність превентивної діяльності учителя та учня, спрямованої на досягнення поставлених цілей, що стає можливим, якщо діяльність буде певним чином організована, мотивована і підкріплена відповідними стимулюючими впливами; якщо за допомогою контролю і самоконтролю, що визначають рівень наближення до мети, будуть вноситись необхідні корективи в організацію діяльності; і нарешті, якщо будуть створені сприятливі умови для здійснення діяльності. У зв'язку з цим сукупність методів буде відносно цілісною, якщо вона буде складатися з: методів організації і самоорганізації навчально-пізнавальної діяльності; методів стимулювання і мотивації навчання; методів контролю і самоконтролю ефективності навчання.

У виборі *методів* навчання ми дотримуємось думки, що тільки комбінуючи традиційні і сучасні методи навчання математики можна досягти успіхів у роботі. В превентивній діяльності, основним напрямом якої є успішне засвоєння знань з найменшою кількістю допущених помилок, вчитель математики має вдало використовувати і пояснювально-ілюстративний метод, основна вимога до якого – пояснення вчителя мають бути зразком для відповіді учнів; метод евристичної бесіди, який має сприяти активізації мисленнєвої діяльності всіх учнів класу; алгоритмічний метод, коли в алгоритм включаються вказівки, спрямовані на необхідність самоконтролю дій, що дозволить попередити типові помилки учнів; метод простих та складніших задач, коли спочатку відпрацьовуються навички розв'язування простих задач, які входять до складу складніших; використання вправ коректувального характеру; забезпечення зв'язку між математичними поняттями тощо.

Серед *засобів* ліквідації прогалин у знаннях учнів під час вивчення математики важливо робити акцент на спеціально організоване повторення навчального матеріалу, з метою встановлення тісного зв'язку між вивченим і новим матеріалом; проведення спеціального усного опитування, з метою виявлення прогалин в знаннях; систему індивідуальних завдань, в ході виконання яких учні осмислювали б навчальний матеріал, пов'язували теоретичні положення з практикою і від того краще розуміли їх; на роботу над допущеними помилками; на систему вправ з попередження помилок, створену з урахуванням психолого–дидактичних закономірностей; на алгоритмічні приписи та цілеспрямоване використання комп'ютерних технологій.

Важливо сформувати в учнів здатність до самостійної навчальної діяльності, вагомим компонентом якої є самостійність мислення, яке характеризується наявністю у школярів певних умінь самостійного здійснення основних мисленнєвих операцій, а також такого ставлення до навчально-пізнавальної діяльності, за якого учень прагне не використовувати сторонню допомогу під час виконання навчальних завдань учителя, а виявляє одночасно елементи гнучкості, варіативності, критичності мислення, вольові зусилля у навчанні.

Превентивна культура вчителя математики має визначатися високим рівнем володіння математичними знаннями, умінням передавати ці знання учням, здатністю організовувати діяльність з попередження появи математичних помилок у школярів. Названі нижче знання та уміння вчителя математики визначають зміст його превентивної культури.

Знання :

– психологічних та методичних причин появи математичних помилок учнів;

– системного, комплексного та діяльнісного підходів до організації навчального процесу;

– основних дидактичних принципів навчання і психологічних принципів розвивального навчання;

– вікових та індивідуальних особливостей учнів;

– логічних прогалин шкільного курсу математики, причин їх виникнення та можливі засоби їх усунення;

– навчального матеріалу шкільного курсу математики та основних фактів фундаментальних математичних дисциплін;

– методики застосування сучасних засобів, форм та методів навчання математики;

– законів та закономірностей навчального процесу;

– системи психолого-дидактичних закономірностей.

Уміння **:**

– систематизувати помилки, об’єднуючи їх в групи за спільністю причин появи, спільністю методики роботи над ними;

– добирати раціональні методи навчання, які б зменшили можливість виникнення помилок, враховуючи індивідуальні особливості учнів, їхні нахили і здібності, ефективно поєднувати традиційні системи навчання з новими;

– використовувати сучасні інформаційні технології для діагностики, аналізу та виправлення математичних помилок;

– виховувати в учнів критичність мислення, вміння виявляти помилки і неповноту міркувань, будувати контрприклади, узагальнювати результати;

– організовувати і проводити контроль та самоконтроль навчально-пізнавальної діяльності;

– встановлювати логічні зв’язки між новим і вивченим навчальним матеріалом; постійно дотримуватися принципу наступності у навчанні математики;

– враховувати вікові особливості учнів та будувати навчальний процес як з урахуванням специфіки конкретного матеріалу, так і
у відповідності з цими особливостями;

– сприяти свідомому та міцному засвоєнню знань, організовувати поточне і тематичне повторення набутих знань та навичок з необхідною систематизацією та узагальненням їх;

– постійно вдосконалювати методи і прийоми навчання математики з метою покращання якості знань учнів, викорінювання та попередження формалізму в навчанні, а тим самим формалізму в знаннях учнів;

– здійснювати на практиці облік та систематизацію математичних помилок учнів, розробляти та здійснювати заходи з попередження та ліквідації цих помилок;

– вміло застосовувати психолого-педагогічні закономірності, зокрема, закономірності формування вмінь та навичок, закономірності засвоєння навчального матеріалу, закономірності пам’яті і мислення;

– здійснювати індивідуальний та диференційований підхід до учнів під час навчання математики;

– розвивати логічне, творче мислення, вміння здійснювати самоперевірку виконаних завдань, використовуючи різні методи і прийоми.

– аналізувати і прогнозувати можливість появи учнівських помилок та обирати оптимальні прийоми і методи з їх попередження.

– вчити учнів логічно мислити, обґрунтовувати свої думки.

– організовувати самостійну діяльність з урахуванням вимог зворотного зв’язку.

Отже, для здійснення цілеспрямованих заходів щодо виправлення і попередження помилок учнів, вчителю математики необхідно, по-перше, володіти превентивною культурою вчителя математики, по-друге, систематично вивчати помилки учнів, виявляти найстійкіші й типові з них, вести облік типових та індивідуальних помилок учнів. Знання вчителем типових учнівських помилок, причин їх виникнення і форм вияву дозволить передбачати і попереджати їх появу.

1. 3. Психологічні особливості учнів основної школи

Розв’язуючи будь-яку проблему, що торкається учнів конкретного віку, здійснюючи вибір методів, форм, засобів навчання, потрібно знати особливості психіки, властиві саме дітям цього віку.

Підлітковий вік (від 10-11 до 14-15 років) – це один з найважливіших етапів життя людини, для якого є характерним утворення нових зв’язків, структурних поєднань між різними психічними функціями: мисленням, пам’яттю, почуттям, уявою тощо. В ньому багато джерел і починань всього подальшого становлення особистості. Вік цей нестабільний, вразливий, важкий і більше, ніж інші періоди життя, залежить від реальностей довкілля.

Згідно з дослідженнями психологів ключовим чинником психічного розвитку в підлітковому віці виступають зміни в самосвідомості і перебудова Я-концепції, зумовлені потребою визначити своє місце серед інших людей. З’являється почуття дорослості, психологічна готовність до нових, вищих вимог. Цей вік характеризується сенситивністю до переходу навчальної діяльності на якісно вищий рівень, коли для підлітка розкривається її новий зміст як діяльності в напрямі самоосвіти та самовдосконалення. У традиційній психології існують три варіанти визначення провідної діяльності в підлітковому віці. Так Д. Б. Ельконін виділив інтимно-особистісне спілкування, Д. І. Фельдштейн – суспільно корисну діяльність, В. В. Давидов – суспільно значущу діяльність. З одного боку, у двох визначеннях наявний один і той же чинник – «суспільність». Справді, діяльність як висхідна форма опановування новим для даного віку змістом, будується завжди як сумісна, тобто певною мірою як суспільна. З іншого – при вивченні підліткового періоду не можна не враховувати прагнення підлітків до спілкування з однолітками.

Сучасні дослідники підліткового віку зійшлися у важливості визначення одного протиріччя. З одного боку, підлітковість – це вік соціалізації, зростання у світ людської культури та суспільних цінностей, а з іншого – це вік індивідуалізації, відкриття та *утвердження власного унікального і неповторного* «Я».

Саме у підлітковому віці змінюється внутрішня позиція у ставленні до школи і навчання. Якщо в молодших класах діти захоплені навчальною діяльністю, то в період пубертату їх приваблюють взаємини з однолітками. Головне місце серед мотивів позитивного ставлення до школи займає мотив спілкування з однолітками. Тому під час організації превентивної діяльності необхідно віддавати перевагу *груповим, парним* формам навчання. Пояснюючи один одному незрозумілий навчальний матеріал, виконуючи завдання разом, учні одержують задоволення від належного рівня результативності такої діяльності.

Позитивне ставлення до навчальної діяльності визначається такими способами навчальних дій, які роблять підлітків *незалежнішими, дорослішими у власних очах*. Через самостійні форми занять вони легше засвоюють способи розумових дій. З боку вчителя їм *імпонує лише його підтримка чи допомога*

Для особистого зростання підлітка особливої значущості набувають знання, які забезпечують розширення кругозору, що дозволяє набути *певного статусу серед однолітків*. Вперше в підлітковому віці виявляється самостійна спрямованість на пошук нових знань. Процес засвоєння знань приносить задоволення підлітку тільки тоді, коли він бачить *життєві призначення* цих знань, і в нього є *інтерес до предмета*. Навчальна мотивація формується на основі пізнавальних потреб і навчальних інтересів.

Підліток з високими домаганнями на *визнання серед однолітків* може досягти такого статусу завдяки міцним знанням. При цьому важливе значення має оцінка його знань.

Потреба в самоствердженні настільки сильна, що заради визнання себе однолітками, *підліток здатний на будь-які вчинки*. На процес самоствердження впливає *його самооцінка*. Особливості ж самооцінки впливають на емоційне самопочуття і взаємини з оточенням, на розвиток творчих здібностей і на успіхи в навчанні. За низької самооцінки підліток недооцінює свої можливості і прагне до виконання тільки найпростіших завдань, що заважає його самоствердженню. *За завищеної самооцінки він може переоцінити свої можливості і братися за ті справи, які не в змозі виконати*. Підлітки з низькою і середньою самооцінкою ні до чого не прагнуть, нічого не хочуть, мало на що реагують. Шлях до саморозвитку та самоствердження у цієї категорії підлітків закритий. Тому творчий учитель, орієнтуючись у психологічних особливостях школярів та створюючи ситуацію успіху, здатен підняти самооцінку учнів, допомогти їм відчути впевненість у своїх здібностях та нахилах, створювати такі ситуації в роботі над попередженням помилок, щоб знайдена вчасно помилка чи здійснена вміло перевірка виконаного завдання викликала задоволення собою.

Основи особистості в підлітковому віці значною мірою закладаються, як стверджував Л. С. Виготський у результаті змін у формах мислення. Підліток опановує процесом створення понять, він переходить до нової форми інтелектуальної діяльності–до мислення в поняттях, воно стає менш предметним і наочним.

Порівняння молодших (11-12 років) і старших (15 років) підлітків у процесі опанування ними математичними поняттями виявило, що молодші підлітки, уміючи визначати істотні властивості об’єктів, мають утруднення в їх знаходженні в нових чи змінених ситуаціях. У старших підлітків ускладнень у визначенні об’єкта в нових ситуаціях, звичайно, не спостерігається.

Молодшими підлітками краще засвоюються поняття, що спираються на адекватно дібрані наочні образи, в яких варіюються неістотні ознаки й постійними є істотні. Через відсутність такої варіації відбувається звужування утворених загальних понять.

З мисленнєвою діяльністю відбуваються зміни, які визначають перехід до абстрактного і формального мислення,значно розвивається теоретичне мислення. Стає можливою класифікація неоднорідних об’єктів, аналізуються нові сполучення предметів і категорій, вживаються в мовленні абстрактні висловлювання, висуваються різні ідеї, що зіставляються одна з одною різними способами. Логічна система дозволяє підлітку аналізувати, узагальнювати і конкретизувати ситуації, події, що сприяє виконанню завдань на порівняння. Так, наприклад, кращому засвоєнню формул скороченого множення у 7 класі сприяє виконання завдань на порівняння розкриття формул різниці квадратів двох виразів та квадрату різниці двочлена. Враховуючи рівень мислення молодших та старших підлітків, учителю доцільно постійно спрямовувати діяльність на розвиток усіх показників мислення. З метою *попередження помилок важливо пропонувати провокативні задачі, рефлексивні задачі, розкриття софізмів*. Вчителю посильно навчити учнів підліткового віку на своєму рівні використовувати контр приклади для спростування хибних суджень та неправильних доведень під час неправильного використання властивостей, правил чи алгоритмічних приписів. Старші підлітки, в силу психологічних особливостей, повинні навчитись виконувати свої дії правильно та аргументовано відстоювати особисту точку зору.

Особливим досягненням підліткового віку є здатність систематично будувати гіпотези, робити висновки і експериментально перевіряти чи спростовувати, в разі необхідності, їх істинність, що свідчить про пріоритетний розвиток логічного мислення. Тому актуальним в умовах організації превентивної діяльності є розкриття софізмів та парадоксів, розв'язування задач з не сформульованим питанням**;** задач з неповним або надлишковим складом умови; системи задач з поступовою трансформацією з конкретного плану в абстрактний; завдання на складання задач визначеного типу, задач, що мають декілька розв'язків, задач на міркування тощо. Такі задачі потребують творчого підходу, критичної перевірки кожного кроку розв'язування, уміння знайти помилку в міркуванні, яке здається бездоганним. Приклади таких завдань приведені в другому розділі монографії.

На новій інтелектуальній основі формуються нові психологічні механізми, що забезпечують самосвідомість, самооцінку, цілеспрямованість, самореалізацію, саморозвиток. У дітей підліткового віку складаються нові мисленнєві схеми, що дозволяють здійснювати формально-логічні операції, не спираючись на чуттєві сприймання конкретних об'єктів. Вони здатні оперувати абстрактними поняттями, розвиваються навички наукового мислення. Підліток навчається рефлексувати на свої розумові дії та операції і переживати від цього інтелектуальні почуття. Як наслідок – задоволення від правильно виконаного завдання і розчарування від нездатності його виконати. Саме в такому віці основним завданням для вчителя є підтримка найменшої ініціативи, заохочення до виконання дій та щедрість на похвалу.

У підлітків виявляється здатність діяти не методом спроб і помилок, а логічним добором варіантів. Вони починають замислюватися над власними думками і думками інших людей, бачити себе очима інших, з'являється впевненість в особистій унікальності. Враховуючи вищеназвані особливості, доцільною буде така організація превентивної діяльності за якої значне місце займуть самооцінка та самоконтроль.

Коли підлітки зустрічаються з труднощами в процесі мислення, не вміють зосередитись, неуважні, тоді з’являються помилки, яких вони не помічають. З метою попередження таких помилок вчителю необхідно на кожному уроці здійснювати добір завдань, спрямованих на розвиток мислення, особливо критичного та самостійного. Зокрема, таких завдань: «Перевір, чи правильно виконано…», « Поясни, чому правильно…», «Яке з тверджень правильне, а яке помилкове…?», « Чи правильно, що…»

Необхідно відзначити, що при незацікавленій позиції підлітка до розумової активності знижується її значущість і прагнення до навчальної діяльності. Для середніх підлітків властивою є схильність до фантазування, їм буде цікаво включатися в діяльність, в якій будуть використовуватись елементи *ейдетики* та *схоластики* для міцного запам’ятовування навчального матеріалу. У такому віці доцільно проводити урок-казку, урок-суд, урок-пригоду, головною дійовою особою якого є помилка. У грі учні можуть викривати помилку, засуджувати її як таку, що призводить до прогалин в знаннях, одержання низьких балів. Вчитель може зацікавити підлітків, оголосивши «полювання» на помилки товаришів. Відомо, *якщо під час виконання завдання учень вміє знайти допущену помилку та виправити її, це свідчить про належний рівень розвитку самоконтролю, здатність до самокорекції.* Завдання вчителя – у школярів підліткового віку сформувати та постійно вдосконалювати такі риси.

Розвиток пізнавальних процесів і особливо інтелекту в підлітковому віці має дві сторони – кількісну і якісну. Кількісні зміни виявляються в тому, що підліток розв’язує логічні задачі значно легше, швидше та ефективніше, ніж дитина молодшого шкільного віку. Якісні зміни перш за все характеризують зрушення в структурі мисленнєвих процесів: важливо не те, які задачі розв’язує учень, а як він це робить. Враховуючи це, вчителю необхідно виховувати потребу в раціональних способах розв’язування поставлених завдань. Підтримка та створення учителем ситуації успіху, похвала та висока оцінка раціонального способу розв’язання завдання сприяє прагненню учня до високого рівня знань, безпомилкового засвоєння навчального матеріалу.

У підлітковому віці істотно перебудовується характер навчально-пізнавальної діяльності. Якщо учень ще недавно охоче слухав докладні пояснення нового матеріалу вчителем, то тепер подібна форма знайомства з новим матеріалом може викликати нудьгу та байдужість. Більше задоволення приносить самостійна та колективна діяльність. Схильний раніше до дослівного відтворення навчального матеріалу, підліток прагне відтворювати матеріал своїми словами і виявляє протест, якщо вчитель вимагає точного відтворення визначень, формул, законів тощо. Враховуючи це, учителю необхідно постійно спрямовувати старших підлітків на самостійне набуття знань. Так, наприклад, під час засвоєння теми «Квадратична функція» у 9 класі, можна показати загальний вид квадратичної функції, а побудову графіка та дослідження властивостей даної функції запропонувати учням здійснити самостійно, вибравши при цьому найефективніші форми роботи. Адже давно відомо, що набуті самостійні знання найцінніші і запам’ятовуються назавжди.

Спілкування з однолітками, особисті інтереси і захоплення, розширення зв’язків з навколишнім світом часто знижують інтерес до навчання. Позитивне ставлення до навчання у підлітків виникає тоді, коли навчання задовольняє їхні пізнавальні потреби, завдяки чому знання набувають для них певного змісту як необхідної і важливої умови підготовки до майбутнього самостійного життя.

Найважливішу істотну роль у формуванні позитивного ставлення підлітків до навчання відіграє зміст навчального матеріалу, його зв'язок з життям і практикою, проблемний і емоційно забарвлений характер викладу, організація пошукової діяльності, що дає учням можливість переживати радість здійснення самостійних відкриттів, опанування раціональними прийомами навчальної роботи, що є неодмінною передумовою для досягнення успіху у навчанні.

У підлітковому віці у процесі навчання формується здатність до аналітико-синтетичного сприйняття предметів і явищ. Підліток сприймає вже не тільки те, що лежить на поверхні явищ, його сприйняття стає плановим і послідовним. Завдання вчителя – «занурювати» підлітка у глибину розуміння виконання дій, формувати уміння розв’язувати завдання осмислено та обґрунтовано.

Процес опанування в підлітковому віці складнішою системою знань впливає на розвиток мимовільної і довільної пам’яті. Засвоєння нового матеріалу потребує переходу від конкретно-логічної пам’яті до абстрактно-логічної. Ускладнення та значне збільшення обсягу навчального матеріалу призводить до якісної перебудови організації мнемонічних процесів.

Відбуваються істотні зміни в перебігу логічної пам’яті. Вони підпорядковуються установкам: засвоїти, зрозуміти, розібратися і запам’ятати матеріал. Узагальнені прийоми логічної пам’яті дозволяють підліткам запам’ятовувати пояснення, основні факти, пов’язані з доведенням, судженням, умовиводами. Пам'ять починає характеризуватися достатньо високим рівнем оволодіння складною системою узагальнених знань та вмінням його розуміти і запам’ятовувати. Доступним стає запам’ятовування і збереження абстрактного матеріалу. Пам'ять спирається на опосередкованість, привласнені знакові системи. З метою попередження математичних помилок корисно максимально використовувати візуалізацію навчального матеріалу. Цілеспрямована концентрація уваги учнів на правильних діях під час вивчення навчального матеріалу дозволить осмислено обґрунтовувати кожен крок у виконанні завдань. Засобами візуалізації можуть бути *опорні схеми*, *піктограми*, *карти знань*, *картки корекції знань*, *алгоритмічні приписи*.

Мова є наймогутнішим засобом розвитку підлітків, оскільки вона існує в усному і писемному вигляді. Слово як знак відкриває шлях до опанування символічними процесами та теоретичним мисленням. На думку Г. С. Костюка, майстерне володіння зовнішнім мовленням виражає інтелектуальну силу підлітка, є ознакою його авторитету в колективі. Активно розвивається і внутрішнє мовлення учнів основної школи, яке відображає пошуки адекватних способів передачі своїх думок [72]. Якщо вчитель математики вимагає від учнів правильно, математично грамотно висловлювати свої думки, то і дії цих учнів упорядковані та обґрунтовані, учням не складно пояснити виконання завдання чи обґрунтувати дії на основі правил.

Характерною рисою уваги підлітків є специфічна її вибірковість: цікаві уроки чи цікавий навчальний матеріал можуть захопити підлітків. Однак, легка збудливість, цікавість до яскравого, незвичайного часто є причиною мимовільного перенесення уваги. Виправдовує себе така організація навчального процесу, коли у підлітка немає ні бажання, ні часу, ні можливості відволікатися на сторонні справи, заохочений вчителем математики, учень працює на безпомилковий результат.

Часто вчителі не враховують того, що мислення підлітка набуває нової риси – критичності. Підліток часто не спирається на авторитет учителя або підручника, він прагне мати власну думку, схильний до дискусії й заперечень. Щоб не втратити можливості сенситивного періоду потрібно пропонувати учням вирішувати проблемні завдання, порівнювати, виділяти головне, знаходити спільні й відмінні властивості математичних понять, причиново-наслідкові залежності. З метою активізації пошуково-перевірної діяльності під час неправильного розв’язання завдання біля дошки учні повинні перевірити виконане завдання, знайти та виправити допущену помилку. Такий прийом сприятиме уважності та зосередженості учнів під час виконання інших самостійних вправ.

Отже, як показало наше дослідження, якщо враховувати психологічні особливості учнів підліткового віку, їхні реальні навчальні можливості, стимулювати позитивне ставлення школярів до навчання, формувати позитивну мотивацію, використовувати ефективні для підліткового віку засоби, методи, прийоми і форми діяльності, спрямовані на попередження, виявлення та виправлення помилок, можна належним чином організувати превентивну діяльністьу процесі вивчення алгебри в основній школі.

1.4. Психолого-педагогічні передумови організації і здійснення превентивної діяльності у навчанні алгебри

Розвиток сучасної шкільної освіти пов'язаний з упровадженням компетентісного підходу до формування змісту освіти, вимог до підготовки учнів та організації навчального процесу. Компетентісна освіта, що є зорієнтованою на практичні результати, досвід особистої діяльності, вироблення ставлень, зумовлює принципові зміни в організації навчання, яке стає спрямованим на розвиток конкретних цінностей і життєво необхідних знань та умінь учнів. Розглянемо, які психолого-педагогічні передумови важливо враховувати у процесі здійснення превентивної діяльності у навчанні алгебри.

1.4.1. Зміст типових алгебраїчних помилок учнів

Помилки учнів є наслідком цілої низки складних чинників, які перебувають у взаємодії: психіки учня, якості навчання та методичних розробок.

Удосконалення програм і методів навчання алгебри, як показує практика, не викорінює передумов появи математичних помилок. Засвоєння знань супроводжується помилками внаслідок дії різних чинників, які не завжди можна врахувати під час навчання алгебри.

У великому тлумачному словнику сучасної української мови **похибка, помилка** трактується як: 1) неправильність у підрахунках, неправильність у діях; 2) неправильна думка, хибне уявлення про щось; 3) некоректність результату яких-небудь дій . «Помилятися означає допускати неправильність у підрахунках, неправильно робити що-небудь, неправильно думати, викривляючи істину, допускати неправильність у передбаченнях, переплутувати що-небудь із чимось подібним». Ключовим словом у цьому трактуванні є термін «неправильний», яким характеризують певну дію, яка виконана не за встановленими правилами (чи правилом).

Н. А. Кондаков зосереджує увагу на:1) помилках у висновках за аналогією; 2) помилках в аргументації питань; 3) помилках поспішного узагальнення; 4) помилках в означенні понять.

У психології під помилкою розуміють неправильність у діях, думках.

У педагогіці робиться акцент на досягненні мети. Помилкою тут вважається результат неправильної (хибної) дії, що не досягла мети.

У нашому дослідженні *помилкою* вважається відхилення від правильної (еталонної) дії, тобто дещо інша, змінена дія, яка призводить до неправильного результату. Ми розглядаємо ті помилки учнів, яких вони припускаються під час вивчення алгебри в основній школі.

Прикладами алгебраїчних помилок, наприклад, є:

$\frac{3a+b}{6c}=\frac{a+b}{2c}$ (неправильна дія скорочення дробу);

$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$ (помилка в тому, що не можна дріб $\frac{a}{b+c}$ записати у вигляді такої суми);

$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ (неправильне винесення змінної з-під знака кореня), правильно так: $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$;

$\frac{x}{2x^2+3x}=2x+3$ (неправильно), правильно так: $\frac{x}{2x^2+3x}=\frac{1}{2x+3}$;

$(x^3)^2=x^5$ (неправильно піднесено степінь до степеня), правильно так: $(x^3)^2=x^6$.

Учнівські помилки ми умовно поділяємо на *грубі, негрубі й недоліки. Грубими* вважаємо помилки, які вказують на те, що учень не засвоїв основних теоретичних питань теми, або не вміє застосовувати їх до розв’язування задач. Груба помилка спотворює результат дії, який не збігається з еталоном.

До *грубих помилок* відносимо помилки, що свідчать про незнання основних формул, правил, теорем та невміння їх використовувати; про незнання прийомів розв’язування задач аналогічних тим, що раніше вивчені; про невміння складати рівняння за умовою задачі; помилки в обчисленнях, пов'язані з незнанням прийомів і правил виконання дій, помилки в розв'язуванні задач: неправильний вибір дій, пропуск окремих дій, виконання зайвих дій; неправильне формулювання запитань; невідповідність дії запитанню; нерозуміння залежності між величинами в задачі, порушення законів і правил тотожних перетворень тощо.

Прикладами грубих помилок є такі:

а) $10^3 = 30$ (замість $10 \cdot 10 \cdot 10$ виконується множення 10 на 3);

б) $1 - \frac{a}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a} = \frac{a+1-a}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a} = \frac{a^2-1}{(a+1)a}$ (порушено порядок виконання дій);

в) $\frac{x^2-4x}{x^2-6x} : \frac{2x-8}{x^2-36} = \frac{2}{3} : \frac{2(x-4)}{(x-6)(x-6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-6)(x-6)}{2(x-4)} = \frac{(x-6)(x-6)}{3(x-4)}$

1) порушено правило скорочення дробів, 2) неправильно записано $x^2 - 36$ за формулою.

Не грубими вважаємо помилки в обчисленнях чи перетвореннях, допущені внаслідок неуважності; неправильного вживання символів; відкидання без пояснення одного з коренів рівняння чи збереження у відповіді стороннього кореня; записи відповідей у вигляді, що допускають спрощення, порушення вимог в рисунках тощо. Не груба помилка призводить до результату, який при певних застереженнях може бути прийнятий як задовільний.

До *недоліків* відносимо помилки, які не спотворюють результат. Це можуть бути нераціональні записи під час обчислень, нераціональні прийоми обчислень, перетворень та розв'язування задач; неохайно виконані схеми та рисунки; окремі похибки в формулюванні запитання чи відповіді; описки тощо.

Помилки, пов'язані з неправильним розумінням співвідношень між предметами і явищами дійсності, будемо вважати *фактичними*. Так, наприклад, помилка в знаходженні дискримінанту квадратного рівняння, внаслідок неправильного визначення знаків коефіцієнтів чи вільного члена, є фактичною.

Завдання. Знайти дискримінант квадратного рівняння $2x^2 - 7x - 30 = 0.$ Розв’язання. $D = 49 - 240 = -191.$ (Дискримінант знайдено неправильно. Правильна відповідь: $D = 49 + 240 = 289$).

Логічні помилки – це помилки в судженнях, пов’язані з неправильністю думки, тобто із неправильним розумінням зв’язків між самими поняттями. Такі помилки з’являються,наприклад, коли учні теорему плутають з оберненою і протилежною, беруть окремий випадок і роблять з нього неправильний узагальнений висновок тощо.

Завдання. Розв’язати квадратне рівняння $x^2 - 7x + 10 = 0$.
Відповідь учня: «За теоремою Вієта знаходимо корені рівняння: x_1= 2; x_2= 5».

Помилка в тому, що корені квадратного рівняння знаходяться не за теоремою Вієта, а за теоремою, оберненою до теореми Вієта.

Якщо помилка допущена ненавмисно, вона вважається *паралогізмом*, якщо правила логіки порушуються навмисно, то це *софізм*.

Г. П. Бевз [8] помилки в розв’язаннях математичних задач поділяє на *алгоритмічні, графічні, термінологічні та ситуаційні*.

Зокрема, *алгоритмічними* автор вважає помилки, пов’язані з неправильним застосуванням алгоритмів під час обчислень, перетворень виразів.

Наприклад: $3^2 = 6;\ -(2a + 3d) = -2a + 3d;\ (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4.$

Приклади т*ермінологічних* помилок: «вільний коефіцієнт», «кубічна функція», «додатне число» тощо. У своєму дослідженні ми дотримуємось термінології, яку запропонував Г. П. Бевз.

У педагогічній практиці часто виникає питання: чому учень помиляється, в чому причина того,що в одних випадках помилка зрозуміла багатьом учням, а в інших, багато з них помилки не помічає? Причина в тому, що іноді неправильні думки подібні до правильних, і чим більша ця подібність, тим важче помітити помилку.

Здатність помічати правильні і неправильні твердження, які висловлено усно чи письмово, *залежить від уваги, з якою учень ставиться до цих тверджень*. Кожен знає: чим більше уваги зосереджується на тому чи іншому предметі, тим більше видно таких подробиць, які при поверховому, неуважному огляді залишаються непоміченими. Ось чому вчителі математики постійно мають вимагати від учнів уваги, що дає змогу відразу після пояснення нового матеріалу відтворити його.

Часто логічні помилки з'являються тому, що в учня не вистачає об'єктивності визнати за хибне те, що є хибним насправді. Свідомо чи несвідомо учень під впливом своїх інтересів, прагне зробити одні висновки і відкинути інші. Це призводить до того, що в міркуваннях, висновки яких відповідають їхнім бажанням, учень може не помітити навіть грубої логічної помилки, а в міркуваннях, що суперечать його інтересам, порівняно легко помічає найменшу нелогічність.

З аналізу літературних джерел випливає, що помилки доцільно об'єднувати в групи за декількома ознаками, а саме: 1) *за характером вияву;* 2) *за змістом*; 3) *за причинами виникнення*.

Так, за характером вияву алгебраїчні помилки пропонуємо поділяти на *випадкові,* які з'являються не систематично в окремих учнів, та *типові* (*систематичні*), які характеризуються неодноразовою появою та масовістю. Зазвичай випадкові помилки свідчать про незнання чи недостатнє засвоєння учнями певної алгебраїчної дії і пов'язані, головним чином, із послабленням уваги (контролю) під час виконання цієї дії, а типові є наслідком неправильного засвоєння навчального матеріалу чи невмінням застосовувати цей матеріал до виконання конкретної дії. У нашому дослідженні значна увага приділяється саме типовим алгебраїчним помилкам учнів, організації превентивної діяльності з їх попередження ще на початку вивчення змістових ліній як необхідної умови безпомилкового засвоєння наступного навчального матеріалу. Про це детальніше піде мова в другому розділі дисертації.

У зміст помилки входить те, що неправильно виконано в діях учнів. Якщо за основу прийняти зміст помилок, то вони будуть розподілені згідно зі змістовими лініями курсу алгебри, а такий розподіл типових помилок охоплює їх більшість і тому особливо корисний як для учнів, так і для вчителів. Вважаємо, що вивчення математичних помилок не повинно закінчуватись виявленням того, що неправильно виконав учень, а має бути продовжено і спрямовано на знаходження відповіді на питання: чому він допустив помилку та які обставини є причиною помилкової дії? Зупинимося на цьому детальніше.

1.4.2. Психолого-педагогічні чинники виникнення учнівських помилок під час вивчення алгебри

Навчальна діяльність учителя та навчальна діяльність учнів дає позитивний результат тільки в тому випадку, якщо ця діяльність стає сумісною, спрямованою на міцне та глибоке засвоєння навчального матеріалу. В умовах організації превентивної сумісної діяльності вчителя та учнів, метою якої є діагностика, профілактика та попередження помилок учнів під час вивчення алгебри в основній школі надзвичайно важливим є виявлення причин появи цих помилок. Враховуючи характер та причини появи помилок, вчитель математики зможе знайти шляхи їх попередження та виправлення.

Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури свідчить про те, що виявлення причин виникнення багатьох помилок є процесом важким і не завжди вдалим. У психолого-дидактичному аналізі учнівських помилок, побудованому на підгрунті психолого-дидактичних закономірностей, враховуються як внутрішні процеси навчальної діяльності учнів, так і зовнішні умови, що впливають на ці процеси. Тому такий аналіз дозволяє точніше виявляти причини помилок і планувати заходи з їх попередження.

Використовуючи результати досліджень В. О. Далінгера [41], стисло зупинимося на причинах математичних помилок взагалі і дамо характеристику цих причин з урахуванням особливостей курсу алгебри основної школи.

1. *Причини, пов'язані з психологічними чинниками* (ослаблення психічних функцій: уваги, пам'яті, мислення):

– *домінування асоціативних зв'язків над смисловими;*

– *інтерференція навичок, коли формування одних навичок гальмується іншими.*

2. *Причини, що випливають з недоліків навчальних програм і підручників:*

– *у тексті підручників алгоритми і правила вводяться без розгляду необхідної кількості прикладів;*

– *у підручниках переважає одноманітність завдань;*

– *у системі завдань не витримано оптимальне поєднання завдань, розв'язування яких вимагає репродуктивної і продуктивної діяльності;*

– *відсутні завдання, що допомагають учню усвідомити спосіб розв'язання (завдання рефлексій);*

– *система вправ у підручнику не забезпечує належної пропедевтичної і закріплюючої роботи;*

– *виконання завдань не сприяють розвитку навичок самоконтролю.*

3. *Причини, обумовлені недосконалістю організації навчального процесу:*

– *немає роботи вчителя з попередження в учнів прагнення до автоматичного застосування фактів, що вивчаються;*

– *в учнів не формуються навички самоконтролю, які необхідні для розвитку діяльності рефлексії;*

– *проводиться недостатня підготовча робота для усвідомленого засвоєння матеріалу, не продумано його доцільне закріплення і зв'язок з подальшим матеріалом;*

– *у навчальному процесі часто використовуються лише готові завдання; учнів не вчать складати завдання самостійно;*

– *завдання переважно використовують для закріплення готових знань або для їх повторення.*

4. *Причини, обумовлені не володінням на необхідному рівні синтаксисом і семантикою математичної мови. Вони поділяються на такі групи:*

1) *причини, пов'язані з невмінням учнів працювати з визначенням понять, що призводить до таких помилок:*

– *пропуск необхідних слів у визначенні родового поняття;*

– *пропуск необхідних слів в означенні поняття;*

– *помилки, пов'язані з тавтологією у визначенні понять;*

– *вказівка як видова ознака неістотних властивостей понять, і тому подібне.*

2) *причини, пов'язані з недостатньою логічною підготовкою учнів:*

– *не розуміють суті диз'юнкції і кон'юнкції висловів;*

– *недостатньо усвідомлюють поняття логічного проходження;*

– *не уміють будувати заперечення висловів;*

– *не уміють здійснювати порівняння та класифікацію понять.*

На нашу думку, автор розглянув важливі причини появи помилок. Ми у своєму дослідженні їх враховуємо, однак додамо, не менш важливу причину поширеності помилок у процесі навчання алгебри – **це відсутність методичних вказівок та практичних розробок, спрямованих на організацію превентивної діяльності вчителя математики у навчанні учнів алгебри.**

Учитель повинен знати не тільки, чого навчати учнів та як навчати: знати різні методи формування понять, доведення теорем, розв'язування задач, знати переваги і недоліки кожного методу, а й ***уміти передбачати, як той чи інший метод сприймають учні, які помилки вони допускають, як їх виправити. Важливо*** допомогти учневі самостійно знайти помилку, усунути її, запобігти появі інших помилок.

Причини обумовлені недосконалістю організації вчителем навчання алгебри та недоліки програм і підручників потребують додаткового дослідження. Метою нашого дослідження є вивчення причин помилок, які допускають учні, опановуючи алгебру. Розглянемо детальніше психологічну природу виникнення учнівських помилок у процесі навчання алгебри.

Поряд з біологічною можливістю опанування знаннями, вміннями та навичками, що передається за спадковістю, рівень опанування матеріалом тісно пов'язаний з досягненнями того чи іншого ступеня міцності засвоєння знань. Враховуючи те, що процес засвоєння є психологічною стороною навчання, важливе значення має дослідження різних зв’язків психологічних процесів у навчанні школярів.

На нашу думку, серед причин появи алгебраїчних помилок є психологічні особливості розвитку когнітивних процесів учнів основної школи. Зокрема, появі помилок сприяють: відсутність та послаблення уваги, мало розвинена пам’ять, поганий зір, недоліки мислення, *відсутність вольових зусиль, швидка втома, поспішність у роботі, нервовість*. До дидактичних причин появи алгебраїчних помилок відносимо причини, що випливають із *особливостей сприйняття навчального матеріалу та його відтворення*, наприклад: *поверхове сприймання та недостатня чіткість у відтворенні; прагнення до використання завченого і звичного; автоматичне використання завченого і поспішність в узагальненнях; вплив набутих навичок на утворення нових (інтерференція навичок); негативне перенесення одних навичок на інші; недооцінка значення первинного сприйняття матеріалу для міцності його засвоєння; відсутність ретельності в підготовці першого самостійного відтворення алгебраїчного матеріалу; захоплення механічним відтворенням (механічне повторення) навчального матеріалу; відсутність цілеспрямованості в запам’ятовуванні; недостатнє поєднання аналізу і синтезу під час закріплення матеріалу і слабкий розвиток спостережливості; неправильна аналогія і домінування асоціативних зв’язків над смисловими; недостатньо розвинене логічне та критичне мислення; формальне засвоєння матеріалу; невміння пов’язувати попередній матеріал із наступним, здійснювати внутріпредметні зв’язки; відсутність мотивації.*

В умовах організації превентивної діяльності учитель має не тільки навчати, а й керувати процесом засвоєння учнями знань. Результат здійснення такого керівництва значною мірою залежить від того, наскільки вчитель розуміє структуру психічної діяльності школярів у конкретних умовах навчання.

