

## КОГЕЗІЙНА МОДЕЛЬ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

У рамках когезійної моделі побудовано розв'язок задачі про розрахунок параметрів зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, що виходить з куткової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Зона моделюється лінією розриву переміщення, на якій напруження задовольняють критерій руйнування Мізеса – Хілла. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задачу зведено до векторного рівняння Вінера – Гопфа, аналітичний розв'язок якого знайдено за допомогою методу послідовних наближень. Отримано рівняння для визначення довжини зони передруйнування і фазового кута напружень в зоні та вираз для розкриття тріщини в її вершині. Виконано числове дослідження параметрів зони передруйнування.

**Ключові слова:** міжфазна тріщина, зона передруйнування, когезійна модель.

**Вступ.** Поширення тріщини по межі поділу з'єднаних матеріалів є однією з найбільш ймовірних причин руйнування композитів. Зрушенню тріщини передують утворення на її продовженні у з'єднувальному матеріалі зони передруйнування з нелінійною залежністю деформацій від напружень. Для опису цього явища в механіці руйнування активно розвивається когезійна модель [12, 14, 15, 17–20], у якій зона передруйнування подається поверхнею розриву переміщень із заданими на ній феноменологічними співвідношеннями між силами притягання її берегів і відстанню між ними та є формальним аналогом моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла [9, 10].

Нелінійний характер визначальних рівнянь у зоні передруйнування зумовлює дослідження когезійних моделей переважно числовими методами. Проте у випадку маломасштабних зон передруйнування існує можливість аналітичного розрахунку їхніх параметрів за допомогою методу Вінера – Гопфа [8] з урахуванням зовнішнього навантаження шляхом асимптотичного зрощування розв'язків при формулюванні умови на нескінченності. Особливості реалізації цього методу в умовах плоскої деформації демонструють розрахунки параметрів міжфазних і бічних маломасштабних зон передруйнування в околі міжфазних тріщин у кусково-однорідних тілах в рамках моделі Леонова – Панасюка – Даглейла, в якій перехід матеріалу у передруйнівний стан визначається умовою Треска – Сен-Венана [3–6].

У рамках когезійної моделі в [2] з використанням для напружень умови руйнування Мізеса – Хілла отримано точний аналітичний розв'язок задачі про маломасштабну зону передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини тріщини, розташованої на плоскій межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів.

У цій роботі розглянемо аналогічну задачу для міжфазної тріщини, яка виходить з куткової точки ламаної межі поділу матеріалів. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задачу зводимо до векторного рівняння Вінера – Гопфа, яке розв'язуємо за допомогою методу послідовних наближень з використанням за базисне наближення розв'язку задачі плоскої межі поділу у частковому випадку, дослідженого в [2]. Знайдемо рівняння для визначення довжини зони передруйнування, фазового кута напружень у ній і розкриття тріщини в її вершині.

**1. Постановка задачі.** В умовах плоскої деформації розглядаємо задачу про розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у

✉ dudik\_m@hotmail.com

з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох пружних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга  $E_1, E_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$ . Враховуючи притаманну когезійним моделям анізотропію характеристик з'єднувального матеріалу у зоні та нехтуючи товщиною з'єднувального прошарку, моделюватимемо зону передруйнування лінією розриву переміщення, на якій нормальне і дотичне напруження задовольняють критерій Мізеса – Хілла

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_0}\right)^2 = 1, \quad (1)$$

де  $\sigma_0, \tau_0$  – опори відриву та зсуву з'єднувального матеріалу, що визначаються експериментально як середні значення нормального і дотичного напружень у зоні передруйнування при відповідній моді навантаження.

Оскільки довжину маломасштабної зони передруйнування  $\ell$  вважаємо значно меншою від довжини тріщини  $L$  та іншими актуальними розмірами тіла, а напружено-деформований стан досліджуємо в околі зони, це дозволяє звести вихідну задачу до задачі про лінію розриву скінченної довжини, яка поширюється з вершини напівнескінченної міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині по межі поділу двох різних пружних матеріалів (рис. 1).

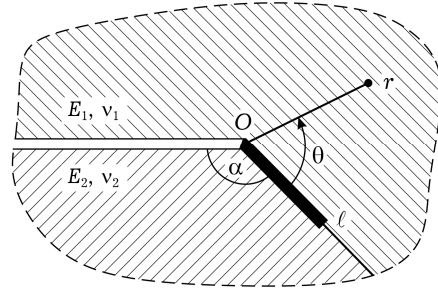


Рис. 1. Розрахункова схема задачі.

Умову на нескінченності формулюємо як вимогу зрощування шуканого розв'язку на відстанях  $\ell \ll r \ll L$  з розв'язком аналогічної задачі теорії пружності без лінії розриву, який відомий з робіт [3, 4].

