

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ**  
**ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ**  
**ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА**

*До 30-річчя Незалежності України*

# **СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТЕРМОМЕХАНІКИ – 2021**

**ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ  
МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ  
ТА МІНІ-СИМПОЗИУМІВ**

**Під загальною редакцією**  
академіка НАН України Р.М. Кушніра,  
д.ф.-м.н. Ю.В. Токового

ЛЬВІВ – 2021

**Сучасні проблеми термомеханіки – 2021:** збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції та міні-симпозіумів / за заг. ред. Р. М. Кушніра і Ю. В. Токового // Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2021. – 215 с.

Збірник містить наукові праці, присвячені актуальним проблемам сучасної теоретичної та прикладної термомеханіки і суміжних галузей. Вони були предметом обговорення на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки – 2021», яка проходила 15–17 вересня 2021 р. у Львові. В рамках конференції відбулися міні-симпозіуми «Математичне моделювання в механіці зв'язаних полів» (до 90-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України, д.ф.-м.н., професора Ярослава Йосиповича Бурака), «Математичні методи механіки і термомеханіки» (до 85-річчя від дня народження д.т.н., професора Юрія Михайловича Коляна), «Оптимізація в термомеханіці» (до 85-річчя від дня народження д.ф.-м.н., професора Василя Михайловича Вігака).

Для наукових працівників, докторантів, аспірантів, магістрів і студентів, які цікавляться означеними вище проблемами.

**Редактори:** академік НАН України Р.М. Кушнір,  
д.ф.-м.н., ст.н.с. Ю.В. Токовий

**Заступники редакторів:** д.ф.-м.н., проф. О.Р. Гачкевич,  
д.ф.-м.н., проф. Г.Т. Сулим,  
д.ф.-м.н., ст.н.с. А.В. Ясінський

**Відповідальні секретарі:** к.ф.-м.н., ст.н.с. В.С. Пакош,  
к.ф.-м.н. О.М. Вовк

**Члени редколегії:** академіки НАН України: д.ф.-м.н., проф. В.Л. Богданов, д.т.н., проф. Я.М. Григоренко, д.ф.-м.н., проф. В.Т. Грінченко, д.т.н., проф. Л.М. Лобанов, д.ф.-м.н., проф. І.О. Луковський, д.ф.-м.н., проф. В.Л. Макаров, д.т.н., проф. Ю.М. Мазцевитий, д.ф.-м.н., проф. З.Т. Назарчук, д.т.н., проф. В.В. Харченко; члени-кореспонденти НАН України: д.т.н., проф. О.Є. Андрейків, д.ф.-м.н., проф. О.Я. Григоренко, д.т.н., проф. В.С. Гудрамович, д.ф.-м.н., проф. Я.О. Жук, д.ф.-м.н., проф. Я.Я. Рушицький, д.т.н., проф. П.В. Ясній; д.ф.-м.н., ст.н.с. Б.Д. Дробенко, д.ф.-м.н., проф. А.П. Дзюба, д.ф.-м.н., проф. І.І. Дияк, д.ф.-м.н., проф. В.Г. Карнаухов, д.ф.-м.н., проф. Л.В. Курпа, д.ф.-м.н., проф. В.В. Лобода, д.ф.-м.н., проф. О.Г. Ніколаєв, д.ф.-м.н., проф. Я.М. Пастернак, д.ф.-м.н., проф. В.Г. Попов, д.ф.-м.н., ст.н.с. Б.В. Процюк, д.т.н., ст.н.с. Я.Д. П'янило, д.ф.-м.н., проф. М.П. Саврук, д.ф.-м.н., проф. І.К. Сенченков, д.ф.-м.н., проф. П.О. Стеблянко, д.ф.-м.н., проф. Є.Я. Чапля, д.т.н., проф. В.І. Шваб'юк.