Психологами встановлено, що причиною виникнення помилок є пригнічення одних слабших асоціацій, іншими, сильними і звичними асоціаціями, особливо асоціаціями за суміжністю. Аналізуючи причини помилок, яких припускаються сучасні школярі, вивчаючи алгебру, ми також врахували відомі положення, обґрунтовані в роботах відомого психолога П. О. Шеварьова про те, що кожна типова помилка допускається у двох випадках:

1) *коли в учня актуалізується деяка помилкова асоціація*;

2) *коли в учня не повністю, частково актуалізується правильний ланцюг асоціацій.*

Для виправлення помилкових дій у першому випадку вчителю доцільно вчасно виявити помилкову асоціацію, яка актуалізувалася в мисленні учня, провести діагностику появи такої помилки, вказати шляхи її усунення та заміни правильною асоціацією.

Якщо асоціація не помилкова, то учні допускають випадкові помилки. У цьому випадку слід перевірити склад і міцність усіх ланок правильної асоціації, знайти відсутню ланку та за допомогою спеціально дібраних вправ виправити помилку. Детальніше на цьому питанні ми зупинимося в другому розділі.

Значному зменшенню кількості типових алгебраїчних помилок учнів сприяє виявлення психологічної природи тих чи інших асоціацій, знання закономірностей їх формування і вияву. Це дає можливість цілеспрямовано керувати їх утворенням, вчасно попереджати й виправляти можливі помилкові асоціації, які актуалізувалися у мисленні учнів.

Для успішного вивчення алгебри учнями з мінімальною кількістю помилок, вчителю під час виконання завдань школярами необхідно своєчасно виявляти помилкові асоціації та формувати правильні.

Навчити учнів розв'язувати алгебраїчні задачі – означає сформувати у них міцні, а й за необхідності, легко відновлювані асоціації. Для цього важливо знати закономірності їх утворення:

− *під час розв'язування типових вправ у школярів досить швидко /іноді після двох-чотирьох/ формуються узагальнені асоціації. Наступні вправи цього ж типу учні розв'язують через їх актуалізацію;*

– під час виконання вправ одного і того ж типу відбувається зміна валентності деяких компонентів навчального матеріалу: осмислення одних особливостей знижується, а інших зростає. При цьому в учнів можуть формуватися помилкові асоціації, пов'язані з тим, що в їх зміст не входять деякі компоненти, необхідні для правильного розв'язання завдань даного типу, або входять якісь інші особливості.

Для формування у школярів правильних узагальнених асоціацій необхідною умовою є варіювання (зміна) несуттєвих ознак навчального матеріалу і зберігання суттєвих. Тому, *виходячи з асоціативно-рефлекторної теорії навчання в дослідженні причин помилкових дій учнів, ми виявляли такі особливості навчального матеріалу, які впливають на формування відповідних помилкових асоціацій*.

В умовах організації превентивної діяльності під час вивчення алгебри в основній школі вчителю математики важливо знайти відповіді на основні питання психології шкільних знань, умінь та навичок:

1. Які саме асоціації лежать в основі того чи іншого знання, того чи іншого достатньо високого уміння чи навички? Інакше кажучи, які саме асоціації повинні бути відпрацьовані в учнів, щоб у них виникли певні знання, уміння та навички?

2. Яких психологічних принципів потрібно дотримуватись під час побудови такої методики навчання, яка найекономніше приведе до відпрацювання таких асоціацій?

3. Які саме асоціації, що мають істотне значення для відпрацювання певних знань, умінь та навичок, вже сформовані в учнів перед вивченням нового матеріалу?

4. Які саме асоціації виникають в учнів на різних етапах засвоєння даного розділу? Як ці асоціації залежать від змісту і побудови підручника, від методики вивчення і повторення навчального матеріалу тощо?

Всі ці питання тісно пов'язані між собою, і обґрунтована відповідь на них – це шлях до попередження помилок під час засвоєння навчального матеріалу. Очевидно, що результат організації превентивної діяльності з попередження та ліквідації помилок з алгебри значною мірою залежить від правильного визначення справжніх причин появи цих помилок.

Асоціації формуються у діях. У шкільному курсі алгебри розв'язування задач займає значне місце, тому причиною багатьох помилок є неправильно сформовані асоціації в попередніх діях, у виконанні попередніх вправ. Для попередження таких помилок необхідно знати причини їх виникнення та умови, необхідні для правильного виконання учнями конкретного завдання. Укорінена помилка учня, яка свідчить про недостатній рівень засвоєння теми, не осмислена і не виправлена ним самим вчасно в майбутньому зможе неодноразово повторюватись.

Зіставлення правильного і помилкового розв'язання дозволяє визначити, відсутність якої саме умови призводить до помилки, і чому ця умова відсутня взагалі.

П. О. Шеварьовим було доведено, що узагальнена помилкова асоціація утворюється, якщо в процесі діяльності учнів виконуються три умови:

1) *учень виконує завдання одного типу*;

2) *в цих завданнях незмінно повторюється деяка особливість*;

3) *усвідомлення цієї особливості необов'язкове для одержання правильного результату*.

Формування помилкової асоціації і призводить до появи помилок під час розв'язування задач і вправ. На нашу думку, пояснення причин появи алгебраїчних помилок з погляду асоціативно-рефлекторної теорії є найбільш вдалим і обґрунтованим, саме такого пояснення ми і притримувались в нашому дослідженні.

Розглянемо приклад. Часто у молодих вчителів виникає питання: чому, знаючи правило скорочення дробів, учні не завжди правильно його використовують?

Припускаючись помилок, часто учні так виконують спрощення:

$$1)\ \frac{a+c}{b+c}=\frac{a}{b} \qquad 2)\ \frac{4x^2+x^2y}{x-y^2x^2}=\frac{4x\ \ +1}{1-y}$$

Розглянемо детальніше, що сприяло появі таких помилок за умови, що учні вміють правильно виконувати спрощення виразів: 3) $\frac{ac}{bc}$; 4) $\frac{4x^2 \cdot y^2}{6x^2y^2}$.

Виділимо спільне , наприклад, у виразах : 1) $\frac{a+c}{b+c}$ і 3) $\frac{ac}{bc}$:

1) змінні в чисельнику першого дробу такі ж, як і змінні в чисельнику другого дробу; 2) змінні в знаменнику першого дробу такі ж, як і змінні в знаменнику другого дробу; 3) в кожному з виразів є дія ділення.

Специфічними особливостями є те, що у виразі 1) чисельник і знаменник є сумами, а у виразі 3) – добутками таких самих змінних.

До виконання вищезгаданих завдань учні навчились правильно скорочувати дроби: $\frac{24 \cdot 5}{16 \cdot 5}$; $\frac{32 \cdot 25}{50 \cdot 38}$; $\frac{4x^2y}{y^2x^2}$. У підручниках є достатня кількість завдань такого типу. При цьому у них актуалізувалась безпосередня асоціація, першим кроком якої є осмислення якихось не специфічних особливостей виразу даного типу, а другий крок асоціації – це дія ділення на спільні дільники. Учні осмислювали і специфічні особливості, однак це осмислення було невалентним, тобто нестійким. Це значить, що учні, які допустили вказані помилки під час спрощення виразів:

$$1)\ \frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}; \qquad 2)\ \frac{4x^2 + x^2y}{x - y^2x^2} = \frac{4x^2 + 1}{1 - y}$$

не звернули увагу на знак «+» у чисельнику і знаменнику.

Для виявлення причин утворення вказаної помилкової асоціації ми проаналізували завдання з підручників, які пропонуються до вивчення теми: «Скорочення дробів» у 6 та 8 класі. В основному, у вправах на скорочення звичайних чи раціональних дробів завдання містили в чисельнику і знаменнику дію множення, тому не було необхідності осмислення цієї дії. Отже, сформувалась помилкова асоціація, пов'язана з осмисленням дії в чисельнику і знаменнику під час скорочення дробів, а саме те, що чисельник і знаменник є добутками і скорочувати можна тільки на *спільний множник*.

Отже, на даному етапі навчання формується помилкова асоціація, яка не виявляється під час вивчення теми «Скорочення звичайних дробів» у 6 класі.

Проте її існування негативно виявляється пізніше, зокрема, під час спрощення виразів $\frac{3x+2+3xy+2y}{2y-2+3xy-3x}$, розв'язування рівнянь $\frac{x^2}{2x-16}+\frac{48-2x}{8-x}=6$, доведення тотожностей $\frac{a+b}{a+(a-b)}=\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}$ у наступних класах, скорочення раціональних дробів під час складання ДПА та ЗНО.

Необхідно звернути увагу на те, що правило скорочення дробу часто закріплюється в пам'яті дітей як ділення на <u>спільне число.</u> Тому, помітивши спільне число в чисельнику і знаменнику дробу, учні часто закреслюють його, що призводить до грубої математичної помилки.

Помилковою буде думка, що під час виконання завдань типу спростити вираз: $\frac{4x^3+x^2y}{x-y^2x^2}$ учні зовсім не помічають специфічних особливостей таких виразів. Тим більше, що вчитель неодноразово звертає увагу на ці особливості. Але під час розв'язування багатьох вправ осмислення специфічних особливостей не було обов'язковим, тому за закономірністю П. О. Шеварьова ці особливості не закріпилися.

Отже, знаючи склад і причини формування помилкових асоціацій, можна вжити заходи, спрямовані на їх попередження. Насамперед потрібно відповідним чином дібрати систему вправ, які б сприяли формуванню правильних асоціацій. Зокрема, під час скорочення дробів потрібно увагу учнів звернути на ту особливість, що скорочувати дріб можна тільки на <u>*спільний множник*</u>, а якщо в чисельнику чи знаменнику є дія відмінна від дії множення (додавання чи віднімання), то важливо розкласти чисельник і знаменник на множники, тобто подати у вигляді добутку, і тільки тоді виконувати скорочення.

Під час розв'язування однотипних вправ і задач школярі механічно розв'язують наступні за аналогією з попередніми, не міркуючи та не вникаючи в пояснення, що стає причиною появи помилок.

Розв'язування задач з алгебри повинно вчити учнів мислити та формувати важливі особливості їх мислення. Тому потрібно, щоб з одного боку, процес розв’язування будь-якої задачі був конкретизацією засвоєних узагальнених операційних систем, а з другого боку – після розв’язання був проаналізований сам процес розв’язування, в результаті якого повинні бути узагальнені деякі структурні особливості розв’язування та оцінений спосіб розв’язання з точки зору новизни, оригінальності, раціональності, можливості інших способів.

1.5. Психолого-педагогічні основи організації превентивної діяльності вчителя математики

У превентивній діяльності ми пропонуємо використовувати і комбінувати усі відомі нам методи навчання: пояснювально-ілюстративний, проблемний, продуктивний, репродуктивний, дослідницький, евристичну бесіду тощо. Найпоширенішими традиційно залишаються пояснювально-ілюстративний метод та евристична бесіда. Практична підготовленість, як відомо,– головний критерій доцільності навчання й одночасно–найважливіший показник навченості. Основна мета такої діяльності – збільшення часу активної самостійної (тренувальної) роботи кожного учня. Відповідно до законів навчання, в умовах високої концентрації уваги й активності, великого обсягу самостійно виконаних вправ коефіцієнт засвоєння (правильного виконання завдань) може досягати значного рівня.

Превентивна діяльність містить у собі сім етапів, які ми умовно назвали:

- *пропедевтична підготовка*;
- *зв'язок засвоєних знань із новими*;
- *безпомилкове засвоєння учнями нового навчального матеріалу*;
- *осмислення та закріплення вивченого матеріалу на прикладах*;
- *самостійна робота під керівництвом учителя в класі*;
- *самостійна робота*;
- *домашня самостійна робота.*

Необхідно відзначити, що важливою складовою превентивної діяльності є поточна діагностика і моніторинг знань учнів. У процесі навчання варто проводити ґрунтовну перевірку знань і навичок учнів, здійснювати діагностування, щоб упевнитися, що школярі мають достатні основи для подальшої успішної роботи з вивчення теми. Постійне спостереження за процесом навчання, динамікою змін, що здійснюється за спеціальною програмою моніторингу, гарантує стабільний розвиток процесу навчання і гарантований результат. Розглянемо детальніше кожен із вказаних вище етапів.

Призначенням пропедевтичної підготовки,є виявлення рівня знань та умінь, засвоєних на попередніх навчальних заняттях. На початку уроку вчителю математики доцільно запропонувати учням завдання (тест), виконання якого засвідчить, чи можна приступати до вивчення нового матеріалу. Це завдання може бути коротким, інформативним, складність якого не вища від складності домашнього завдання, з «родзинкою», що дозволить виявити рівень готовності школярів до успішного продовження навчання. За результатом виконаного завдання учитель приймає рішення – чи приступати до вивчення нового матеріалу, чи зупинитися на повторенні і закріпленні раніше вивченого.

Другий етап навчального процесу – зв'язок засвоєних знань із новими. На цьому етапі задаються характеристики майбутнього навчального заняття і матеріалу, який буде вивчатися далі. Учитель має роз'яснити свої сподівання, чітко викласти мету, визначити обсяг і структуру майбутньої роботи, інформувати, у який спосіб будуть фіксуватися та оцінюватися результати, здійснювати забезпечення завдань, вказівок, упереджень, провокативних вправ, спрямованих на запобігання типових помилок учнів. Структура цього етапу така:

− повідомлення змісту уроку, встановлення зв'язків між новими і вивченими знаннями;

− пояснення нового матеріалу на основі вивченого.

Третій етап – засвоєння учнями нового навчального матеріалу. Учитель має робити усе, що для цього необхідне, – пояснювати, ілюструвати, наводити приклади, працювати над упередженням помилок учнів. Доцільно пропонувати учням самим робити певні відкриття, створювати навчальні ситуації і вирішувати їх разом з учнями. Якщо це новий навчальний матеріал, то докладно обговорюються усі нові поняття, даються їм визначення, формулюються правила і наводяться приклади. Якщо це нове уміння, то визначаються і чітко викладаються всі кроки його формування. Кожен крок обов'язково ілюструється прикладами.

Важливо не тільки повідомити інформацію усно, але максимально прояснити її за допомогою наочних засобів, щоб в учнів на цій стадії вивчення матеріалу склалися міцні зорові асоціації. Візуальна репрезентація навчального матеріалу орієнтовно для однієї третини учнів найдоцільніша. Для «візуалів», тобто дітей, які тяжіють до образного сприйняття, наочність відіграє головну роль у розумінні й засвоєнні вивченого, для всіх інших буде важливою підмогою на шляху повного розуміння. Учитель повинен з'ясувати, чи всі учні правильно розуміють візуальну інформацію, чи немає розбіжностей у тлумаченні побаченого. На цьому етапі актуальним є використання елементів ейдетики, складання невеличких віршиків для запам’ятовування, складання карт знань, виконання завдань, що провокують на помилку, розкриття цих помилок, наведенням контрприкладів, упередження помилок різними засобами. Формуються правильні асоціації. Етап завершується перевіркою розуміння всього навчального матеріалу.

Головне для вчителя – встановити рівень готовності учнів до осмислення та закріплення вивченого матеріалу на прикладах. Учитель з'ясовує:

− Чи можуть усі учні безпомилково пригадати усі поняття, терміни, про які йшла мова?

− Чи можуть учні своїми словами повторити зміст правил чи теорем?

− Чи можуть пригадати, кроки (пункти) і їх послідовність, що входять до щойно вивченого матеріалу (уміння)?

− Чи можуть учні знаходити відповіді на поставлені питання в тексті підручника?

Бажано на цьому етапі повторення нових відомостей кілька разів,поступово згортаючи інформативний ресурс, щоб головне було висвітлено максимально повно і прозоро, зрозуміло всім та сприйнято у повному обсязі і безпомилково.

Четвертий етап – <u>осмислення та закріплення вивченого матеріалу на прикладах</u>. Спершу вчитель аналізує разом з учнями приклади. Практичні завдання виконуються спочатку всім класом, потім у підгрупах, трійках і парах.

Ефективною підмогою, що супроводжують цей етап роботи, можуть бути мультимедійні засоби. Так, наприклад, презентацію можна використати і для пояснення перебігу розв’язування завдання і для запису алгоритму, і для перевірки виконаного учнем біля дошки завдання покроково. Слушним на цьому етапі навчання є використання додатку «Plickers», цінність його в тому, що зчитування GR-кодів з карток учнів відразу повідомляє інформацію про рівень засвоєння нового програмового матеріалу. Використовуючи «Plickers», учитель може постійно підтримувати зворотний зв'язок, вчасно реагуючи на всі відповіді учнів. Правильні відповіді підтримуються, неправильні – аналізуються і виправляються. Важливого значення в роботі з помилками учнів ми надаємо використанню програмних педагогічних засобів, зокрема GRAN-1, GeoGebra, AGrapher, MathCad. Не можна забувати про візуальну підтримку, усі учні мають розуміти, що зображено на схемах, вміти складати схеми самостійно. Вони можуть використовувати зображення (карти знань, графіки, моделі, ілюстрації, схеми, таблиці, діаграми тощо), створені самостійно та занотовані в особистому довіднику як підказку, коли будуть діяти самостійно. Саме на четвертому етапі превентивної діяльності учителю необхідно долучити до роботи всі засоби, спрямовані на попередження та недопущення помилок.

Наступний етап – <u>самостійна робота під керівництвом учителя</u>. Робота учнів на цьому етапі дозволяє учителеві оцінити їхню здатність самостійно виконувати навчальні завдання з теми. Учні мають можливість попрактикуватися в присутності педагога. Аналізу піддягають кількість і типи допущених помилок. Учитель діє як тьютор, надаючи допомогу тим, хто її потребує. Прилучає до роботи з помилками самих учнів, влаштовує бій помилкам.

Шостий етап – <u>цілком самостійна робота у класі</u>. Мета самостійної роботи полягає в тому, щоб закріпити нове знання, забезпечити його запам'ятовування на тривалий період часу. Під час самостійної роботи учні виконують практичні вправи без допомоги вчителя. Роль учителя – своєчасна перевірка робіт учнів. Визначається, чи залишився рівень точності виконання завдань на належному рівні. За результатами визначається необхідність допомоги й додаткових занять для тих учнів, хто цього потребує.

Сьомий етап – домашня самостійна робота. Учитель визначає обсяг домашньої роботи, необхідної для безумовного закріплення вивченого і набуття навичок. Своїх цілей учитель досягає не перевантаженням, збільшенням обсягу вправ, а системою – перспективою подальшого формування навичок через аналіз вивченого в контексті подальшого набуття нових знань.

Розглянемо особливості організації і здійснення навчально-виховного процесу, спрямованого на засвоєння знань, умінь та навичок учнів з алгебри з мінімальною кількістю помилок.

Після того, як учитель поставив запитання, а учень на нього відповів, настає реакція педагога на отриману відповідь. Учитель не залишає невиправлених помилок і не сповіщає відразу правильну відповідь, якщо учень помилився. Для виправлення відповідей використовуються спеціальні методи, наприклад, вчитель пропонує учню пояснити, як він виконував завдання та за допомогою контр прикладів та питань підводить учня до того, що він сам зрозуміє помилковість дій, або ж пояснюється матеріал заново.

Крім цього, діяльність учнів на уроках алгебри організовується у високому темпі. Учень змушений стежити за поясненням, він не має можливості відволікатися. Щоб домогтися ще більшого ефекту, надається більше можливостей відповідати на запитання самим учням. Одержуючи правильну відповідь, вчитель ставить перед учнями нові, складніші запитання. На ранніх стадіях навчання, коли правильна відповідь дається «навмання», учитель кілька разів перефразовує запитання, доти його «крутить» перед класом, поки не буде цілком упевнений, що всі учні все зрозуміли.

Якщо учень припускається *механічної помилки*, учитель просто поправляє його і йде далі. Якщо неправильна відповідь указує на те, що учень не зрозумів, то вчитель спершу намагається підказати йому чи натякнути. За незадовільного результату пояснення розпочинається заново. Важливо допомагати учням розібратися в ситуації й навчити *самостійно виправляти свої помилкові* відповіді.

Ефективний зворотний зв'язок завжди має навчальну мету. *Обов'язково необхідно підкреслити, що було зроблено правильно.* У зворотному зв'язку може бути похвала, але важливо, щоб вона ґрунтувалася на якості відповіді. Щоб досягти ефективності, зворотний зв'язок повинен бути своєчасним і коригуючим. Необхідність спочатку давати учням докладні пояснення і проводити з ними практичні вправи і тільки після цього переходити до самостійних завдань, може здатися очевидною. Однак спостереження показують, що учнів часто змушують працювати з підручником або іншими матеріалами, практично не даючи їм попередньо ніяких пояснень чи підказок. Для того, щоб перейти до самостійного виконання завдання, учень має достатньо опанувати алгебраїчним матеріалом.

У превентивній діяльності навчання алгебри в основній школі важливо переходити до виконання самостійних практичних завдань тільки тоді, коли точність відтворення (вироблення навички) у класі досягає 70%. Діти самостійно працюють над завданнями від 50 до 70% часу уроку. Якщо прагнути, щоб більша частина уроку дійсно була орієнтована на засвоєння знань, то учні не повинні відволікатися. Не миттєвий і швидкозгасний інтерес, а воля, свідомо вихована увага, старанність повинні допомагати їм у цьому.

Підвищенню ефективності безпомилкового навчання сприяють:

– Багаторазове відточування, «шліфування» умінь і навичок. Мета будь-якої практики полягає в тому, щоб домогтися майстерності, тобто здатності користатися навичкою незалежно і безпомилково. Формуючи навичку, учитель проводить учня через різні стадії практики, що характеризуються різним ступенем допомоги з його боку. Таке навчання потрібне, щоб забезпечувати необхідну підтримку учня доти, поки він не досягне рівня самостійного володіння відповідними знаннями, уміннями. Метод відточування окремих блоків знань гарантує від *помилок* на ранніх стадіях вивчення матеріалу, коли уразливість пам'яті ще дуже висока і легко може запам'ятатися неправильний досвід та сформуватися неправильні помилкові асоціації. Буває, і нерідко, що початкова помилка надалі призводить до перекручування всієї інформації.

– У процесі навчання вчитель більше забезпечує коригувальний зворотний зв'язок, вчасно виправляючи допущені помилки і закріплюючи правильно засвоєне. Коли учні вже можуть виконувати роботу з достатньою точністю, то це значить, що вони готові до самостійної роботи. Допомога їм уже не потрібна.

– Збільшення тривалості виконання практичних завдань. Наші дослідження дозволяють стверджувати, що чим більше часу у сукупності виділено на практичне відпрацьовування матеріалу, чим більше можливостей попрактикуватися, тим триваліший період зберігаються знання і навички у пам'яті.

– Інтенсивне спостереження за роботою кожного школяра під час самостійної роботи. Це робиться для того, щоб *помилки*, допущені на цій стадії навчання, не закріпилися і надалі не перешкоджали навчанню. Необхідний постійний коригувальний зворотний зв'язок, щоб помилки не осіли в пам'яті. Інформація про те, як діяти правильно, запобігатиме помилковим асоціаціям вже на ранній стадії навчання. Це допомагає знизити рівень тривожності учнів: виконуючи практичні вправи, вони будуть упевнені, що в разі потреби їхні дії будуть негайно скориговані. Важливо не тільки запобігати появі*помилок* на ранній стадії, але й мати повне уявлення про динаміку формування правильної навички.

– Якщо рівень точності виконання завдань у більшості учнів досягне 75%-80%, можна переходити до наступного рівня самостійної роботи. Стежачи за коефіцієнтом точності, можна бути впевненим, що діти будуть закріплювати успішний досвід, а не помилки.

– Рівномірний розподіл практичних вправ на увесь період навчання. Відомо, що без повторення вивченого протягом 24 годин забувається дві третини отриманої інформації. Але якщо упродовж тривалого проміжку часу (наприклад, 3-4 місяці) регулярно проводити повторення вивченого алгебраїчного матеріалу, то можна домогтися переходу в довгострокову пам'ять майже всієї нової інформації. Найпоширеніша помилка – учитель математики припиняє виконання вправ, якщо досягнуте перше безпомилкове виконання. Для якісного навчання алгебри необхідні регулярні повернення до найважливішого матеріалу.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ОРГАНІЗАЦІЇ І ЗДІЙСНЕННЯ ПРЕВЕНТИВНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ АЛГЕБРИ

Курс алгебри основної школи складається з кількох змістових ліній, фундаментальними з яких є наступні: вирази і їх перетворення; рівняння і нерівності; функції та їх графіки. Саме з цієї позиції і будемо розглядати організацію і проведення превентивної діяльності під час вивчення кожної з них. Слід зазначити, що ці лінії знаходять своє продовження в курсі алгебри і початків аналізу старшої школи. Ось чому важливо зосередити увагу на них, а вироблені уміння і навички використати і розвинути під час вивчення курсу алгебри і початків аналізу в старшій школі.

2.1. Вирази і їх перетворення

Вчитель як модератор навчальної діяльності учнів під час вивчення змістової лінії «Вирази і їх перетворення», має:

– *знати «тонкі місця» в навчальному матеріалі, де можлива поява помилок та вчасно попереджувати їх появу;*

– *формувати компетентність учнів, спрямовану на недопущення ситуативних та типових помилок у вивченні кожної теми даної змістової лінії;*

– *організовувати систему дій на недопущення помилок та виправлення допущених;*

– *формувати уміння безпомилкового виконання тотожних перетворень буквених виразів: розкриття дужок, зокрема дужок, перед якими стоїть знак «мінус»; правильного визначення коефіцієнтів біля змінних; зведення подібних доданків, зокрема доданків, які мають числові коефіцієнти різних знаків;*

– *прагнути глибокого розуміння поняття одночлена та многочлена, вироблення навичок правильного зведення одночленів і многочленів до стандартного вигляду;*

– *формувати вміння та навички учнів правильного виконання додавання і віднімання многочленів, множення многочлена на одночлен, множення* *многочленів;*

– *прагнути засвоєння учнями поняття степеня з натуральним і цілим показником та формувати уміння безпомилкового застосовування властивостей степенів до обчислення та спрощення виразів;*

– *забезпечити ґрунтовне вивчення учнями формул скороченого множення та вміння використовувати їх у спрощенні виразів, доведенні тотожностей та розв'язуванні рівнянь;*

– *сприяти виробленню осмислених дій розкладання многочленів на множники різними способами: винесенням спільного множника за дужки, способом групування, використанням формул скороченого множення;*

– *формувати уміння учнів безпомилково скорочувати раціональні дроби, зводити дроби до нового* (*спільного*) *знаменника та виконувати дії над дробами;*

– *прагнути осмисленого виконання учнями тотожних перетворень раціональних виразів*.

2.1.1. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Цілі вирази»

Необхідною умовою ефективної превентивної діяльності є знання вчителем поширених помилок учнів, які вони допускають під час вивчення теми «Цілі вирази».

Помилки та причини виникнення.

Під час піднесення до степеня одночлена учні:

– *коефіцієнт основи степеня множать на показник степеня:* $\left(2x^2y^2\right)^3 = 6x^6y^6$. Причиною такої помилки є неправильна аналогія дії піднесення до степеня з дією множення (інтерференція);

– *підносять до степеня тільки коефіцієнт основи:* $\left(6m^2n\right)^2 = 36m^2n$. Причиною появи цієї помилки є перенесення знань, щодо множення одночлена на число та незнання правила піднесення до степеня добутку;

– *коефіцієнт основи не підносять до степеня, наприклад:* $\left(3x^2y^3\right)^3 = 3x^6y^9$. Причина в тому, що під час множення одночленів сформувалась помилкова асоціація. Тому під час піднесення до степеня учні підносять лише один із множників, а в кращому випадку всю буквену частину одночлена. Якщо не викорінити та не попередити появу таких помилок, вони можуть з'являтися під час піднесення ірраціональних виразів до степеня та розв'язуванні ірраціональних рівнянь;

– *показники степенів додають або підносять до степеня, наприклад:* $\left(x^3y^2\right)^2 = x^5y^4$; $\left(2a^2b^3\right)^2 = 4a^4b^9$. Такі помилки є наслідком поверхового знання правил піднесення до степеня добутку і правил піднесення степеня до степеня.

Досить часто учні порушують правило розкриття дужок, особливо, якщо перед дужкою стоїть знак «мінус», наприклад: $(5x-1)-(-1+3x)=5x-1+1+3x=8x$. Причиною таких помилок є формально завчені правила розкриття дужок та нераціонально дібрана вчителем система вправ на осмислення та закріплення правил.

Типовими є помилки, які виникають під час множення многочлена на одночлен: $c\left(2x+b\right) = 2xc+b$; $(a+b-c)\cdot 4a^2 = a+b-4a^2c$. Розкриваючи дужки, учні множать на одночлен тільки той член многочлена, який знаходиться поряд. Це свідчить про те, що вивчення розподільної властивості множення відносно додавання відбулося на формальному рівні.

Розповсюдженою помилкою є втрата знаків коефіцієнтів алгебраїчних виразів. Часто учні вважають нульовими коефіцієнти одночленів: a^2c; $-bc^2$. Причиною є несформовані вміння учнів визначати коефіцієнт одночлена. Зокрема, втрата з поля зору знаку коефіцієнта призводить до помилок в діях над одночленами і многочленами, а в подальшому – в розв'язуванні лінійних та квадратних рівнянь.

Значною кількістю помилок супроводжується зведення подібних доданків, зокрема учні:

– *коефіцієнти додають, а буквені вирази знищують, наприклад:* $7a-2a=5;\ 7x^2-3x^2=4$;

– *додають і коефіцієнти і показники степенів, наприклад* $3x^2+2x^6=5x^8; 15y^5-3y^4=12\text{y};$

– *коефіцієнти додають, а змінні перемножують, наприклад:* $4x+7x=11x^2$.

Причиною таких помилок є те, що учні не усвідомили поняття змінної, не розуміють, що замість букв можна підставляти будь-які числа, а тому зводять подібні доданки несвідомо.

Під час множення одночленів учні:

– *знаходять добуток тільки коефіцієнтів, наприклад:* $12x^2y7x^2y=84x^2y;$

– *множать кожен коефіцієнт окремо, наприклад:* $3c^2b\cdot 4ca\cdot 2b=12\cdot 6c^3b^2a=72c^3b^2a;$

– *перемножують показники степенів, наприклад:* $x^2y^4\cdot 4x^2y^2=4x^4y^8;$

– *під час піднесення одночлена до степеня знаходять добуток коефіцієнта на показник степеня, показники степенів додають:* $(3a^2b^4)^2=6a^4b^8;$

– *під час множення многочленів не використовують розподільну властивість множення, наприклад:* (*2a+3b*)(*4c+5a*)=*8ac+15ab*.

Помилки $\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm b^2;(a\pm b)^3=a^3\pm b^3$з'являються, якщо під час піднесення до степеня многочлена використовується хибна розподільна властивість. Помилкова асоціація, яка сформувалась під час вивчення розподільної властивості множення відносно додавання сприяла неправильній аналогії. Причиною таких помилок є зовнішня схожість виразів $(a+b)\cdot 2$ та $(a+b).^2$

З метою попередження таких помилок, які досить часто з'являються під час вивчення формул скороченого множення та у подальшому використанні цих формул, доцільно під час множення многочленів розглянути завдання на піднесення двочленів до 2 та 3 степенів. Звернути увагу учнів на те, що кількість членів результату до зведення подібних буде 2^n, а після зведення подібних завжди буде більше показника степеня двочлена на одиницю. Такий попередній підрахунок викликає інтерес, і є певним засобом стійкого засвоєння формул.

Розкладаючи многочлени на множники учні:

– *втрачають одиницю при винесенні спільного множника за дужки, наприклад:* $8x^3+4x^2-2x=2x\left(4x^2+2x\right)$. *Причиною є невідпрацьований алгоритм винесення спільного множника за дужки і нерозуміння того, що результатом ділення виразу сам на себе є одиниця;*

– *не завжди доводять перетворення до кінця, наприклад:* $x^4-y^4=\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)$;

– *помиляються у знаках під час винесення за дужки від'ємного множника, наприклад:* $ac-bc-a^2+2ab-b^2=ac-bc-(a^2+2ab-b^2)$, *що є наслідком не сформованих умінь розкривати дужки та при необхідності заключати вирази в дужки;*

– *допускають помилки у завданнях на використання формул, наприклад:*

$$а)\ a^2-b^2=(a-b)\left(a-b\right);\quad б)\ a^3-b^3=(a-b)(a-b)(a-b);$$

$$в)\ a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2+b^2\right);\ г)\ a^2+b^2=\left(a+b\right)\left(a+b\right);\ д)\ \left(a+b\right)^2=a^2+b^2.$$

Це свідчить про формальне засвоєння формул скороченого множення.

Зокрема, поширеною є *помилка* у нерозмежуванні виразів «сума квадратів» і «квадрат суми». Учні швидко запам'ятовують, що в обох виразах спільними є слова «квадрат» і «сума», що і призводить до помилки.

Часто учні допускають помилку $a-b=b-a$, *що стає у подальшому причиною помилок у зведенні до спільного знаменника раціональних дробів. Тому, ще на етапі вивчення правил розкриття дужок необхідно планувати* *діяльність так, щоб учні цілком свідомо і безпомилково виконували перетворення:* $a-b=-(b-a)$.

Труднощі виникають: у виділенні спільного множника в запису многочлена та обчисленні показників степеня членів многочлена, які залишаються в дужках після винесення спільного множника за дужки; виділенні формули скороченого множення в даному многочлені, наприклад: $4a^2-6ab+9b^2=(2a-3b)^2$. Причиною появи таких помилок є порушення принципу повноти в системі тренувальних вправ.

Здійснюючи аналіз помилок, вчителю необхідно з'ясувати, які умови забезпечать правильне виконання завдання і які чинники можуть викликати його помилкове виконання.

Виходячи з асоціативно-рефлекторної теорії П. О. Шеварьова, учень може зробити помилкову дію у двох випадках: якщо в нього актуалізується правильний ланцюг асоціацій, але актуалізується не повністю, відсутня певна ланка, або якщо в учня актуалізується помилкова асоціація. Завдання вчителя у першому випадку – перевірити склад і міцність усіх ланок у правильному ланцюгу асоціацій, у другому – виявити помилкову асоціацію, що актуалізувалась у мисленні учня та замінити правильною асоціацією.

Відомо, що якщо дві події відбуваються близько в часі чи просторі, то на основі сформованого зв'язку у людському мисленні, під час настання однієї з них, людина очікує другої. Так і при розв'язуванні математичних задач: якщо із суб'єктивної точки зору конкретна задача, чи її частина, здається учню схожою до розв'язаної раніше, то він переносить, елементи відомої задачі на нову, не помічаючи суттєвої відмінності між ними.

Враховуючи специфіку вивчення алгебри, зокрема те, що рівень вивчення кожної наступної теми певної змістової лінії прямо залежить від рівня засвоєння вивченого навчального матеріалу на попередньому етапі, *пояснення нового матеріалу слід будувати на основі повторення, узагальнення і систематизації відомого, необхідно здійснювати постійний зв'язок між вивченим і новим.*

У процесі вивчення нових понять (тверджень) корисно пов'язувати їх з уже відомими, визначати загальні суттєві ознаки в характеристиці нових і відомих понять.

Помилки з'являються ще й тому, що математика вимагає чіткості означень, послідовності міркувань, правильності висновків. А учні намагаються охопити навчальний матеріал лише пам'яттю. Тому бажано вчителю зменшити використання таких форм роботи коли знання передаються у готовому вигляді. Треба, щоб матеріал вивчався під час напруженої розумової діяльності. Перш ніж сказати «тому що» або «звідси» треба, щоб в учнів виникло запитання «чому?» або «звідки?». Важливими факторами попередження помилок є формування навичок самостійної навчальної діяльності учнів, засвоєння методів, способів і умінь користуватися цими навичками в процесі розв'язування різних типів математичних задач.

Розглянемо детальніше найпоширеніші помилки учнів у процесі вивчення теми «Одночлени».

Як показало наше експериментальне дослідження, значну кількість помилок школярі допускають під час запису одночлена в стандартному вигляді та у виконанні дій додавання та множення одночленів. Причиною появи таких помилок є недостатньо сформоване поняття степеня та невміння правильно застосовувати властивості степенів.

Так, виконуючи тотожні перетворення виразів учні не розмежовують дії добутку степенів та піднесення степеня до степеня, допускають помилку: $(a^m)^n = a^{m+n}$ (*)

Практика показує, що з метою попередження такої помилки під час вивчення властивостей: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, m,n \in N$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, m,n \in N$ необхідно закріпити в пам'яті учнів особливості даних виразів, вказавши на *спільне* та *відмінне* в них.

Згідно асоціативно-рефлекторної теорії П. О. Шеварьова, причиною появи помилки (*) є зовнішня схожість виразів $a^m \cdot a^n$ і $(a^m)^n$, $m,n \in N$ і помилковий асоціативний зв'язок, який сформувався під час вивчення властивості $a^m \cdot a^n = a^{m+n}; m, n \in N.$ Тому, з метою попередження помилки $(a^m)^n = a^{m+n}, m, n \in N$ ще на етапі засвоєння властивості $a^m \cdot a^n = a^{m+n}; m, n \in N,$ необхідно звернути увагу учнів на *специфічну особливість* формули $a^m \cdot a^n = a^{m+n}; m, n \in N$ тобто на те, що ***між степенями–дія множення, а в результаті показники степенів додаються.***

Більшого ефекту можна досягти, працюючи *фронтально* із класом та залучаючи всіх учнів. Школярі повинні самі виділити згадану вище особливість, проговорити її та підкріпити прикладами.