Враховуючи умову (1) і вважаючи береги тріщини вільними від напружень, приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з крайовими умовами

$$\theta = -\alpha \cup 2\pi - \alpha : \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \quad (2)$$

$$\theta = 0 : \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad (3)$$

$$\theta = 0, \quad r < \ell : \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos \psi(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_0 \sin \psi(r),$$

$$\theta = 0, \quad r > \ell : \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \quad (4)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty : \quad \sigma_\theta \sim \sum_i C_i F_\sigma(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i}, \quad \tau_{r\theta} \sim \sum_i C_i F_\tau(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i}. \quad (5)$$

Тут  $\langle f \rangle$  – стрибок величини  $f$  на межі поділу;  $\psi(r)$  – фазовий кут напруження у зоні передруйнування, який в подальшому вважаємо сталим і рівним його середньому значенню  $\psi$ ;  $F_\tau(\alpha, \lambda), F_\sigma(\alpha, \lambda)$  – відомі функції з робіт [3, 4] відповідно;  $C_i$  – довільні сталі, які характеризують інтенсивність зовнішнього навантаження і вважаємо заданими за умовою; показники сингулярності напружень в околі вершини тріщини  $\lambda_i, -1 < \text{Re } \lambda_i < 0$ , є коренями характеристичного рівняння аналогічної задачі без зони передруйнування [3, 4]:

$$D(\lambda) = 0,$$

де

$$D(\lambda) = -(1 + \alpha_1)^2 t_1 - 4(1 + \alpha_1)(e - 1)t_1 t_2 - e^2(1 + \alpha_2)^2 t_3 + \\ + 4(e - 1)^2 t_1 t_3 + 4e(1 + \alpha_2)(e - 1)t_3 t_4 + 2e(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1)t_5,$$

$$\begin{aligned}
t_1 &= (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, & t_2 &= \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
t_3 &= (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
t_4 &= \sin^2(\lambda + 1)\alpha, & t_5 &= t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
e &= \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, & \alpha_{1(2)} &= 3 - 4\nu_{1(2)}.
\end{aligned}$$

У кінці зони передруйнування реалізується асимптотика, яка відповідає сингулярній частині розв'язку однорідної крайової задачі про напівнескінченну лінію розриву переміщень на прямолінійній межі поділу двох різних пружних матеріалів, аналогічну міжфазній тріщині. Зокрема, для напружень має місце асимптотика [16]:

$$r \rightarrow \ell + 0, \quad \sigma_\theta(r, 0) + i\tau_{r\theta}(r, 0) \sim \frac{k}{\sqrt{2\pi}} (r - \ell)^{-0.5+i\omega}, \quad (6)$$

де  $\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$ ,  $\beta = \frac{(1 + e\alpha_2) - (e + \alpha_1)}{(1 + e\alpha_2) + (e + \alpha_1)}$  – параметр Дандерса,  $k = k_1 + ik_2$  – локальний КІН в кінці зони.

Розв'язок сформульованої крайової задачі шукаємо у вигляді суми двох задач. Перша задача відрізняється від сформульованої тим, що замість першої пари умов з (4) використовуємо умови

$$\begin{aligned}
\theta = 0, \quad r < \ell: \quad \sigma_\theta &= \sigma_0 \cos \psi - \sum_i C_i F_\sigma(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i}, \\
\tau_{r\theta} &= \tau_0 \sin \psi - \sum_i C_i F_\tau(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i},
\end{aligned} \quad (7)$$

що відповідно до (5) призводить до спадання напружень на нескінченності як  $o(1/r)$ . Другою є аналогічна їй задача без лінії розриву, розв'язок якої відомий [3, 4], тому завдання полягає у розв'язанні першої задачі.

**2. Розв'язання задачі.** Застосувавши інтегральне перетворення Мелліна до рівнянь рівноваги, умов сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (2), (3), а також врахувавши другу пару з умов (4) і умови (7), прийдемо до векторного рівняння Вінера – Гопфа для першої задачі у смуззі, що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) + \mathbf{F}(p) = \mathbf{G}(p)\Phi^-(p), \quad -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2, \quad (8)$$

де

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \begin{pmatrix} \sigma_\theta(\rho\ell, 0) \\ \tau_{r\theta}(\rho\ell, 0) \end{pmatrix} \rho^p d\rho, \quad \mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \end{pmatrix},$$

$$F_1(p) = \frac{\sigma_0 \cos \psi}{p + 1} - \sum_i \frac{C_i F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \ell^{\lambda_i}}{p + 1 + \lambda_i},$$

$$F_2(p) = \frac{\tau_0 \sin \psi}{p + 1} - \sum_i \frac{C_i F_\tau(\alpha, \lambda_i) \ell^{\lambda_i}}{p + 1 + \lambda_i},$$

$$\Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} \right\rangle \Big|_{r=\rho\ell} \rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{G}(p) = -\frac{1 + \alpha_1}{D(-1 - p)} \begin{pmatrix} g_{11}(p) & 2g_{12}(p) \\ 2g_{21}(p) & g_{22}(p) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
g_{11}(p) &= e(1 + x_2)d_1(p)d_6(p) - (1 + x_1)d_2(p)d_4(p), \\
g_{12}(p) &= 2(1 - e)d_1(p)d_2(p) + e(1 + x_2)d_1(p)d_8(p) - (1 + x_1)d_2(p)d_7(p), \\
g_{21}(p) &= e(1 + x_2)d_1(p)d_9(p) - 2(1 - e)d_1(p)d_2(p) - (1 + x_1)d_2(p)d_5(p), \\
g_{22}(p) &= (1 + x_1)d_2(p)d_3(p) - e(1 + x_2)d_1(p)d_{10}(p), \\
d_1(p) &= p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), & d_2(p) &= p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \\
d_3(p) &= p \sin 2\alpha - \sin 2p(2\pi - \alpha), & d_4(p) &= p \sin 2\alpha + \sin 2p(2\pi - \alpha), \\
d_5(p) &= p \sin^2 \alpha + \sin^2 p(2\pi - \alpha), & d_6(p) &= p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha, \\
d_7(p) &= p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), & d_8(p) &= p \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \\
d_9(p) &= p \sin^2 \alpha + \sin^2 p\alpha, & d_{10}(p) &= p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha
\end{aligned}$$

( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – достатньо малі додатні числа).