**Рецензенти:** член-кореспондент НАН України І.М. Дмитрах,  
д.ф.-м.н., проф. П.П. Костробій

**Ухвалено до друку** Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (протокол № 6 від 8.07.2021)

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE  
PIDSTRYHACH INSTITUTE FOR APPLIED PROBLEMS  
OF MECHANICS AND MATHEMATICS

*Dedicated to the 30<sup>th</sup> Anniversary of Independence of Ukraine*

# CURRENT PROBLEMS OF THERMOMECHANICS – 2021

COLLECTION OF SCIENTIFIC PAPERS  
PRESENTED AT THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC  
CONFERENCE AND MINISYMPOSIA

**Edited by**

Roman M. Kushnir, Acad. NAS of Ukraine,  
and Yuriy.V. Tokovyy, Dr. of Sci.

LVIV – 2021

## ЗМІСТ

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В МЕХАНІЦІ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ

(міні-симпозіум до 90-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України,  
д. ф.-м. н., проф. Ярослава Йосиповича БУРАКА)

<b>Ярослав Йосипович Бурак</b> .....	15
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.00b.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.00b.pdf</a>	
<b>Анатолій Камінський, Михайло Дудик, Юлія Решітнік, Володимир Феньків:</b> Модель зрушення міжфазної тріщини під дією стискального навантаження, паралельного до її берегів.....	17
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.01.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.01.pdf</a>	
<b>Ольга Чернуха, Юрій Білушак, Анастасія Чучвара:</b> Апроксимація граничної умови на невідомому часовому інтервалі при моделюванні процесів конвективної дифузії у промислових фільтрах води.....	19
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.02.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.02.pdf</a>	
<b>Анастасія Чучвара, Ольга Чернуха, Юрій Білушак:</b> Математичне моделювання дифузії домішкової речовини у двофазній випадково неоднорідній смузі за рівномірного розподілу кульових включень.....	21
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.03.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.03.pdf</a>	
<b>Юлія Сенік:</b> Вплив нелінійності модулів пружності на поверхневі напруження.....	23
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.04.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.04.pdf</a>	
<b>Тарас Нагірний, Костянтин Червінка:</b> До моделювання впливу домішок на модулі пружності.....	25
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.05.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.05.pdf</a>	
<b>Олександр Григоренко, Ігор Лоза:</b> Коливання неоднорідних порожнистих п'єзокерамічних куль.....	27
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.06.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.06.pdf</a>	
<b>Наталія Вайсфельд, Зінаїда Журавльова:</b> Плоска псевдостатична задача поропружності для півплощини.....	29
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.07.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.07.pdf</a>	
<b>Анатолій Булат, Олександр Круковський, Вікторія Круковська:</b> Розв'язування зв'язаних задач для забезпечення безпеки гірничих робіт у вугільних шахтах.....	31
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.08.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.08.pdf</a>	
<b>Олександр Михайл, Алла Шевельова, Володимир Лобода:</b> Модель зони передруйнування для електропровідної тріщини у п'єзоелектричному біматеріалі.....	33
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.09.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.09.pdf</a>	
<b>Олександр Поліщук, Михайло Яджак:</b> Деякі загальні підходи до розв'язування алгоритмічно складних задач моделювання в механіці зв'язаних полів.....	35
<a href="http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.10.pdf">http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C01.10.pdf</a>	

УДК 539.375

## МОДЕЛЬ ЗРУШЕННЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ ПІД ДІЄЮ СТИСКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ, ПАРАЛЕЛЬНОГО ДО ЇЇ БЕРЕГІВ

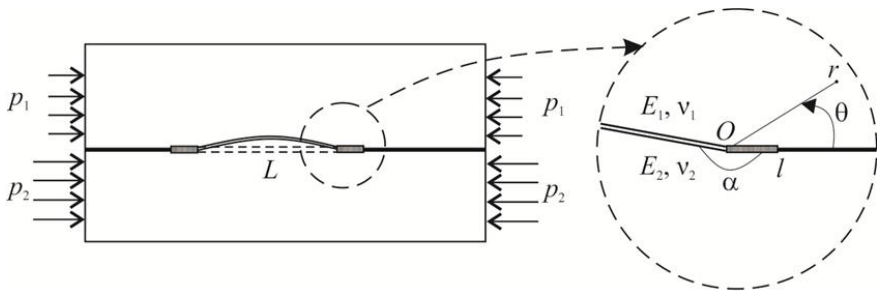
Анатолій Камінський<sup>1</sup>, Михайло Дудик<sup>2</sup>, Юлія Решітнік<sup>2</sup>, Володимир Феньків<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ;