Необхідно відзначити, що у підручниках є достатня кількість завдань на закріплення властивості $a^m \cdot a^n = a^{m+n}; m, n \in N,$ що сприяє її стійкому запам'ятовуванню.

Після уведення властивості $(a^m)^n = a^{m \cdot n}; m, n \in N,$ доцільно також проаналізувати з учнями *особливості* цієї рівності, зокрема ***наявність дужок, показника степеня за дужками, добутку показників степенів у правій частині рівності***.

Наступний етап – порівняння обох вивчених властивостей. Учні повинні або самі, або за підтримки вчителя виділити, що спільного та відмінного вони помітили, *суттєві* особливості обов'язково зафіксувати в зошитах чи спеціально відведених довідниках.

Як відомо з досліджень психологів, 80% інформації людина отримує через зоровий аналізатор. Для попередження математичних помилок учнів ми пропонуємо максимально використовувати *візуалізацію* навчального матеріалу, що забезпечить цілеспрямовану концентрацію уваги учнів на правильних діях, виділенні спільного і відмінного в формулах (особливо в місцях, де найчастіше виникають труднощі в учнів) під час вивчення нового матеріалу. Засобами візуалізації можуть бути опорні схеми, карти знань, піктограми.

Прикладом є піктограма на запам'ятовування спільного і відмінного у властивостях степенів:

$$a^m \times a^n = a^{m+n};\ m,\ n \in N$$
$$\square^{\Delta}\square^{\nabla} = \square^{\Delta+\nabla}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n};m,\ n \in N$$
$$(\square^{\square})^{\square} = \square^{\square \cdot \square}$$

Для стійкого запам’ятовування її необхідно розмістити у правому верхньому куті дошки та залишити на весь урок.

Засвоєння школярами нової теми буде ефективнішим, якщо під час виконання вправ вони будуть вголос проговорювати орієнтовну основу дій. Наприклад: *під час множення степенів з однаковими основами показники додаються; під час піднесення степеня до степеня – показники степенів множаться.*

Виділення спільного і відмінного у новому матеріалі сприяє розвитку уваги учнів і спрямованості на пошук таких характеристик під час вивчення кожної теми.

Формулювання загальних висновків на основі аналізу конкретних ситуацій (використання індуктивних міркувань), здійснених самими учнями за наслідками власної діяльності, сприяє міцнішому засвоєнню нових знань та запобіганню помилок з цієї теми у майбутньому.

Якщо не звернути увагу учнів на особливість кожної з властивостей $a^m \times a^n = a^{m+n};m,\ n \in N$, $(a^m)^n = a^{m \times n};m,\ n \in N$, то вони будуть бачити тільки спільне, а, отже, використовувати частіше будуть ту властивість, яка вивчалась першою.

Закріплення згаданих вище властивостей доцільно здійснювати дібраною ефективною системою усних та письмових вправ.

Особливістю усних вправ є те, що вони повинні бути спрямовані на формування в учнів уміння **визначати назву певної властивості та записувати її у вигляді формули,а також називати властивість, записану формулою**, уміння перевіряти виконані перетворення, обчислюючи значення даних і одержаних виразів.

З досліджень психологів та практичного досвіду вчителів відомо, що виконання учнями вправ одного типу послаблює їхню увагу. Тому систему письмових тренувальних вправ, запропонованих у підручниках, доцільно доповнювати вправами, в яких враховуються психолого-педагогічні закономірності навчання математики. Зокрема, закономірності формування умінь та навичок розв'язування задач, закономірності уваги та сприйняття, закономірності мислення тощо.

Важливо відмітити, що досвідчені вчителі, дотримуючись у своїй практичній діяльності відомої закономірності формування умінь та навичок розв'язування задач, завжди намагаються домагатися від учнів у процесі розв'язування задач обґрунтовувати свої дії, використовуючи означення, аксіоми, теореми, використовувати в своїх міркуваннях графіки, моделі, схеми тощо, тим самим досягають глибокого розуміння та формування міцних та стійких умінь і навичок.

Знаючи, як порушити деякі закономірності, вчитель може провокувати учнів на помилки, і тим самим спонукати думати та контролювати всі свої дії.

У ході дослідження ми перевірили ефективність використання прийому провокації учнів на помилку внаслідок зниження самоконтролю, враховуючи ***закономірність***:

якщо під час вивчення нової теми виконуються умови:

1) учневі пропонують завдання тільки одного типу;

2) виконання кожного з них зводиться до однієї й тієї ж операції;

3) цю операцію (її результат) учневі не доводиться вибирати серед інших, які можливі в подібних ситуаціях;

4) дані завдань не є для учня незвичними;

5) він упевнений в безпомилковості своїх дій, то вже під час виконання 2-го або 3-го завдання він перестає згадувати і застосовувати правила, формули чи теореми, не обґрунтовує розв'язування завдань.

Щоб спровокувати учня на помилку, потрібно однотипні вправи згрупувати по дві-три. За вказаною вище закономірністю третю, з цих вправ учень виконає не обґрунтовано, механічно, тому в четвертій вправі обов'язково допустить помилку. Помилку необхідно проаналізувати, і виправити. У цей час впевненість у безпомилковості дій в учня порушиться. Тому у виконанні наступних вправ він буде діяти обачніше, стане уважнішим.

Якщо помилка і не допускається, то все одно активність мисленнєвої діяльності зростає.

До вправ на відпрацювання властивостей степенів ми пропонуємо включати вправи із попередніх тем, які зовні схожі і є «провокативними».

Наприклад. Подайте, <u>якщо можливо</u>, у вигляді степеня: 1) $4^3 \cdot 4^5$; 2) $a^5 \cdot a^7$; 3) $x^4 \cdot x^6$; 4) $c^3 + c^5$; 5) $(3^4)^2$; 6) $(-a^9)^2$; 7) $(-b^5)^4$;

8) $(-2)^5 + (-2)^4$; 9) $(-2^3)^4 \cdot (-2)^7$; 10) $(3^2)^4 \cdot 3^3$; 11) $(c^2)^5 \cdot c^4$; 12) $(7^2)^5 + 7^4$.

Тут перші три вправи одного типу, в них повторюється одна властивість (розглядається добуток степенів з однаковими основами), яку учень може не усвідомлювати, якщо діє за аналогією. У результаті усвідомлення цієї особливості послаблюється, і в прикладі 4) учень допускає помилку: $c^3 + c^5 = c^8$.

Помилка не залишається поза увагою інших учнів. Зростає інтерес. Послаблюється самовпевненість учнів у безпомилковості своїх дій. У результаті наступні вправи учні виконують уважніше та вдумливо. Але через деякий час увага знову послаблюється, тому що вправи 5-7 знову одного типу, і деякі учні знову допустять помилку у вправі 9. Після цього інтерес і мисленнєва діяльність ще більше підсилюється, тому у завданні 12 помилку майже ніхто не допустить.

Певного емоційного забарвлення попередженню помилок надають інтерактивні технології, змагання за найменшу кількість помилок. Важливу роль відіграють нестандартні уроки: «Суд над помилками», «Прикрощі від помилок», написання творів «Я і мої помилки», «Як помилки заважають успішності», казки про помилки тощо.

Важливою є робота із закріплення вивченого матеріалу. Так, закріпити властивості степенів допоможе стратегія «Взаємні питання». У 7-му та 8-му класах доцільно використовувати картки взаємоопитування учнів. В силу психологічних особливостей підлітків така діяльність їм подобається, стимулює до вивчення правил та формул. Ефективною є робота в парах по знаходженню та виправленню допущених помилок один в одного. Таким є прийом «Упіймай помилку». Знаходження учнями помилок доцільно стимулювати та заохочувати різними засобами. Наприклад, встановити ціну знайденої помилки. Це може бути додатковий 1 або 2 бали до поурочного балу,залежно від теми.

Найбільше задоволення учні отримують, якщо знаходять «помилки» вчителя. Методичний прийом «Знайти помилку вчителя» сприяє активізації мисленнєвої діяльності, виховує бажання знати більше та якісніше. Звичайно, такий прийом ефективний, якщо вчитель, неначе ненароком допускає помилки. Однак, якщо і не буде помилок на дошці, вимога «знайти помилку» вселяє в учнів впевненість в обов’язковій наявності помилки. Тому її пошук стає особливо наполегливим, а обґрунтування відсутності помилки є більш усвідомленим.

Якщо під час виконання завдання біля дошки учень допустив помилку, варто зупинити виконання завдання та запропонувати знайти свою помилку та виправити її, якщо ж учень не помічає власної помилки, на допомогу приходять всі учні класу, і хто перший знайде помилку та обґрунтує її одержує додатковий бал. Такий прийом впливає на увагу та зосередженість учнів, активізує розумові зусилля. Учні глибше розуміють навчальний матеріал, зростає впевненість, якій сприяють слова підтримки вчителя.

Вже на початку вивчення властивостей степенів, важливо провести діагностичну самостійну роботу з виявлення рівня засвоєння нового матеріалу. Перевірку її можна здійснити, наприклад, так: почергово заслухати відповіді учнів, не вказуючи на правильну відповідь, потім попросити підняти руку тих учнів, у кого дійсно правильна відповідь. Так учитель зможе виявити рівень засвоєння навчального матеріалу та спланувати подальші дії в превентивній діяльності.

Ефективним засобом в боротьбі з помилками є математичний диктант. Проаналізувавши виконання диктанту, вчитель одержує детальну інформацію про рівень засвоєння навчального матеріалу як окремими учнями, так і класу в цілому, що у свою чергу дозволяє оперативно ліквідувати прогалини в їхній підготовці. До завдань математичного диктанту потрібно включати як властивості степенів, так і завдання на повторення, наприклад:

Математичний диктант.

Властивості степеня з натуральними показниками

Варіант 1

1. Запишіть добуток сьомого та п'ятого степенів числа *m.* Подайте одержаний вираз у вигляді степеня.
2. Запишіть степінь, який утвориться, якщо вираз x^2 піднести до п'ятого степеня.
3. Подайте у вигляді добутку степенів сьомий степінь добутку чисел 11 і 19.
4. Запишіть у вигляді степеня вираз $6^{12} \cdot 11^{12}$.
5. Подайте у вигляді степеня числа 7 частку $7^{25} : 7^{8}$.
6. Число a від'ємне. Який знак має число a^{14}?
7. Чи є тотожно рівними вирази: $7a - 2a$ *і* $9a$?

Варіант 2

1. Запишіть добуток сьомого та третього степенів числа c. Подайте одержаний вираз у вигляді степеня.
2. Запишіть степінь, який утвориться, якщо вираз c^2 піднести до шостого степеня.
3. Подайте у вигляді добутку степенів п'ятий степінь добутку чисел 7 і 13.
4. Запишіть у вигляді степеня вираз $7^{13} \cdot 10^{13}$.
5. Подайте у вигляді степеня числа 4 частку $4^{24} : 4^{13}$.
6. Число bвід'ємне. Який знак має число b^{17}?
7. Чи є тотожно рівними вирази: $5m - m$ *і* $6m$?

Важливе значення в організації превентивної діяльності мають короткочасні самостійні роботи, ми називаємо їх «п'ятихвилинками». Метою таких робіт є перевірка засвоєння формул, властивостей, теорем. Ефективним є використання тестової перевірки знань з комп'ютерною підтримкою та перевірка знань за допомогою GR-кодів. З практики навчання математики відомо, що якщо систематично здійснювати перевірку залишкових знань на початку кожного уроку, учні чекають такої перевірки, краще готуються до уроку вдома.

Щоб відпрацювати безпомилкове засвоєння формули піднесення добутку до степеня, під час використання якої часто допускаються учнями помилки, необхідно детально розглянути її особливості та акцентувати увагу учнів на тому, що в дужках добуток одночленів.

Властивість $(ab)^n = a^n b^n; n \in N$ можна записати як: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; n \in N$.

Як відомо, сприймається та запам’ятовується та інформація, яка засвоюється легко, із задоволенням. Для кращого запам’ятовування корисно використовувати секрети ейдетики (*«ейдос» – образ*): *залучити фантазію. Формулу можна оживити, запропонувавши учням уявити, що дужки це будинок, в якому живуть брати, а* n *– сонечко над будинком. Прокинувшись вранці і вийшовши з будинку, кожен із братів побачить сонечко.*

Уява допомагає уникати помилок, сприяє запам’ятовуванню навчального матеріалу,яскраві образи залишаються в пам’яті назавжди. Учні охоче навчаються, якщо вчителю вдається включати їх в активну навчальну діяльність, тому важливе місце в організації роботи з попередження помилок займає вдале мотивування, позитивне, яскраве забарвлення уроку, заохочення, стимулювання та створення ситуацій успіху. Використовуючи різні прийоми запам’ятовування, розвиваючи пам'ять учнів, вчитель полегшує роботу учнів, робить її цікавішою, що прискорює процес засвоєння знань.

Згідно з ученням І. П. Павлова, в основі засвоєння навчального матеріалу лежать тимчасові зв’язки. Знання набуваються за асоціацією і утримуються в пам’яті тільки певний період. Для зміцнення і систематизації знань, для засвоєння їх на триваліший час дуже важливо з фізіологічної точки зору попередити згасання цих знань, збагатити і зміцнити попередні зв’язки. Тимчасові зв’язки в корі головного мозку кожного учня виникають і згасають згідно з законами, які регулюють процеси збудження і гальмування. У різних учнів це відбувається по-різному і залежить від запасу попередніх знань, а також активної самостійної розумової діяльності учнів на уроці. Якщо засвоєні на уроці знання учень самостійно не закріпить певною кількістю вправ, то набуті нові знання і створені на їх основі тимчасові зв'язки через деякий час зникають.

У своєму дослідженні ми пропонуємо акцентувати увагу вчителя на виконанні учнями творчих вправ. Характер мисленнєвих процесів різко зміниться, якщо замість завдання, наприклад, піднести до степеня $(3a^2b^3)^2$ поданого у звичному вигляді, запропонувати деформовану вправу, типу: знайдіть одночлен, який піднесли до квадрату $(\square)^2 = 9a^4b^6$. Експериментально доведено, що виконання другого завдання ґрунтується на пошуках відсутніх ланок замкнутого кола умовиводів, через аналіз всього ланцюга, що перетворює мисленнєвий процес у складніший, змістовніший і тому краще розвиває здібності учнів.

Такі завдання розвивають навички самоконтролю, який здійснюється довільно, а іноді навіть не осмислено. На відміну від звичайних вправ, коли самоконтроль здійснюється після нагадування, у виконанні деформованих вправ контроль є необхідною складовою.

Корисними є обернені задачі. Вони об'ємніші ніж прямі, однак виконання обернених розвиває у школярів уміння виконувати і прямі перетворення: записаний один приклад, а під час його розв'язання випробувано декілька варіантів, тобто розв'язано не менше 3-х, 4-х прикладів.

У попередженні помилок важливу роль відіграє рівень мислення школярів. Обернені задачі є ефективним засобом, що спонукає активізацію мисленнєвої діяльності учнів, змушує їх розглядати питання, що вивчається з різних точок зору.

Наприклад, під час вивчення властивості $a^m \times a^n = a^{m+n}, m, n \in N$ разом із вправами, які спрямовані на безпосереднє використання цієї властивості, варто пропонувати і обернені завдання:

1. Запишіть степінь x^8 у вигляді добутку двох множників.

2. У рівності $xa^3 = a^9$ замінити *x* степенем так, щоб одержати рівність, правильну для всіх значень змінної *a*.

На навчальному етапі під час піднесення степеня до степеня в умовах диференційованого підходу послідовність вправ із зростанням степеня складності: а) 2^3; б) 4^3; в) $(\frac{2}{3}a^5)^2$; г) $(\frac{2}{3}a^5)$; д) $(0{,}2xy^4)^2$ для сильніших учнів доцільно доповнити, наприклад,завданням на визначення *x* у виразах:

а) $x^2 = a^4$; б) $x^2 = 9^2$; в) $x^2 = 49$; г) $x^2 = 9^2a^8$; д) $x^4 = 81a^{12}$.

Учні із зацікавленням виконують останнє завдання, хоча і не знають, що розв'язують рівняння. Після певної кількості спроб та перевірок в умі можуть одержати правильний результат.

Для виправлення та попередження багатьох помилок особливо важливо сформувати у школярів навички самоконтролю. Ці навички складаються з двох частин: **а) вміти виявити помилку; б) вміти її виправити.**

З метою формування навичок самоконтролю, вчителю варто навчити учнів **перевіряти правильність виконання дій та одержаних результатів**. Школярі мають вміти перевіряти власні дії виконанням обернених дій, здійснювати перевірку підставлянням замість змінних конкретних числових значень.

Як відомо, те, що легко запам'ятовується, швидко забувається. Активна мисленнєва діяльність над навчальним матеріалом, його розуміння, установка на запам'ятовування («під час використання формул старайтесь їх запам'ятати, на завтра потрібно вивчити напам'ять») сприяє кращому та ефективнішому засвоєнню даного матеріалу. Тому вчителю необхідно протягом вивчення наступних тем пропонувати учням вправи на виконання всіх дій із степенями.

Учні, які засвоїли нову тему, можуть виконувати складніші завдання, працюючи в групах, а зі слабкішими учнями вчителю в цей час потрібно попрацювати індивідуально, уже не в фоновому режимі, а вказуючи на помилки та виправляючи їх. Аналогічні завдання до тих, в яких учні допустили помилки потрібно включити в домашнє завдання, і з перевірки саме цих завдань розпочати наступний урок.

Одночлени. Безпомилкове множення одночленів, піднесення одночлена до степеня, запис одночлена в стандартному вигляді, значною мірою залежить від належного рівня засвоєння властивостей степенів. Тому на етапі актуалізації знань необхідно повторити всі властивості степенів, записані як в прямому, так і зворотному порядку, виконати систему підготовчих вправ. З цією метою можна використати презентації, опорні схеми, прийоми ейдетики.

Щоб підвести учнів до розуміння поняття «одночлен», на дошці доцільно записати кілька виразів, наприклад: $7;\ 3ab^4;\ b;\ -\frac{8}{11};\ 4a^3(-5)c;\ \frac{1}{3}a^2b;\ c^5$. Потім з допомогою запитань допомогти встановити *суттєву* ознаку одночленів, за якою вони відрізняються від інших видів виразів: одночлени–це числа, змінні, їх степені і добутки. На слові *добутки* необхідно акцентувати увагу. Крім того, варто виділити *несуттєві ознаки*: числовий множник може бути цілим і дробовим числом, додатнім і від'ємним, може дорівнювати одиниці. Після виділення *суттєвих* і *несуттєвих* ознак доцільно ввести поняття одночлена. Надалі, у випадку помилки у відповіді учня, доцільно наводити контрприклади. Якщо учень, наприклад, вираз $a(b+c)$ назвав одночленом, вчителю достатньо поставити питання: «Якою є дія в дужках?». Учень сам побачить і зрозуміє помилку.

Запис одночлена в стандартному вигляді не викликає труднощів у учнів, якщо вчитель вчасно повторив з учнями всі властивості степенів.

Паралельно із зведенням одночлена до стандартного вигляду розглядається важливе поняття коефіцієнта. Поняття це на перший погляд просте, але практика свідчить, що учні досить часто неправильно визначають коефіцієнти у випадках, коли вони дорівнюють 1 або -1, що призводить до грубих помилок при виконанні тотожних перетворень, розв'язуванні рівнянь тощо. Хоча перші відомості про коефіцієнт учні отримали у попередньому класі, проте саме тут, при зведенні одночленів до стандартного вигляду, є сприятливі можливості для попередження подібних помилок. При цьому мало обмежитися лише розглядом вправ, типу: назвіть коефіцієнти в одночленах: $ab^2, -m^4n$. Корисно, щоб учні побачили ці коефіцієнти у процесі їх утворення. Ефективними у зв'язку з цим виявляються вправи такого змісту:

Визначте коефіцієнти у виразах:

$0,25a^2 4d$; $6\frac{3}{4}mn(-\frac{4}{27}27m^2)$; $-5d^4 \cdot 0,2c$ тощо.

Перетворюючи ці вирази, учні запишуть:

$0,25a^2 4d = 1a^2d$; $6\frac{3}{4}mn(-\frac{4}{27}27m^2) = -1m^3n$; $-5d^4 \cdot 0,2c = -1d^4c$.

Після розгляду кількох аналогічних вправ доцільно нагадати учням про те, що утворені вирази можна записати в іншій формі, а саме: $1a^2d = a^2d$; $-1m^3n = -m^3n$.

Учні мають усвідомити, що дані та аналогічні рівності є тотожностями. Такий підхід сприяє осмисленому засвоєнню поняття коефіцієнта і дає змогу уникнути помилок. Безпомилкове засвоєння поняття відбувається не в процесі заучування, а в процесі самостійних пошуків учнями суттєвих ознак цього поняття. При цьому варто пропонувати більше вправ, на основі яких проводиться узагальнення.

Зведення одночлена до стандартного вигляду лежить в основі дії множення одночленів, а для її виконання можна з успіхом використати алгоритм названого перетворення. Кращий ефект досягається тоді, коли вчитель не повідомляє учням готовий алгоритм перетворення, а на прикладі однієї-двох задач організовує їхню діяльність на самостійний чи колективний пошук алгоритму і його формулювання.

На розв'язування першої вправи вчитель завжди має звертати особливу увагу, яким би простим не був матеріал, бо із психології відомо, що перше враження найсильніше. Тому потрібно чітко продумувати, яку вправу варто розглянути першою, як провести пояснення, які терміни використати, як правильно подати зразок запису.

Наступні вправи повинні виконуватися під контролем учителя. Річ у тім, що в цей момент відбувається утворення нових нервових шляхів в корі головного мозку. Якщо учень неправильно розв'язує перші вправи нової теми, допускає помилки, і помилки залишаються невиправленими, то у нього прокладаються неправильні нервові шляхи. Учня прийдеться перевчати, а це складніше, ніж навчати. На етапі усвідомлення учнями нового поняття дуже важливо, щоб помилки не залишились непоміченими і невиправленими. Вчитель на цьому етапі повинен ретельно слідкувати та контролювати роботу учнів, частіше переглядати роботи учнів з нестійкими уміннями. Своєчасне контролювання і виправлення кожного помилкового кроку і є передумовою безпомилкового засвоєння навчального матеріалу.

На етапі формування умінь важливо, щоб кожна помилка не тільки виправлялась, але й пояснювалась учителем, що зручно робити під час виконання коментованих вправ.

Дія множення одночленів і дія розкладання одночленів на множники є оберненими. Розкладання одночлена на множники – невизначена задача, оскільки кілька розв'язків, наприклад: $12x^8 = 3 \cdot 4x^4x^4 = 2x^5 \cdot 6x^3$ і т.д.

Якщо навчити учнів розкладати одночлени на множники та здійснювати перевірку дією множення, то помилок під час множення одночленів буде значно менше.

Під час піднесення одночлена до степеня не потрібно поспішати із уведенням скороченого запису. Необхідно деякий час здійснювати детальні записи і тільки поступово переходити до скороченого запису, наприклад:

1-й етап: $(2a^3b^4c^7)^3 = 2a^3b^4c^7 \cdot 2a^3b^4c^7 \cdot 2a^3b^4c^7$;

2-й етап: $(2a^3b^4\text{c}^7)^3 = 2^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^4)^3 \cdot (\text{c}^7)^3 = 8\,a^{3\cdot 3}b^{4\cdot 3}c^{7\cdot 3} = 8\,a^9b^{12}c^{21}$;

3-й етап: $\left(3a^2b^4c^3\right)^2 = 3^2a^{2\cdot 2}b^{4\cdot 2}c^{3\cdot 2} = 9a^4b^8c^6$;

4-й етап: $\left(4a^5b^3c^2\right)^2 = 16a^{10}b^6c^4$.

Час від часу учні повинні перевіряти свою роботу, здійснюючи пооопераційний контроль чи підставлянням числових значень замість букв. Наприклад, щоб пересвідчитись у правильності піднесення добутку до степеня: $(2a^3)^3 = 6a^3$ учню достатньо замість a підставити 1.

В організації превентивної діяльності учнів з попередження помилок під час вивчення одночленів, доцільно разом з прийомом поступового ускладнення вправ використовувати прийом обернених перетворень. Причому, важливо пропонувати вправи, в яких використовуються обернені дії і відносно коефіцієнтів і відносно показників степенів, наприклад:

$$20xy^5 \cdot \left(?\,y^3\right) = -40xy^8, \qquad \left(?\,p\right) \cdot \left(7p^?\right) = 42p^5.$$

Систему вправ варто доповнювати вправами, які будуть провокувати учнів на помилки.

Наприклад. Виконайте дії:

1) $5a^3 \cdot 3a^3$; 2) $4b^2a \cdot 7b^2$; 3) $\frac{1}{3}x^2y^3 \cdot (-3)x^2y^3$; 4) $3a^2 + 5a^2$;

5) $0{,}5b^7c \cdot 4{,}2b^7c$; 6) $\frac{1}{2}k^3z^2 \cdot 2k^3z^2$; 7) $16k^2 - 4k^2$ (в 4 і в 7 завданнях можлива помилка).

З метою попередження помилок у майбутньому варто звернути увагу учнів на різницю між показником степеня та коефіцієнтом одночлена. Для цього запропонувати для колективного розв’язання з подальшою перевіркою та обговоренням такі, наприклад, завдання:

Виконати та обґрунтувати дії:

а) $5a^3 + 3a^3$; б) $5a^3 \cdot 3a^3$; в) $4b^2a + 7ab^2$; г) $4b^2a \cdot 7ab^2$.

Психологи стверджують, що у процесі навчання осмислюється той матеріал, який є безпосередньою метою тієї чи іншої дії, що входить до складу навчальної діяльності. Для того, щоб матеріал був засвоєний учнями, необхідно, насамперед, щоб цей матеріал був ними осмислений, щоб на нього спрямовувалась увага. Послаблення уваги учнів призводить до появи помилок.

Причиною послаблення уваги можуть бути: непосильні завдання; втрата впевненості; швидкий чи навпаки повільний темп уроку; одноманітність дій; втрата інтересу до діяльності; робота, що виконується є дуже простою.

Вчитель має привертати увагу учнів і підтримувати її протягом всього уроку. Для цього необхідно розуміти, що діяльність, яка здійснюється на основі довільної уваги, потребує значних зусиль і швидше втомлює учня, ніж діяльність, яка ґрунтується на післядовільній увазі, саме *післядовільна увага є основною в навчальній діяльності на уроках математики.*

Як відомо, увага у процесі діяльності підсилюється, коли з’являється відносна новизна та спрацьовує фактор несподіванки. Таким фактором є, наприклад, придумування учнями прикладів і контр прикладів та їх обговорення.

Необхідною умовою довгого зберігання після довільної уваги є посильність завдань та наявність відповідних знань, умінь та навичок. Достатньою умовою є значущість діяльності, наявність почуття відповідальності за її успішне виконання, інтерес до такої діяльності.

Засвоєння учнями властивостей степенів з натуральним показником, поняття одночлена та безпомилкове виконання дій над одночленами є міцним підґрунтям для вивчення многочленів та дій над ними.

Підсумовуючи вищесказане, приходимо до висновку: формуючи нові поняття з метою попередження появи помилок, учителю важливо враховувати такі рекомендації:

− ***уводити нові поняття не формально;***

− ***конкретизувати нові поняття ефектними прикладами;***

− ***готувати учнів до сприйняття нових понять;***

− ***не допускати в учнів думки про те, що нові поняття уводяться довільно;***

− ***для кращого засвоєння нових понять вказувати їх зв'язок з попередніми поняттями;***

− ***відводити належне місце наочності;***

– ***виконувати з самого початку вправи, в яких неврахування необхідних для правильного розв'язання особливостей навчального матеріалу буде сприяти появі помилок;***

– ***уникати розв'язування підряд великої кількості вправ одного типу.***

Многочлени. З метою успішного засвоєння теми «Многочлени» перед її вивченням доцільно провести урок, на якому учні повторять степені з натуральним показником і одночлени та дії над ними. Такий урок в системі уроків ми називаємо ***підготовчим***. З урахуванням психологічних особливостей учнів підліткового віку він буде ефективним, якщо його провести у формі гри чи змагання. Перед проведенням підготовчого уроку варто в домашнє завдання включити низку питань на повторення.

З метою профілактики помилок, які виникають під час запису многочлена в стандартному вигляді, потрібно домагатися того, щоб учень кожного разу чітко осмислював всі суттєві особливості запропонованого йому завдання. З цією метою необхідно збільшити кількість вправ, у яких не вказуються дії, які потрібно виконати, а вимагається або спростити даний вираз, або виконати яке-небудь перетворення. Такі завдання будуть сприяти виникненню загальної навички починати виконувати дію тільки після осмислення особливостей запропонованого виразу.

Під час вивчення многочленів учні часто припускаються помилок у зведенні подібних доданків. Причину ми вбачаємо в тому, що:

– *не сформовані на належному рівні вміння та навички у виконанні дій над раціональними числами (наприклад*:-6+11-4+12=32; 24-11+6-5=24);

– *не до кінця усвідомлено, що під час дій над коефіцієнтами буквена частина залишається незмінною (наприклад*: $4a-8a+11a=7$; $3x^2-x^2=3$).

Насамперед, необхідно досягти успішного виконання всіма учнями дій над цілими числами: додатними і від'ємними. Для досягнення цієї мети потрібно виконати усно *значну* кількість завдань типу:

Обчислити значення виразу:

а) 23-6+18-14-8; б) -21+4+15-12-9; в) 4+23-14-9; г) 10-14-5-7+3 тощо.

При цьому можна асоціювати додатні числа з прибутком і додавати їх окремо, від’ємні – з боргом, і теж знаходити їх суму окремо (хоча у кожного учня може бути своя асоціація). Останньою дією буде додавання двох чисел з різними знаками.

Тільки, актуалізувавши навички дій над додатними і від’ємними числами, можна переходити до вдосконалення умінь зводити подібні доданки, попередньо актуалізувавши розуміння поняття коефіцієнта. Учням варто запропонувати виконати серію завдань типу:

Спростити вираз: а) $7x^2-2x+4x^2+5x$; б) $8ab+7b-4ab-7b$ тощо.

При цьому ввесь час звертати увагу на визначення коефіцієнтів одночленів та акцентувати увагу на тому, що під час зведення подібних доданків дії виконуються тільки *над коефіцієнтами*, а буквена частина залишається незмінною. З метою кращого осмислення виконання таких дій, враховуючи психологічні особливості підлітків, їм можна запропонувати таку гру: збирати різні одночлени в окремі кошики, результати озвучувати. Доцільно також використовувати вправи на виконання обернених дій, тобто <u>подання многочлена стандартного виду у вигляді довільного многочлена.</u>

Вправа 1. Чи правильно, що:

а) $5x^2y^3-14x^3y^2=-7x^2y^3+20x^3y^2+12x^2y^3-34x^3y^2$;

б) $18x-15y=-3x+4y+15x-11y$ тощо.

Як відомо, окремі учні,знаючи правило розкриття дужок, розкривають їх з помилками. Під час розкриття дужок ефективним прийомом є використання **правила-заборони**: *не можна розкривати дужки, не визначивши знак перед ними* (щось на зразок заборонних чи попереджувальних знаків у правилах вуличного руху⚠). З цією метою бажано вимагати від учнів перед кожними дужками над знаком дії ставити значок ⚠. Коли учень буде писати відповідний знак, він мимоволі зверне увагу на попереджувальний знак перед дужками, і в пам’яті актуалізується правило, яке в даному випадку є доцільним. Наприклад:

Спростити вираз: а) $2a-4b-^{\Delta}(3a-7b)$; б) $12x+4y+^{\Delta}(7y-5x)$.

Однак, досить часто, пригадавши правило, учні, розкриваючи дужки перед якими стоїть знак «мінус», змінюють на протилежний тільки знак другого доданку, іноді тільки знак доданку, перед яким стоїть знак «+». З метою запобігання таких помилок доцільно разом з учнями скласти піктограму:

«мінус» *змінює* знаки всіх доданків у дужках
«плюс» не змінює знаків доданків у дужках

Вважаємо корисними такі вправи:

Вправа1. Перевірте, чи правильно розкриті дужки, відповідь обгрунтуйте:

а) $12+n^2-(n+n^2-7)=12+n^2-n+n^2-7$; б) $7-(9a-4b-12)=7-9a+4b-12$;

Вправа 2. Заключіть подані нижче вирази в дужки, перед якими поставте:

1) знак « - » ; 2) знак «+»:а) $8a^3-2a^2+7$; б) $-4a^2+7a^3-12$;

Вправа 3. Який многочлен потрібно записати замість пропусків, щоб одержати тотожність: 1) $-(...)=6a-7n+3;$ 2) $12n^2-(...)=5n^2+7n^3m-4.$

Під час множення многочлена на одночлен типовою є помилка, коли розкриваючи дужки, учні виконують множення на одночлен тільки найближчого до нього члена многочлена. З метою попередження таких помилок ми рекомендуємо використовувати прийоми *холістичного* навчання, поділяючи думку відомого психолога А. Л. Сиротюк про те, що способи навчання математики повинні ґрунтуватися на гармонійному поєднанні роботи обох півкуль головного мозку – лівої та правої. Як відомо, якщо потрібно щось нове запам'ятати, потрібно його асоціювати з яким-небудь фактом, що зберігається в пам'яті, створювати цікаві картинки.

У власному дослідженні ми використовували прийом «Синектика». Синектика – це використання в міркуваннях метафор, аналогій з метою незнайоме зробити знайомим. Під час використання такого прийому в учнів розвивається уміння створювати свої метафори та аналогії. Кращому запам’ятовуванню правила розкриття дужок будуть сприяти, наприклад, такі аналогії:

1. Розкриття дужок під час множення числа на суму, аналогічно тому, як офіціант обслуговує кожну особу, яка сидить за столом.

2. Дужки можна уявити будинком, одночлена за дужками – товариша, який прийшов провідати своїх друзів. Зайшовши в будинок, він привітається з кожним. Скільки буде друзів у будинку, стільки буде вітань, а, отже, і стільки ж доданків після розкриття дужок. Так учень може контролювати свої дії, що є надзвичайно важливим етапом в попередженні помилок.

Аналіз проведених нами контрольних робіт з теми «Многочлени» показав, що учні під час множення многочленів допускають *помилки під час розкриття дужок, у зведенні подібних доданків після розкриття дужок, плутають властивості степенів.*

З метою безпомилкового множення многочленів перед уведенням правила множення многочленів пропонуємо актуалізувати та закріпити вміння та навички зведення подібних доданків та дії зі степенями.

Важливо в умовах організації превентивної діяльності доброзичливо вказувати на недоліки і помилки учня. Створення в класі атмосфери співпраці, загальної доброзичливості сприяє заохоченню учнів до успішної діяльності.

Успіх учнів залежить, зокрема, і від правильно організованого повторення. Багаторазові повторення з використанням трьох видів пам'яті: зорової, слухової і моторної – призводить до того, що кожен учень стає учасником процесу навчання і довільно чи мимовільно набуває певного рівня знань та умінь. Пояснюючи новий матеріал, учитель має не тільки зробити усне повідомлення, а й максимально прояснити зміст навчального матеріалу за допомогою наочних засобів, щоб в учнів на цій стадії вивчення склалися міцні зорові асоціації, а також забезпечити повноцінне засвоєння матеріалу, що вивчається; використовувати спеціальну систему вправ на попередження помилок.

Так, наприклад, щоб забезпечити безпомилкове засвоєння формул скороченого множення, зокрема формули квадрата двочлена, необхідно сформувати в учнів уміння визначати доданки, їх квадрати, добуток та подвоєний добуток. З цією метою необхідно ще за декілька уроків перед вивченням нового матеріалу, використовуючи усні вправи, готувати учнів до його сприйняття.

Серед різних сум учні мають навчитись визначати перший і другий доданки. На наступних уроках закріплюються уміння знаходити доданки та їх квадрати. Формуються уміння знаходити добуток першого і другого доданків. Далі вводиться поняття подвоєного добутку доданків. Закріплення вироблених навичок продовжується ще протягом одного-двох уроків. У результаті, після виведення формули $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ учні не роблять помилок в знаках, правильно знаходять подвоєний добуток.

Кращому запам'ятовуванню для «візуалів» сприятиме піктограма:

$(\Delta \pm \square)^2 = \Delta^2 \pm 2\Delta \cdot \square + \square^2$.

Для належного засвоєння формул на уроках алгебри у 7 класі доцільно використати так званий «компактний метод»:

1 крок. Учні виконують завдання «Розбити правило рисочками на окремі вказівки»: Квадрат двочлена // дорівнює квадрату першого виразу // плюс подвоєний добуток першого на другий // плюс квадрат другого виразу».

2 крок. Вчитель показує зразок виконання вправи за підготовленим правилом.

3 крок. Відповідно до зразка, підготовленого вчителем, учень біля дошки читає правило в підручнику та, зупиняючись після кожної рисочки, виконує відповідну частину вправи.

Інші учні слідкують за роботою біля дошки, нашіптуючи правило. До кінця уроку майже всі учні запам'ятовують правило, а головне –вміють його використовувати. Цей метод тісно корелює з теорією поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна.

Для відпрацювання учнями формул скороченого множення варто пропонувати їм такі завдання:

Вправа 1.Чи правильно, що:

а) $(a-b)^2 = a - 2ab + b$; б) $(a-b)^2 = 2a - ab + b^2$; в) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

г) $(a-b)^2=a^2-2ab-b^2$; д) $(a-b)^2=a^2+ab+2b$;е) $(a-b)^2=a^2+ab+b^2$.