Розв'язання рівняння (8) передбачає факторизацію матриці  $\mathbf{G}(p)$ , тобто подання її у вигляді добутку двох матриць  $\mathbf{G}^+(p)$ ,  $\mathbf{G}^-(p)$ , аналітичних у півплощинах  $\operatorname{Re} p < \varepsilon_2$  і  $\operatorname{Re} p > -\varepsilon_1$  відповідно. Проте матриця  $\mathbf{G}(p)$  не відноситься до жодного з відомих типів, які допускають точну факторизацію у замкнутій аналітичній формі [21]. У зв'язку з цим припускаємо можливість її розкладу на дві матриці, одна з яких допускає точну факторизацію, а стосовно іншої передбачається умова її малості порівняно з першою матрицею в області задання рівняння (8):

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{G}_0(p) + \mathbf{G}'(p), \quad |\mathbf{G}_0(p)| \gg |\mathbf{G}'(p)|, \quad -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2. \quad (9)$$

За  $\mathbf{G}_0(p)$  виберемо значення матриці  $\mathbf{G}(p)$  для плоскої межі поділу [2]:

$$\mathbf{G}_0(p) = \mathbf{G}(p)|_{\alpha=\pi} = -A \cdot \operatorname{tg} p \mathbf{G}(p) \mathbf{Q}(p), \quad (10)$$

де

$$G(p) = \frac{4(e + x_1)(1 + ex_2) \cos^2 p\pi}{(e + x_1)^2 + (1 + ex_2)^2 + 2(e + x_1)(1 + ex_2) \cos 2p\pi},$$

$$A = \frac{(1 + x_1)(1 + x_1 + e(1 + x_2))}{2(e + x_1)(1 + ex_2)}, \quad \mathbf{Q}(p) = \mathbf{I} + g(p)\mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут  $\mathbf{I}$  – одинична матриця,  $g(p) = i\beta \operatorname{tg} p\pi$ . Факторизацію матриці  $\mathbf{Q}(p)$  здійснюємо на уявній осі за допомогою формул Храпкова [13]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(p) &= \mathbf{Q}^+(p)\mathbf{Q}^-(p), \quad \operatorname{Re} p = 0, \\
\mathbf{Q}^\pm(p) &= r^\pm(p) [\operatorname{ch} \theta^\pm(p)\mathbf{I} + \operatorname{sh} \theta^\pm(p)\mathbf{J}], \quad (11)
\end{aligned}$$

де

$$r^\pm(p) = (1 - \beta^2)^{1/4} \exp \left[ \pm \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H_1(t)}{t + ip} dt \right], \quad H_1(t) = \frac{1 - \beta^2 \operatorname{th}^2 \pi t}{1 - \beta^2},$$

$$\theta^\pm(p) = \frac{\pm p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_2(t)}{t + ip} dt, \quad H_2(t) = \frac{\operatorname{arth}(\beta \cdot \operatorname{th} \pi t)}{t}.$$

Тут  $\mathbf{Q}^+(p)$  і  $\mathbf{Q}^-(p)$  – матриці, аналітичні у півплощинах  $\operatorname{Re} p < 0$  і  $\operatorname{Re} p > 0$  відповідно. Скалярні коефіцієнти матриці  $\mathbf{G}_0(p)$  факторизуємо за формулами [1, 8]:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)}, \quad \operatorname{Re} p = 0,$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} p\pi = \frac{p}{\mathcal{K}^+(p)\mathcal{K}^-(p)}, \quad \mathcal{K}^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0.5 \mp p)} \quad (12)$$

( $\Gamma(z)$  – гамма-функція Ейлера). Таким чином, остаточно маємо таку факторизацію матриці  $\mathbf{G}_0(p)$ :

$$\mathbf{G}_0(p) = \mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{G}_0^-(p), \quad \operatorname{Re} p = 0, \quad (13)$$

де

$$\mathbf{G}_0^+(p) = \frac{pG^+(p)}{\mathcal{K}^+(p)} \mathbf{Q}^+(p), \quad \operatorname{Re} p < 0,$$

$$\mathbf{G}_0^-(p) = \frac{-A}{G^-(p)\mathcal{K}^-(p)} \mathbf{Q}^-(p), \quad \operatorname{Re} p < 0.$$

Відповідно до прийнятих вище припущень подамо розв'язок рівняння (8) у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення  $\mathbf{G}'(p)$ :

$$\Phi^\pm(p) = \Phi_0^\pm(p) + \Phi_1^\pm(p) + \Phi_2^\pm(p) + \dots \quad (14)$$

Тоді (8) з урахуванням (9)–(14) у нульовому наближенні зводиться до рівняння

$$[\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1}(\Phi_0^+(p) + \mathbf{F}_0(p)) = \mathbf{G}_0^-(p)\Phi_0^-(p), \quad \operatorname{Re} p = 0, \quad (15)$$