<sup>2</sup> Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, м. Умань

Однією з актуальних проблем механіки деформівного твердого тіла є вивчення руйнування тіл при стисканні. До проблем цього класу відноситься задача про зрушення тріщини при стисканні тіла у напрямку, паралельному до її берегів. За такого навантаження відсутність сингулярності напружень (коефіцієнти інтенсивності напружень дорівнюють нулю) в околі вершини тріщини виключає можливість використання критеріїв лінійної механіки руйнування.

У цій роботі досліджено модель початкового етапу процесу руйнування кусково-однорідного тіла при стисканні вздовж плоскої межі поділу матеріалів, що містить міжфазну тріщину. Модель базується на припущенні про спільний вигин берегів тріщини в сторону менш жорсткого матеріалу, у поєднанні з їх фрикційним контактом. Ці процеси призводять до концентрації напружень з наступним утворенням маломасштабних зон передруйнування у з'єднувальному матеріалі в околі вершин (див. рисунок), що на даному етапі допускає застосування традиційних методів дослідження умов зрушення тріщини в рамках лінійної механіки руйнування.



Моделюючи зону передруйнування лінією розриву нормального переміщення, з використанням методу Вінера – Гопфа отримано розв'язок задачі про розрахунок параметрів цієї зони. Знайдено співвідношення, що визначають довжину і розходження меж зони. За допомогою деформаційного критерію сформульовано умову появи мікротріщини в зоні передруйнування, яку

використано для розрахунку граничного навантаження, що відповідає моменту зародження мікротріщини, та для дослідження залежності розмірів мікротріщини від навантаження. Запропоновано модель механізму зрушення початкової тріщини і подальшого руйнування тіла при стисканні, яка передбачає злиття тріщини зі зростаючою мікротріщиною при збільшенні навантаження. Аналогічний механізм зрушення міжфазної тріщини в умовах зсувних навантажень розглянуто в [1].

В рамках моделі виконано числовий розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування і мікротріщини, з аналізу яких зроблено такі висновки:

- Дія стискального навантаження вздовж плоскої межі розділу матеріалів кусково-однорідного тіла, що містить міжфазну тріщину, призводить до відхилення берегів тріщини в сторону менш жорсткого матеріалу на кут, який зростає зі збільшенням навантаження.
- Довжина зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі і розходження її меж нелінійно зростають зі збільшенням стискального навантаження. Відстань від вершини початкової тріщини до точки максимального розходження берегів зони і величина цього розходження майже прямо пропорційні до довжини зони передруйнування.
- Після досягнення критичного розходження берегів зони передруйнування відбувається утворення мікротріщини, довжина якої зі збільшенням навантаження зростає швидше, ніж довжина зони передруйнування. При цьому порівняно невелике збільшення навантаження супроводжується швидким зближенням мікротріщини з початковою тріщиною.
- Утворення зони передруйнування призводить до посилення концентрації напружень біля вершини тріщини, що можна усунути деструкцією матеріалу в околі вершини тріщини.

1. Камінський А.О., Дудик М.В., Кіпніс Л.А. Дослідження зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у пружному тілі при зсуві в рамках комплексної моделі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 4. – С. 95–108.

#### **A MODEL OF THE INITIATION OF AN INTERFACE CRACK UNDER THE ACTION OF COMPRESSIVE LOAD IN-PARALLEL TO ITS FACES**

*The initial stage of the fracture process of a piecewise homogeneous body under compression along a flat interface of materials, containing an interface crack, is considered. An analytical evaluation of the parameters of a small-scale pre-fracture zone in the joint material near the tips has been performed. The value of zone boundaries divergence was found. It was used later in the deformation criterion for the formation of a secondary microcrack in it. The mechanism of a crack start is proposed, which provides its merging with a growing microcrack under an increasing load.*