Вправа 2. Перевірте, чи правильно розкриті дужки:

а) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; в) $(m-n)^2=m^2-2mn-n^2$;

б) $(x-y)^2=x^2+y^2-2ab$; г) $(d-c)^2=2dc-d^2-c^2$.

Виконання завдань вправи 2 можна провести у вигляді змагання між двома командами.

Належне місце в закріпленні формул скороченого множення повинні займати усні тренувальні вправи та самостійні роботи. Це можуть бути самостійні роботи на пряме використання формул скороченого множення та варіаційні самостійні роботи, які містять деформовані завдання. Наприклад: заповнити пропуски:

а) $(?-9c^2)^2=25a^2-?+?$; в) $(5x+?)^2=?+70xy+?$;

б) $?+30xy+9y^2=(?+3y)^2$; г) $(9a-?)=?-?+100b^2$.

Такі завдання покликані розвивати навички самоконтролю.

Певні труднощі відчувають учні під час застосування відповідних формул до перетворення виразів $(-n+4)^2$, $(-z-2)^2$ та подібних їм. З метою попередження появи помилок необхідно попередньо здійснити підготовчу роботу – розглянути вирази (усно чи письмово), що знаходяться в дужках, у вигляді суми чи різниці. Корисно розглянути різні варіанти таких вправ з наступним визначенням найраціональнішого способу:

$$(-n+4)^2=((-n)+4)^2=(-n)^2+2(-n)\cdot 4+4^2=n^2-8n+16;$$
$$(-n+4)^2=(4-n)^2=16-8n+n^2;$$

$$(-z-2)^2=((-z)-2)^2=(-z)^2-2(-z)\cdot 2+z^2=z^2+4z+4;$$
$$(-z-2)^2=(-1)^2(z+2)^2=z^2+4z+4.$$

Важливо, щоб учні усвідомили тотожності: $(-a-b)^2=(a+b)^2$, $(a-b)^2=(b-a)^2$ та правильно використовували їх під час розв’язування вправ.

Поширеною помилкою при перетворенні квадрата двочлена у многочлен є записи: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.$(*)$

Щоб переконати учнів у помилковості виконаних перетворень, корисно використовувати числові підстановки. Запропонувати перевірити кожну з рівностей, підставивши у ліву та праву частини виразів однакові числові значення, наприклад, a=2, b=1 порівняти відповіді та зробити висновок. При цьому важливо звернути увагу учнів на те, що збіг значень двох виразів при деякому наборі значень змінних може бути випадковим і тому не дає підстав стверджувати, що перетворення виконано правильно. Так, вирази $(a+b)^2$ і a^2+b^2 набувають однакових значень, наприклад, якщо $a=0$ і $b=3$, але вони не є тотожно рівними. Для кращого запам'ятовування варто запропонувати на полях зошита зобразити різними кольорами піктограму:

$$\boxed{(a \pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2}$$

Запобіганню помилок $(*)$ сприяє сформоване вміння учнів визначати дії згідно назви виразу і навпаки. Часто формули школярі вивчають, а в назвах плутаються, що призводить до неправильного використання формул.

Щоб правильно прочитати вираз, потрібно спочатку назвати порядок дій виразу, а потім прочитати вираз, починаючи з останньої дії.

Кращому осмисленню сприяє таблиця для запам'ятовування і, звичайно, система усних вправ на визначення дії згідно назви виразу.

Таблиця 2.1

Визначення дії згідно назви виразу

Дії	**Назва виразу**
1. Різниця виразів 2. Піднесення різниці до квадрату.	Квадрат різниці: $(a-b)^2$

1. Піднесення до квадрату кожного виразу. 2. Різниця квадратів виразів.	Різниця квадратів: $a^2 - b^2$

Усвідомленню та закріпленню сприяє завдання: заповніть пропуски в таблиці:

Таблиця 2.2

Визначення назви виразу за дією та дії за назвою виразу

Назва виразу	**Дії**
?	1. Сума двох виразів. 2. Піднесення суми до квадрату.
Сума квадратів: $a^2 + b^2$	?

Скласти таку таблицю для куба двочлена та різниці або суми кубів учні зможуть самостійно. З метою самостійного узагальнення можна запропонувати учням знайти загальне правило піднесення до квадрату тричлена: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

Під час піднесення многочлена до степеня варто звернути увагу учнів на те, що число доданків результату завжди більше числа доданків початкового многочлена. Зокрема, під час піднесення двочлена до степеня кількість доданків результату після зведення подібних завжди *більше показника степеня на одиницю.* Важливо, щоб учні вміли попередньо визначати кількість доданків результату піднесення до степеня до зведення і після зведення подібних членів. Такий попередній підрахунок з одного боку, викликає зацікавлення, а з іншого – попереджує помилки.

Учні з допомогою вчителя можуть створити наступну таблицю та занести її в особистий довідник.

Таблиця 2.3

Визначення кількості доданків результату піднесення до степеня до зведення і після зведення подібних членів.

Піднесення двочлена до степеня	Кількість членів многочлена	
	до зведення подібних	після зведення подібних доданків
$(a+b)^2$	$2^2=4$	2+1=3
$(a-b)^2$	$2^2=4$	2+1=3
$(a+b)^3$	$2^3=8$	3+1=4
$(a-b)^3$	$2^3=8$	3+1=4

Роз'яснення: $(a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb=a^2+2ab+b^2$.

З усіх видів застосувань формул скороченого множення особливої уваги заслуговують вправи на обернене перетворення. Важливість значення таких вправ полягає в тому, що прийоми, які при цьому відпрацьовуються, знаходять широке використання під час вивчення квадратних рівнянь та нерівностей, квадратичної функції.

Ми дотримуємося думки, що одночасне вивчення прямих і обернених перетворень полегшує засвоєння цих дій. Тому в своєму дослідженні надавали перевагу *прийому протиставлення.* Учні підносили двочлен до квадрата, використовуючи формули та розкладали тричлени на множники в умовах одного уроку.

Представлення тричлена $a^2 \pm 2ab+b^2$ у вигляді квадрата двочлена є для учнів роботою творчою, яка потребує уваги, зосередженості та збудження мисленнєвих процесів. Разом з тим,вона є цікавою своєю результативністю. Перший приклад «згортання» тричлена має показати вчитель. Потім запропонувати учням на іншому прикладі виконати таку ж дію. Звичайно, не у всіх відповідь відразу буде правильною. Вчасна похвала та заохочення сприятиме бажанню учнів навчитись виконувати подібні вправи. Наступним етапом може бути складання алгоритму учнями під контролем вчителя.

Завдання: Розкласти тричлен $4x^2+12x+9$ на множники.

1. Знайдемо члени тричлена, подані у вигляді квадратів одночленів: $4x^2=(2x)^2, 9=3^2$.

2. Утворюємо подвоєний добуток знайдених одночленів і порівнюємо його з третім членом даного тричлена: $12x=2\cdot 2x\cdot 3$.

3. Розкладаємо тричлен на множники: $4x^2+12x+9=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2=(2x+3)^2$.

Використовуючи принцип наочності, складений алгоритм подається у вигляді презентації, супроводжується виконанням прикладу та занотовується в зошит.

Важливе значення має рекомендація вчителя: «Читаючи та використовуючи алгоритм, старайтесь його запам'ятати». Така рекомендація, а також відповідні вимоги і заохочення вчителя сприяють кращому запам'ятовуванню алгоритму та полегшують його застосування. Одночасно вчителю потрібно наголосити, що дуже важливо перевіряти свої дії. Для цього можна підставити довільні числові значення у праву та ліву частини рівності. Уміння використовувати алгоритми розвиває усне та писемне мовлення учнів. Вони згодом здатні самостійно створювати нові алгоритми.

Варто також показати школярам, що під час розкладання тричлена на множники відповідь у кожному випадку не є однозначною.

Наприклад. $x^2-28xy+49y^2=(x-7y)^2$; $x^2-28xy+49y^2=(-x+7y)^2$. На практиці, як правило, записують один із варіантів.

У роботі з попередження помилок важливе місце займають завдання, які збуджують думку, сприяють розвитку мислення учнів. Такими, наприклад, є завдання, які не лише закріплюють формули, а й створюють необхідне підґрунтя для успішного вивчення квадратних рівнянь.

Вправа 1. Які додаткові дії потрібно виконати, щоб із тричленів:

а) $x^2 - 4xy + y^2$; б) $5x^2 + 6xy + 9y^2$; в) $8ab - a^2 - 4ab$ можна було виділити квадрат двочлена? (відповідь, наприклад, в завданні а) може бути не однозначною: $x^2 - 4xy + y^2 = x^2 - 4xy + y^2 + 3x^2 - 3x^2 = (2x - y)^2 - 3x^2$, або

$x^2 - 4xy + y^2 = x^2 - 4xy + y^2 + 3y^2 - 3y^2 = (x - 2y)^2 - 3y^2$, і вчитель має звернути на це увагу учнів)

Вправа 2. При якому значенні n вираз $16x^2 + n + 25y^2$ можна подати у вигляді квадрата двочлена?

Важливе значення під час виконання завдань на виділення квадрату двочлена має формування в учнів прийомів: додавання та віднімання однакових виразів, сума яких дорівнює нулю; представлення виразу у вигляді суми кількох виразів.

Вправа 1. Виділити квадрат двочлена: $4a^2 + 12a + 8$.

Розв’язання. Додамо і віднімемо одиницю, маємо:

$$4a^2 + 12a + 8 + 1 - 1 = 4a^2 + 12a + 9 - 1 = (2a + 3)^2 - 1.$$

Вправа 2. Виділити квадрат двочлена :$9y^2 - 32y + 25$.

Розв’язання. Представимо -32*y* так:-32*y*=-30*y*-2*y*, тоді маємо:

$$9y^2 - 32y + 25 = 9y^2 - 30y + 25 - 2y = (3y - 5)^2 - 2y.$$

Важливим моментом на першому етапі формування навичок є варіювання завдань, які дають можливість уникнути випадкових асоціацій. Так, вивчаючи формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, важливо використовувати такі завдання на перетворення тричлена в квадрат двочлена, в яких доданки в тричлені розміщені в різному порядку, наприклад:

$$6a + a^2 + 9 = a^2 + 6a + 9 = 9 + 6a + a^2 = (a + 3)^2 = (3 + a)^2.$$

Часто учням важко виконувати математичні дії з числами тому, що вони не вміють використовувати навчальний матеріал з алгебри під час числових обчислень. Щоб подолати таку прогалину в знаннях радимо в ході вивчення формул скороченого множення пропонувати учням завдання на обчислення, в яких використання формул скороченого множення сприяє раціональному виконанню вправ. Зокрема знаходження різниці квадратів за формулою значно спрощує обчислення під час вивчення теореми Піфагора.

Перед уведенням розкладання многочлена на множники винесенням спільного множника за дужки необхідно провести *підготовчий урок,* на якому повторити поняття спільного множника, найбільшого спільного дільника, правила множення і ділення степенів з однаковими основами; піднесення степеня до степеня; піднесення одночлена до степеня; множення многочлена на одночлен та многочлен; формули скороченого множення.

Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки є дією, оберненою до множення многочлена на одночлен. Тому одна з цих дій перевіряється через іншу, що сприяє розвитку навичок самоконтролю в учнів.

Для успішного засвоєння теми «Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки» пропонуємо вивчати її відразу ж після множення многочлена на одночлен.

Зменшити кількість помилок під час винесення спільного множника за дужки допоможуть деформовані вправи, які варто пропонувати учням під час вивчення множення многочлена на одночлен.

Вправа. Заповніть пропуски так, щоб утворилась тотожність:

а) $3x^4 \cdot (?+?) = x^5 + 6x^8$; б) $?\cdot(2a - 3ab + 4a^2) = 10a^2 - 6a^3b + 8a^4$;

г) $6x^3y^2 - 4x^2y - 10xy = ?\cdot(? - ? - ?)$; д) $(2m^3 - 9m)\cdot ? = 10m^6 - ?$ та ін.

З метою попередження помилок, які допускають учні під час скорочення алгебраїчних дробів, рекомендуємо особливу увагу звертати на дію «розкласти на множники» та акцентуємо увагу на тому, що *розкласти на множники означає подати у вигляді добутку*.

На підготовчому етапі доцільно виконувати вправи на представлення одночлена у вигляді добутку кількох одночленів. Систему вправ пропонуємо доповнити такими, які можуть провокувати учнів на помилку.

Кращому засвоєнню сприяє таке уведення дії розкладання на множники многочлена: 1) запропонувати знайти добуток одночлена на многочлен: $2a(3a^2-2a+1)=6a^3-4a^2+2a$; 2) поміняти місцями ліву і праву частину тотожності: $6a^3-4a^2+2a=2a(3a^2-2a+1)$. Останній вираз прочитати так: многочлен $6a^3-4a^2+2a$ розкладено на два множники: одночлен $2a$ і многочлен $(3a^2-2a+1)$.

Далі має сенс розглянути методику розв'язування вправ.

Вправа 2. Розкласти многочлен $4a^5-6a^2$ на множники.
Розв'язання. Кожен одночлен можна розкласти на два множники, один з яких $2a^2$: 1) $4a^5=2a^2\cdot 2a^3$; 2) $6a^2=2a^2\cdot 3$; 3) $4a^5-6a^2=2a^2\cdot 2a^3-2a^2\cdot 3$. Винесемо спільний множник за дужки: $4a^5-6a^2=2a^2(2a^3-3)$.

Учні повинні чітко розуміти, що якщо добуток справа є многочленом зліва (перевірка), то дія виконана правильно.

До відома учнів потрібно довести, що многочлен вважається розкладеним на множники, якщо жодного із співмножників, утворених в результаті перетворення, не можна далі розкласти.

Поширеною помилкою є втрата одиниці під час винесення спільного множника за дужки, який дорівнює одному з членів даного многочлена, або відрізняється від нього тільки знаком.

Розглянемо таку помилку: $4x^2+6x^3y-2x^2=2x^2(2+3xy)$. Причиною її появи є те, що учні плутають дію ділення з дією віднімання. Завдання вчителя: зруйнувати стереотип, кожного разу вимагаючи пояснення, що означає винести спільний множник за дужки.

Щоб учні не втрачали одиницю під час винесення спільного множника за дужки, який дорівнює одному з одночленів, необхідно навчити їх перевіряти свої дії дією множення та звернути увагу на те, що після винесення спільного множника за дужки, *кількість одночленів многочлена повинна залишитись незмінною.*

Також потрібно поетапно обґрунтувати розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки:

1етап: встановлення спільного множника;

2 етап: розкладання кожного члена многочлена на два співмножники, один з яких спільний;

3 етап: винесення спільного множника за дужки.

Приклад. $15x^3 - 6x^2 - 3x = 5x^2 \cdot 3x - 2x \cdot 3x - 3x \cdot 1 = 3x(5x^2 - 2x - 1)$.

Важливе значення в попередженні помилок під час вивчення теми «Винесення спільного множника за дужки» має розв'язування спеціальної системи вправ:

– *вправи на визначення рівня підготовки учнів до сприйняття нового матеріалу;*

– *вправи для безпосереднього сприйняття нового матеріалу та первинного закріплення одержаних знань;*

– *вправи на осмислення алгоритму розв'язування даного виду вправ та формування початкових умінь;*

– *диференційовані вправи, спрямовані на розвиток умінь учнів через закріплення знань;*

– *вправи, спрямовані на формування навичок учнів розкладання многочлена на множники шляхом винесення спільного множника за дужки*.

Формула різниці квадратів виводиться шляхом множення двох многочленів: $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Одразу після виведення варто звернути увагу на ліву та праву частини тотожності, *виділити суттєве*: розглядаємо добуток двочленів, одночлени яких рівні, а *дії* між ними в дужках *протилежні.* Запам'ятовуємо: $(a-b)(a+b)$ $= a^2 - b^2$ (для кращого запам'ятовування на початку вивчення теми в перших дужках записуємо різницю двох виразів).

Опорний конспект:

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Добуток різниці двох виразів на їх суму дорівнює різниці квадратів цих виразів	*Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на їх суму*

Під час розкладання многочленів на множники з використанням тотожності $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ складність для учнів становить подання даного двочлена у вигляді різниці квадратів. Зазначених труднощів можна уникнути, якщо дотримуватись виконання певної послідовності вправ, яких в підручниках вистачає. Корисно також використовувати деформовані вправи та вправи, складені самими учнями. Це, наприклад, такі:

1.Заповнити порожні квадрати: $x^4-9=(\square-\square)(\square+\square)$;

$(3k^2-2p)(3k^2+2p)=\square-\square$; $(\square+4)(\square-4)=25a^6-\square$; $\square-36x^4=(7-\square)(7+\square)$.

2. Записати різницю квадратів двох виразів та розкласти її на множники.

3. Записати два різних одночлени, знайти добуток різниці і суми цих одночленів двома способами: детальним перемноженням та скорочено.

4. Чи можна використати формулу різниці квадратів до добутку: $(3x^2-2y)(2y^2+3x)$? Відповідь обґрунтуйте.

Важливою умовою успішного засвоєння навчального матеріалу є своєчасне виправлення учнями допущених ними помилок. Вчитель має навчити учнів виявляти свої помилки, здійснюючи перевірку. Кожен учень перед тим, як здати самостійну чи контрольну роботу, повинен вміти сам її перевірити. Перевірку важливо здійснювати не шляхом виконання однієї і тієї ж дії декілька раз, (тому що людина так влаштована, що власних помилок може не побачити), а шляхом виконання обернених дій, підставлянням числових значень чи використовуючи контр приклади. Здійснення перевірки надає учням більшої впевненості в правильності виконання поставленого перед ними завдання. Розходження результату перевірки з одержаною під час розв’язання відповіддю наштовхує учнів на необхідність уважніше ставитися до виконання вправи, ретельно аналізувати кожен крок, змушує не тільки згадувати правила виконання завдання, але й скористатися довідковими джерелами. Формуючи навички розкладання многочленів на множники, варто використовувати «провокаційні» вправи, в яких створюється ситуація, що нагадує сферу застосування нового алгоритму, але не відповідає всім потрібним вимогам.

У дослідженні ми приділяли значну увагу організації систематичного повторення навчального матеріалу через узагальнення знань. Як відомо, відсутність повторення може призвести до забування. Систематизація та узагальнення знань сприяють не тільки відновленню цих знань, але й створенню міцніших логічних зв'язків між новим та попереднім навчальним матеріалом, встановленню схожості та відмінності. Чим міцніші та глибші логічні зв'язки, тим вільніше учні орієнтуються в їх використанні.

Під час повторення навчального матеріалу необхідно увагу учнів сконцентровувати на основному, найсуттєвішому і важливому матеріалі, викликати у них бажання найкраще запам'ятати цей основний матеріал: необхідно зробити процес повторення та закріплення знань процесом активним, творчим та цікавим. Розкриваючи внутрішній зміст матеріалу, що повторюється, необхідно домагатися від учнів повного усвідомлення суті, пояснення різних дій в перетвореннях. Важливими засобами повторення ми вважаємо створені самими учнями за допомогою вчителя піктограми, опорні таблиці, опорні конспекти та карти знань.

Під час розв'язування тільки запропонованих вчителем вправ учні не завжди осмислюють суттєво важливі властивості понять. Однак ці властивості краще усвідомлюються під час складання вправ самими учнями.

З метою глибокого розуміння учнями процесу одержання виразу, що розкладається на множники способом групування та формування уміння перевірити свої дії, варто взяти два нескладних многочлени й знайти їх добуток, наприклад: $(a-2)(x^2+2x-3)=ax^2-2x^2+2ax-4x-3a+6,$ а потім виконати обернені операції з розкладання одержаного виразу на множники.

Щоб учні могли швидко і безпомилково розкладати многочлени на множники важливо привчити їх перебирати всі способи в такій послідовності:

– перевіримо, чи не можна винести спільний множник за дужки;

– спробуємо до многочлена застосувати формули скороченого множення;

– використаємо спосіб групування.

Обов’язково занотувати в довідник, створений ще на початку вивчення алгебри, та користуватися цією нотаткою протягом вивчення теми «Многочлени». Від рівня сформованості теоретичних знань учнів з теми залежить якість їхніх практичних умінь та, відповідно, здатність вироблення навичок. Якщо певні теоретичні відомості, що перетворились на знання, будуть неповними, недостатньо осмисленими, неточними, поверховими, або просто відсутніми, то сформовані уміння і навички також виявляться неконструктивними і непридатними для подальшого ними оперування.

Успішне вивчення многочленів: запис їх в стандартному вигляді, виконання дій над многочленами, розкладання многочленів на множники є важливим підґрунтям для успішного виконання дій над раціональними виразами, безпомилкового скорочення дробів, розв’язування рівнянь.

2.1.2. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Раціональні вирази»

Раціональні вирази за чинною програмою з математики вивчаються у 8 класі. Розглянемо типові помилки учнів під час вивчення даної теми:

– *під час ділення одночленів діляться тільки коефіцієнти, наприклад:* $(12x^2y^3):(6x^2y^3)=2x^2y^3$. *Ця помилка пояснюється звичкою виконувати дії над коефіцієнтами під час зведення подібних доданків.*

– *показники діленого діляться на показники дільника, наприклад:* $18x^8y^6:6x^2y^3=3x^4y^2$, *що свідчить про формальне засвоєння правила ділення степенів з однаковими основами.*

З метою запобігання таких помилок, перш ніж ввести правило ділення одночленів, необхідно детально розписати декілька прикладів різного рівня складності, наприклад: $(4a^5):(2a^3) = \frac{4aaaaa}{2aaa} = 2a^2$; $(b^3a^2):(ba) = \frac{bbbaa}{ba} = ba.$ Важливо виробити звичку учнів час від часу перевіряти свої дії ділення дією множення, та через підстановку числових значень букв у початковий і кінцевий вирази (якщо знайдені числові значення виразів будуть однакові, то вправу розв'язано правильно).

Значну кількість помилок учні допускають під час виконання дій над раціональними дробами, зокрема, під час скорочення таких дробів.

Наприклад, пишуть:

а) $\frac{3a+b}{3c} = \frac{a+b}{c}$; б) $\frac{a+b}{ac} = \frac{b}{c}$; в) $\frac{a+b}{a} = b$;

г) $\frac{5a^2b - a^2c - 2b}{a} = 5ab - a^2c - 2b$;

д) $\frac{2(7a+3b)-(7a-3b)}{7a-3b} = 2(7a+3b)$; е) $\frac{18m^2+12mn}{9m^2+12mn+4n^2} = \frac{18m^2}{9m^2+4n^2}$.

Причини появи таких помилок нами детально розглянуті в першому розділі.

З метою попередження помилок:

а) $\frac{a^2-b^2}{a-b} = a-b$; б) $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2-b^2$ бажано уповільнити процес звертання міркувань. Учні мають виконувати розгорнуте розв'язування вправ та здійснювати пояснення виконаних дій, використовуючи основну властивість дробу.

Попередженню помилки виду: $\frac{2a+5b}{2a} = 5b$ сприяє сформована звичка обчислення значень початкового і кінцевого виразу. Наприклад, якщо підставити значення $a = 2, b = 1$ помилка стає очевидною: $\frac{2\cdot 2+5\cdot 1}{2\cdot 2} \neq 5\cdot 1.$

Вчителю варто звернути особливу увагу і на такі помилки:

а) $\frac{a-x}{a-x}=0$; б) $\frac{ab^2c}{ab^2c}=0$. З метою їх запобігання необхідно домогтися, щоб учні усвідомили, що під час скорочення дробів результат взагалі не може дорівнювати нулю. Частка дорівнює нулю тільки у випадку, коли ділене після зведення подібних доданків дорівнює нулю, наприклад: $\frac{2a-a-a}{b}=0.$

Часто учні у відповіді після скорочення дробу втрачають одиницю в чисельнику, пишуть: $\frac{ab}{ab^2}=b,$ замість $\frac{1}{b}$; $\frac{2}{12(a-2b)}=6(a-2b),$ замість $\frac{1}{6(a-2b)}$. Причини появи цих помилок аналогічні попереднім, крім того учень вважає, що якщо в чисельнику скоротилось все, значить, там нічого не залишилось. Ця помилка дуже часто зустрічається під час множення і ділення дробів, знаходження невідомого члена пропорції, розв'язування рівнянь. З метою запобігання таких помилок, учителю необхідно зосередити увагу учнів на розв'язуванні рівнянь, корені яких мають вигляд: $\frac{1}{n}$.

Типовою є також помилка: $\frac{x-1}{1-x}=\frac{x-1}{x-1}=1,$ що пов'язана з необхідністю зміни знаку в чисельнику чи знаменнику дробу для можливості його скорочення. Як правило, учні змінюють знак у знаменнику, але забувають змінити знак перед дробом, що є наслідком несформованих умінь під час віднімання одночленів і многочленів і при внесенні в дужки.

Необхідно також виокремити таку помилку:

$\frac{a^2-b^2}{(b-a)^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{-(a-b)^2}=-\frac{(a+b)}{a-b},$ причина якої в тому, що учні не засвоїли, що $(a-b)^2=(b-a)^2.$

Внаслідок нерозуміння властивості: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c},$ учні допускають такі помилки: $\frac{2ab}{a+b}=\frac{2b}{1+b}=\frac{2}{1+1}=1.$

Заслуговують на увагу помилки учнів під час віднімання дробів. Типовою є помилка, що з’являється внаслідок віднімання раціональних дробів, де чисельником від’ємника є многочлен. Помилково «мінус» перед дробом школярі відносять не до всього чисельника, а тільки до першого його члена, наприклад:

$$\frac{2x+4y}{3}-\frac{3x-2y}{5}=\frac{10x+20y-9x-6y}{15}=\frac{x-14y}{15}.$$

Щоб запобігти таким помилкам, не потрібно поспішати із звертанням міркувань. Під час виконання перших вправ варто пропонувати учням розгорнуто виконувати дії: 1) записувати чисельник від’ємника в дужках; 2) розкривати дужки за правилом; 3) зводити подібні доданки. Доцільним є використання алгоритмічного припису в поєднанні з виконанням завдання.

Вправа. Виконати дію: $\frac{2x+4y}{3}-\frac{3x-2y}{5}$.

Алгоритмічний припис:

1. *Звести дроби до спільного знаменника (оскільки* 3 *і* 5 *взаємно прості числа, то найменше спільне кратне дорівнює їх добутку):* $\frac{10x+4y}{15}-\frac{9x-2y}{15}$.

2. *Записати різницю дробів у вигляді дробу, записавши чисельник другого дробу в дужках:*

$$\frac{10x+4y}{15}-\frac{9x-2y}{15}=\frac{10x+4y-(9x-2y)}{15}.$$

3. *Виконати дії, розкривши дужки, перед якими стоїть знак «мінус», та звести подібні доданки у чисельнику:*

$$\frac{10x+4y-9x+2y}{15}=\frac{x+6y}{15}.$$

Трапляються випадки, коли перетворення пропорцій та рівнянь через звільнення від знаменника переноситься учнями на дії з раціональними дробами: $\frac{3x^2-2x}{x+1}-\frac{5x-9}{x+1}=3x^2-2x-5x-9.$

Однією з причин появи таких помилок є низький рівень усвідомлення області визначення виразу.

Помилки виду: $\frac{a^8b^6}{b^3a^2}=a^4b^2$ учні допускають внаслідок нерозуміння, що скорочення дробів здійснюється діленням чисельника і знаменника на степінь з однаковою основою, а при діленні від показника діленого необхідно віднімати показник тієї ж основи дільника. Для попередження такого типу помилок, необхідно спочатку розгорнуто виконувати письмове ділення чисельника і знаменника на спільний множник, і тільки після належного засвоєння переходити до усного скорочення. Вміння правильно виконувати письмово і усно ділення $a^{3m-1}:a^{m-1}=a^{3m-1-(m-1)}=a^{3m-1-m+1}=a^{2m}$ є підґрунтям для правильного розв'язування деяких типів показникових рівнянь.

Типовими помилками під час додавання та віднімання алгебраїчних дробів є:

– *додавання окремо чисельників і знаменників, наприклад:* $\frac{a+b}{a}+\frac{c-d}{b}=\frac{a+b+c-d}{a+b}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{a+b+c}$;

– *додавання чисельників без множення їх на додаткові множники, наприклад:* $\frac{2a}{m}+\frac{b-c}{n}=\frac{2a+b-c}{mn}$; $\frac{4a}{b}-\frac{3b}{c}=\frac{4a-3b}{bc}$;

– *виконується множення додаткового множника тільки на один член многочлена в чисельнику, наприклад:* $\frac{2a+b}{c}+\frac{b-3a}{b}=\frac{2a+b^2}{cb}+\frac{b-3ac}{cb}$;

– *ціле число без зведення до спільного знаменника додається до чисельника дробу, наприклад:* $6+\frac{a}{b}=\frac{6+a}{b}$.

Причиною таких помилок є помилкові асоціації, що сформувалися під час виконання аналогічних дій зі звичайними дробами.

Характерними для дій множення і ділення алгебраїчних дробів є такі *помилки* учнів:

– *знаменник дробу множать на ціле число, наприклад:* $\frac{2m}{n} \cdot a = \frac{2m}{na}$. Причиною помилки є несформовані навички перевірки правильності виконання завдання ще під час вивчення множення звичайних дробів.

– *чисельник і знаменник дробу множать на ціле число, наприклад:* $\frac{5k}{7n} \cdot n = \frac{5kn}{7n^2}$. Причина – формальне засвоєння виконання множення звичайного дробу на ціле число, несформовані навички самоконтролю.

– *виконуючи ділення дробів, ділення замінюють множенням, але дільник не замінюють оберненим, наприклад:* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $a : \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$. Такі помилки є результатом того, що учні не знають правила ділення на дріб; не вміють перевірити свої відповіді через підставляння числових значень. Внаслідок помилкової асоціації, сформованої під час множення звичайних дробів, учні допускають помилки, виконуючи *ділення раціональних* дробів.

Алгебраїчні помилки учні допускають з різних причин. Тому важливо і необхідно вчасно з'ясовувати походження цих помилок, причини їх появи та добирати належний методичний прийом для їх попередження та усунення.

Необхідною складовою попередження помилок учнів з алгебри є дотримання зв'язку з попереднім матеріалом під час вивчення нового рівня певної змістової лінії. Тому перед вивченням теми: «Раціональні вирази» вчителю важливо організувати повторення та відтворення вивченого раніше базового матеріалу: *дії над дробами з різними знаменниками, скорочення дробів, властивості степенів, формули скороченого множення, розкладання многочлена та одночлена на множники*. Краще це зробити у вигляді змагання, гри чи турніру. Деякі питання можна повторити за допомогою евристичної бесіди або використанням інтерактивної технології «Мозковий штурм», заохочуючи учнів до відповідей на проблемні та провокаційні питання:

«Мозковий штурм»

1. Яку дію виконано правильно?

а) $\frac{4}{9}-\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$; б) $\frac{6}{13}-\frac{4}{7}=\frac{2}{5}$; в) $2-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}$. Відповідь обґрунтуйте.

2.Як перевірити правильність виконання дій в попередньому завданні?

3. Чи правильно, що в запису 3^5, 5- степінь?

4. Знайдіть та виправте помилки:

а) $3^2\cdot 3^4=3^8$; б) $(3m)^6=3m^6$; в) $x\cdot x=2x$; г) $\left(x^2\right)^3=x^5$; д) $x^6:x^3=x^2$;

е) $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3^3}{4}$; є) $\left(3my^2\right)^4=81my^8$; ж) $n^2m^4=(nm)^4$; з) $4x^6y^9:2x^2y^3=2x^3y^3$.

5.Чому спільним знаменником дробів $\frac{4}{5}$ і $\frac{3}{7}$ буде 35? (очікувана відповідь: 5 і 7 взаємно прості числа).

6. Чому спільним знаменником дробів $\frac{7}{12}$ і $\frac{5}{24}$ є число 24? (очікувана відповідь: 24 кратне числу 12).

7. Яким буде спільний знаменник для дробів $\frac{2}{15}$ і $\frac{3}{10}$? Сформулюйте алгоритм пошуку.

8. Що означає розкласти вираз на множники?

9. Які способи розкладання на множники ви знаєте?

10.Чи правильно, що: а) $a^2+b^2=(a+b)^2$; б) $(a-b)^2=a^2-b^2$; в) $x-1=1-x$; г) $(a-b)^2=(b-a)^2$?

11. Яку дію в запису виразу не записують?

12. Що означає скоротити дріб?

13. Який дріб скоротили правильно?

а) $\frac{14+12}{6}=16$; б) $\frac{16-4}{4}=15$; в) $\frac{12+6}{4}=\frac{6+3}{2}$; г) $\frac{25-15}{20}=\frac{5-3}{4}$.

14. Як розкрити дужки у виразі, якщо перед ними стоїть знак «мінус»?

15. Чи правильно розкрито дужки:

а) $18-(13x+24-11y)=18-13x+24-11y$;

б) $-(36x-4)-(41x+12-5y)=36x-4-41x-12-5y$.

Найбільшої уваги в підготовці до сприйняття теми «Раціональні вирази» варто приділити повторенню *розкладання на множники одночленів та многочленів*.

Як відомо, найбільше помилок учні допускають під час скорочення раціональних дробів*, тому якщо не ліквідувати прогалини в знаннях учнів у розумінні скорочення під час виконання дій над звичайними дробами, то ці прогалини стануть першою причиною появи помилок у скороченні різних дробів у подальшому.*

З досвіду роботи відомо, що учні, які знають властивості степенів вміють скорочувати дроби виду: $\frac{18x^4y^3z^2}{24x^3y^2z}$, однак, допускають помилки під час скорочення дробів, якщо в чисельнику або знаменнику знаходиться многочлен. Причина в тому, що учні не вміють виділяти спільні множники.З метою активізації уваги на *виділенні спільних множників* потрібно під час виконання вже перших завдань домагатися їх виокремлення.

Слушним є правило: щоб скоротити раціональний дріб чисельником і знаменником якого є одночлени, потрібно: виділити для чисельника і знаменника ***спільний множник****; поділити чисельник і знаменник на спільний множник.*

Приклад. Виділіть в чисельнику і знаменнику запропонованого дробу спільний множник та виконайте скорочення: $\frac{15m^3n^5t^9}{20m^4n^7t^{12}}$.

Розв’язання цього завдання з учнями доцільно подати у вигляді карти знань, яка слугуватиме їм зразком того, як треба діяти під час виконання інших вправ.

Таблиця 2.4

Алгоритмічний припис скорочення раціонального дробу, чисельником і знаменником якого є одночлени

Завдання	Алгоритмічний припис
$\frac{15m^3n^7t^9}{20m^4n^5t^{12}}=\frac{5m^3n^5t^9\cdot 3n^2}{5m^3n^5t^9\cdot 4mt^3}=\frac{3n^2}{4mt^3}$	1. Знайдемо НСД чисел 15 і 20. НСД (15 ; 20)=5. 2. Складаємо добуток спільних змінних в чисельнику і знаменнику, вибираючи їх з найменшим показником: $m^3n^5t^9$. 3. Визначаємо спільний множник для чисельника і знаменника:

	$5m^3n^5t^9$. 4. Поділимо чисельник і знаменник на спільний множник.

Правильне скорочення дробів у подальшому, значною мірою буде залежати від умінь учнів розкладати многочлени на множники за допомогою формул скороченого множення, зокрема, формули квадрата двочлена.

Для запобігання помилок, типу: $4a^2-6ab+9b^2=\left(2a-3b\right)^2$ (**) , які часто зустрічаються, систему завдань на повторення доцільно доповнювати контрприкладами.

Наприклад: Розкладіть, якщо можливо многочлени на множники:

1) a^2+6a+9; 4) a^2-2a+4; 7) $\frac{1}{4}m^2+2mn+4n^2$;

2) $b^2-4ab+16$; 5) x^2+2x+1; 8) $9p^2-pq+\frac{1}{36}q^2$;

3) d^2+c^2-2cd; 6) $\frac{4}{9}b^2-\frac{4}{3}b+1$; 9) $1-3x+9x^2$.

Якщо учень звертає увагу тільки на наявність квадратів двох чисел і не перевіряє, чи є третій член їх подвоєним добутком,то він правильно виконає перші три завдання, але допустить помилку, типу (**) у 4 завданні. Після аналізу помилки, учні, причому без нагадувань учителя, починають перевіряти, чи є третій член тричлена подвоєним добутком. Через деякий час вони знову втрачають увагу і в завданні 9 (контр прикладі) допустять помилку. Після виправлення будуть працювати ще уважніше. Підсилена увага підтримується внаслідок доповнення до наступних завдань ще одним-двома контр прикладами (така система вправ задовольняє принцип повноти). Як результат, у подальшому учні уважніші і допускають значно менше помилок типу (**).

Досвід і практика навчання переконує, що саме під час скорочення раціональних дробів, в силу особливостей підлітків, ефективним є використання завдань із «пастками», наприклад:

Спростіть вираз: $\frac{35xz^5}{7xz^5}$; $\frac{2a(x+3)}{a^2(x+3)}$; $\frac{x^2(5x-1)}{5xy^2-y^2}$; $\frac{x^9-x^8}{x^8-x^7}$; $\frac{4a^4-8a^3}{12a^2-6a^3}$.