де степінь « $-1$ » позначає обернену матрицю. Розв'язок рівняння (15), знайдений у [15] за допомогою методу Вінера – Гопфа [8] з урахуванням асимптотик (6), має вигляд

$$\Phi_0^+(p) = -\mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{F}_0^+(p), \quad \operatorname{Re} p < 0,$$

$$\Phi_0^-(p) = -[\mathbf{G}_0^-(p)]^{-1}\mathbf{F}_0^-(p), \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad (16)$$

де

$$\mathbf{F}_0^+(p) = \frac{1}{p+1} ([\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1} - [\mathbf{G}_0^+(-1)]^{-1}) \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} -$$

$$- \sum_i \frac{C_i \ell^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} ([\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1} - [\mathbf{G}_0^+(-1-\lambda_i)]^{-1}) \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_0^-(p) = -\frac{[\mathbf{G}_0^+(-1)]^{-1}}{p+1} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_i \frac{C_i \ell^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} [\mathbf{G}_0^+(-1-\lambda_i)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Для поправок  $\Phi_1^\pm(p)$  у першому наближенні з (8) отримаємо рівняння

$$\Phi_1^+(p) = \mathbf{G}_0(p)\Phi_1^-(p) + \mathbf{G}'(p)\Phi_0^-(p), \quad \operatorname{Re} p = 0,$$

в якому матрицю-збурення  $\mathbf{G}'(p)$ , згідно з (9), визначаємо як різницю

матриць  $\mathbf{G}(p) - \mathbf{G}_0(p)$ . Введемо векторну функцію  $\mathbf{F}_1(p) = -\mathbf{G}'(p)\Phi_0^-(p)$  і з урахуванням факторизації (13) матриці  $\mathbf{G}_0(p)$  отримаємо рівняння

$$[\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1}(\Phi_1^+(p) + \mathbf{F}_1(p)) = \mathbf{G}_0^-(p)\Phi_1^-(p), \quad \text{Re } p = 0, \quad (17)$$

подібне до (15). Виконавши заміну  $[\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1}\mathbf{F}_1(p)$  різницею крайових значень аналітичних векторів:

$$[\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1}\mathbf{F}_1(p) = \mathbf{F}_1^+(p) - \mathbf{F}_1^-(p), \quad (18)$$

де

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{[\mathbf{G}_0^+(z)]^{-1}\mathbf{F}_1(z)}{z-p} dz = \begin{cases} \mathbf{F}_1^+(p), & \text{Re } p < 0, \\ \mathbf{F}_1^-(p), & \text{Re } p > 0, \end{cases}$$

рівняння (17) розв'язуємо аналогічно до розв'язання рівняння (15) за допомогою методу Вінера – Гопфа у [2] і знаходимо поправку першого порядку за збуренням до розв'язку (16):

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(p) &= -\mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{F}_1^+(p), & \text{Re } p < 0, \\ \Phi_1^-(p) &= -[\mathbf{G}_0^-(p)]^{-1}\mathbf{F}_1^-(p), & \text{Re } p > 0, \end{aligned} \quad (19)$$

Наступні наближення отримуємо з (17)–(19) шляхом послідовних заміни  $\Phi_{i-1}^\pm(p) \rightarrow \Phi_i^\pm(p)$ ,  $\mathbf{F}_1(p) \rightarrow \mathbf{F}_i(p) = -\mathbf{G}'(p)\Phi_{i-1}^\pm(p)$ ,  $i = 2, 3, \dots$ . В результаті приходимо до загального розв'язку рівняння (8):

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= -\mathbf{G}_0^+(p) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^+(p), & \text{Re } p < 0, \\ \Phi^-(p) &= -[\mathbf{G}_0^-(p)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^-(p), & \text{Re } p > 0, \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$\mathbf{F}_n^\pm(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{[\mathbf{G}_0^+(z)]^{-1}\mathbf{G}'(z)[\mathbf{G}_0^-(z)]^{-1}\mathbf{F}_{n-1}^\pm(z)}{z-p} dz.$$

Умовою коректності розв'язку (20) є збіжність його рядів, тобто виконання нерівностей  $|\mathbf{F}_n^\pm(p)| < |\mathbf{F}_{n-1}^\pm(p)|$ , які еквівалентні умові

$$\left| [\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1}\mathbf{G}'(p)[\mathbf{G}_0^-(p)]^{-1} \right| < 1. \quad (21)$$

**3. Визначення параметрів зони передруйнування.** З розв'язку (20) отримуємо асимптотику

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) \sim & -\frac{1}{\sqrt{-p}} \mathbf{Q}^+(p) \left\{ [\mathbf{G}_0^+(-1)]^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - \sum_i C_i \ell^{\lambda_i} [\mathbf{G}_0^+(-1 - \lambda_i)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [\mathbf{G}_0^+(z)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^+(z) dz \right\}, \quad p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

З іншого боку, з (6) за теоремою абелевого типу [8] маємо

$$\Phi_1^+(p) + i\Phi_2^+(p) \sim \frac{k}{\sqrt{-2p\ell}} \Gamma(0.5 + i\omega)(-p)^{-i\omega}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Порівнюючи ці асимптотики та враховуючи обмеженість напружень в кінці

зони передруйнування, що призводить до умови  $k = 0$ , отримуємо векторне рівняння

$$\begin{aligned} & [\mathbf{G}_0^+(-1)]^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \sum_i C_i \ell^{\lambda_i} [\mathbf{G}_0^+(-1 - \lambda_i)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [\mathbf{G}_0^+(z)]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n(z) dz = 0. \end{aligned}$$

Перейшовши до його скалярного подання, прийдемо до трансцендентного рівняння для розрахунку довжини зони передруйнування:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_i \frac{C_i \ell^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-1 - \lambda_i)}{\sigma_0(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} X_1(\lambda_i) \right)^2 + \\ & + \left( \sum_i \frac{C_i \ell^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-1 - \lambda_i)}{\tau_0(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} X_2(\lambda_i) \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

з наступним обчисленням фазового кута напруження у зоні за формулою

$$\psi = \arctg \frac{\sigma_0 \sum_i \frac{C_i \ell^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-1 - \lambda_i)}{(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} X_2(\lambda_i)}{\tau_0 \sum_i \frac{C_i \ell^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-1 - \lambda_i)}{(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} X_1(\lambda_i)}.$$

Тут

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} X_1(\lambda) \\ X_2(\lambda) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_0^{-1} \left\{ \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{[\mathbf{G}_0^+(z)]^{-1} \mathbf{G}'(z) [\mathbf{G}_0^-(z)]^{-1}}{z + 1 + \lambda} dz \right\} \times \\ & \times [\mathbf{Q}^+(-1 - \lambda)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda) \\ F_\tau(\alpha, \lambda) \end{pmatrix}, \\ & \mathbf{M}_0 = \frac{\mathcal{K}^+(-1)}{G^+(-1)} \left\{ \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{[\mathbf{G}_0^+(z)]^{-1} \mathbf{G}'(z) [\mathbf{G}_0^-(z)]^{-1}}{z + 1} dz \right\} [\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1}. \end{aligned}$$

З означення вектора  $\Phi^-(p)$  у (8) отримуємо компоненти стрибка переміщення у вершині тріщини:

$$\langle \mathbf{u}(0, 0) \rangle = -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \Phi^-(0) = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} [\mathbf{G}_0^-(0)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^-(0).$$

Знайдені з цієї формули стрибки нормального і дотичного переміщень в зоні передруйнування можуть бути використані для пошуку граничного навантаження за прийнятою в моделі когезійної зони умовою [14, 20]

$$\left( \frac{\langle u_0(0, 0) \rangle}{\delta_n} \right)^2 + \left( \frac{\langle u_r(0, 0) \rangle}{\delta_\tau} \right)^2 = 1,$$

де  $\delta_n$ ,  $\delta_\tau$  – їх критичні значення, досягнення яких призводить до зрушення тріщини при суто відривному або зсувному характері деформацій у зоні.

**4. Аналіз отриманих результатів.** Чисельна реалізація знайденого розв'язку задачі при урахуванні наближень високого порядку ускладнена зростанням у (20) кратності інтегралів типу Коші. Це змушує обмежуватись невеликим числом доданків, які враховуються при обчисленнях накладанням замість (21) більш жорсткої умови на матрицю-збурення:

$$|[\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1} \mathbf{G}'(p) [\mathbf{G}_0^-(p)]^{-1}| \ll 1.$$

У зв'язку з цим найвищу ефективність наближеного розв'язку задачі про маломасштабну зону передруйнування очікуємо при кутах зламу межі поділу матеріалів  $\alpha$ , близьких до  $\alpha_0 = 180^\circ$ , якому відповідає нульове наближення (10) матричного коефіцієнта рівняння Вінера – Гопфа (8). При таких кутах зламу, як виявлено в [3], напружено-деформований стан біля вершини міжфазної тріщини визначається двома комплексно-спряженими показниками сингулярності  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_m$  і комплексним коефіцієнтом інтенсивності напружень  $K = K_1 + iK_2$ , який входить в коефіцієнти розв'язку (5):  $C_1 = \bar{C}_2 = \frac{KL^{-i\lambda_m}}{\sqrt{2\pi}}$ . Тому, розглядаючи лише випадки малих відхилень форми межі поділу від плоскої поверхні, подібно як у [3], задаватимемо зовнішнє навантаження безрозмірним параметром  $\sigma = \frac{|K|L^{\lambda_r}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}$  і фазовим

$$\text{кутом навантаження } \varphi = \arctg \frac{K_2}{K_1}.$$

Результати числових розрахунків параметрів зони передруйнування у першому наближенні наведено на рис. 2 – рис. 5. На рис. 2а – рис. 5а показано відносну довжину  $x = \frac{\ell}{L}$ ; на рис. 2б – рис. 5б – фазовий кут  $\psi$  напруження у зоні; на рис. 2в – рис. 5в – розкриття  $\delta u' = \frac{\delta u_1(0,0)}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}$ .

Всі обчислення виконано для  $E_1/E_2 = 0.5$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ . Для відношення опорів відриву і зсуву з'єднувального матеріалу введено позначення  $n$ :  $n = \frac{\sigma_0}{\tau_0}$ .