Щоб запобігти появі помилок, типу:

а) $\frac{3a+b}{3c}=\frac{a+b}{c}$; б) $\frac{a+b}{ac}=\frac{b}{c}$; в) $\frac{a+b}{a}=b$; г) $\frac{5a^2b-a^2c-2b}{a}=5ab-ac-2b$;

д) $\frac{2(7a+3b)-(7a-3b)}{7a-3b}=2(7a+3b)$; е) $\frac{18m^2+12mn}{9m^2+12mn+4n^2}=\frac{18m^2}{9m^2+4n^2}$,

вчителю необхідно постійно акцентувати увагу учнів на тому, що *скоротити дріб – означаєподілити чисельник і знаменник дробу* **на спільний множник.** *Отже,* ***необхідною умовою скорочення дробу є подання його чисельника і знаменника у вигляді добутку.***

На початковому етапі засвоєння варто постійно підкреслювати, що **ділення відбувається не на спільне число, не на спільний вираз, а на спільний множник**. Таким чином виключати можливість скорочення дробу на спільний доданок. Для кращого запам'ятовування такого правила варто з учнями скласти опорну таблицю:

Таблиця 2.5

Алгоритмічний припис скорочення раціонального дробу, чисельником якого є многочлен, знаменником – одночлен

Скорочення раціональних дробів	
Приклад	Алгоритмічний припис
Скоротити дріб: $\frac{5x^2-5xy}{5(x-y)^2}$. 1) розкладемо на множники чисельник, (винесемо за дужки спільний множник $5x$): $\frac{5x^2-5xy}{5(x-y)^2}=\frac{5x(x-y)}{5(x-y)^2}$; 2) спільний множник для чисельника і знаменника - $5(x-y)$; 3) ділимо чисельник і знаменник на $5(x-y)$і одержуємо дріб $\frac{x}{(x-y)}$. 4) перевірка: $\frac{x\cdot 5(x-y)}{(x-y)\cdot 5(x-y)}=\frac{5x^2-5xy}{5(x-y)^2}=\frac{5x(x-y)}{5(x-y)^2}$.	Для того, щоб скоротити дріб необхідно: 1) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники; 2) вибрати спільний множник для чисельника і знаменника дробу; 3) розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник; 4) перевірити результат оберненою дією.

В алгоритмічний припис бажано включати вимогу, яка б нагадувала учню про те, що необхідно контролювати свої дії. Це дозволить відразу знаходити допущені помилки та виправляти їх. Якщо дії самоконтролю учня багаторазово будуть повторюватись, то поступово, звертаючись, стануть необхідним компонентом сформованої узагальненої асоціації.

Успішному формуванню уміння безпомилково виконувати скорочення дробів сприяє правильно дібрана послідовність вправ. Приклади таких вправ є в діючих підручниках в достатній кількості.

Послідовність міркувань, які повторюються під час розв'язування завдань одного типу може згортатися, а в подальшому за необхідності –розгортатися. Однак, не у всіх учнів зворотний процес – розвертання – відбувається без втрат суттєвих елементів міркування. Тому з метою безпомилкового засвоєння матеріалу бажано під час скорочення раціональних дробів не поспішати із звертанням дії, а домагатися як можна частіше посилатися на правило чи алгоритм.

У дослідженні ми значну увагу приділяли провокаційним питанням і завданням. З точки зору психології систематичне використання «провокаційних» вправ підвищує увагу учнів, сприяє правильності міркувань, розвиває самоконтроль.

Приклад: Чи правильний результат отримав учень, виконуючи скорочення дробів:

а) $\frac{a+b}{b+x}=\frac{a}{x}$; б) $\frac{2a-6x^2}{3x^2+c}=\frac{2a-2}{c}$; в) $\frac{4x+3y}{3y}=4x$; г) $\frac{ac+bd}{am+bn}=\frac{c+d}{m+n}$?

У процесі виконання цього завдання учні мають виявити помилки, пояснити, чи можна взагалі дати стверджувальну відповідь на поставлене питання з теоретичної точки зору та підтвердити свої міркування. Перевірити, підставивши певні числові значення у праву і ліву частини рівностей. Щоб краще запам'яталось виконання такого завдання, необхідно його супроводжувати позитивними емоціями, використовуючи гру та заохочення.

Під час скорочення дробів також важливо звернути увагу учнів на те, що внаслідок виконання такого перетворення множина допустимих значень змінних може розширитись, показати приклади та обґрунтувати. Це сприятиме попередженню помилок під час розв'язування дробово раціональних рівнянь, побудови графіків функцій.

Як показують наші дослідження, ефективним засобом попередження помилок під час скорочення дробів є система вправ, в яку доцільно четвертим, восьмим та дванадцятим завданням включати завдання у виконанні яких допускаються типові помилки учнів. «Наштовхування» учнів, яким здається все зрозумілим, на виконання помилкових дій сприяє осмисленню виконання наступних дій. Попередженню поширених помилок учнів під час виконання дій з раціональними дробами сприяє повторення дій над звичайними дробами, виправлення сформованих помилкових асоціацій.

Особливу увагу варто приділити *зведенню дробів до спільного знаменника.* Пригадати правила зведення до спільного знаменника, якщо: знаменниками дробів є взаємно прості числа; кратні числа; числа, які є ні взаємно простими, ні кратними.

Трапляються випадки, коли учні під час тотожних перетворень алгебраїчних виразів відкидають спільний знаменник дробів. Наприклад:

$$\frac{x^2-2x}{x-3}-\frac{4x-9}{x-3}=x^2-2x-4x+9=x^2-6x+9.$$

Тут учні застосовують хибну аналогію, поширюючи властивість рівняння на тотожні перетворення алгебраїчних дробів. Щоб викорінити таку помилку, потрібно докладно розкрити суть властивостей рівнянь.

У роботі з помилками важливим є прийом використання контрприкладів. Якщо учень скорочує дріб $\frac{ac+b}{ad+m}$ на *a,* доцільно запропонувати йому водночас виконати скорочення дробу $\frac{a(c+b)}{a(d+m)}$, де дістаємо такий результат, як попередній, хоча, очевидно, що дані дроби різні, в чому можна пересвідчитись, підставивши в кожен з них конкретні числові значення.

Тотожні перетворення цілих та дробових раціональних виразів у курсі алгебри основної школи займають важливе місце. Тому вчителю необхідно прикласти максимум зусиль, використати доцільні методи, засоби та прийоми в роботі з попередження та недопущення помилок учнів як під час вивчення теми, так і під час використання набутих знань у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей, вивченні властивостей функцій.

2.2. Попередження, виявлення і виправлення помилок учнів під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності»

У курсі алгебри основної школи предметом вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» є *лінійні, квадратні та дробово-раціональні рівняння; лінійні нерівності, нерівності другого степеня та дробово-раціональні нерівності*.

Рівняння і нерівності в основній школі є тим об'єктом, де безпосередньо застосовуються тотожні перетворення алгебраїчних виразів. Враховуючи, що учні допускають значну кількість помилок саме в тотожних перетвореннях виразів, то використання цих перетворень під час розв'язування рівнянь є ще одним ефективним методичним *засобом виявлення і усунення* цих *помилок*.

Існує тісний зв'язок між вивченням рівнянь і нерівностей з іншою змістовою лінією курсу алгебри – елементарними функціями. З одного боку, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем передбачає урахування властивостей відповідних функцій, а з іншого – вивчення функцій включає використання апарату рівнянь.

Отже, помилки, яких припускаються учні під час вивчення тотожних перетворень виразів, можуть повторюватись і під час вивчення рівнянь, нерівностей та функцій. Тому для здійснення ефективної *превентивної діяльності* під час вивчення рівнянь і нерівностей учитель має знати «тонкі місця» у засвоєнні навчального матеріалу всіх інших змістових ліній.

2.2.1. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Рівняння»

Лінійні рівняння з однією змінною. Розв’язуючи лінійні рівняння учні, як правило, допускають помилки, пов’язані або з тотожними перетвореннями виразів, або з порушенням рівносильності рівнянь, або з неправильним застосуванням формул загальних розв’язків. Часто, розв’язуючи рівняння, що зводяться до лінійних, учні не можуть записати розв’язки рівнянь $0 \cdot x = 0$, та $0 \cdot x = b$, де $b \neq 0$, що стає причиною грубих помилок. Тому під час засвоєння поняття лінійного рівняння у 7 класі, важливо, щоб учні навчилися розв’язувати рівняння, які мають безліч коренів, один корінь та не мають коренів взагалі.

З практики відомо, що учні, які не зрозуміли суті розв’язування таких рівнянь, виконавши відповідні перетворення, наприклад, в рівняннях:

а) $4(3x-12) = 12x-16$;
$12x-48 = 12x - 16$;
$12x - 12x = 32$;
$0 = 32$.

б) $4(3x-12) = 12x -48$;
$12x-48 = 12x -48$;
$12x-12x = 48-48$;
$0 = 0$

не завжди можуть безпомилково записати остаточну відповідь для кожного з них. Складність полягає в тому, що, дістаючи після спрощення рівності 0 = 32, 0 = 0, школярі не розуміють, як за допомогою цих рівностей (істинних або хибних) зробити висновок про корені кожного з рівнянь. Роз’ясненню незрозумілого сприяє опорний конспект, складений учнями за допомогою вчителя.

Таблиця 2.6

Опорний конспект до теми «Лінійні рівняння»

а) $4(3x-12) = 12x-16$; $12-48 = 12x - 16$; $12x - 12x = 32$; $(12 - 12)x = 32$, $0x = 32$. **В: Розв’язку немає**	б) $4(3x-12) = 12x- 48$; $12x-48 = 12x- 48$; $12x-12x = 48- 48$; $0x = 0$. (Розв’язком є будь-яке число) **В: Безліч розв’язків**	в) $4(3x-12) = 8x – 48$; $4(3x-12) = 8x – 48$; $4x = 0$. $x = 0$. **В: Один розв’язок**

Пояснення:	*Пояснення*:	*Пояснення*:
Не існує такого числа, яке б помножили на **нуль** і одержали 32.	Під час множення на нуль будь-якого числа, добуток завжди дорівнює нулю.	Добуток двох множників дорівнює нулю, якщо хоча б один з них дорівнює нулю.

Цей конспект ми пропонуємо взяти за основу на перших етапах вивчення теми. Допомагає також створення асоціації множення на нуль: якщо нуль назвати «ніщо», то в добутку на «ніщо», має бути «ніщо». Ефективним є таке завдання: з'ясуйте, яке з даних рівнянь має лише один розв'язок, не має розв'язків, має безліч розв'язків:

1) $-5x = -3$; 2) $0x = 0$; 3) $0{,}14x = 0$; 4) $7 = 0x$; 5) $\frac{3}{4}x = -5$; 6) $-5x = -12$.

Кращому осмисленню сприяє виконання учнями самостійно наступного завдання: придумайте та занотуйте в зошити приклади трьох лінійних рівнянь, які мають лише один розв'язок, трьох лінійних рівнянь, які не мають розв'язків та трьох лінійних рівнянь, які мають безліч розв'язків. Така самостійна робота є ефективною, якщо учні після її виконання аргументують свої відповіді та висловлюють думки щодо відповідей однокласників. Систематизувати дані про розв'язки лінійного рівняння *ax*=*b*можна у вигляді схеми:

$$ax = b$$

якщо $a \neq 0$, *то* $x = \frac{b}{a}$

якщо $a = 0$ *і* $b = 0$, *то* x *– довільне число*

якщо $a = 0$ *і* $b \neq 0$, *то рівняння коренів не має*

Вже на початку вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» важливо, щоб учні зрозуміли зміст понять: рівносильні рівняння та рівносильні перетворення.

Розглянемо ще декілька поширених помилок учнів:

− *Під час звільнення цілих раціональних рівнянь від знаменника учні не виконують множення обох частин рівняння на НСЗ.*

Наприклад, під час розв’язування рівняння $\frac{2x+1}{3}+\frac{x-3}{2}=1$, пишуть $2(2x+1)+3(x-3)=1$, замість $2(2x+1)+3(x-3)=6$.

Причиною помилки є формальне засвоєння властивостей, які перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння.Також помилка може бути наслідком «хибної» аналогії з розв’язуванням рівнянь, права частина яких дорівнює нулю (традиційно: зліва невідомі члени рівняння, справа – відомі). Те, що після перетворення лівої частини права залишається незмінною спонукає деяких учнів до висновку, що права частина рівняння незмінна і тоді, коли вона відмінна від нуля.

З метою попередження вказаних помилок, доцільно рівняння, в яких права частина дорівнює нулю і відмінна від нуля, розглянути одночасно, відзначити *спільне* та *відмінне*, разом з учнями скласти алгоритмічний припис розв’язування таких рівнянь, систему вправ доповнити вправами, що провокують на помилку.

Важливо вже на перших уроках вивчення лінійних рівнянь сформувати звичку вказувати справа через риску множник, на який потрібно помножити, або поділити обидві частини рівняння. Експериментально нами перевірено: якщо учні користуються таким прийомом, помилок значно менше:

$$\frac{2x+1}{3}+\frac{x-3}{2}=1/\cdot(6);\ \frac{6(2x+1)}{3}+\frac{6(x-3)}{2}=1\cdot 6;\ 2(2x+1)+3(x-3)=6.$$

− *у випадку, коли коефіцієнт біля невідомого більший за вільний член, учні знаходять невідомий член рівняння діленням більшого числа на менше, наприклад: 15x = 3; x = 5* (*замість 3/5*). Пояснюємо це сформованою асоціацією з початкової школи, де завжди виконувалось ділення більшого на менше число.

Причиною помилок можуть бути також прогалини у знаннях з математики 6 класу: а) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4}=2$ (замість 1/2); б) $1\frac{2}{3}:x=11\frac{2}{3};x=\frac{5\cdot 3}{3\cdot 35}=7$ (замість1/7).

З метою попередження таких помилок, необхідно пояснити учням чому важливо під час скорочення дробів на місці скорочених чисел та змінних не втрачати, а записувати одиницю як результат ділення, який зв'язок між правильною і неправильною відповіддю. Частіше пропонувати вправи на скорочення дробів, виконання множення чи ділення дробів, знаходження невідомих членів пропорцій, в яких результат є дробом виду $\frac{1}{n}$. Важливо, щоб учні не забували *перевіряти результат оберненою дією.* В окремих випадках, важливо щоб учні осмислено використовували властивість: якщо обидві частини рівняння поділити або помножити на одне й те ж число, відмінне від нуля, то одержується рівняння рівносильне даному, виконували ділення обох частин рівняння на коефіцієнт біля невідомого та *показували справа* через риску *число, на яке ділиться чи множиться ліва і права частини рівняння:* $24x = 5$ / (:24); $\frac{24x}{24}=\frac{5}{24}$, $x=\frac{5}{24}$.

– *На останньому етапі розв'язування рівняння учні досить часто втрачають знак «мінус» у результаті, вважаючи, що здійснено перенесення в іншу частину рівняння коефіцієнта біля невідомого, наприклад:*

$-7x = 21$; $x = 3$.

Попередженню такої помилки сприяє той же методичний прийом, що і в попередніх випадках. Доведене до автоматизму «правило риски» на останньому етапі розв'язування рівняння сприяє безпомилковому знаходженню розв'язку рівнянь.

Правильний запис: *а*) $-7x=21/:(-7)$; $\frac{-7x}{-7}=\frac{21}{-7}$; $x=-3$.

Окрему увагу потрібно звернути на розв'язування рівнянь виду:

$\frac{x}{9}=5$ та $\frac{27}{x}=3$. Часто учні затрудняються у розв’язуванні таких рівнянь, зовнішня незвичність лівої частини їх зупиняє. Необхідно навчити учнів записувати такі рівняння у вигляді пропорції, а основну властивість пропорції вони, як правило, добре знають.

– *Особливо поширена помилка у випадку, коли невідоме з від’ємним коефіцієнтом знаходиться не на першому місці лівої частини рівняння, наприклад:* $a)\,18-z=24,\ z=24-18,\ z=6;$ *б)* $b-t=a+c,\ t=a+c-b.$

Запобіганню таких помилок сприяє розв’язування достатньої кількості спеціально дібраних рівнянь, в яких коефіцієнт біля невідомого дорівнює –1. *Учні мають усвідомити, що* **-*a*** *означає:* **-1** *помножити на* ***a****, і це дуже важливо*.

– *Часто учні після вивчення десяткових дробів прагнуть записати корінь рівняння у вигляді десяткового дробу,* навіть у старших класах. Однак неспроможні це зробити у випадках, коли звичайний дріб не можна записати у вигляді скінченного десяткового дробу. У даному випадку вчителю потрібно акцентувати увагу учнів на тому, що:

– *не завжди доцільно записувати частку у вигляді десяткового дробу, її можна залишити у вигляді звичайного дробу (правильного і нескоротного)*;

– *звичайний дріб можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу тільки в тому випадку, коли знаменник дробу можна подати у вигляді добутку: а) двійок; б) п’ятірок; в) двійок і п’ятірок*;

– *характерними є помилки учнів під час перенесення доданків із однієї частини рівняння в іншу. Часто вони не змінюють знаки доданків на протилежні. Наприклад: а*) $14x+12 = 44;\ 14x = 56;\ x=4$.

Щоб запобігти таким помилкам, можна *звернутись за допомогою до ейдетики,* оживити рівняння, створити певну асоціацію. Враховуючи, що рівносильні перетворення рівнянь учні виконують у молодшому підлітковому віці і дидактична гра є ефективним засобом навчання та розвитку інтересу до предмета, потрібно вчити школярів створювати свої асоціації, наприклад, пов’язані із зміною знаків. Асоціація може, наприклад, бути такою: нехай знак рівності – це річка, між двома берегами якої живуть члени рівняння. Коли вони перетинають річку, їм доводиться замочити одяг (змінити знак коефіцієнта на протилежний).

Таких асоціацій може бути багато, головне, щоб учитель на кожному уроці вчив дітей думати, створювати свої асоціації для запам’ятовування, спостерігати, аналізувати, виділяти головне, співставляти, порівнювати та робити висновки. У превентивній діяльності ми надавали особливого значення *розвитку мислення школярів* та *формуванню алгоритмічної культури*.

Квадратні рівняння. Найбільшу кількість помилок під час розв’язування *квадратних рівнянь* учні допускають у знаходженні дискримінанта, зокрема, у тому випадку, коли вільний член від’ємний. З метою попередження таких помилок, варто пропонувати учням перед обчисленням дискримінанта *обов’язково* виписувати коефіцієнти та вільний член, враховуючи загальний вигляд квадратного рівняння: $ax^2+bx+c=0, a, b, c - \textit{числа}\ (a \neq 0), x - \textit{змінна}.$ В *алгоритмі* розв’язування рівняння: $3x^2+2x-4=0,$ першою дією має бути визначення коефіцієнтів: a= 3, b= 2 та вільного члена: c = –4.

Щоб попередити помилки у знаходженні коренів квадратного рівняння за формулою: $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ вчителю необхідно акцентувати увагу учнів на тому, що $-b$ означає b з протилежним знаком. З метою осмислення запропонувати такі завдання:

а) чому дорівнює $-b$, якщо b = 8; 2,5; –23; –92; 41; –19?

б) чому дорівнює b якщо $-b$ = 17; –32; 21; –18; 0?

Під час вивчення теми «Квадратні рівняння» учні рідко допускають помилки в розв’язуванні неповних квадратних рівнянь, однак затрудняються їх розв’язувати в старших класах у випадку розв’язування рівнянь, що зводяться до квадратних. Щоб запобігти забуванню, доцільно посприяти кращому запам’ятовуванню, а для цього ми пропонуємо актуалізувати зорову пам'ять. На початку вивчення теми скласти разом з учнями карту знань та дозволити користуватися протягом уроку.

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,\ b,c\in R$$

$$ax^2+bx+c=0,\quad b=0\ ,c=0$$

$$ax^2=0, x^2=0,\quad x=0.$$

$$5x^2=0,\quad x^2=0,\ x=0.$$

$$ax^2+bx+c=0,\quad c=0$$

$$x(ax+b)=0,\quad x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}$$

$$3x^2+6x=0,\quad x_1=0, x_2=-2.$$

$$ax^2+bx+c=0,\quad b=0$$

$$ax^2+c=0,\ x^2=-\frac{c}{a}.$$

$$\text{якщо } -\frac{c}{a}>0-2\ \text{розв.}$$

$$\text{якщо } -\frac{c}{a}<0-\varnothing$$

$$x^2+4=0,-\varnothing$$

$$x^2-9=0, x_1=3,\ x_2=-3.$$

Учні будуть краще знати і пам’ятати раціональні способи розв’язування неповних квадратних рівнянь тоді, коли вмітимуть самостійно наводити приклади таких рівнянь та усно знаходити їх розв’язки, пропонувати свої контр приклади. Усвідомлення та закріплення теоретичного матеріалу доцільно проводити у вигляді змагань, пропонувати тв

Варто зауважити, що у процесі розв’язу $(ax+b)(cx+d)=0$, учні майже не допускають помилок. Але через деякий час вони не помічають істотної відмінності, наприклад між рівняннями $(x-4)(x+8)=0$ та $(x-4)(x+8)=5$ і, неправильно використовуючи метод аналогії, друге рівняння розв’язують помилково: $x-4=5,\ x=9$ або $x+8=5,\ x=-3.$ У помилковому розв’язанні учні легко переконаються, якщо запропонувати їм зробити перевірку (якщо в учнів сформовані навички самоконтролю, вони свою помилку знайдуть відразу).

З метою запобігання таких помилок ефективним засобом є включення в систему вправ завдань, які будуть провокувати учнів на помилку. Як відомо, такі завдання сприяють вихованню уважності та глибшому розумінню поставлених задач. Наприклад:

$(x-12)(x-1)=0$; $(x-1)(x+8)=0$; $(x+5)(x-5)=0$; $(x-4)(x+4)=2$.

Щоб учні вміли використовувати аналогію в комплексі з іншими прийомами мисленнєвої діяльності і в першу чергу з прийомами порівняння і конкретизації, потрібно їх навчати не тільки знаходити спільне в явищах, об'єктах, задачах, але й вловлювати суттєві, хоч і мало помітні відмінності.

Дробові раціональні рівняння. Варто звернути увагу на те, що часто помилки в учнів з'являються внаслідок невміння розпізнавати ціле раціональне рівняння $\frac{2x+1}{3}+\frac{x-3}{2}=1$ та дробове раціональне рівняння $\frac{5-x}{x-1}-\frac{5+3x}{x^2-1}=0$ з огляду на зовнішню схожість. Оскільки цілі рівняння розглядались першими, учні засвоюючи способи їх розв'язування, звертають увагу на наявність знаменника (щось нове, незвичне). Тому внаслідок хибної аналогії під час сприймання дробових раціональних рівнянь учні їх розв'язують аналогічно. Домножують ліву і праву частини рівняння на найменший спільний знаменник і забувають виключити з розв'язків ті значення змінної, які перетворюють знаменник на нуль, внаслідок чого з'являються сторонні корені.

Приклад. Розв'язати рівняння.

$$\frac{5-x}{x-1}-\frac{5+3x}{x^2-1}=0.$$

Неправильне розв'язання: помножили всі члени рівняння на (x^2-1).

Одержали $(5-x)(x+1)-(5+3x)=0$.

Відповідь: 0; 1.

Відповідь неправильна, тому що x = 1 перетворює знаменник дробу в нуль.

Учитель має навчити учнів розрізняти цілі та дробові раціональні рівняння за зовнішнім виглядом і після цього вибирати спосіб розв'язування.

Тому під час вивчення дробово-раціональних рівнянь необхідно систему вправ доповнювати цілими рівняннями із числовими знаменниками.

Для запобігання помилок у процесі розв’язування рівнянь, які з’являються внаслідок неправильної дії віднімання дробів, необхідно рекомендувати учням записувати від’ємник у чисельнику в дужках. Виключенням можуть бути тільки ті учні, які цю дію завжди виконують правильно.

З аналізу результатів складання ДПА та ЗНО відомо, що найбільше помилок під час розв’язування рівнянь і нерівностей учні допускають внаслідок нетотожних перетворень, що призводить до втрати коренів чи появи сторонніх.

Зважаючи на те, що змістова лінія тотожних перетворень тісно переплетена із змістовою лінією рівнянь, основу для правильного розв’язування дробових раціональних рівнянь необхідно, як ми відзначали в попередньому пункті, закладати ще під час вивчення перетворень дробово-раціональних виразів.

Незвичність запису рівняння, яке містить дію ділення на вираз із змінною, повинно асоціюватись із словом «*УВАГА!*». (*Увага ділення!*).

Не порушуючи принципу науковості навчання, вчитель має пам’ятати, що перед ним перш за все діти. А діти краще запам’ятовують те, що супроводжується чимось незвичним, позитивними емоціями. У підручнику викладено зміст навчального матеріалу, а забарвлює сприйняття цього матеріалу у яскраві кольори саме вчитель. Від нього залежить, як засвоять і запам’ятають цей матеріал його учні.

Щоб навчити учнів безпомилково розв’язувати дробові раціональні рівняння, варто застосовувати *алгоритмічний підхід* та *включати до системи вправ рівняння під час розв’язування яких з’являються сторонні корені.*

Учні мають засвоїти, що сторонні корені з’являються у таких випадках:

1. *Під час скорочення дробу на множник, який містить невідоме.*

Приклад 1. Розв’язати рівняння: $\frac{x^2-81}{x-9}-2x=0.$

Неправильне розв'язання: Скоротили дріб $\frac{(x-9)(x+9)}{x-9}-2x=0$ на $(x-9)$. Отримали $x+9-2x=0$. Відповідь: $x = 9$. Відповідь неправильна, тому що $x = 9$ перетворює знаменник дробу в нуль.

2. *Під час зведення подібних доданків, що містять невідоме в знаменнику (у тому випадку, якщо подібні доданки взаємно знищуються*).

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $x^2-\frac{2}{3x^2}-4x+\frac{2}{3x^2}=0$.

Неправильне розв'язання: звели подібні доданки, одержали $x^2-4x=0$;

$x = 0$; $x = 4$. Відповідь: $\{0; 4\}$. Але $x = 0$ не є коренем даного рівняння, оскільки при $x = 0$, знаменник дорівнює нулю.

Щоб попередити такі помилки, учням доцільно занотувати та запам'ятати можливості появи сторонніх коренів:

сторонні корені можуть з'явитися під час:

– *множення обох частин рівняння на вираз, що містить невідоме;*

– *скорочення дробів на множник, що містить невідоме;*

– *зведення подібних доданків рівняння;*

– *піднесення обох частин рівняння до степеня;*

У школі вивчають декілька способів розв'язування дробових раціональних рівнянь. Враховуючи обмін думками з досвідченими вчителями математики та психологічні особливості восьмикласників, рівень їхнього розвитку, закономірності уваги та запам'ятовування, ми рекомендуємо дотримуватися єдиної думки: <u>*кожен з алгоритмічних приписів розв'язання дробових раціональних рівнянь необхідно починати з пошуку ОДЗ* (*області допустимих значень*) *змінної в рівнянні*</u>. А перед тим, як записати відповідь, <u>*обов'язково перевірити чи належать ОДЗ знайдені корені рівняння*</u>. Так в учнів може сформуватися **стійка орієнтовна основа дій.**

У чинних альтернативних підручниках у деяких зразках розв'язування рівнянь виконується перевірка підставлянням в початкове рівняння, а в деяких знаходиться область допустимих значень змінної. Автори вважають, що учень повинен сам, орієнтуючись на ці зразки, зробити висновок про те, коли до алгоритму розв’язування рівняння входить перевірка підставлянням в початкове рівняння, а коли ні. Але навіть у кінці вивчення курсу алгебри, деякі учні так і не усвідомлюють, в яких випадках перевірка є обов’язковою складовою частиною розв’язування рівнянь.

Якщо розв’язком рівняння є дробові або ірраціональні числа, школярі губляться і хвилюються, що щось зробили неправильно, хоча в даному випадку відповідь має бути саме такою. Вважаємо це наслідком не сформованого самоконтролю учнів. Школярі, які не вміють перевіряти свої дії, завжди чекають перевірки вчителя та його оцінки. Тому вже під час перших самостійних робіт з розв’язування рівнянь варто наголошувати, що роботи приймаються тільки після перевірки чи є одержане число коренем рівняння (наприклад, шляхом підставляння одержаного значення змінної у початкове рівняння). Можна домовитися: *після розв’язування кожного рівняння учні ставлять крапку тільки в тому випадку, якщо вони його перевірили.*

Взагалі, з метою недопущення помилок та своєчасного виправлення непомічених помилок у процесі виконання завдання, ми пропонуємо в кінці виконаного завдання ставити крапку. Ця крапка має свідчити про те, що учень своє завдання перевірив і впевнений у правильному його виконанні. *Перевірка полягає не в тому, щоб переглянути шлях розв’язування знову, а у виконанні чи оберненої дії, чи підставлянням числових значень, чи сформованим умінням знаходити контр приклади, чи прикидкою.*

Під час розв’язування різних дробових раціональних рівнянь перевірку вважаємо необхідною складовою і пропонуємо включати її в алгоритмічні приписи розв’язування цих рівнянь, наприклад:

Алгоритмічні приписи розв’язування дробових раціональних рівнянь

Алгоритм 1 (використання умови рівності дробу нулю)

1. Знайти область допустимих значень (ОДЗ) змінної даного рівняння.
2. За допомогою тотожних перетворень звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{G(x)}=0$.

3. Розв’язати рівняння $P(x)=0$.

4. Серед коренів рівняння ***виключити*** ті, що не належать (ОДЗ).

5. Підставити одержані корені у початкове рівняння (зробити перевірку)

6. Записати відповідь.

Схема:

$$\frac{P(x)}{G(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ G(x)\neq 0. \end{cases}$$

Алгоритм 2

(використання основної властивості пропорції)

1. Знайти область допустимих значень (ОДЗ) змінної даного рівняння.

2. Звести рівняння до вигляду $\dfrac{P(x)}{G(x)}=\dfrac{M(x)}{N(x)}$.

3. Скориставшись основною властивістю пропорції записати ціле рівняння $P(x)N(x)=M(x)G(x)$.

4. Розв’язати одержане ціле рівняння.

5. Серед коренів рівняння ***виключити*** ті, що не належать (ОДЗ).

6. Підставити одержані корені у початкове рівняння (зробити перевірку).

7. Записати відповідь.

Схема:

$$\frac{P(x)}{G(x)}=\frac{M(x)}{N(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)N(x)-G(x)M(x)=0, \\ G(x)\neq 0, \\ N(x)\neq 0. \end{cases}$$

Коментоване розв’язування рівняння:

Приклад. Розв’язати рівняння $\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{5}{x-1}$ **.**

Записи на дошці	Алгоритмічний припис

$\frac{3}{x-2}=\frac{5}{x-1}$ ОДЗ: $x-2\neq 0$ і $x-1\neq 0$ тобто $x\neq 2$ і $x\neq 1$.	Щоб не забути врахувати ОДЗ, краще зафіксувати обмеження на початку розв’язання рівняння.
$\frac{3}{x-2}-\frac{5}{x-1}=0$	При перенесенні виразу з однієї частини рівності в іншу з протилежним знаком одержуємо рівносильне рівняння
$\frac{3(x-1)-5(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0$, $\frac{-2x+7}{(x-2)(x-1)}=0$.	Внаслідок приведення до спільного знаменника, розкриття дужок і зведення подібних доданків, одержуємо нове рівняння
$-2x+7=0$; $x=-3\frac{1}{2}$.	Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю.
$x\neq 2$ і $x\neq 1$.	Перевірити, чи задовольняє одержане число обмеженням ОДЗ.

Найбільше помилок внаслідок несформованого самоконтролю, які допускали учні у процесі експериментального навчання, ми виявляли під час розв’язування систем лінійних рівнянь. Методи розв’язування школярі знають, розв’язують системи, а перевірку не здійснюють. Іноді, нашвидкуруч, у перше рівняння ще можуть підставити одержане числове значення змінної, а те, що знайдене число не задовольняє друге рівняння, залишається поза увагою. Як наслідок – низькі оцінки. І тільки ті учні, які вміють здійснити самоперевірку одержують значно вищий бал.

Звичайно, належне місце у вивченні алгебри необхідно приділяти різним формам і методам перевірки (перевірка в парах, взаємоперевірка в групах тощо). Однак, таку перевірку ми вважаємо перевіркою констатації факту допущеної помилки, а перевіркою з недопущення помилки є високий рівень розвитку самоконтролю. Над таким розвитком в учнів навичок превентивної діяльності і повинен ввесь час працювати вчитель. Учні мають постійно бачити, що вчитель вважає самоконтроль одним із важливих етапів навчальної діяльності. Вміння здійснити самоконтроль під час виконання будь-яких завдань нівелює острах припуститися помилки. Учні, які здатні перевірити свої дії, впевнено виконують завдання, а ті, які не вміють себе перевірити –

бояться, що можуть неправильно виконати завдання і часто навіть не приступають до його виконання.

Окремої уваги заслуговують такі помилки учнів:

1. *Поява сторонніх коренів під час додавання (віднімання) однакових виразів.*

Приклад. Розв’язати рівняння: $x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$.

Неправильне розв’язання: $x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$; $x^2-6x=0$; $x=0$, $x=6$.

Відповідь: $x = 0$, $x = 6$.

Відсутня перевірка.

Оскільки $x = 0$ не входить в ОДЗ рівняння, правильна відповідь: $x = 6$.

2. *Поява сторонніх коренів під час розв’язання рівнянь, що містять квадратні корені* (поняття ірраціонального рівняння вводиться в старшій школі), *під час піднесення обох частин рівняння до квадрата*.

Приклад 1. Розв’язати рівняння: $\sqrt{x} = x – 2$.

Неправильне розв’язання: $\sqrt{x} = x – 2$, $x = x^2 – 4x + 4$, $x^2 – 5x + 4 = 0$.

Відповідь: $x = 1$ і $x = 4$.

Відсутня перевірка, адже $x = 1$ – сторонній корінь.

Приклад 2. Розв’язати рівняння: $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$.

$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$, $2(x+1) = x$, $x = –1$. Відповідь: $x = –1$.

Відсутня перевірка. $x = –1$ – сторонній корінь. Отже, дане рівняння коренів не має.

3. *Поява сторонніх коренів під час зведення обох частин рівняння до спільного знаменника.*

Приклад. Розв’язати рівняння: $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{7}{x+3}=\dfrac{4}{x^2+5x+6}$

$4(x+3)+7(x+2)=4$,$11x = –22$, $x = –2$.

Відповідь: $x = –2$.

Відсутня перевірка. Оскільки $x = -2$ – сторонній корінь, то рівняння коренів не має.

Як відомо, появу сторонніх коренів можна виявити через перевірку, підставлянням знайдених чисел у задане рівняння.

4.*Втрата коренів під час ділення обох частин рівняння на спільний множник, що містить змінну*.

Приклад. Розв’язати рівняння: $3x(x-1) = 5(x-1)$.

Неправильне розв’язання: $3x\cancel{(x-1)} = 5\cancel{(x-1)}$, $3x = 5$.

Відповідь: $x = 5/3$.

Втрачено корінь $x = 1$.Правильна відповідь: $x = 5/3$; $x = 1$.

У 7 класі учні розв’язують лінійні рівняння шляхом рівносильних перетворень. Основні властивості рівнянь, у підручниках вводяться у вигляді правил:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

У 8 класі перед введенням дробових раціональних рівнянь ці ж властивості пригадуються.

Учні помилково вважають, що, наприклад, вирази $\frac{4}{5x}$ і $\frac{-4}{5x}$ є подібними доданками, і не звертають особливої уваги на те, що вирази є дробовими і мають зміст тільки при $x \neq 0$. Як наслідок, неправильне розв’язання рівняння: $\frac{4}{5x} + x^2 - \frac{4}{5x} - 16x = 0$, після додавання подібних доданків, учні одержали: $x^2 - 16x = 0$; $x = 0$; $x = 4$. Відповідь: 0; 4. Помилка очевидна: $x = 0$ – сторонній корінь.

Якщо учні підставлять одержані значення змінних у початкове рівняння, знайдуть помилку, якщо ні, помилка залишиться непоміченою.

Розв'язуючи рівняння за допомогою рівносильних перетворень, учні мають враховувати ОДЗ заданого рівняння та дотримуватись вимоги збереження правильної рівності під час прямих та обернених перетворень. Також осмислено розуміти, що *областю допустимих значень рівняння є спільна область визначення для всіх виразів, що стоять у лівій та правій частинах рівняння*.

Вчителю варто постійно тримати в полі зору процес *формування в учнів уміння знаходити ОДЗ рівняння та область визначення функції,* звертати увагу на спільне суттєве та відмінне у цих поняттях. В силу розумового розвитку підлітків вони часто не вміють поєднувати ці два поняття і тому допускають грубі помилки.

Щоб запобігти помилок, учні мають знати та вміти використовувати під час розв'язування рівнянь способи знаходження ОДЗ:

– *Записати всі обмеження на змінну шляхом розгляду необхідних умов, знайти ОДЗ.*

– *Записати всі обмеження на змінну, а в кінці перевірити, чи задовольняють одержані значення змінної вказані обмеження.*

– *На початку не записувати ОДЗ, а обґрунтувати її у процесі перетворень.*

Формувати в учнів уміння розв'язувати рівняння за допомогою рівносильних перетворень доцільно шляхом алгоритмічного підходу: розуміння порядку дій, обґрунтування цих дій, промовляння послідовності виконання дій. Таке запам'ятовування послідовності дій сприяє безпомилковому розв'язуванню рівнянь. Варто мати на увазі, що мова йде не про формальне заучування алгоритмів, а про формування вміння осмисленого самостійного вибору учнями алгоритмічного припису та виконання послідовності дій.

Розглянемо ще один приклад типової помилки учнів під час розв'язування рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x-5)(x+2)\sqrt{x-3}=0$.

Неправильне розв'язання $\left[\begin{array}{l} x-5=0, \\ x+2=0, \\ x-3=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-2, \\ x=3. \end{array}\right.$

Відповідь: -2; 3; 5.

Правильне розв'язання

$(x-5)(x+2)\sqrt{x-3}=0$. ОДЗ: $x \geq 3$.

$\left[\begin{array}{l} x-5=0, \\ x+2=0, \\ x-3=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-2, \text{ не входить в ОДЗ.} \\ x=3. \end{array}\right.$

Відповідь: 3; 5.