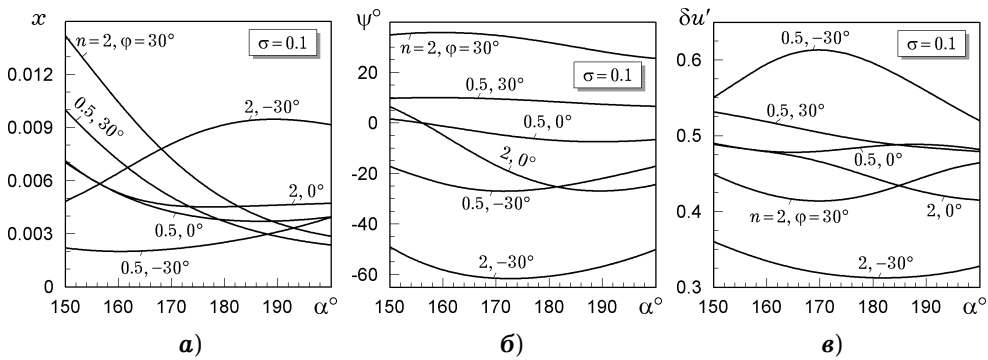


Рис. 2. Залежність параметрів зони передруйнування від кута зламу  $\alpha$ .

Згідно з рис. 2, параметри зони передруйнування залежать від кута зламу межі поділу матеріалів  $\alpha$ , відхиляючись як в сторону збільшення, так і зменшення від значень, що відповідають плоскій межі.

Довжина зони передруйнування  $x$  нелінійно зростає за величиною зі збільшенням зовнішнього навантаження, заданого безрозмірним параметром  $\sigma$  (рис. 3а). Залежність фазового кута  $\psi$  напруження у зоні від  $\sigma$  менш виражена, проте також спостерігається його повільне зростання зі збільшенням абсолютного значення навантаження (рис. 3б). Розкриття зони передруйнування  $\delta u'$  у вершині тріщини слабо залежить від безрозмірного параметра навантаження  $\sigma$  (рис. 3в).



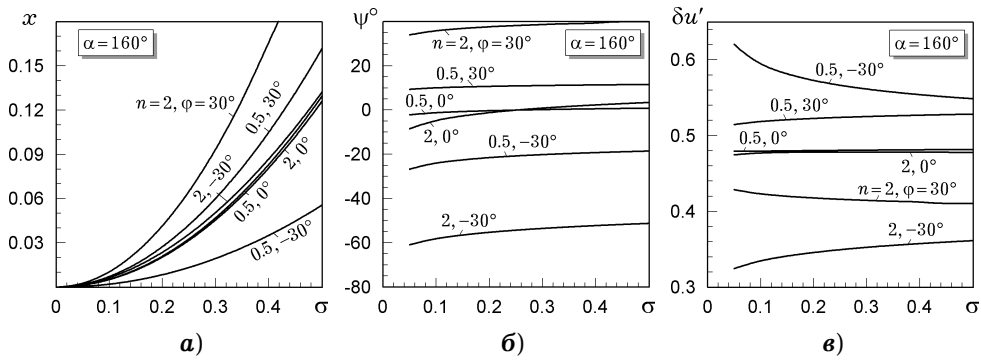


Рис. 3. Залежність параметрів зони передруйнування від безрозмірного параметра навантаження  $\sigma$ .

На рис. 4 подано залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута зовнішнього навантаження  $\varphi$ . Згідно з рис. 4а, у випадку більш пластичного з'єднувального матеріалу ( $n > 1$ ), довжина зони спочатку дещо зменшується зі збільшенням фазового кута зовнішнього навантаження, досягає мінімуму, потім збільшується, досягає максимуму і знову зменшується. У випадку більш крихкого з'єднувального матеріалу ( $n < 1$ ), довжина зони зі збільшенням фазового кута зовнішнього навантаження, збільшується, досягає максимуму, потім зменшується, досягає мінімуму і знову збільшується. Фазовий кут напружень у зоні передруйнування спочатку зростає синхронно з ростом фазового кута зовнішнього навантаження (рис. 4б), залишаючись, проте, меншим від нього, а потім стрибком набуває від'ємного значення з наступним збільшенням. Причиною стрибка є зміна знаку дотичного напруження в зоні. Поведінка розкриття тріщини в її вершині при зміні фазового кута навантаження виявляється протилежною поведінці довжини зони (рис. 4в).

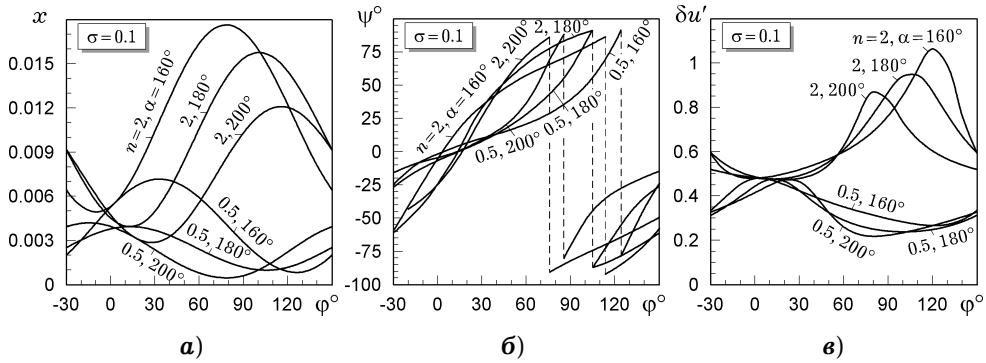


Рис. 4. Залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута  $\varphi$  зовнішнього навантаження.

На параметри зони передруйнування суттєво впливає відношення опорів відриву і зсуву з'єднувального матеріалу  $n = \sigma_0 / \tau_0$ . Як видно з рис. 5а, зі збільшенням опору відриву при сталому параметрі навантаження довжина зони передруйнування збільшується. Фазовий кут напруження в зоні при  $\varphi \leq 0$  є від'ємним і швидко спадає з ростом  $n$ , тоді як при  $\varphi > 0$  він є додатним і зростає зі збільшенням  $n$  (рис. 5б). Згідно з рис. 5в, зі збільшенням опору відриву при сталому параметрі навантаження розкриття тріщини в її вершині зменшується.

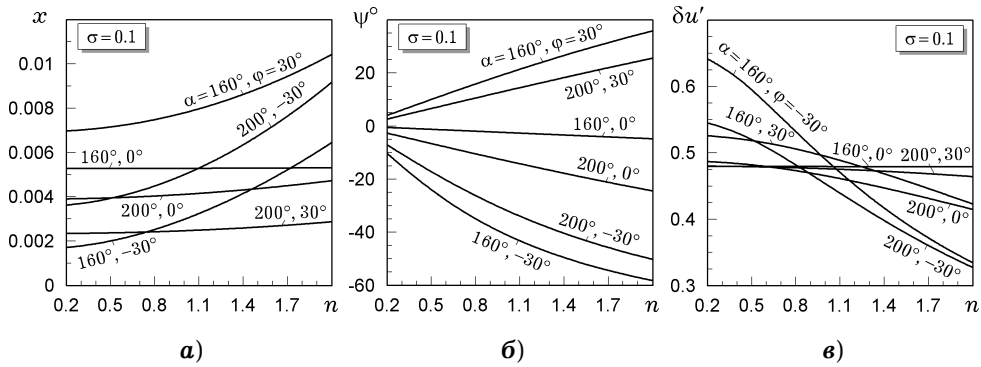


Рис. 5. Залежність параметрів зони передруйнування від відношення  $n$  опорів з'єднувального матеріалу відриву і зсуву.

Виконавши зворотне перетворення Мелліна знайдених в ході розв'язання задачі трансформант напружень, із залученням теореми про лишки можна визначити розвинення напружень в асимптотичні ряди в околі вершини тріщини після утворення зони передруйнування. Головні члени розвинень визначатимуться полюсами матричного коефіцієнта  $\mathbf{G}(p)$  рівняння (8) в інтервалі  $-1 < \text{Re } p < 0$ , яким відповідають нулі функції  $D(-1-p)$  у цьому ж інтервалі, що визначають, за постановкою задачі, показники сингулярності напружень біля вершини тріщини за відсутності зони передруйнування. Як зазначалось вище, для кутів зламу, близьких до  $\alpha_0 = 180^\circ$ , рівняння  $D(-1-p) = 0$  має комплексні корені. Таким чином, на відміну від моделей зони передруйнування з розривом лише однієї з компонент переміщення і умовою передруйнування Треска – Сан-Венана [3–6], в розглянутій когезійній моделі з умовою Мізеса – Хілла утворення зони передруйнування не змінює вихідний осцилюючий характер сингулярності у вершині тріщини. Такий результат є наслідком прийнятого в когезійній моделі припущення про розрив і нормального, і дотичного переміщень, що робить зону передруйнування подібною до міжфазної тріщини, до берегів якої прикладено сталі відривні і зсувні зусилля. Для усунення просторових осциляцій переміщень і напружень в околі кутової точки слід врахувати додаткові фактори, що впливають на напружено-деформований стан біля вершини тріщини, зокрема, контакт берегів та утворення в безпосередньому околі кутової точки області деструкції матеріалу з підвищеним рівнем деформацій, як це передбачається у комплексній моделі міжфазної тріщини [7, 11].

**Висновки.** За допомогою методу Вінера – Гопфа знайдено наближений аналітичний розв'язок задачі про розрахунок в умовах плоскої деформації в рамках моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла з використанням елементів когезійної моделі параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Отримано рівняння для визначення довжини зони і параметра змішування мод напружень в ній та формули для обчислення розкриття тріщини в її вершині. Показано можливість їх застосування для визначення граничного навантаження для змішаних мод. Здійснено числовий розрахунок параметрів зони та якісний аналіз їх залежності від кута зламу межі поділу матеріалів, зовнішнього навантаження і характеристик з'єднувального матеріалу.

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.  
Те саме: Gakhov F. D. Boundary value problems. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 564 p.