Щоб організована вчителем превентивна діяльність була ефективною, значущою та результативною, потрібно постійно працювати над формуванням в кожного учня уміння перевірити правильність виконаного завдання; стимулювати активну розумову діяльність учнів, здатність осмислювати кожну дію; виховувати уважність та зосередженість. З цією метою варто використовувати різні прийоми, методи та засоби, з поміж яких виділяємо: розгляд завдань, що провокують учнів на помилку; маскування помилок в розв'язаних завданнях; використання «пасток» під час розв'язування вправ; заохочування балами кожної знайденої помилки однолітків; влаштовування змагань команд на виконання завдань без помилок; вправи на уважність. Важливо, щоб учні могли перевірити розв'язки рівнянь, знайдені аналітичним способом, розв'язавши ці ж рівняння графічно за допомогою комп'ютерних програм, таких як MathCad, GRAN 1, Advanced Grapher, GeoGebra.

2.2.2. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Нерівності»

Тема «Нерівності» вважається однією із найскладніших із усіх розділів математики, оскільки під час вивчення нерівностей і їх розв'язування допускається найбільша кількість помилок. Зупинимось на тих, що є типовими.

Числові та лінійні нерівності. Часто учні не розуміють, що означає довести нерівність, і навіть не приступають до виконання такого завдання. Тому вже на початку систематичного вивчення числових нерівностей учні мають чітко *засвоїти критерій порівняння двох чисел*:

– якщо різниця двох чисел a і b додатна, то $a > b$;
– якщо різниця двох чисел a і b від'ємна,то $a < b$;
– якщо різниця двох чисел a і b дорівнює 0,то $a = b$.

Для кращого розуміння критерію учні мають ілюструвати кожний з випадків власними прикладами.

Вважаємо за *необхідне засвоєння учнями способу доведення нерівностей,* який полягає у визначенні знаку різниці лівої й правої частин нерівності. Кожен учень має зрозуміти й запам'ятати, що для того, щоб довести нерівність, *необхідно оцінити відносно нуля* <u>*різницю*</u> *лівої і правої частин даної нерівності*. Тому правило-орієнтир доведення таким способом нерівностей може мати вигляд:

1. *Знайти різницю лівої і правої частин нерівності.*

2. *Порівняти одержану різницю з нулем.*

3. *Зробити висновок: якщо $a - b > 0$, то $a > b$; якщо $a - b < 0$, то $a < b$, якщо $a - b = 0$, то $a = b$.*

Наприклад, щоб довести, що $(a+b)^2 \geq 2ab$ при будь-яких a і b, учні мають: 1. *Розглянути різницю лівої і правої частин даної нерівності*:

$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2.$

2. *Оцінити одержану різницю відносно нуля*: $a^2 + b^2 \geq 0$ (сума квадратів двох чисел завжди не менша за нуль, рівність досягається, якщо $a = b = 0$).

3. *Зробити висновок:* так як $(a+b)^2 - 2ab \geq 0$, то $(a+b)^2 \geq 2ab$.

Однією з причин несформованості в учнів уміння доводити нерівності ми вбачаємо у тому, що в чинних підручниках пропонується незначна кількість вправ на доведення нерівностей. Враховуючи те, що процес доведення нерівностей ґрунтується зокрема на знаннях формул скороченого множення, уміннях зводити подібні доданки, виконувати дії над числами з різними знаками, розкривати дужки, перед якими стоїть знак «мінус», з метою попередження помилок, необхідно перед доведенням нерівностей всі ці знання актуалізувати.

Під час засвоєння учнями властивостей числових нерівностей, учителю варто скласти разом з учнями карту знань та особливу увагу звернути на засвоєння таких властивостей:

а) *якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність;*

б) *якщо* $a > 0, b > 0$ *і* $a > b$, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, оскільки на застосування саме цих властивостей, внаслідок формального засвоєння, школярі допускають найбільше помилок. Наявні в учнів помилки і під час виконання завдань на оцінку значень виразів. Пропонуємо учням разом з учителем скласти алгоритми оцінки виразів: $a+b;\ -b;\ a-b;\ ab;\ \frac{1}{a};\ \frac{b}{a};\ 2a-\frac{1}{3}b$ і занотувати в довідник.

Розглянемо типові помилки та причини їх виникнення під час розв'язування учнями ***лінійних нерівностей*** ($ax > b, ax < b, ax \geq b, ax \leq b,$ де x – змінна, a і b - деякі числа) з однією змінною.

Алгоритми розв'язування нерівностей та рівнянь, що зводяться до лінійних схожі:

– *шляхом рівносильних перетворень задане рівняння (нерівність)звести до лінійного рівняння* (*лінійної нерівності*);

– *знайти всі ті значення змінної, за яких рівняння* (*нерівність*) *перетворюється в правильну числову рівність* (*нерівність*).

Внаслідок хибної аналогії в учнів нерідко з'являються помилки під час множення (ділення) обох частин нерівності на від'ємне число. Причину ми вбачаємо в тому, що розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною та рівнянь, що зводяться до лінійних за допомогою рівносильних перетворень, учні вивчали у 7 класі, навчальний матеріал вивчався вперше, і, як все нове, запам'ятався краще; лінійні нерівності вивчаються у 9 класі, іноді вчителі акцентують увагу учнів на тому, що низку нерівностей з однією змінною можна звести до лінійних нерівностей за допомогою рівносильних перетворень, тобто, що нерівності, які зводяться до лінійних розв'язуються *аналогічно* до рівнянь, які зводяться до лінійних. Слово *аналогічно* є ключовим. Так формується помилкова асоціація. Учні вміють розв'язувати лінійні рівняння, а, отже, над розв'язуванням лінійних нерівностей особливо не замислюються. Через це закріплюється хибна звичка не змінювати знак нерівності на протилежний при множенні (діленні) обох частин нерівності на від'ємне число. Ще на початку вивчення теми, коли вчитель акцентує увагу на тому, що необхідно змінювати знак нерівності, учні помилок допускають менше, однак в старших класах така помилка є типовою. Щоб запобігти цьому, варто з самого початку вивчення нерівностей детально розглянути з учнями суттєве спільне та відмінне між рівняннями і нерівностями. Для цього властивості рівнянь і нерівностей можна розглянути одночасно, поставивши на <u>*перше місце*</u> властивість, в якій *суттєве різне.*

1. Якщо обидві частини $\dfrac{\textit{рівняння}}{\textit{нерівності}}$ помножити або поділити на одне і те ж **від'ємне число**, то ***знак*** $\dfrac{\textit{рівності}}{\textit{нерівності}}$ $\dfrac{\textit{зберігається}}{\textit{змінюється на протилежний}}$.

$-5x = 15 \mid : \ (-5),$ $x = -3.$	$-5x < 15 \mid : \ (-5),$ $x > -3.$

2. Якщо обидві частини $\dfrac{\textit{рівняння}}{\textit{нерівності}}$ помножити або поділити на одне і те ж додатне число, то ***знак*** $\dfrac{\textit{рівності}}{\textit{нерівності}}$ зберігається.

$$5x = 15\,|:5\,, \qquad 5x < 15\,|:\ 5,$$
$$x = 3. \qquad\qquad x < 3.$$

3. Якщо до обох частин $\dfrac{\textit{рівняння}}{\textit{нерівності}}$ додати однакове число, то **знак** $\dfrac{\textit{рівності}}{\textit{нерівності}}$ зберігається.

$$\begin{array}{l|l} 5x - 8 = 12\,|+8, & 5x - 8 < 12\,|+8, \\ 5x = 20, & 5x < 20, \\ x = 4. & x < 4. \end{array}$$

4. Якщо з однієї частини $\dfrac{\textit{рівняння}}{\textit{нерівності}}$ перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то **знак** $\dfrac{\textit{рівності}}{\textit{нерівності}}$ зберігається.

$$\begin{array}{l|l} 2x + 4 = 8, & 2x + 4 > 8, \\ 2x = 8 - 4, & 2x > 8 - 4, \\ 2x = 4, & 2x > 4, \\ x = 2. & x > 2. \end{array}$$

У подальшому має зміст розв’язування вправ на знаходження розв’язків рівнянь і нерівностей одночасно.

Запобіганню вищезгаданих помилок сприяє звичка, сформована під час розв’язування лінійних рівнянь: *під час знаходження невідомого множника дія ділення записується через похилу риску*. До того ж, доцільно відпрацювати звичку в розв’язуванні нерівностей: *якщо дільник від’ємний після нього ставити знак оклику, що означає: «увага!».*

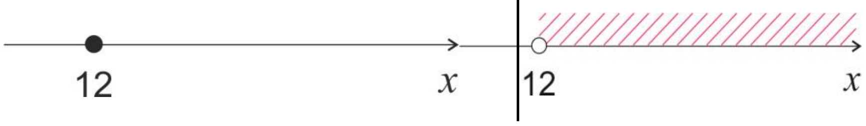
$$\begin{array}{r|l} x - 5 = 3x + 9, & x - 5 > 3x + 9, \\ -2x = 14\,/:(-2), & -2x > 14\,/:(-2), \\ x = -7. & x < -7. \end{array}$$

⚠ (зверніть увагу, будьте уважні!)

Варто зауважити, що в учнів вже на початку вивчення нерівностей з’являються психологічні труднощі в осмисленні результатів розв’язування цих нерівностей. Як відомо, зміст знайденого розв'язку рівняння й нерівності зовсім різний. Учні за допомогою учителя повинні побачити відмінність у тому, що множина розв'язків рівняння в більшості випадків скінченна, тоді як множина розв'язків нерівності в більшості випадків нескінченна. Саме тому й *треба звернути увагу учнів на те, якою є множина розв'язків нерівності.*

Подолати психологічні труднощі в осмисленні результату розв'язування нерівностей допомагає геометричне тлумачення розв'язку рівняння та геометричне тлумачення множини розв'язків нерівності:

$4x-20=28;$	$4x-20>28;$
$4x=28+20;$	$4x>28+20;$
$4x=48\,|:4;$	$4x>48\,|:4;$
$x=12-\textit{корінь рівняння}$	$x>12$, *множина розв'язків нерівності* $(12;\infty)$.



З метою формування правильних асоціацій і запобігання помилок в подальшому та під час розв'язування нерівностей вже на перших уроках вивчення нерівностей з однією змінною доцільно разом з учнями скласти таблицю відмінностей між лінійним рівнянням і лінійною нерівністю.

Таблиця 2.7

Таблиця відмінностей між лінійним рівнянням і лінійною нерівністю.

Назва	**Лінійне рівняння**	**Лінійна нерівність**
Загальний вигляд	$ax+b=0$ x – змінна, a, b – будь-які дійсні числа	$ax+b<0$, x – змінна, a, b – будь-які дійсні числа
Розв'язок	розв'язок рівняння $ax=b$ при $a\neq 0$ зображається <u>*однією точкою*</u> числової осі	множина розв'язків нерівності $ax+b<0$, зображається <u>*нескінченною множиною точок*</u>, які заповнюють проміжок: $\left(\frac{-b}{a};\ +\infty\right)$, *якщо* $a<0$; $\left(-\infty;\frac{-b}{a}\right)$, *якщо* $a>0$.
множення обох частин на від'ємне число	знак не змінюється	**знак змінюється на протилежний**

Закріплення спільного і відмінного між лінійними рівняннями і нерівностями може здійснюватись у формі гри чи змагання.

З практики навчання учнів відомо, що вони часто неправильно ставлять дужки, записуючи розв’язок нерівності, забувають «виколювати» точки на числовій прямій. Запобіганню таких помилок сприяє використання опорної схеми:

$<$	$>$	$\leq$	$\geq$
(	)	[	]
○	○	□	□

Таку схему учні можуть скласти самі або з допомогою вчителя, зобразити її на полях і користуватися протягом вивчення всієї теми.

Типовими є помилки, яких припускаються учні тоді, коли нерівність виду $ax < b (ax > b)$ задовольняє будь-яке число, або коли така нерівність не має розв'язків, або її розв'язками є всі додатні чи від'ємні числа. Труднощі в тому, що учні, діставши після спрощення числові нерівності виду: 10 > 3; 4 > 5; 0 <5; 0 > –5, часто не можуть зорієнтуватися, який зробити висновок про множину розв'язків даної нерівності. Варто спрямувати учнів послідовно замінювати нерівність рівносильною і приводити не до вигляду, наприклад 0 < 5, а вигляду: $0x < 5$. Запропонувати таку вказівку: *якщо дістали правильну нерівність, то множиною розв'язків є всі дійсні числа або ті проміжки, на яких дана нерівність визначена, а якщо дістали неправильну нерівність, то нерівність не має розв'язків.*

Приклад 1.Розв'язати нерівність: $4(2x-1)-5x<3x+5$.

Розв’язання:

$$4(2x-1)-5x<3x+5;$$
$$8x-4-5x<3x+5;$$
$$3x-3x<4+5;$$
$$0\cdot x<9$$

(з а в ж д и)

Відповідь: множина розв’язків – всі дійсні числа.

Приклад 2. Розв’язати нерівність:

$$3(4x+1)-7x<5x-8;$$
$$12x+3-7x<5x-8;$$
$$5x+3<5x+8;$$
$$0x<-11\,(\textit{немає таких чисел, щоб одержати правильну нерівність}).$$

Відповідь: множина розв'язків порожня.

Часто учні, не задумуючись, можуть продовжити записи і одержати неправильну відповідь:

а) $3x-2<3x+5;$ *б*) $5x+3>-7+5x;$

$0x<7;$ $0x>-10;$

$x<\frac{7}{0}$ *на нуль ділити не можна.* $x>\frac{-10}{0}$ *на нуль ділити не можна.*

Відповідь: немає розв'язку. *Відповідь: немає розв'язку.*

Засобами попередження таких помилок є усне розв'язування значної кількості нерівностей виду: $0x>5; 0x<0; 0x\le -5; 0x\ge 0; 0x\ge -3$ та уміння учнів *аналізувати нерівність, записану у вигляді*: $ax<b\ (ax\le b), ax>b\ (ax\ge b).$

Активізує мислення учнів, розв'язування таких нерівностей:

1) $x>x+2;$ 2) $x+1>x;$ 3) $x\le x;$ 4) $x+3-x<0;$ 5) $0x\ge 4.$

Попередженню помилок будуть сприяти такі завдання:

Завдання 1. Знайдіть помилку та вкажіть причину її появи:

1) $-4x-7<5;\ -4x<12;\ x<12:(-4);\ x<-3;$

2) $-7x-9<5;\ -7x>5+9; -7x>14; x<14\,/:(-7);\ x<-2.$

Вроботі з помилками значне місце займають завдання на розкриття софізмів, наприклад:

Знайти помилку у міркуванні: Якщо *a* > b , то *a* > 2*b*, де *a*, *b* – додатні числа.

Нехай маємо: *a* > *b*. Помножимо обидві частини нерівності на *b*: *a* > *b* /·*b*, одержимо: $ab>b\cdot b$, віднімемо від обох частин нерівності добуток (*a·a)*: *a·b* – (*a·a)* > *b·b* – (*a·a).* Винесемо спільні множники за дужки: *a*·(*b* – *a*) > (*b* + *a*)·*(b* – *a)* та поділимо обидві частини нерівності на (*b* – *a*):

a·(*b*-*a*) > (*b*+*a*)·*(b*- *a)*/:(*b* – *a*),

a > (*b*+*a*)·/ + (*a і b*) почленно, знаючи, що *a* > *b*.

$$2a > 2b + a \;/ -a$$

$$a > 2b.$$

Тобто, з того, що $a > b$ випливає, що $a > 2b$.

Квадратні нерівності. Як відомо, тема «Квадратні нерівності» є опорною для розв’язування тригонометричних, показникових та логарифмічних нерівностей, які часто зводяться до квадратних.

Перш ніж розглянути «Квадратні нерівності» у 9 класі, учитель повинен актуалізувати всі набуті знання учнів про лінійні нерівності з однією змінною. Особливої уваги заслуговують нерівності, які розв’язуються способом ділення обох частин на від’ємне число, наприклад: $-2x < 8; -2x < 8 / : (-2)$ ⚠; $x > -4$.

Вивчення квадратних нерівностей тісно пов’язане з властивостями квадратичної функції та її графіком. Для розв’язування квадратних нерівностей треба визначати знак дискримінанта квадратного тричлена, тобто встановлювати чи перетинає парабола вісь Оx і в яких саме точках, врахувати знак коефіцієнта a для визначення напрямку віток параболи. Схематично зображати графік відповідної квадратичної функції та встановлювати множину її додатних значень (для $ax^2 + bx + c > 0$), або від’ємних значень (для $ax^2 + bx + c < 0$).

Прийоми розв’язування <u>квадратних рівнянь</u> і <u>квадратних нерівностей</u> схожі. Внаслідок хибної аналогії учні й допускають більшість помилок. Приклади таких помилок пропонуємо у наступній таблиці:

Таблиця 2.8

Характерні помилки, які допускають учні під час розв’язування квадратних нерівностей

Розв’язання рівнянь	Помилкове розв’язання нерівностей
1. $x^2 = 9$, $x = \pm 3$	1. $x^2 < 9$, $x < \pm 3$.
2. $x^2 - 9 = 0$; $(x-3)(x+3) = 0$; $x - 3 = 0$, *або* $x + 3 = 0$; $x = 3$, *або* $x = -3$.	2. $x^2 - 9 < 0$; $(x-3)(x+3) < 0$; $x - 3 < 0$, *або* $x + 3 < 0$, $x < 3$, *або* $x < -3$.

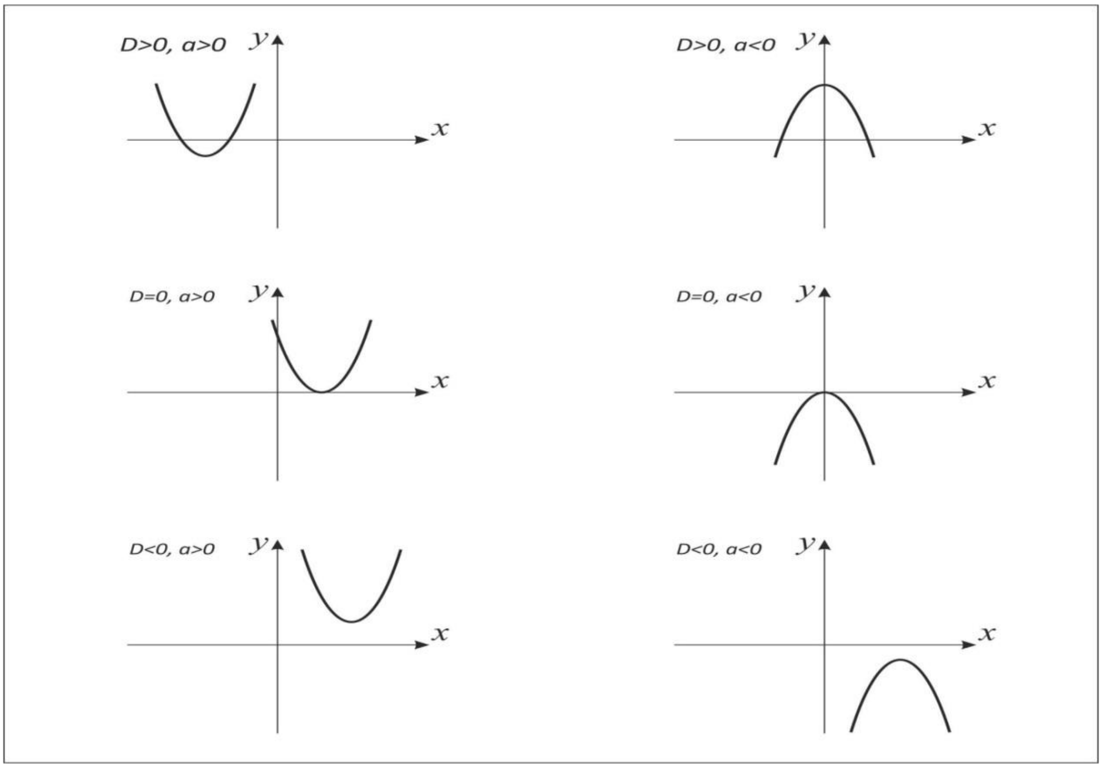
3. $2x^2 + 3x + 1 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$, $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = -1.$	3. $2x^2 + 3x + 1 < 0$, $2x^2 + 3x + 1 = 0$, D = 1 $x_1 < -\frac{1}{2},\ x_2 < -1.$
4 .$x^2 – 5x + 8 = 0$ D = 25 – 32 = –7 < 0 *Оскільки* D < 0, *то рівняння не має коренів*	4. $x^2 – 5x + 8 > 0$, D = 25 – 32 = – 7 < 0 *Оскільки* D < 0, *нерівність розв'язків не має*

Враховуючи, що помилка $x^2 < 9$, $x < \pm 3$ є поширеною, вчителю необхідно ***звернути увагу учнів на цю помилку***, розглянути з учнями правильне розв'язування нерівності, акцентувати увагу на тому, що це *квадратна нерівність*, тому спосіб її розв'язування буде таким, як спосіб розв'язування всіх квадратних нерівностей, згідно встановленого правила-орієнтира. Запобіганню такої помилки також сприяє звичка записувати розв'язок рівняння$x^2 = 9$, так: $x_1 = 3, x_2 = -3,$ а не так: $x = \pm 3.$ У ході вивчення теми учні мають засвоїти способи розв'язування нерівностей виду: $ax^2 \le b;\ ax^2 > bx$ та аналізувати одержані розв'язки.

Попередженню помилок внаслідок хибної аналогії сприяє робота з учнями по виявленню спільного і відмінного у квадратних рівняннях: $ax^2 + bx + c = 0$, де *a, b, c*– деякі числа, причому *a≠ 0, x*– змінна, та квадратних нерівностях:

$ax^2 + bx + c \ge 0\ \ (ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \le 0, ax^2 + bx + c < 0)$ де *a, b, c*–деякі числа, причому *a ≠ 0,x* – змінна. Учнів можна прилучити до написання повідомлень, наприклад, таких: «Роль квадратних рівнянь у розв'язуванні нерівностей», «Чи залежить множина розв'язків квадратної нерівності від розв'язків відповідного квадратного рівняння?» тощо та обговорення цих повідомлень.

Часто учні неправильно розв'язують квадратні нерівності у випадку, коли дискримінант відповідного квадратного рівняння від'ємний. Тому вбачаємо за необхідне повторення властивостей квадратичної функції, зокрема, вигляд та розміщення параболи в залежності від знаку коефіцієнта *a* та дискримінанта *D* у вигляді карти знань:



Також учні повинні пам’ятати:

Якщо рівняння коренів не має $\Rightarrow$ функція нулів не має $\Rightarrow$ графік функції не перетинає вісь абсцис

Якщо всі ці відомості *постійно повторювати* з учнями, тоді під час розв’язування нерівностей вони замислюються над кожною дією.

Оскільки в чинних підручниках більше уваги приділяється розв’язуванню нерівностей саме за допомогою схематичної побудови графіка квадратичної функції, а учні побоюються, що можуть зробити помилку, виконуючи побудову графіка, то розв’язування таких нерівностей супроводжується острахом припуститися помилки. Тому вже на початку вивчення теми варто донести до учнів, що *точного графіка функції будувати не треба, а тільки схематично вказати його вигляд.* Під час побудови схематичного графіка важливим є *напрям «віток» параболи та нулі функції* (якщо вони є).

У роботі з алгебраїчними помилками учнів ми надаємо особливого значення використанню мультимедійних та програмних засобів ІКТ. Значне місце відводиться створенню презентацій, як засобу наочності та мобільності.

Враховуючи закономірність мислення про те, що активність мисленнєвої діяльності в ході ознайомлення з навчальним матеріалом зростає, якщо учень, ознайомлюючись з ним, одночасно виконує певне конкретне завдання , що сприяє кращому його розумінню, то познайомити учнів з розв'язуванням квадратних нерівностей можна наступним чином.

Запропонувати на презентації приклад розв'язування квадратної нерівності: «Розв'яжемо нерівність $5x^2+9x-2<0$.

Розглянемо функцію $y=5x^2+9x-2$. Графіком цієї функції є парабола, вітки якої направлені вгору. Розв'яжемо рівняння $5x^2+9x-2=0$, $D=121, x_1=-2, x_2=0,2$. Отже, парабола перетинає вісь Оx в точках з абсцисами: $x_1=-2, x_2=0,2$. Зобразивши схематично цю параболу, знайдемо, що $y<0$, якщо $x\in(-2;0,2)$ Відповідь: $(-2;0,2)$.

Потім запропонувати учням:

– *прочитати запропонований зразок розв'язування нерівності;*

– *скласти алгоритм розв'язування схожих нерівностей.*

Наступним кроком буде порівняння складених кожним учнем алгоритмів з тим, що на презентації:

1. *Записати квадратичну функцію.*
2. *Визначити напрям віток параболи.*
3. *Обчислити дискримінант відповідного квадратного рівняння.*
4. *Знайти точки перетину параболи з віссю абсцис (якщо вони є).*
5. *Зобразити схематично графік.*
6. *Записати множину значень х, які задовольняють нерівність.*

Ще краще, коли в алгоритмі допускається неточність і учням пропонується знайти її. Так активізується мисленнєва діяльність учнів, що сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу. У даному випадку спрацьовує дидактичне правило: *спочатку вчитель ставить конкретне завдання, яке учні повинні виконати у процесі ознайомлення з матеріалом і тільки після осмислення ними поставленого завдання їм пропонується читати відповідний параграф підручника, слухати пояснення вчителя.*

Наступним кроком є складання учнями під керівництвом учителя *алгоритмічного припису розв'язування* <u>*квадратної нерівності*</u> *за допомогою графіка квадратичної функції* (загального):

1. Записати квадратичну функцію.
2. Обчислити дискримінант відповідного тричлена.
3. Якщо $D \geq 0$, знайти нулі квадратичної функції.
4. Якщо $D < 0$, графік не перетинає вісь Оx. Нулів немає.
5. Визначити напрям віток параболи.
6. Зобразити схематично графік.
7. Записати множину значень x,які задовольняють нерівність.
8. Зробити перевірку (підставити хоча б одне значення змінної з одержаного проміжку у вихідну нерівність).

У свідомості учнів повинен закарбуватися суттєвий зв'язок :

<u>Квадратні рівняння</u> $\leftrightarrow$ ***<u>квадратична функція</u>*** $\leftrightarrow$ ***<u>квадратні нерівності</u>.***

<u>Корені квадратного рівняння</u> $\leftrightarrow$ ***<u>нулі функції</u>*** $\leftrightarrow$ ***<u>множина розв'язків квадратної нерівності</u>.***

<u>Примітка!</u> Обов'язковим є внесення створеного алгоритму до особистого довідника учня.

Розвитку мислення, уваги, спостережливості, уміння аналізувати, спостерігати і робити висновки в превентивній діяльності протягом вивчення кожної змістової лінії ми надаємо особливого значення.

Розв'язати квадратну нерівність учні можуть і не будуючи графіки, а досліджуючи знак виразу $ax^2 + bx + c$ аналітично. Уміння аналізувати нерівності їм дуже знадобиться в старшій школі та під час складання ДПА і ЗНО.

Завдання можуть бути, наприклад, такими: розв'язати нерівності: $(2x+6)^2 \geq 0;\ (x+1)^2 \leq 0;\ (x-2)^2 > 0.$

Зупинимося детальніше на логічних помилках учнів, яких вони можуть припуститися під час розв’язування квадратних нерівностей.

Завдання 1. Розв’яжіть нерівність: $(2x+6)^2 \ge 0$.

Неправильне розв’язання:

$(2x+6)^2 \ge 0;\ 2x+6 \ge 0;\ 2x \ge -6;\ x \ge -3.$ Відповідь: $[-3;\infty)$.

Правильне розв’язання: Нерівність $(2x+6)^2 \ge 0$ виконується для всіх значень змінної *x*. Відповідь: $(-\infty;\infty)$.

Завдання 1. Розв’яжіть нерівність: $(x+1)^2 \le 0$.

Неправильне розв’язання: Нерівність $(x+1)^2 \le 0$ розв’язків немає.

Правильне розв’язання: Нерівність $(x+1)^2 \le 0$ виконується при $x=-1$.

Відповідь: $x=-1$.

Завдання 3. Розв’яжіть нерівність: $(x-2)^2 > 0$.

Неправильне розв’язання: Нерівність: $(x-2)^2 > 0$ виконується для всіх значень змінної *x*. Відповідь: $(-\infty;\infty)$.

Правильне розв’язання: Якщо $x=2$, то $(x-2)^2=0$, отже $x \ne 2$.

Відповідь: $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$.

Під час вивчення квадратних рівнянь для знаходження коренів, на нашу думку, варто надавати важливого значення використанню теореми, оберненої до теореми Вієта (в старшій школі на розв’язування показникових, логарифмічних та тригонометричних рівнянь, що зводяться до квадратних, які учні розв’язують через дискримінант, витрачається багато часу), а під час розв’язування квадратних нерівностей – методу інтервалів.

За чинною програмою метод інтервалів вивчається лише в класах з поглибленим вивченням математики. Зокрема, в підручнику [2] метод інтервалів уводиться в рубриці «Дізнайтеся більше». Вивчається метод інтервалів у 10 класі. На нашу думку, метод інтервалів можна вивчати і в основній школі, як метод, який можливо використовувати і для розв’язування квадратних нерівностей, і для розв’язування дробово-раціональних нерівностей. Як відомо, розв'язування квадратних нерівностей в загальному вигляді: $ax^2 + bx + c > 0$ при $a \neq 0$ і $D > 0$ можна звести до розв'язування нерівностей виду: $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, розв’язки яких знаходяться методом інтервалів.

Уміння використовувати учнями запропонованих алгоритмічних приписів розвивають усне і писемне мовлення учнів на такому рівні, що вони швидко переходять до складніших умінь – самостійного складання нових алгоритмічних приписів чи правил-орієнтирів. Список вказівок разом із зразком відповіді, який показує вчитель, допомагає учням ґрунтовно пояснювати розв’язування задачі і не тільки самостійно виправляти помилки, але й запобігати їх. Тому в превентивній діяльності у процесі вивчення нерівностей ми значне місце відводимо *алгоритмічному методу навчання*. Важливе значення має спрямування учнів учителем на запам’ятовування алгоритму. Це може бути така рекомендація учителя: «Читаючи та використовуючи алгоритм розв’язування нерівності, намагайтесь його запам’ятати!». Вимога та заохочення учителя викликають в учнів установку на міцне запам’ятовування алгоритму. Без такої установки формування умінь сповільнюється і значна кількість учнів довго не можуть запам’ятати алгоритм, плутаються під час пояснення розв’язування завдання.

Важливе значення має *пунктуальне дотримання* запропонованого учителем зразку розв’язування нерівності. Якщо послідовність міркувань, запропонована вчителем та алгоритмічним приписом, не дотримується, то формування проміжних асоціацій утруднюється і сповільнюється. Вони виникають і відразу «руйнуються», тому що в учня немає твердої лінії, міцного підґрунтя, що повторюється в цих міркуваннях. За таких умов учням складно проводити міркування і вони перестають до них прислухатися. У результаті виникає зв'язок: умова — розв’язок, але він утворюється без проміжних міркувань. І учням в подальшому складно пояснювати свої дії.

Дробово-раціональні нерівності. Багато помилок учні допускають в контрольних роботах під час розв'язування дробових нерівностей. Як свідчить аналіз цих помилок, вони з'являються у таких випадках:

– *під час зведення вихідної нерівності до системи нерівностей або сукупності систем нерівностей*;

Приклад. Розв'язати нерівність: $\frac{x+6}{x} > 0.$

Неправильне розв'язання: $\begin{cases} x+6>0, \\ x>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-6, \\ x>0; \end{cases}$ $x>0.$ *Відповідь* $(0;\infty).$

Причина помилки: під час вивчення теми: «Раціональні числа і дії над ними» не сформувалась правильна асоціація, що частка буде додатною в двох випадках, і як наслідок випав з розгляду випадок:

$\begin{cases} x+6<0, \\ x<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-6, \\ x<0; \end{cases}$ $x<-6.$

– *під час множення обох частин нерівності на знаменник, знак якого при значеннях змінної не визначений*;

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\frac{2x+3}{x-1} > 1.$

Неправильне розв'язання. $2x+3 > x-1;$ $x>-4.$ *Відповідь*: $(-4;\infty).$

Помилка: множення обох частин нерівності на знаменник, який містить невідоме.

Причина: не сформовані уміння аналізувати нерівність та хибна аналогія з розв'язуванням нерівності вигляду: $\frac{2x+3}{5} > 1$

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{x^2+81}{4-x^2} > 0.$

Неправильне розв'язання: $x^2+81>0$ *при* $x \neq \pm 2.$

Відповідь: $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty).$

Причина помилки: Невміння аналізувати дробово-раціональну нерівність (не враховано те, що $x^2+81>0$ і те, що дріб більший нуля, а отже, $4-x^2>0$, тому $x\in(-2;2)$).

Проаналізувавши підручники з алгебри для 9 класу та чинну програму з математики, ми не виявили окремої теми «Розв'язування дробово-раціональних нерівностей». Тому вважаємо, що значна кількість помилок, які допускають учні, пов'язана з відсутністю в підручниках чітких орієнтирів стосовно тих дій, які повинні бути виконані для правильного розв'язування таких нерівностей.

Розв'язування дробово-раціональних нерівностей з меншою кількістю помилок ми пов'язуємо із застосуванням методу інтервалів. Тому пропонуємо учнів 9 класу познайомити з цим методом. Враховуючи, що основним внутрішнім мотивом навчальної діяльності для більшості учнів 9 класу є орієнтація на результат, головним аспектом мотивації може бути аргументація вчителя, що знайомство з новим методом дозволить розв'язувати різноманітні нерівності не тільки в дев'ятому, а і в 10-му та 11-му класах.

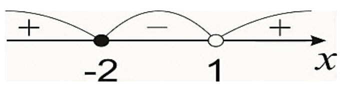
Виділення орієнтовної основи діяльності розв'язування дробово-раціональних нерівностей методом інтервалів варто провести на прикладі коментованого розв'язування нескладної дробово-раціональної нерівності, наприклад, такої: $\dfrac{2x+1}{x-1}\geq 0$.

1. Розглянемо функцію: $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-1}$.

2. Знайдемо область визначення функції: $x-1\neq 0,\ x\neq 1;$ $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

3. Знайдемо нулі функції: $2x+4=0,\ x=-2$.

4. Позначимо область визначення та нуль функції на координатній прямій, дослідимо знак функції на кожному проміжку:



5. Запишемо відповідь, враховуючи знак нерівності.

Відповідь: $(-\infty;-2]\cup(1;\infty)$.

Необхідно звернути увагу учнів на те, що метод інтервалів ґрунтується на тому, що неперервна на проміжку функція може змінювати знак при «переході» аргумента через точку де її значення дорівнює нулю (але може і не змінювати).

До особистого довідника кожен учень має занотувати алгоритм застосування методу інтервалів:

Щоб розв'язати нерівність $\frac{R(x)}{K(x)} \triangleleft 0$, де «$\triangleleft$» — один із знаків « $\leq,\ \geq,\ <,\ >$» необхідно дослідити функцію $f(x)=\frac{R(x)}{K(x)}$ на знакосталість:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти нулі функції;

3) отриманими нулями розбити область визначення на проміжки;

4) визначити знак функції на кожному з проміжків, обчисливши значення в будь-якій точці цього проміжку (зручно для обчислення);

5) об'єднати проміжки, на яких функція задовольняє нерівність, у множину розв'язків.

Враховуючи те, що в одних підручниках пропонується в першому пункті знаходити ОДЗ нерівності, в інших — область визначення функції, необхідно пояснити учням, що ОДЗ дробово-раціональної нерівності співпадає з областю визначення функції, що стоїть у лівій частині нерівності.

Після цього, з метою осмислення, провести поелементне коментоване розв'язування раціональної та дробово-раціональної нерівностей методом інтервалів. Наприклад, таких:

$$(x-5)(3-x) \geq 0 \quad \text{та} \quad \frac{(x-3)(2x+8)}{x-2} < 0.$$

Після розв'язання першої нерівності варто звернути увагу учнів на те, що у випадку нестрогої нерівності у відповідь, крім одержаних інтервалів, обов'язково повинні входити всі нулі функції $f(x)$ (Відповідь: $3 \leq x \leq 5$). Також необхідно звернути увагу учнів на те, що, розкривши дужки в цій нерівності, ми одержуємо квадратну нерівність. Отже, метод інтервалів дає ще один спосіб розв’язування квадратних нерівностей.

Для активізації пізнавальної діяльності школярів доцільно розглянути розв’язування одних і тих нерівностей різними методами.

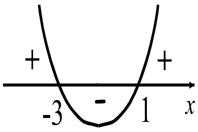
Наприклад, розв’язати нерівність $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \le 0.$

1. Розв’язування нерівності методом рівносильних перетворень:

1). ОДЗ: $(x + 1)^2 \ne 0$, отже, $x \ne -1$.

2). Оскільки $(x + 1)^2 > 0$, маємо $x^2 + 2x - 3 \le 0$.

3) Щоб розв’язати одержану квадратну нерівність, знайдемо нулі функції

$y = x^2 + 2x - 3$ і побудуємо ескіз графіка 

Розв’язок квадратної нерівності: $-3 \le x \le 1$.

Враховуючи ОДЗ, маємо відповідь: $[-3; -1) \cup (-1; 1]$.

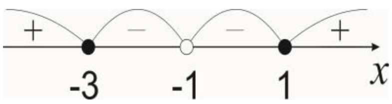
2. Розв’язання цієї ж нерівності методом інтервалів може бути таким:

Розглядаємо функцію: $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

1). $D(f)$: $(x + 1)^2 \ne 0$, отже, $x \ne -1$.

2). Нулі: $f(x) = 0$, $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

3). Отриманими нулями розбиваємо область визначення на проміжки:



Відповідь: $[-3; -1) \cup (-1; 1]$.

З метою попередження появи помилок учителю потрібно насамперед навчити учнів усвідомлено приступати до розв’язування нерівностей. Школярі повинні вміти аналізувати запропоновану нерівність, визначати вид нерівності, спосіб та метод її розв’язування, і обов’язково вміти здійснювати перевірку одержаного розв’язку.