2. Дудик М. В. Аналітичний розв'язок плоскої задачі про когезійну зону передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2013. – **18**, вип. 4(20). – С. 84–95. – <http://lib.onu.edu.ua/en/issledovaniya-v-matematike-i-mehanike/>.
3. Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В. Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 2. – С. 103–114.  
Te same: Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. Development of a prefracture zone from an interface crack at a corner point of an interface of two elastic media // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, No. 2. – P. 121–135.
4. Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В., Дякон В. М. Вплив пластичності з'єднувального матеріалу на поворот міжфазної тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 1. – С. 45–52.  
Te same: Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V., Dyakon V. M. Influence of the plasticity of a joining material on the kink of an interface crack at the corner point of the interface of media // Mater. Sci. – 2014. – **50**, No. 1. – P. 46–54.
5. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О направлении развития тонкой пластической зоны в вершине трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 2. – С. 14–23.  
Te same: Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. On the direction of development of a thin fracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No. 2. – P. 136–144.
6. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 10. – С. 28–41.  
Te same: Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. Initial kinking of an interface crack between two elastic media // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 10. – P. 1090–1099.
7. Камінський А. О., Дудик М. В., Кіпніс Л. А. Дослідження зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у пружному тілі при зсуві в рамках комплексної моделі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 95–108.  
Te same: Kamins'kyi A. O., Dudyk M. V., Kipnis L. A. Investigation of the process zone near the tip of an interface crack in the elastic body in shear within the framework of the complex model // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 117–132.
8. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.  
Te same: Noble B. Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon Press, 1958. – x+246 p.
9. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
10. Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 1. – С. 49–68.  
Te same: Panasyuk V. V., Savruk M. P. Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics // Sov. Mater. Sci. – 1992. – **28**, No. 1. – P. 41–57.
11. Dudyk M. V., Kipnis L. A. Model of the structure of the near tip area of interface crack in a piece-homogeneous elastic-plastic body // Strength, Fracture and Complexity. – 2018. – **11**, No. 1. – P. 31–50. – DOI: 10.3233/SFC-180211.
12. Jin Z.-H., Sun C. T. Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bi-materials // Eng. Fract. Mech. – 2005. – **72**, No. 12. – P. 1805–1817.
13. Khrapkov A. A. Wiener–Hopf method in mixed elasticity theory problems. – St. Petersburg: B. E. Vedeneev VNIIG Publ. House, 2001. – 144 p.
14. Kishimoto K., Omiya M., Yang W. Fracture mechanics of bonding interface: a cohesive zone model // Sensors and Actuators: A. – 2002. – **99**. – P. 198–206.
15. Lee M. J., Cho T. M., Kim W. S., Lee B. C., Lee J. J. Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model // Int. J. Adhes. Adhes. – 2010. – **30**, No. 5. – P. 322–328.
16. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**, No. 1. – P. 98–103.
17. Sun C. T., Jin Z.-H. Modeling of composite fracture using cohesive zone and bringing models // Compos. Sci. Technol. – 2006. – **66**, No. 10. – P. 1297–1302.

18. Tvergaard V. Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids // Eng. Fract. Mech. – 2003. – **70**, No. 14. – P. 1859–1868.
19. Tvergaard V. Influence of plasticity on interface toughness in a layered solid with residual stresses // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**, No. 21. – P. 5769–5779.
20. Tvergaard V., Hutchinson J. W. On the toughness of ductile adhesive joints // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – **44**, No. 5. – P. 789–800.
21. Veitch B. H., Abrahams I. D. On the commutative factorization of  $n \times n$  matrix Wiener–Hopf kernels with distinct eigenvalues // Proc. Math. Phys. Eng. Sci. (Proc. R. Soc. A). – 2007. – **463**, No. 2078. – P. 613–639.

#### КОГЕЗИОННАЯ МОДЕЛЬ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ, ВЫХОДЯЩЕЙ ИЗ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ЛАМОНОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

*В рамках когезионной модели построено решение задачи о расчете параметров зоны предразрушения в соединительном материале в конце межфазной трещины, выходящей из угловой точки ломаной границы раздела двух различных однородных изотропных материалов. Зона моделируется линией разрыва смещения, на которой напряжения удовлетворяют критерию разрушения Мизеса – Хилла. С помощью интегрального преобразования Меллина задача сведена к векторному уравнению Винера – Хопфа, аналитическое решение которого найдено с помощью метода последовательных приближений. Получены уравнения для определения длины зоны предразрушения и фазового угла напряжения в зоне, а также выражение для раскрытия трещины в ее вершине. Выполнено численное исследование параметров зоны предразрушения.*

**Ключевые слова:** межфазная трещина, зона предразрушения, когезионная модель.

#### COHESIVE MODEL OF A PRE-FRACTURE ZONE NEAR THE TIP OF THE CRACK OUTCOMING FROM THE CORNER POINT OF THE BROKEN INTERFACE

*Within the framework of the cohesive model, a solution is constructed for calculating the pre-fracture zone parameters in the connecting material at the end of an interfacial crack outcoming from the corner point of the broken interface of two different homogeneous isotropic materials. The zone is modeled by the discontinuity line of displacement, on which the stresses satisfy the Mises – Hill failure criterion. By the Mellin integral transformation the problem is reduced to the Wiener – Hopf vector equation. Its solution is carried out using the method of successive approximations. The equations for calculating the pre-fracture zone length and the phase angle of stress in the zone, and the expression for the crack opening displacement in the tip are obtained. The numerical analysis of the pre-fracture zone parameters is carried out.*

**Key words:** interfacial crack, pre-fracture zone, cohesive model.

<sup>1</sup> Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,

<sup>2</sup> Уманськ. держ. пед. ун-т ім. П. Тичини, Умань