Перевірку розв’язків систем рівнянь, нерівностей та систем нерівностей можна ефективно здійснювати графічним способом, використовуючи при цьому навчальні програмні засоби, зокрема GeoGebra, MathCad, GRAN1.

2.3. Попередження, виявлення і виправлення помилок учнів під час вивчення змістової лінії « Функції і їх графіки»

Функціональна змістова лінія пронизує весь курс алгебри основної школи і розвивається у тісному зв’язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. Властивості функцій, як правило, встановлюються за їх графіками, тобто на основі наочних уявлень, і лише деякі властивості обґрунтовуються аналітично. У міру оволодіння учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується. Важливе місце відводиться формуванню умінь будувати й аналізувати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують, спроможності розуміти функцію як певну математичну модель реального процесу.

За чинною програмою поняття функції вводиться у 7 класі. У цьому ж класі розглядається лінійна функція та її графік. Ці відомості використовуються для графічного ілюстрування розв’язування лінійного рівняння з однією змінною, а також системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Внаслідок вивчення теми учні мають безпомилково розв’язувати вправи, що передбачають:

– *знаходження області визначення функції;*

– *знаходження значення функції за даним значенням аргументу;*

– *побудову графіка лінійної функції;*

– *знаходження за графіком функції значення функції за даним значенням аргументу і навпаки;*

– *визначення окремих характеристик функції за її графіком* (*додатні значення, від’ємні значення, нулі*).

У 8 класі учні мають будувати графіки функцій $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ характеризувати властивості цих функцій за їх графіками.

У 9 класі розглядається квадратична функція. Вивчення її властивостей пов'язується, зокрема, з розв'язуванням квадратних нерівностей. За чинною програмою очікуваними результатами навчально-пізнавальної діяльності учнів є : Учень/учениця:

– *наводить приклади квадратичної функції*;

– *обчислює значення функції в точці*;

– *пояснює перетворення графіків функції: f(x)→f(x)+a; f (x) →f (x+a);*

– *f(x) → kf(x), f (x) → - f(x); алгоритм побудови графіка квадратичної функції*;

– *характеризує функцію за її графіком*;

– *розв'язує вправи, що передбачають: побудову графіка квадратичної функції; розв'язування квадратних нерівностей*.

Накопичений багаторічний досвід викладання показує, що в багатьох учнів побудова графіків функцій викликає великі труднощі. Ці труднощі значною мірою пояснюються тим, що питання графічного зображення функцій у шкільному курсі алгебри розглядаються в різних розділах і вивчаються частинами, що звичайно, впливає на ґрунтовне засвоєння цього важливого матеріалу. Завдання вчителя – сформувати в учнів цілісне уявлення про функцію і навчити їх свідомо будувати графіки, оскільки школярі, як правило, заучують і запам'ятовують зовнішнє, формальне, символічне вираження функції, а самого факту, описаного формулою, не розуміють і графіки будують формально.

Так, наприклад, учні, побудувавши графік функції $y = \frac{1}{x}$, часто не спроможні побудувати графік функції, записаної рівняннями $xy = 1$ або $vt = 12$, тобто тієї самої функції, поданої в іншій формі.

Школярі часто не вміють будувати і читати графіки функцій, правильно встановлювати область визначення функції і множину значень, з'ясовувати питання, чи парна дана функція чи непарна, на якому проміжку вона зростає і на якому спадає, знаходити нулі функції.

Для свідомого засвоєння відомостей про функцію в курсі алгебри потрібно, починаючи з початкової школи, проводити функціональну пропедевтику, спрямовану на формування поняття функції, способів її задання, властивостей окремих видів функції. Так, розв'язуючи текстові задачі, потрібно звертати увагу учнів на *залежність* вартості товару від ціни, зміну результатів дій від зміни компонентів, *залежність* шляху від швидкості та часу, *залежність* площі прямокутника від довжини однієї зі сторін тощо, акцентувати увагу учнів на слові залежність.

Необхідно відзначити, що вже на початку вивчення поняття «функція» учні його засвоюють формально. Причиною є те, що вчителі, сформулювавши означення функції, не завжди аналізують ключове слово «залежність», не наголошують на тому, що кожному значенню незалежної змінної відповідає *єдине* значення залежної змінної.

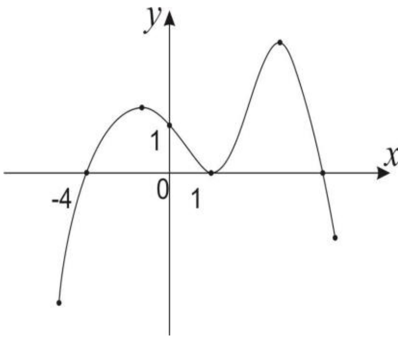
З метою усвідомлення поняття «функція» доцільно спочатку зосередити увагу на заданні функції формулою, розглянувши кілька задач, що приводять до поняття функціональних залежностей, наприклад, такі: купують олівці за ціною 2 гр. за один олівець, записати залежність між кількістю олівців x і їх загальною вартістю y; записати залежність між довжиною ребра куба x і його об’ємом y;автомобіль рухається рівномірно по прямолінійній ділянці довжиною 200 км, записати залежність між швидкістю автомобіля x км/год і часом y год, затраченим на проходження цієї ділянки.

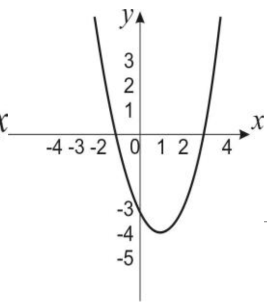
Наступним етапом має бути обговорення прикладів залежностей, пропонованих самими учнями (в межах експерименту вони були такими: графік руху потягів, прогноз погоди на тиждень, список учнів у журналі, об’єм кімнати, залежність одягу, який одягають на прогулянку, залежно від температури повітря, залежність настрою від оцінки тощо).

Підсумком такої діяльності буде висновок: функція – це *залежність* однієї змінної від іншої. Важливо домогтися усвідомлення учнями того, що про функцію можна говорити лише тоді, коли кожному значенню незалежної змінної відповідає *єдине* значення залежної змінної. Усвідомленню цього факту сприяє наведення прикладів графічного зображення функцій та контр прикладів.

У даному випадку на допомогу приходять засоби ІКТ, які можна використовувати для візуалізації навчального матеріалу.

Завдання: як на вашу думку, чи є графіком функції лінія, зображена на кожному з рисунків: а), б), в), відповідь обґрунтуйте.





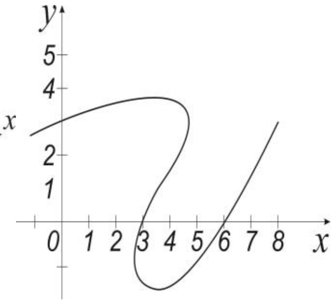


рис. а) рис. б) рис. в)

Наступним кроком є приклади та контр приклади графічного зображення функціональних залежностей, запропонованих самими учнями. Обговорення цих прикладів. Засобами заохочення є похвала, високий бал, створення ситуації успіху, зацікавлення.

Учні повинні чітко усвідомити, що таке функція, наводити приклади функції, будувати схематично графіки функцій. Це перший і дуже важливий етап у засвоєнні поняття функції. Наступним етапом є осмислення області визначення та області значень функції. Учитель має так організувати діяльність, щоб відбулося осмислене розуміння цих понять. Цьому сприяє такий факт: <u>областю визначення функції є проекція графіка функції на вісь О*x*, а областю значень – на вісь Оу</u>. «Візуалам», наприклад, зрозуміліше, якщо показати геометричну інтерпретацію та закріпити поняття у процесі розв’язування вправ усно та письмово. Це можуть бути завдання з підручника та використання презентацій, виконання завдань з комп’ютерною підтримкою. Важливо, щоб учні могли виконувати і обернені завдання: зобразити схематично графік функції, область визначення якої задана. Ми надаємо особливого значення першим урокам вивчення функцій, засвоєнню та осмисленню учнями основних понять. Надаємо перевагу самостійній діяльності учнів під керівництвом учителя, формуванню вміння доводити та обгрунтовувати власну думку, співставляти та протиставляти, використовувати контр приклади, знаходити та виправляти власні помилки та помилки однокласників.

Якщо працювати з функціями заданими аналітично, необхідно, щоб учні запам'ятали, що для знаходження області визначення під час розв'язування задач варто брати до уваги те, яких числових значень може набувати аргумент за змістом задачі: якщо функцію задано формулою і область її визначення не зазначена, то область визначення складається з усіх значень аргументу, за яких вираз має зміст. Варто також закріпити ці відомості виконанням вправ. Наприклад:

1. У хлопчика було 30 грн. Він купив x зошитів по 2грн. за один зошит. Позначивши кількість гривен, що залишились у хлопчика, буквою y, запишіть функціональну залежність між y і x. Яка область визначення цієї функції?

Записавши залежність у = 30 – 2x, встановлюємо, що за змістом задачі змінна x може набувати натуральних значень, не більших від 15 (якщо буде куплено 15 зошитів, хлопчик витратить усі гроші). Отже, в розглянутій задачі область визначення функції складається з послідовних натуральних чисел від 1 до 15.

2. Функцію задано формулою $y = \frac{6}{x-3}$, ця формула не має змісту при x=3. Отже, область визначення функції $y = \frac{6}{x-3}$ складається з усіх чисел, крім числа 3.

3. Довжина сторони квадрата дорівнює x, а його площа $y = x^2$.Область визначення цієї функції складається з усіх додатних чисел.

Змістові лінії виразів та їх перетворень, рівнянь і нерівностей та функцій тісно переплітаються під час їх вивчення. Суттєвим спільним є те, що виконуючи перетворення, наприклад, дробово-раціональних виразів, учні повинні вміти знаходити *допустимі* значення змінних у цих виразах, під час розв'язування дробово-раціональних рівнянь та нерівностей школярі повинні показати вміння знаходити *область допустимих значень*змінних (ОДЗ), під час вивчення функцій необхідним є уміння знаходити *область визначення* функції. Часто учні плутають ці поняття внаслідок формального засвоєння, що є причиною появи помилок.

Кожна з цих операцій зводиться, по суті, до знаходження значень змінної, за яких вираз має зміст. Звичка аналізувати вираз, сформована вже під час вивчення перших тем алгебри, сприяє запобіганню помилок у процесі вивчення всіх вищеназваних змістових ліній.

Учні часто неправильно будують схематично графіки запропонованих функцій. Причиною таких помилок є формальне засвоєння загального виду функцій та їх графіків. Так, наприклад, типовою є помилка, коли, виконуючи завдання: побудувати графік функції $y = \frac{x}{4}$, учні будують $y = \frac{4}{x}$. Причиною таких помилок є зовнішня схожість запропонованих функцій: вираз, записаний у вигляді дробу, число 4, змінна *x*. Помилкова асоціація сформована під час вивчення лінійної функції призводить до неправильного виконання завдання.

Щоб попередити помилки у побудові графіків функцій під час їх вивчення та у майбутньому, учні мають засвоїти *алгоритм побудови* графіка функції, що вивчається, скласти блок-схему, в яку бажано включити останнім такий пункт: вибрати декілька точок на графіку і перевірити, чи задовольняють їх координати рівняння функції та занотувати її у особистий довідник.

Причиною появи помилок також є невміння учнів читати графіки функцій, виявляти властивості функцій за їх графіками. Проаналізуємо причини появи таких помилок і визначимо прийоми їх попередження.

Лінійна функція. Одна з причин появи помилок під час вивчення цієї теми – поспішна вказівка вчителя: «Щоб побудувати графік функції $y = kx + b$, достатньо побудувати дві точки графіка, а потім за допомогою лінійки через ці точки провести пряму». Такий висновок повинен зробити не вчитель, а учні після пояснення вчителя і самостійно побудованих графіків виду $y = kx + b$, тобто коли вони самі зможуть помітити, що точки, координати яких задовольняють рівність $y = kx + b$, лежать на одній прямій. Варто зазначити, що в процесі побудови графіків функцій виду $y = kx + b$ учні повинні помітити: якщо x змінюється рівномірно, тобто на одне й те саме число, то і y змінюється також рівномірно; як ведуть себе графіки функцій $y = kx + b$ в залежності від знаку k та значень b.

Буває й так, що учням, навіть тим, які вміють побудувати графік лінійної функції, важко написати рівняння бісектриси першого і третього координатних кутів. Якщо поставити завдання – знайти множину точок, абсциса яких дорівнює нулю ($x = 0$), то учні показують точку (0; 0) або вісь Оx замість осі Оy, аналогічно з віссю Оx. Щоб запобігти таким помилкам, потрібно пояснення вчителя за схемою «роби так, як я» замінити діалогами за схемою «учитель – учень – учитель». Бесіда повинна мати евристичний характер. Запитання вчителя мають виконувати розвиваючі функції, щоб активізувати розумову діяльність і мислення учнів.

Зупинимось на вправах, розв’язування яких може бути методичним прийомом попередження помилок під час побудови графіків і визначення властивостей функції ще на ранньому етапі їх вивчення.

Наприклад, на уроці на тему *«Координатна площина»* поряд з вправами на знаходження положення точки за її координатами і координат точки за їх положенням на площині доцільно запропонувати такі:

1. Де розміщені точки, що мають координати (0; 0), (0; 1), (0;–2),(0;–3)?
2. У яких точках на координатній площині абсциса дорівнює 3; 2; 1; 0?
3. У яких точках на координатній площині ордината дорівнює 2; 1; 0;–1?
4. Знайдіть координати точок перетину прямої, проведеної на площині, з осями координат.
5. На даній прямій знайдіть точку, абсциса якої дорівнює –2.
6. Дано точку *A* (5; –2). Побудуйте точку з протилежними координатами.
7. У яких точках на координатній площині абсциса дорівнює ординаті?
8. У яких точках на координатній площині абсциса в два рази більша за ординату; у два рази менша від ординати?

9. У яких точках на координатній площині абсциса і ордината протилежні?

10. Покажіть на координатній площині точки, по яких «автомобіль» може проїхати найкоротшим шляхом від точки A (– 2; 2) до точки B (2; 2), а потім до точки C (5; 4).

11. Точка M (x; b) лежить у другій чверті. Знайдіть точку $K\left(|x|,\frac{b}{b}\right)$.

Подані вправи спрямовані на розвиток логічного мислення, формування в учнів стійких уявлень про властивості функції виду $y = kx + b$, хоча справжнього вигляду її на цьому етапі навчання вони ще не знають.

Щоб попередити хибну аналогію між функціями $y = \kappa \cdot x$ та $y = \frac{k}{x}$ вже під час вивчення прямої пропорційності $y = \kappa x$, потрібно сформувати правильну асоціацію, звернувши увагу на те, що k може бути будь-яким числом. Допоможуть, наприклад, такі вправи:

1. Записати у вигляді дробу добуток: а) $\frac{1}{3}\cdot x$; б) $\frac{1}{2}\cdot x$; в) $\frac{1}{4}x$; г) $-\frac{2}{3}x$; д) $\frac{1}{12}x$.

2. Записати у вигляді добутку дріб: а) $\frac{x}{3}$; б) $\frac{x}{4}$; в) $-\frac{2x}{3}$; г) $\frac{x}{6}$; д) $-\frac{x}{3}$.

3. Знайдіть, чому дорівнює коефіцієнт κ у функціях:

а) $y = 5x$; б) $y = 2x + 1$; в) $y = 0$; г) $y = \frac{x}{3} + 2$; д) $y = -\frac{x}{2} + 3$.

Методичним засобом, який буде сприяти кращому запам’ятовуванню, є гра-змагання. До завдань гри доцільно додати завдання «знайда помилку», «чи правильно, що…». Як відомо, значну кількість помилок учні допускають внаслідок несформованих умінь виявляти властивості функцій. Тому вже під час вивчення лінійної функції варто вчити учнів досліджувати властивості заданої функції за побудованим графіком.

Поступове «наростання» властивостей функцій під час вивчення їх конкретних видів допоможе учням краще усвідомити їх і самостійно встановлювати наявність чи відсутність уже вивчених властивостей у нових класів функцій.

Розглянемо на прикладі функції $y = 2x + 1$ побудову графіка та встановлення властивостей заданої функції.

1. Знайти область визначення функції. *Відповідь*: D(y) = R.

2. Побудувати графік функції.

Враховуючи те, що через дві точки завжди можна провести пряму, навіть, якщо координати однієї з них знайдено неправильно, пропонуємо знаходити координати трьох точок: позначити дві точки на координатній площині і провести через них пряму та перевірити належність третьої точки побудованому графіку. Це можуть бути, наприклад, точки з такими координатами: (0;1), (1;3), (-1;-1).

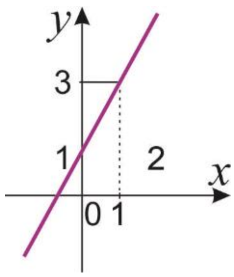


рис. 2.1

3. Знайти область значень функції: *Відповідь*: E(y) = R.

4. Знайти нулі функції (значення x, за якого y = 0; точка перетину з віссю Ox). $0 = 2x + 1$, $2x + 1 = 0$, $2x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$. y = 0, якщо $x = -\frac{1}{2}$.

Відповідь:$(-\frac{1}{2}$; 0).

5. Знайти точку перетину з віссю Oy (значення y, якщо x = 0).

$y = 2x + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Якщо x = 0, то y = 1. Відповідь: (0; 1).

6. Знайти, для яких значень x, а) y> 0; б) y < 0 (для яких значень x графік вище осі абсцис і для яких значень x графік нижче осі абсцис).

Відповідь: а) y> 0, якщо $x > -\frac{1}{2}$; б) y < 0, якщо $x < -\frac{1}{2}$.

7. Визначити, функція зростаюча чи спадна.

Відповідь: Так як коефіцієнт $к > 0$, то лінійна функція зростаюча.

Перше таке завдання учні виконують разом із учителем, наступні – самостійно. Запам'ятовування, усвідомлення та закріплення властивостей функцій вже на перших уроках варто мотивувати. Виконану правильно самостійну роботу, аналогічну розглянутій вище, учитель може оцінити найвищим балом. Учні мають відчути, як важливо для вчителя засвоєння ними знань.

Практичний досвід викладання показує, що учні, знаючи, як побудувати графік функції $y = kx + b$, часто розгублюються, якщо потрібно побудувати графіки функцій: $y = b$ чи $x = b$ (де b – довільне число). Тому вчителю, вже на початку вивчення теми, необхідно звернути увагу учнів на ці функції та їх графіки. Запам'ятати допоможе правило-орієнтир:

якщо $y = b$, то пряма паралельна осі x; *якщо $x = b$, то пряма паралельна осі y.*

Важливо відпрацювати з учнями різні випадки розміщення графіків лінійних функцій залежно від коефіцієнтів: а) паралельність, б) перетин. Такі знання будуть актуальними під час розв'язування систем лінійних рівнянь. За загальним виглядом функцій учні зможуть визначати розміщення графіків цих функцій, а розуміючи залежність розв'язків системи від розміщення графіків зможуть здійснювати перевірку одержаних результатів. Одним із прийомів закріплення знань з теми «Лінійна функція» є вдало дібрані завдання до проведення фізкультхвилинки, що сприяє і запам'ятовуванню,і осмисленню навчального матеріалу. Фізкультхвилинку можна провести, наприклад, так, застосовуючи при цьому засоби ІКТ.

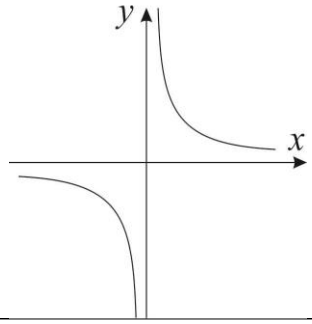
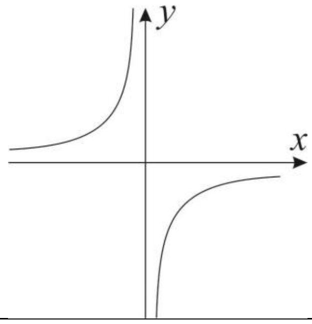
Вчитель пропонує ряд лінійних функцій:

1) $y = 3x + 4$; 2) $y = -5x + 1$; 3) $y = 2x + 2$; 4) $y = -6x + 4$;
5) $y = 3x + 2$; 6) $y = 3x + 4$; 7) $y = -2x + 4$; 8) $y = 2$; 9) $x = 5$;
10) $y = -2x - 3$; 11) $y = -2$; 12) $y = 0$; 13) $x = 0$; 14) $y = 2x$.

Якщо вчитель вказує на зростаючу функцію, учні підіймають вгору праву руку, ліву опускають вниз, утворюючи кут між рукою і тулубом. Якщо спадну – навпаки. Якщо пряма паралельна осі x – руки розгорнуті в сторони, паралельна осі y – одна піднята вертикально вгору, інша – опущена вниз. Якщо вчитель вибирає паралельні прямі – руки паралельно перед собою, якщо прямі, які перетинаються – витягнуті руки схрещуються. Якщо показує на пряму пропорційність – учні плещуть в долоні. Таких завдань можна пропонувати досить багато. Результат відчутний.

Обернена пропорційність. Для успішного засвоєння оберненої пропорційності вчителю доцільно актуалізувати набуті знання учнів з теми «Лінійна функція». За результатами наших досліджень можемо стверджувати, що обернена пропорційність не викликає особливих труднощів у сприйманні та засвоєнні, в силу незвичного вигляду і зацікавлення учнів. У процесі вивчення теми розвивається логічне мислення, уява та уявлення, подальшого розвитку набувають прийоми розумової діяльності: аналіз, синтез, вміння порівнювати, узагальнювати та робити висновки. Щоб учні глибоко розуміли вказану тему, вчителю необхідно відчути «складні» місця і зосередити на них увагу.

Типовою помилкою у побудові графіка оберненої пропорційності є те, що учні на перших уроках можуть будувати криві, дотикаючи їх до осей координат, внаслідок формального сприйняття області визначення та області значень даної функції. Завдання вчителя: актуалізувати попередні знання про функції та організувати діяльність учнів, так, щоб відбулося осмислене сприйняття функції $y = k / x$, де x – аргумент, k – відмінне від нуля число, та її властивостей. Звернути увагу учнів на те, що жодну з осей координат графік функції не перетинає, в силу того, що x ніколи не може дорівнювати нулю (на нуль ділити не можна), а отже, $y = 0$ ми теж ніколи не одержимо. Вивчення оберненої пропорційності сприяє поглибленню та закріпленню поняття функції та її властивостей. Вже на вищому, як під час вивчення лінійної функції, рівні, учні розглядають властивості функції, читають графіки. Проте, якщо вчитель не приділяє належної уваги алгоритму дослідження функції, то це залишається для учнів проблемною зоною надовго. Такі учні не знають, що таке нулі функції та як їх знаходити. Отже, з перших уроків, під час перших побудов графіків доцільно учням разом із вчителем скласти алгоритмічний припис дослідження функції $y = k / x,$ розглянути випадки, коли $к > 0$ та $к < 0$, засвоїти цей алгоритм у процесі виконання вправ на його застосування та закріпити взаємоопитуванням. У ході вивчення теми ефективною є карта знань, яку учні створюють з допомогою вчителя та занотовують у власний довідник:

Графік функції	$k > 0$ 	$k < 0$ 
Область визначення: D(*y*)	Усі дійсні числа, крім 0	Усі дійсні числа, крім 0
Область значення: E(*y*)	Усі дійсні числа, крім 0	Усі дійсні числа, крім 0
Координатні чверті, у яких лежить графік	I і III	II і IV
Монотонність	Спадає на кожному із проміжків області визначення	Зростає на кожному із проміжків області визначення
Графік функції	Дві вітки гіперболи	

Під час виконання вправ необхідно також звернути увагу на формування вміння будувати графіки з вилученими точками.

Завдання. Побудуйте графік функції: $y = \dfrac{8 - 2x^2}{x^3 - 4x}$.

Розв’язання. Областю визначення функції будуть усі значення аргументу, що задовольняють умову $x^3 - 4x \neq 0,$ тобто всі дійсні числа, крім 0, -2 і 2.

Задана функція після скорочення дробу набуває вигляду:

$y = \dfrac{8 - 2x^2}{x^3 - 4x} = \dfrac{2(4 - x^2)}{-x(4 - x^2)} = -\dfrac{2}{x}.$ Графіком є:

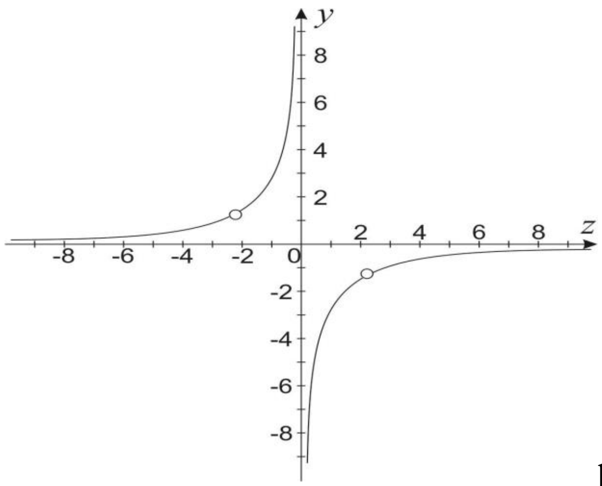


рис. 2.2

Досить часто учні під час побудови графіків функцій забувають вилучати точки, в яких функція не визначена. Щоб попередити такі помилки, вчителю доцільно показати виконання таких побудов та проконтролювати засвоєння школярами під час виконання самостійної роботи. Кращому засвоєнню властивостей функцій сприяє розв'язування рівнянь графічним способом. Правильність побудови графіків можна перевірити за допомогою комп'ютерних програм, таких як MathCad, GRAN 1, Advanced Grapher, GeoGebra.

Квадратична функція. Враховуючи те, що квадратична функція є важливим компонентом у розв'язуванні квадратних нерівностей та нерівностей, що зводяться до квадратних, щоб запобігти інтерференції знань (плутання побудови графіка із схематичною побудовою в ході розв'язування нерівностей), вивченню функції $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ та їх властивостей має приділятися значна увага.

Як свідчить аналіз контрольних робіт учнів та результати ДПА та ЗНО останніх років, помилки учні допускають під час: знаходження координат вершини параболи; визначення напряму віток параболи; використання властивостей функції; зображення нулів функції та знаходження нулів функції за графіком. Школярі також не вміють виконувати симетрію графіка відносно прямої $x = x_в$. Причину ми також вбачаємо у не належному рівні засвоєння теми «Геометричні перетворення» з курсу геометрії.

Щоб попередити появу вищезгаданих помилок та підготувати необхідну основу для безпомилкового розв’язування квадратних нерівностей, доцільно зосередити увагу на алгоритмічних приписах побудови графіка квадратичної функції та розкритті властивостей даної функції за побудованим графіком. Значне місце в засвоєнні займають коментовані виконання завдань з використанням наочності, короткочасні навчальні самостійні роботи з обґрунтуванням правильності виконання завдання. Важливо, щоб учні вміли перевіряти свої дії. Підставляючи вибране значення аргументу у формулу, знаходили відповідне значення функції та переконувалися, що знайдена точка належить графіку.

На рівні 9 класу учні повинні вміти самі, з незначною корекцією вчителя за необхідності, складати таблиці властивостей функцій, створювати карти знань з теми, яка вивчається. Щоб попередити помилки, які виникають під час розв’язування квадратних нерівностей, необхідно звернути увагу учнів на знаходження проміжків на яких $y \le 0;\ y \ge 0;\ y < 0; y > 0.$

Приклад **(**коментоване виконання завдання**)**. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 2x - 3$. Вкажіть властивості цієї функції за схемою:

1) область визначення функції; 2) область значення функції; 3) точки перетину функції з осями координат; 4) проміжки зростання і спадання функції; 5) найбільше і найменше значення функції.

Розв’язання. Побудова графіка функції:

1.Визначаємо напрямок віток параболи: $y = x^2 - 2x - 3, a = 1, b = -2, c = -3.$

Так , як $a = 1 > 0$, вітки параболи направлені вгору.

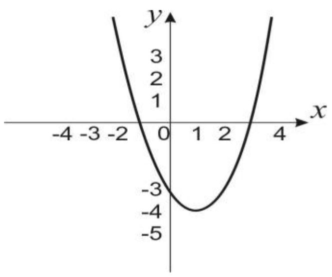
2. Знаходимо нулі функції (координати точок перетину графіка з віссю абсцис: у рівняння функції замість y підставляємо 0. Розв’яжемо рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0,\ x_1 = -1, x_2 = 3.$ Отже, маємо дві точки перетину з віссю Оx, а саме: (-1; 0), (3; 0).

3. Знаходимо координати точок перетину графіка функції з віссю ординат (у рівняння функції замість x підставляємо 0 і одержуємо $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3$). Точка перетину графіка з віссю Оy: (0; -3).

4.Знаходимо координати вершини параболи: $x_в = \frac{-b}{2a}$, $x_в = \frac{2}{2} = 1$; $y_в = 1^2 - 2\cdot 1 - 3 = -4$; (1;−4).

5. Враховуємо, що графік квадратичної функції симетричний відносно прямої $x = x_в$, $x = 1$.

6. Задаємо ще декілька точок: (2; -3), (4; 5). Знаходимо їм симетричні відносно прямої x = 1. Будуємо графік.



Властивості функції $y = x^2 - 2x - 3$.

рис. 2.3

1. $D(y) = R$.

2. Точки перетину з віссю Оx: (-1; 0), (3; 0).

3. Точки перетинуз віссю Оy: (0; -3).

4. Значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень: $y > 0$ на проміжках $(-\infty; -1), (3; \infty)$.

5. Значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень:

$y < 0$ на проміжку $(-1; 3)$.

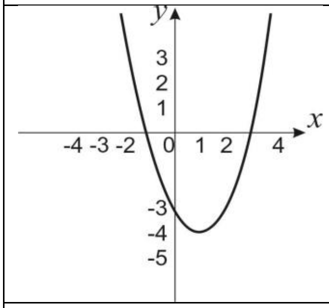
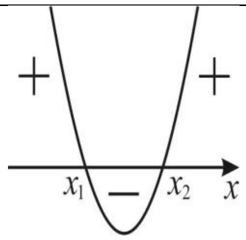
6. Функція зростає на проміжку $x \in [1; \infty)$ функція спадає на проміжку $x \in (-\infty; 1\,]$.

7. Найменшого значення $y = -4$ функція набуває при x = 1. Найбільшого значення не існує.

8. Область значень функції $y \in [-4; \infty)$.

З метою запобігання помилок учнів під час розв'язування квадратних нерівностей варто показати поряд з побудовою графіка квадратичної функції, схематичне зображення графіка та вказати орієнтовну основу дій цього зображення. Тобто, зосередити увагу учнів на тому, які етапи є важливими під час побудови схематичного зображення графіка, який буде допоміжним під час розв'язування *квадратних нерівностей*. Що спільного і відмінного у цих двох побудовах. Після ознайомлення із матеріалом запропонувати учням скласти порівняльну карту знань:

Порівняльна карта знань: Особливості побудови графіка функції $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ і схематичного його зображення під час розв'язування квадратних нерівностей

Графік та властивості квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	**Схематичне зображення графіка квадратичної функції** $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
	
1.Напрям віток параболи. 2.Нулі функції. 3. Значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень. 4. Значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.	1.Напрям віток параболи. 2.Нулі функції. 3. Значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень. 4. Значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.
5. Задання допоміжних точок для більшої точності графіку. 6.Область визначення функції. 7. Область значення функції. 8. Точки перетину функції з віссю ординат. 9. Проміжки зростання і спадання функції. 10. Найбільше і найменше значення функції.	

Необхідно враховувати те, що квадратична функція є останньою у вивченні змістової лінії «Функція» в основній школі, тому доцільно на кожному уроці здійснювати узагальнення і систематизацію функціонального навчального матеріалу з метою повторення, ліквідації прогалин у знаннях та забезпечення успішного складання ДПА в 9 класі. Разом з тим, успішне засвоєння загального виду графіка та властивостей квадратичної функції буде належним підґрунтям для глибокого розуміння та засвоєння теми «Квадратні нерівності».

Узагальнення проходить ефективно, якщо учні у процесі діяльності розв’язують рівняння та нерівності графічним способом.

У даному параграфі ми розглянули організацію превентивної діяльності вчителя математики під час вивчення змістової лінії : функції.

Результати нашого дослідження показали, що помилок учнів під час вивчення математики стає значно менше, якщо у вчителя сформований мотив, потреба та здатність в організації превентивної діяльності з попередження появи цих помилок. Методика проведення превентивної діяльності за змістовими лініями: вирази та перетворення виразів, рівняння і нерівності, функції яка реалізована в нашому дослідженні дала свій позитивний результат.

2.4. Використання інформаційно-комунікаційних технологій

Стрімкий розвиток інформаційних технологій, крім помітного зниження часових і просторових бар’єрів у поширенні даних, відкрив нові перспективи у сфері освіти. Можна констатувати появу принципово нових методів навчання на основі інтеграції освітніх та інформаційних технологій. Ці тенденції зумовили активізацію роботи вчителів математики з впровадження інформаційних технологій у традиційну модель навчального процесу. Завдяки опануванню сучасних інформаційних технологій вчителями математики зросла кількість уроків алгебри, орієнтованих на використання комп’ютера. Це розширило межі творчої діяльності як учителя, так і учня, сприяло розширенню самостійної дослідницько-пошукової діяльності, розвитку навичок критичного мислення школярів, підвищило мотивацію всіх учасників навчально-виховного процесу. Систематичне і цілеспрямоване використання інформаційних технологій (ІТ) у процесі навчання математики створює необхідні умови для інтенсифікації пізнавальної діяльності та гуманізації навчального процесу, інтеграції навчальних предметів, диференціації навчання, сприяє наданню навчальній діяльності дослідницького, творчого характеру, розкриттю творчого потенціалу вчителя й учнів, підвищує рівень математичної та інформаційної культури учнів. ІТ навчання із врахуванням системи психолого-дидактичних і методико-психологічних закономірностей розкриває широкі перспективи активізації і розвитку розумової діяльності учнів, створює сприятливі умови для роботи з помилками учнів.

Якщо на початковому етапі в шкільній освіті переважав аспект використання комп’ютера як об’єкта вивчення (комп’ютерна грамотність, основи інформатики та обчислювальної техніки), то зараз акценти зміщуються. На перший план виступають проблеми використання комп’ютера як засобу комунікації і навчання. Цей процес вимагає активізації психолого-педагогічних досліджень, які повинні виявити ефективність різних моделей навчання з використанням нових інформаційних технологій.

У цілому, досвід роботи вчителів математики багатьох шкіл, які використовують інформаційно-комунікаційні технології у навчанні, показує, що комп'ютер у школі може надати істотну підтримку вчителю в організації навчального процесу, підвищити якість та ефективність навчальних методик, реалізувати індивідуальний підхід до кожного учня, стимулювати пізнавальну активність сучасних школярів. Причому саме вчителем визначається методика подання навчального матеріалу, закріплення і контролю знань, конкретний зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання. Вчитель розподіляє співвідношення між обсягом самостійної роботи учнів і роботи разом із вчителем, між індивідуальними і колективними формами роботи. При цьому враховуються як уподобання самого вчителя, так і специфіка умов, в яких перебігає навчальний процес, індивідуальні особливості учнів і класного колективу.

Завдяки перевагам подання графічних та інших даних засобами інформаційно-комунікаційних технологій закладаються істотні передумови успіхів у навчанні: емоційне включення, емоційне сприйняття даних. Принцип наочності за умови використання програмних засобів полягає не стільки в можливості пасивного споглядання учнями моделей, як в активній перетворюючій діяльності, в процесі якої школярі самостійно будують моделі. Якщо електронні засоби дозволятимуть школярам добудовувати чи видозмінювати моделі, тоді можна очікувати на значне підвищення ефективності навчання. Адже аналізуючи динамічні моделі, встановлюючи суттєві зв'язки між їх складовими, виділяючи певні ознаки, школярі формуватимуть прийоми мисленнєвої діяльності.

Коригування знань, як правило відбувається в процесі їх формування. Прийоми виявлення помилок та недоліків і прийоми їх виправлення у навчальному процесі мають бути у єдності, утворюючи один, узагальнений прийом. Якщо помилки та недоліки у знаннях учня під час вивчення математики в школі вже закріпилися, то для їх усунення необхідні надзвичайні зусилля як з боку вчителя, так і самого учня, тому важливою є робота щодо попередження помилок та недоліків у знаннях учнів. Коригування знань учнів, суть якого полягає в ілюстрації помилки чи недоліку за допомогою малюнків, формул, графічно-символічних комплексів, що подаються для зорового сприймання після оголошення помилкової відповіді, дозволяє практично миттєво зіставляти неправильні відповіді з правильними та показати незаперечний доказ наявності помилки чи недоліку у відповіді школяра. Завдяки використанню спеціальних програм стало можливим здійснення оперативної корекції знань учнів з алгебри. Так, в підручнику з алгебри для 8 класу [102]пропонується для побудови графіків функцій та їх дослідження використовувати програму Advanced Grapher Використання комп'ютерних програм для побудови графіків функцій дозволяє скоротити час на створення кількох систем координат в зошиті і уникати помилок під час побудови відповідних графіків. Причому, як додаткові дослідницькі завдання, учням пропонується побудова і дослідження графіків функцій, які вони будуть вивчати в наступних класах. Використання такого методичного прийому є хорошою пропедевтикою вивчення відповідного навчального матеріалу, сприяє попередженню помилок.

Використання технічних засобів сприяє поділу навчального матеріалу на невеликі сегменти з поточною перевіркою їх засвоєння. Одним із засобів візуалізації математичної задачі та її розв'язку, який робить діалог учня та вчителя більш доступним та евристичним, є педагогічний програмний засіб GRAN. Завдяки його застосуванню можна здійснювати навчання алгебри і коригування набутих знань одночасно. В посібниках для вчителя, які є складовою програмно-методичного комплекту GRAN, наведена значна кількість математичних прикладів, що унаочнюють графічні зображення задач і вправ для самостійного виконання, питання для самоконтролю. Програма GRAN має багатий набір інструментів для роботи з функціями та їх графіками. Функціональні можливості, методичний супровід та простота освоєння програми дозволяє її успішно використовувати під час вивчення математики. В організації та проведенні роботи над помилками учнів під час вивчення деяких тем з алгебри в основній школі раціонально використовувати ППЗ GRAN1[58, 100]. Оскільки виконані завдання в зошиті можна відразу перевірити із виконаними завданнями на моніторі комп'ютера. Це стосується графічних способів перевірки аналітично розв'язаних завдань, зокрема розв'язування систем рівнянь та нерівностей. Так, наприклад, під час вивчення в 9 класі квадратичної функції, найбільше труднощів виникає в учнів під час побудови та перетворення графіків. Візуалізація виконання завдань та здійснення миттєвої перевірки виконаних побудов, дозволить ліквідувати прогалини в знаннях ще на етапі їх формування.

Під час вивчення алгебри в основній школі, в здійсненні контролю з комп'ютерною підтримкою реально використовувати тестові завдання навчального характеру, за допомогою яких учень та вчитель мають змогу з'ясувати рівень засвоєння навчального матеріалу своєчасно, адже, результати перевірки можна отримати одразу після проходження тесту, в разі необхідності проаналізувати помилки, провести корегувальні заходи, таким програмним засобом є MyTest. Нині існує велика кількість програм для підтримки організації тестового контролю знань, а також набори тестових завдань, наприклад, безкоштовний Інтернет-сервіс для створення тестів Майстер-тест. За допомогою даного сервісу можна створити самостійно набір тестових завдань з алгебри або скористатися бібліотекою вже існуючих.

Помилки та недоліки під час виконання завдань з алгебри вимагають від учителя кваліфікованого пояснення та наведення конкретних прикладів, які б демонстрували учням відмінність правильного і неправильного виконання цих завдань, тому вдале та своєчасне застосування ІКТ значно полегшує корегувальні дії.

Значну роль у роботі з попередження появи помилок учнів з алгебри відіграє вдале і своєчасне використання презентацій створених за допомогою Microsoft PowerPoint та програмних засобів для створення карт знань, зокрема: Free Mind, Mind Manager. Рекомендуємо вчителям скористатись названими програмними засобами.

М. І. Жалдак акцентує увагу на тому, що особливого значення при використанні ІКТ в навчальному процесі набуває розвиток творчого мислення школяра через реалізацію проблемної ситуації чи постановку задачі; самостійне вироблення критеріїв добору потрібних операцій, що приводять до розв'язку; генерація здогадок та гіпотез в процесі пошуку основної ідеї розв'язку (наукова технічна фантазія, що не зводиться до комбінаторики та генерації випадкових станів); матеріальна інтерпретація формального розв'язку та ін. [59]. Тобто, настійною є дидактична вимога розвитку інтелектуального потенціалу школяра, що передбачає формування певного стилю мислення, формування уміння приймати оптимальні рішення тощо.

В статті [23] ми провели дослідження важливого напряму превентивної діяльності під час вивчення алгебри – формуванню математичної алгоритмічної компетентності як складової інформаційно-цифрової компетентності школярів. В дослідженні надаємо важливого значення формуванню умінь *структурувати дані, діяти за алгоритмом та складати алгоритми*. Прослідковуємо зв'язок між створенням комп'ютерних програм та використанням алгоритмічних приписів під час вивченням математики. Адже формування *алгоритмічного мислення* тісно пов'язане з формуванням загального уміння розв'язувати задачі. Оскільки, щоб задати загальний спосіб розв'язування класу задач у вигляді алгоритму, потрібно спочатку знайти загальний спосіб, а потім дослідити можливість опису цього способу у вигляді конструктивних, однозначно зрозумілих послідовних кроків.

В організації превентивної діяльності алгоритмічні приписи є одним із важливих засобів попередження помилок учнів. Ми тісно пов'язуємо між собою поняття «інформаційно-цифрова компетентність», «алгоритмічна компетентність», «алгоритмічне мислення», «запобігання математичним помилкам» учнів.

Дидактичні основи формування алгоритмічної компетентності учнів визначили А. Капіносов та В. Корольський [71]. Автори виділили рівні алгоритмічної компетентності, вважаючи, що на початковому, середньому та достатньому рівні учні повинні вміти використовувати алгоритми, а на високому – їх складати . Ми поділяємо погляди науковців, однак вважаємо за необхідне навчати учнів *складати* та застосовувати алгоритми на всіх рівнях навчальних досягнень.

У програмуванні, як і в математиці алгоритм – чітка послідовність дій (команд) спрямована на досягнення поставленої мети чи розв’язування задач. У створенні комп’ютерних програм використовують три типи алгоритмів: лінійні алгоритми, алгоритми з розгалуженням, алгоритми з повторенням. В основу створення математичних алгоритмів ми покладаємо володіння елементарними основами програмування.

Різниця між створенням алгоритмів у програмуванні і в алгебрі в тому, що у програмуванні більше використовуються блок-схеми програм (графічний спосіб), а в алгебрі – алгоритмічні приписи (словесний спосіб).

Використовуючи міжпредметні зв’язки між інформатикою та математикою, вчителю математики доцільно показати учням як основні команди програмування можна вдало використовувати на уроках алгебри. Так, прикладами використання лінійних команд є: зведення подібних доданків, множення одночленів, розв’язування лінійних рівнянь, побудова графіків функцій тощо. Команда розгалуження використовується під час розкриття дужок, розв’язування квадратних рівнянь, тобто в тих прикладах де обов’язково під час виконання завдання необхідно перевірити певну умову. Команду повторення можна використати, наприклад, у такому завданні: Знайти перші п’ять членів послідовності: $a_n = \frac{n+1}{2n}$.

Отже, щоб сформувати належним чином алгоритмічне мислення, необхідно, ознайомити учнів із складанням елементарних програм.

Враховуючи психологічні особливості підліткового віку, зацікавлення чимось незвичним ще на початку вивчення алгебри доцільно показати учням як виглядає блок-схема, показати як можна подавати процес розв'язування завдань у вигляді блок-схем. Як показує досвід, школярам подобається алгоритмічні приписи подавати у вигляді блок-схем і навпаки. Уміння подати свої міркування у вигляді блок-схеми суттєво дисциплінує мислення учнів. Перші блок-схеми можуть бути простими для складання, головне, щоб учні зрозуміли хід думок та запам'ятали послідовність дій. Наочність блок-схем є одним із засобів попередження типових помилок учнів. Так, наприклад, відомо, що розкриваючи дужки перед якими стоїть знак «мінус», учні забувають змінити знаки доданків у дужках на протилежні. Щоб запобігти таким помилкам, можна перед учнями поставити завдання самостійно скласти блок-схему відкривання дужок в залежності від знаку перед дужками.

Практичне значення використання блок-схем чи алгоритмічних приписів згідно теорії поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна полягає в тому, що процес формування нових дій відбувається легше, без заучування нового матеріалу, так як він засвоюється в процесі виконання алгоритму шляхом мимовільного запам'ятовування.

Спроможність учнів піддавати алгоритмізації свої дії, мислити алгоритмічними категоріями, є важливим засобом попередження помилок як під час вивчення теми, так і в подальшому, зокрема під час складання ДПА та ЗНО.

ПІСЛЯСЛОВО

1. Успішність учнів з алгебри в основній школі обумовлена багатьма чинниками: технологіями навчання, майстерністю вчителя, ефективними засобами і методами навчання тощо. Значущим чинником виступає також і превентивно-педагогічна діяльність вчителя і учнів, яка ініціюється потребою заздалегідь передбачати помилкові дії учнів, виявляти їх, з'ясовувати причини

появи, долати, підвищуючи цим самим результати навчання. Вона має здійснюватися в межах навчально-пізнавальної діяльності, підпорядковуючись меті і завданням останньої. Але аналіз психолого-педагогічної літератури, а також стану проблеми в теорії і практиці сучасної школи доводить, що, не дивлячись на те, що помилки учнів та робота над ними постійно знаходяться в полі зору психологів, методистів, педагогів, учених-математиків, відсутня науково обґрунтована методика виявлення причин появи типових математичних помилок учнів, їх попередження та виправлення.

2. Повноцінна превентивна діяльність як і всяка інша має включати потреби, мотиви, мету, умови досягнення мети, планування, дії та операції. До переліку таких дій входять виявлення, аналіз, попередження, виправлення математичних помилок учнів. Успішно організована, превентивна діяльність багатофункціональна, виконує у навчальному процесі низку важливих функцій: діагностичну, прогностичну, попереджувальну, стимулюючу, навчальну, розвивальну, виховну, коригуючу, методичну, емоційно-збережувальну, психологічну та інші. Вона має здійснюватись на основі важливих дидактичних принципів: індивідуального підходу до учнів, диференційованого підходу до організації навчального процесу, систематичності й послідовності, розвитку мнемонічної діяльності, цілеспрямованого формування алгоритмічних і евристичних прийомів розумової діяльності, усвідомлення усіма учнями навчального матеріалу, мотивації позитивного ставлення до навчання, зв'язку теорії з практикою тощо.

3. Навчання алгебри і не тільки без появи помилкових дій учнів неможливе. Вони виникають як з об'єктивних, так і суб'єктивних причин. Вчителю важливо знати типові з них, щоб працювати на попередження, а в разі допущення учнями – своєчасно виявляти їх. Типові математичні помилки учнів у навчанні алгебри доцільно розглядати в системі, групуючи за змістовими лініями курсу: вирази і дії над ними; рівняння і нерівності; функції і їх графіки. Такий підхід обумовлений тісним зв'язком між знаннями учнів, набутими на кожному з етапів вивчення певної змістової лінії.

4. У ході експериментального дослідження було встановлено

ефективність таких прийомів та методів превентивно-педагогічної діяльності як: пояснення нового матеріалу на основі повторення, узагальнення й систематизації відомого, постійного зв'язку між вивченим і новим; візуалізація навчального матеріалу через опорні схеми, карти знань, піктограми; провокація учнів на помилку через розв'язування завдань із «пастками»; використання прийомів ейдетики, холістичного навчання для кращого запам'ятовування навчального матеріалу; обернених задач; використання установок на запам'ятовування, завдань на розвиток самоконтролю; поетапне формування розумових дій (за П. Я. Гальперіним); використання контрприкладів для виявлення та виправлення помилок; використання методу аналогії та протиставлення з метою запобігання хибної аналогії; розкриття софізмів; розв'язування задач з несформульованим питанням, задач з неповним або надлишковим складом умови, задач, що мають декілька розв'язків, задач на міркування, провокативних задач; складання завдань учнями.

Під час вивчення перетворень виразів ефективним виявилося використання принципу систематизації основних теоретичних положень, формул та умінь і навичок їх використання, узагальнення знань і умінь учнів, які торкаються тотожних перетворень, засвоєних на попередньому етапі вивчення даної змістової лінії, прогнозування помилок та їх попередження.

З метою запобігання помилок учнів при вивченні рівнянь та нерівностей доцільним виявилося: виділення орієнтовної основи діяльності з пошуку плану розв'язування рівнянь і нерівностей певного виду та виокремлення особливостей розв'язування дробових нерівностей.

Змістова лінія функції і їх графіки потребує особливого підходу в превентивній діяльності. З метою запобігання помилок необхідно, щоб учні усвідомили поняття функції, області визначення, області значень, графіка функції, вміли визначати властивості функцій за побудованими графіками.

В організації та проведенні роботи над помилками учнів під час вивчення алгебри доцільним і ефективним є використання ІКТ, програмних засобів навчального призначення CRAN1, GeoGebra, AGrapher, MathCad; створення інфографіки за допомогою сервісу Piktochart; створення схем та карт знань за допомогою сервісу Midmeister та програми Mindjet Mind Manager; створення презентацій в PowerPoint.

5. Результати педагогічного експерименту підтвердили можливість та технологічну ефективність використання вчителями запропонованої в дослідженні методичної системи попередження математичних помилок у навчанні алгебри в основній школі. Упровадження запропонованої методичної системи організації превентивної діяльності у навчанні суттєво сприяє підвищенню ефективності процесу навчання алгебри, рівня досягнень математичної підготовки учнів основної школи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексєва М .І. Мотиви навчання учнів. Київ: Рад. школа. 1974. 118 с.

2. Алгебра: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів / Буковська О. І., Васильєва Д. В., Глобін О. І., Сільвестрова І. А. Київ: Педагогічна думка, 2017. 320 с.

3. Алгебра з комп’ютером /М. Львов, Н. Львова. Київ: шк. Світ. 2007. 128с.

4. Асанов Р.А. Работа над ошибками при обучении математике // Из опыта-преподавания математики в школе. Пособие для учителей. Сост.: А.Д. Семушин, С. Б. Суворова. Москва: «Просвещение»,1978. С. 70 - 77.

5. Бабанский Ю. К. Методы обучения в современной школе. Москва: Просвещение. 1985. 207 с.

6. Бабанский Ю. К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса: Методические основы Москва: Просвещение, 1982. 192 с.

7. Балл Г. А. Об основных положениях и некоторых применениях теории познавательных задач. *Вопросы психологии.* 1984. № 3 С. 31- 41.

8. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. 3–тє вид., перероб. і допов. / Г. П. Бевз. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

9. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Відродження, 2015. 288с.

10. Бевз Г.П. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Освіта, 2016. 254 с.

11. Бевз Г.П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Відродження, 2017. 272с.

12. Благодир Л. А. Робота над помилками як одна з форм подолання прогалин у знаннях і вміннях учнів. *Психолого-педагогічні проблеми сільської школи*: зб. наук. праць Уманського державного педагогічного університету ім. Павла Тичини / редкол.: Побірченко Н. С. (голов. ред) та ін. Умань: Жовтий О. О., 2009. Вип. 30. С. 62–70.

13. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Впровадження сучасних інформаційних технологій на уроках математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини* / редкол.: Мартинюк М. Т. (голов. ред) та ін. Умань: Жовтий О. О., 2008.Ч. 2. С. 75–82.

14. Благодир Л. А., Швець В. О. Математичні помилки як об'єкт наукових досліджень. *Наукові записки Національного педагогічного*

університету імені М. П. Драгоманова. Серія: Педагогічні та історичні науки / МОН України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. Вип. 93. С. 19–28.

15. Благодир Л. А. Помилки учнів у навчанні алгебри: практичний аспект. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*: міжнар. зб. наук. робіт. Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2011. Вип. 35. С. 147–153.

16. Благодир Л. А. Превентивна культура вчителя математики: знання та уміння. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Вип. 33. Київ-Вінниця: Планер, 2012. С. 223–226.

17. Благодир Л. А., Швець В. О. Превентивна діяльність вчителя математики: зміст і структура. *Дидактика математики: проблемы и исследования*: межд. сб. науч. работ. Донецк: ТЕАН, 2010. Вып. 36. С. 13–18.

18. Благодир Л. А., Швець В. О. Функції і принципи превентивної діяльності вчителя математики. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова.* Серія №3*: Фізика і математика у вищій і середній школі*: зб. наук. праць. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. №8. С. 17–23.

19. Благодир Л. А., Швець В. О. Формування вмінь і навичок превентивної діяльності майбутнього вчителя математики. *Вища освіта України:* теоретичний та науково-методичний часопис. №3(46). Том 2. Матеріали міжнар. наук.-практ. конф. «Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології». Київ, 2012. С. 38–46.

20. Благодир Л. А. Превентивна діяльність під час навчання школярів математики. *Математика в рідній школі,* 2014. №2. С. 16–20.

21. Благодир Л. А. Формування методичної компетентності майбутніх учителів математики у ВНЗ. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*: наук. журнал / голов. ред. А. А. Сбруєва. Суми: Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2016. №2 (56). С. 180–187.

22. Благодир Л. А. Упередження помилок учнів з алгебри у процесі вивчення змістової лінії «Вирази». *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія: Педагогіка,*

психологія, філософія / редкол.: С. М. Ніколаєнко (відп. ред.) та ін. Київ: Міленіум, 2018. Вип. 291. С. 25–30.

23. Благодир Л. А. Алгоритмічна компетентність як складова інформаційно-цифрової компетентності учня. *Проблеми підготовки сучасного вчителя*: збірник наук. праць Уманського держ. пед. ун-ту імені Павла Тичини. / редкол.: Безлюдний О.І.(голов. ред.) та ін.Умань: Візаві, 2018. Вип.17. С. 148–155.

24. Благодыр Л. А., Швец В. А. Алгебраические ошибки школьников: содержание и причины. *Mathtech 2012*: *proceedings of the international conference*. Vol. 1. Shumen-Bulgaria: Konstantin Preslavsky University Press, 2012. С. 222–227.

25. Благодыр Л. А., Швец В. А. Предупреждение алгебраических ошибок – предпосылка успешного обучения. *Сборник научни трудове частни и обществени науки, организация, управление и методика на обучението въ ввисшите училища.* Ч II. Шумен: НВУ «В. Левски», 2014. С. 76–79.

26. Блонский П. П. Память и мышление .Санкт-Петербург.: Питер, 2001. 288 с.

27. Богоявленский Д. Н., Менчинская Н. А. Психология усвоения знаний в школе. М.: Изд. АПН РСФСР, 1959. 346 с.

28. Богоявленський Д. Н. Формирование приемов умственной работы учащихся как путь развития мышления и активизации учащихся. *Вопросы психологии.* 1962. №4. С. 75 - 81.

29. Божович Е.Д. Некоторые вопросы обучения по образцам (в школе). *Вопросы психологии.* 1980. № 2. С. 135–139.

30. Божович Л. И. Изучение мотивации поведения детей и подростков. Москва: Педагогика, 1972. 351 с.

31. Болтянский В.Г. Преодолеть заблуждения, связанные с ОДЗ. *Математика в школе*. 1975. № 5. С. 12–15.

32. Бондар С, Бондар В. Оновлення змісту освіти і процесу навчання у школі : Сучасні тенденції. *Математика в школі.*2006. № 4. С. 8 - 13.

33. Брадис В. М., Минковский В. Л, Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях: пособие для учителей .Москва: Просвещение, 1967. 191 с.

34. Великий тлумачний словник сучасної української мови / Уклад. і голов. ред. В.Т. Бусел. – К.: Ірпінь: ВТФ „Перун”, 2004. – 1440 с.

35. Векслер С.И. Найти и преодолеть ошибку [Текст] // Математика в школе . – 1989. №5. С. 40-42.

36. Вікова та педагогічна психологія: навч. посіб. / [О.В. Скрипченко, Л.В. Долинська та ін.].Київ: Каравелла, 2006. – 344 с.

37. Вікова психологія / За ред. Г.С.Костюка. Київ: Вища школа, 1976. – 269с.

38. Выготский, Л. С. Вопросы детской психологии / П. С. Выготский .Санкт-Петербург: Союз, 1997. 224 с.

39. Выготский Л.С. Педагогическая психология. Москва: Педагогика, 1991. 479с.

40. Гальперин П. Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка / П. Я. Гальперин. Москва: Высшая школа, 1985. – 156 с.

41. Гальперин П. Я. Несколько разъяснений к гипотезе умственных действий / П. Я. Гальперин – Вопросы психологии. – 1960. – № 4. – С. 141 - 148.

42. Гальперин П. Я. Современное состояние теории поэтапного формирования умственных действий / П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина // Вестник МГУ. Психология. 1979. № 4. С. 54 - 63.

43. Гальперин П. Я. Типы ориентировки и типы формирования действий и понятий / П. Я. Гальперин // Докл. АПН РСФСР. 1958. № 2. С. 12 - 22.

44. Гончаренко С. Український педагогічний словник / С. Гончаренко. – К. : Либідь, 1997. – 376 с.

45. Гончаренко С. У. Методика навчання і наукових досліджень у вищій школі / С. У. Гончаренко. - Київ: Вища школа, 2003. - 323 с.

46. Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я. И. Груденов. Москва: Педагогика, 1987. – 159 с.

47. Груденов Я.И. , Середа А.М., Середа В.И. Психология подсказывает методике [Текст] // Математика в школе . – 1990. - №6. – С. 33-34..

48. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. Москва: Просвещение, 1990. 224 с.

49. Грузін О.І., Неліна О.Є. Система опорних фактів шкільного курсу геометрії. Харків: Світ Дитинства, 2000. 128 с.

50. Давыдов В.В. Формирование учебной деятельности школьников. Москва: Педагогика, 1982. – 216 с.

51. Далингер В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. для учителя. Москва: Просвещение, 1991. – 80 с.

52. Даль В.И. Толковый словарь живого великорусского языка: в 4 т. Москва: Русский язык, 1989. Т. 2. 780 с.

53. Данилов М.А. Об условиях развития познавательной самостоятельности и активности учащихся на уроках. Москва: Просвещение, 1963. – 248 с.

54. Дидактика современной школы: Пособие для учителей / Б.С.Кобзарь, Г.Ф. Кумарина, Ю.А. Кусый и др. Под. ред В.А.Онищука. – Київ: Рад. шк., 1987. 351 с.

55. Державний стандарт базової та повної загальної середньої освіти : затверджений Постановою КМУ від 23.11.2011 № 1392. URL: http://www.mon.gov.ua/ua/often-requested/state-standards/.

56. Дубинчук О.С., Мальований Ю.І., Дичек Н.П. Методика викладання алгебри в 7–9 класах: Посібник для вчителя. Київ: Рад. шк., 1991. 254 с.

57. Енциклопедія освіти / Акад. пед. наук України; головний ред В. Г. Кремінь – Київ: Юрінком Інтер, 2008. – 1040 с.

58. Жалдак М.И. GRAN1 – математика для всех // Компьютеры. Программы. –1995. –№5(20). – С.72-76.

59. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп’ютерно-орієнтованих систем навчання математики. *Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання*. Зб. наук праць. Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова. Випуск 7. 2003. С. 3–16.

60. Зайцева Т.В. Розвиток розумової діяльності при вивченні алгебри і

початків аналізу з використанням нових інформаційних технологій Дис. канд. пед. наук: 13.00.02. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Київ. 2000.

61. Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII "Про освіту" https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19Закон України «Про повну загальну середню освіту» Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text

62. Закон України від 16.01.2020 №463-IX „Про повну загальну середню освіту" https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20

63. Запобігання математичним помилкам учнів: методичні рекомендації. Київ: Радянська школа, 1989. 88 с.

64. Зимняя И.А. Педагогическая психология. Учебник для вузов. Москва: «Логос», 1999. 384 с.

65. Зязюн І. А. Освітні технології у вимірах педагогіки рефлексії. *Світло*. 1996. № 1. С. 7 - 15.

66. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 264с.

67. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2016. 272с.

68. Ингенкамп К. Педагогическая диагностика. Москва: Педагогика, 1991. 169 с.

69. Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. Москва: Знание, 1968. – 288 с.

70. Калмыкова, З. И. Психологические предпосылки развивающего обучения /З. И. Калмыкова. //Физика в школе. 1991. №3. С.69-73.

71. Капіносов А. М., Корольський В. В.. Математична алгоритмічна компетентність: теоретико-методичні основи формування, структура та рівні. *Педагогіка вищої та середньої школи.* - 2013.Вип. 37. С. 78-84.

72. Костюк Г.С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості. Київ : Радянська школа, 1989. 608 с.

73. Котенко В. В. Рефлексивная задача как средство повышения обучаемости школьников в процессе изучения базового курса информатики:

автореф. дис. на соискание научной степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения математики».Омск, 2000. 16 с.

74. Краевский, В., Хуторской А. Основы обучения. Дидактика и методика: пособие для студентов высших учебных заведений. Москва: Академия, 2007. – 352 с.

75. Крамор В.С., Рябчинская В.Д. Формирование алгоритмической культуры учащихся. Москва: Просвещение, 1985. 186 с.

76. Критерії оцінювання навчальних досягнень з математики в системі загальної середньої освіти. *Математика в школі.* 2000. № 6. С. 2-7.

77. Крутецкий В.А. Основы педагогической психологии. Москва: Просвещение, 1972. 255 с.

78. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. Москва: Просвещение, 1968. 431 с.

79. Леонтьева М.Р., Суворова С.Б. Упражнения в обучении алгебре. Москва: Просвещение, 1985. 128 с.

80. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. Москва: Просвещение, 1981. 186 с.

81. Литцман В. Где ошибка? Москва: Физматгиз, 1962. 192 с.

82. Маделян Г.А. Психологический анализ ошибок при решении арифметических задач учащихся V-VI классов // Известия АПН РСФСР, 1955. Вып.71. С.149-190.

83. Мадера А.Г. Математические софизмы: Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям: Кн. для учащихся 7-11 кл. Москва: Просвещение, 2003. -112 с.

84. Майєргойз Д. М. К изучению математических ошибок учащихся // Математика в школе. 1950. № 1.С.15-24.

85. Мала Н. Розвиток мислення учнів на уроках математики // Математика в школі. 2002. № 5. С. 26 - 27.

86. Манвелов С.Г. Задания по математике на развитие самоконтроля учащихся Москва: Просвещение, 1997. 98 с.

87. Маркова А. К. Формирование мотивации учения: Книга для учителя Москва, 1990, 192с.

88. Менчинская Н.А., Моро М. И. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах. Москва: Просвещение. 1965. 223 с.

89. Методика викладання математики. Практикум / За ред. Г.П. Бевза. Київ: Вища школа, 1981. 200 с.

90. Нелін Є.П. Алгебра в таблицях (з Додатком): Навчальний посібник для учнів 7-11 класів. Харків: Світ дитинства, 1998. 116 с. (Додаток 56 с.).

91. Освітні технології : навч.-метод посіб. / О. М. Пєхота, А. З. Кіктенко, О. М. Любарська [та ін.] ; за ред. О. М. Пєхоти. Київ: А.С.К., 2003. 255 с.

92. Овчарук О. Л. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти. Стратегія реформування освіти в Україні. // Рекомендації з освітньої політики. Київ: «К. І. С.», 2003. С. 13 - 43.

93. Оржеховська В. М., Пилипенко О. І. Превентивна педагогіка: навч. метод. посібник . Одеса, 2006. 78 с.

94. Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9 -10 классах. Киев: Радянська школа, 1980. 143 с.

95. Осинская, В. Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике Київ: Радянська школа, 1989. 188 с.

96. Словник української мови: в 11 томах. — Том 7, 1976.

97. Пидкасистый П.И. Самостоятельная познавательная активность школьников в обучении: Теоретико-экспериментальное исследование. Москва: Педагогика, 1980. 240 с.

98. Підласий І. П. Як підготувати ефективний урок: Кн. для вчителя. Київ: Рад. шк., 1989. 204 с.

99. Підласий І. П. Продуктивний педагог. Настільна книга вчителя. Харків: Вид.група «Основа», 2009. 360с.

100. Програма Gran 1 для вивчення математики в школі й вузі / Укл. : М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко. Київ: КДПУ, 1992. 49 с.

101. Програма з математики для 5-9-х класів для загальноосвітніх навчальних закладів затверджена наказом МОН від 07.06.2017 № 804 Режим доступу: https://ru.osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/

102. Прокопенко Н.С., Захарійченко Ю.О., Кінащук Н.Л. Алгебра: підручник для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Вид-во «Ранок», 2016. 288 с.

103. Психологія: підручник / [упоряд. Ю. Л. Трофімов, В. В. Рибалка, П. А. Гончарук]. Київ: Либідь, 1999. 558 с.

104. Резніченко Н. Використання психолого-педагогічних засобів для формування навчальних умінь // Математика в школі. 2002. № 5. С. 27 - 30.

105. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. Москва: Изд-во АН СССР, 1958. 147 с.

106. Рубинштейн С. Л. Процесс мышления и закономерности анализа, синтеза и обобщения. Экспериментальные исследования. Москва: Изд.-во АН СССР, 1960. 168 с.

107. Сухомлинский В. А. О воспитании. Москва: Просвещение, 1979. 78с.

108. Талызина Н. Ф. Педагогическая психология. Москва: Издат. центр «Академия», 1998. 288 с.

109. Тарасенкова Н.А. Найти ошибку. *Математика в школе.* 1997. № 2. С. 31-34.

110. Фіцула М. М. Педагогіка : навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. Київ: Видавничий центр «Академія», 2002. 528 с.

111. Харламов И.Ф. Как активизировать учение школьников. Минск: Народна асвіта, 1975. 207 с.

112. Шеварев П. А. О роли ассоциаций в процессах мышления / П. А. Шеварев // Исследование мышления в советской психологии. Москва: Наука, 1966. С. 388-436.

113. Шеварев П. А. Опыт психологического анализа алгебраических ошибок. // Известия АПН РСФСР, 1946. № 3. С. 135-180.

114. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Кн. для учителя. Москва: Просвещение, 1986. 255 с.

115. Эльконин Д.Б. О структуре учебной деятельности / Д.Б. Эльконин // Избранные психологические труды. Москва: Педагогика, 1989. 560с. С.250-251.

116. Якиманская И. С. Знания и мышление школьника Москва: Знание, 1985. 78 с.

117. Якиманская И. С. Личностно ориентированное обучение в современной школе Москва: 1996. 96 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Приклади завдань на засвоєння способу розкладання

многочленів на множники за формулою:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$

1. Запишіть у вигляді квадрата одночлена вирази:

$$64;\ b^6;\ 16a^2;\ a^2b^2;\ 25m^4n^2;\ 1{,}44y^{10}x^6;\ 36a^4b^2c^8;\ 0{,}25x^{14}y^{12}z^{18}.$$

2. Розкладіть з використанням попередніх результатів на множники вирази:

$$b^6 - 64;\ 25m^4n^2 - a^2b^2;\ 36a^4b^2c^8 - 64;\ 1{,}44y^{10}x^6 - 0{,}25x^{14}y^{12}z^{18}.$$

3. Розкладіть на множники вирази:

$$25x^4 - 16;\ 0{,}04a^2 - \frac{9}{16}c^4;\ a^4 - 1;\ (3x+2)^2 - 25x^2;\ 36a^2 - (4+6m)^2.$$

4. Перетворіть вираз у многочлен:

$$(d-b)(d+b);\quad (3a+4b)(4b-3a);\quad (5x+7y)(5x-7y);\ (4a-b^3)(4a+b^3).$$

5. Замініть зірочки одночленом, щоб утворилась тотожність:

1) $(2x-3y)(*+*) = 4x^2 - 9y^2;$

2) $25m^2 - 9a^2b^2 = (5m - *)(*+*);$

3) $(4a - *)(* + 3x^2) = 16a^2 - 9x^4;$

4) $1 - * = (1-4z)(*+*).$

6. Обчисліть:

1) $35^2 - 15^2$; 2) $136^2 - 64^2$; 3) $43^2 - 27^2$; 4) $51{,}5^2 - 49{,}5^2$.

Додаток Б

Опорні схеми:

Вирази

1)

Числові вирази:

$3(2{,}35+6{,}2)-12$

Вирази зі змінними (буквені):

$10d-5c+1{,}3b+0{,}5a$

2)

Раціональні вирази

$2a-b;\ \frac{x+y}{4};\ \frac{5}{x+1};\ b+c-\frac{1}{a}.$

Цілі:

$2a-b;$

$\frac{x+y}{4}.$

Дробові:

$\frac{5}{x+1};$

$b+c-\frac{1}{a}.$

3)

Одночлени

$5;\ 20a^3c;\ 4a\cdot 5a^2\cdot c;\ 2x^2x^3;\ 8ab;\ x^5.$

Стандартний

$5;\ 20a^3c;\ 8ab.$

Не стандартний

$4a\cdot 5a^2\cdot c;\ 2x^2x^3:z^5.$

Розкладання многочленів на множники

Винесення спільного

Формула

Групування

4)

5)

Вираз має зміст $\Longleftrightarrow$ **Значення змінної, допустимі**

6) **ОДЗ** $\Longleftrightarrow$ **Всі допустимі значення змінної**

7)

Допустимі значення змінної

$\downarrow$

ОДЗ виразу
$\dfrac{3}{x+1}, x \neq -1.$

ОДЗ рівняння
$\dfrac{1}{x-3} = 5, x \neq 3$

Область визначення функції
$y = \dfrac{1}{x}, x \neq 0.$

Опорна схема скорочення раціональних дробів:

Скоротити дріб: $\dfrac{15-3x}{x^2-10x+25}$

$\downarrow$

Розкладемо чисельник на множники:

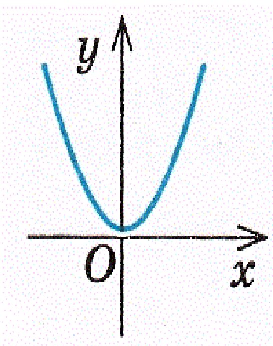
Додаток В

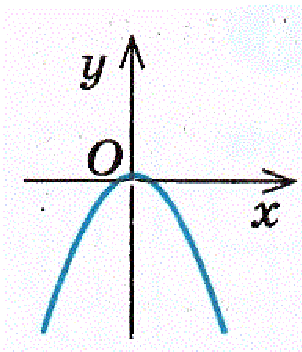
Опорні конспекти

Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості

Область визначення функції D(y): $x \geq 0$.
Область значення функції E(y): $y \geq 0$.
Графік функції проходить через початок координат – точку O(0;0).
Графік розміщений лише в I координатній чверті. Функція зростає при всіх $x \geq 0$, тобто, якщо значення *x* збільшується, то значення *y* збільшується. Наприклад: якщо $3 < 8$, то $\sqrt{3} < \sqrt{8}$.

Функція $y = x^2$ її графік та властивості

<table>
<tr><td colspan="2">Графік функції $y = x^2$ - парабола, її вітки є дзеркальними відображеннями відносно осі Oy;
Графік проходить через початок координат, точка O(0;0) – вершина параболи.</td></tr>
<tr><td>$y = x^2$
Область визначення
D(y): x – будь-яке число.


Область значень $E(y): y \geq 0$
графік розташований у
I і II координатних чвертях
при $x < 0$ функція спадає
при $x > 0$ функція зростає</td><td>$y = -x^2$
Область визначення
D(y): x – будь-яке число.


Область значень $E(y): y \leq 0$
графік розташований у III і IV координатних чвертях
при $x < 0$ функція зростає
при $x > 0$ функція спадає</td></tr>
</table>

Раціональні вирази. Раціональні дроби

Цілий вираз – вираз, що не містить дію ділення на вираз зі змінною.

Наприклад $\frac{t+1}{5}$; -4 ; x^2+y^2; $\frac{m}{2}+y^5$

Дробовий вираз – вираз, що містить дію ділення на вираз зі змінною.

Наприклад: $\frac{9}{x}$; $5y^3+\frac{4}{y}$; $8x$:(х-1); $\frac{a-3}{7b}$

Цілі та дробові вирази називають *раціональними виразами*

Наприклад: $4x^3-2x^2+5; \frac{a^3+b^3}{8}; \frac{5}{x}-3x; \frac{a+6}{8-a}; \frac{3b}{4}-\frac{b^2}{8}+\frac{6}{11}$.

Вираз має зміст, коли можна виконати всі математичні дії в даному раціональному виразі.

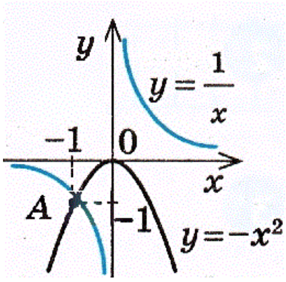
Дріб має зміст, коли його знаменник відмінний від нуля.

Наприклад: вираз $\frac{2x}{x-5}$ має зміст, якщо $x-5\neq 0$, тобто $x\neq 5$.

Знаходження області допустимих значень виразу

Областю допустимих значень* (ОДЗ) *виразу з однією змінною називають усі значення змінної, при яких цей вираз має зміст. **Алгоритм знаходження ОДЗ виразу:** 1. Прирівняти знаменники дробів, що входять у вираз, до нуля. 2. Знайти розв'язки отриманих рівнянь. 3. Записати ОДЗ, зазначивши, що отримані розв'язки до неї не входять.	Наприклад: ОДЗ виразу $\frac{x+7}{(x-2)(x+3)}$ складається з таких значень x, при яких $(x-2)(x+3)\neq 0$ 1. Прирівняємо знаменник до нуля: $(x-2)(x+3)=0$. 2. Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тоді розв'язки рівняння: $x=2,\ x=-3$. 3. ОДЗ: $x\neq 2,\ x\neq -3$.

Розв'язування рівнянь графічним способом

Орієнтовна основа дій розв’язування рівняння графічним способом	Приклад розв’язання рівняння $x^2+\frac{1}{2}=0$ графічним способом
1. Звести вихідне рівняння до вигляду *f* (*x*) = *g* (*x*), щоб у лівій і правій його частинах були відомі функції. 2. Побудувати в одній системі координат графіки функцій *y* = *f*(*x*) і *y*= *g*(*x*) та знайти точки їх перетину. 3. Визначити абсциси точок перетину графіків. 4. Записати у відповідь наближені розвязки рівняння, наприклад: $x \approx a$ 5. **Увага!** Щоб перевірити точність знайдених розвязків, потрібно підставити їх у вихідне рівняння.	1. $x^2+\frac{1}{2}=0; \frac{1}{x}=-x^2$ 2. Побудуємо графіки функцій: $y=\frac{1}{x}$, $y=-x^2$  3. Графіки функцій $y=\frac{1}{x}$ і *y*= -*x*^{2} перетинаються в точці A(-1;-1) 4. Абсциса точки перетину *x* = -1 5. $x \approx -1$. Перевірка: $(-1)+\frac{1}{-1}=0;$ 1-1=0; 0 = 0. Отже *x* =-1

Наочне виведення формули квадрата суми двочлена та квадрата суми тричлена

	a	b
a	a^2	ab
b	ba	b^2

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ba	b^2	bc
c	ca	cb	c^2

$$(a+b)^2 = aa+ab+ba+bb = a^2+2ab+b^2;\ (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Додаток Ж

Карта знань, створена за допомогою

програмного засобу MindManager