

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ФІЗИКИ

*Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти
природничо-математичних спеціальностей*

Укладачі: Дудик М. В., Решітник Ю. В., Декарчук С. О.

Умань
Бровари
АНФ груп
2021

Рецензенти:

Дякон В. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, директор Уманської філії Європейського університету;

Ковальов Л. Є., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики і фізики Уманського національного університету садівництва;

Краснобокий Ю. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Рекомендовано до друку вченою радою Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол № 17 від 25 травня 2021р.)

Математичні методи фізики : навч. посіб. для здобувачів вищої МЗ4 освіти природничо-математичних спеціальностей / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.: М. В. Дудик, Ю. В. Решітник, С. О. Декарчук. – Умань ; Бровари : АНФ груп, 2021. – 120 с.

У посібнику викладено теоретичні основи окремих розділів вищої математики (рівняння математичної фізики, варіаційне та операційне числення) для попередньої підготовки студентів до вивчення курсу теоретичної фізики. Наведено детальний аналіз стандартних методів та прикладів розв'язання типових задач. Запропоновано значну кількість задач для самостійного розв'язування.

Посібник буде корисним викладачам для підготовки і проведення лекцій і практичних занять з дисципліни та студентам закріплення теоретичного матеріалу і виконання індивідуальних домашніх завдань.

УДК 530(075.8)

© Дудик М. В., Решітник Ю. В.,
Декарчук С. О., уклад., 2021
© АНФ ГРУП, 2021

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
РОЗДІЛ 1. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.....	6
§ 1. Диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку	6
§ 2. Класифікація диференціальних рівнянь в частинних похідних	7
§ 3. Поперечні коливання струни. Рівняння гіперболічного типу	10
§ 4. Початкові та крайові умови.....	12
§ 5. Задача Коші. Метод Даламбера розв'язування задачі Коші (метод біжучих хвиль).....	13
§ 6. Метод відокремлення змінних. Метод Фур'є.....	15
§ 7. Рівняння параболічного типу.	20
§ 8. Інтеграл Фур'є.....	23
§ 9. Поширення теплоти в безмежному стержні.....	24
§ 10. Рівняння еліптичного типу	30
§ 11. Формули Гріна.....	30
§ 12. Формули Гріна для гармонічних функцій.....	32
§ 13. Інтегральні формули ля гармонічних функцій.....	33
§ 14. Сферичні та кульові функції. Поліноми Лежандра.	35
Приклади розв'язування задач	37
Тема 1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку	37
Індивідуальні домашні завдання до теми 1.....	39
Тема 2. Зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.....	39
Індивідуальні домашні завдання до теми 2.....	41
Тема 3. Задача Коші для рівнянь гіперболічного типу. Метод характеристик.....	41
Індивідуальні домашні завдання до теми 3.....	43
Тема 4. Метод розділення змінних (метод Фур'є).....	44
для рівнянь гіперболічного типу.....	44
Індивідуальні домашні завдання до теми 4.....	47
РОЗДІЛ 2. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ.....	49
§ 15. Поняття функціонала.....	49
§ 16. Основна задача варіаційного числення	49
§ 17. Необхідні умови існування екстремуму функціонала. Теорема Ейлера-Лагранжа	50

§ 18. Функціональна похідна. Інваріантність рівняння Ейлера-Лагранжа відносно перетворення координат	50
§ 19. Випадки повної інтегровності та перші інтеграли рівняння Ейлера-Лагранжа	56
§ 20. Екстремальні принципи у фізиці	59
§ 21. Достатні умови існування мінімуму (максимуму) функціонала	60
§ 22 Задачі на умовний екстремум.....	62
22.1. Ізопериметрична задача.....	62
22.2. Задача Лагранжа	64
§ 23. Функціонали від функцій багатьох змінних. Рівняння Ейлера-Остроградського	68
§ 24. Рівняння малих коливань систем із розподіленими параметрами.....	72
Приклади розв'язування задач	Ошибка! Закладка не определена.
Тема 5. Задачі на умовний екстремум. Екстремалі функціоналів.....	79
Індивідуальні домашні завдання до теми 5.....	85
Тема 6. Варіаційне числення.....	86
Індивідуальні домашні завдання до теми 6.....	86
РОЗДІЛ 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ.....	88
§ 25. Оригінали та зображення.....	88
§ 26. Основні властивості перетворення Лапласа	90
§ 27. Обернене перетворення Лапласа. Способи відновлення оригіналу за відомим зображенням	100
§ 28. Застосування операційного числення до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.....	102
Приклади розв'язування задач	106
Тема 7. Відшукування зображень за означенням. Основні властивості перетворення Лапласа. Зображення узагальненої одиничної функції. Диференціювання оригіналу.....	106
Індивідуальні домашні завдання до теми 7.....	107
Тема 8. Теорема про множення зображень (теорема Бореля). Обернене перетворення Лапласа. Способи відновлення оригіналу за відомим зображенням.....	108
Індивідуальні домашні завдання до теми 8.....	109
Тема 9. Розв'язання систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	111
Індивідуальні домашні завдання до теми 9.....	112
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	118

ПЕРЕДМОВА

Сучасна фізична наука, як наука про природу та її закони, служить теоретичним фундаментом всього природознавства. Її квінтесенцією є теоретична фізика, яка не лише узагальнює у фундаментальних принципах, законах і теоріях знання про властивості і поведінку об'єктів природи та закономірності протікання природних явищ, але й формулює нові постулати і принципи, створює нові теорії, передбачає нові ефекти. На відміну від курсу загальної фізики, в якому основним методом дослідження є, передусім, експеримент, курс теоретичної фізики ґрунтується на іншому методі пізнання природи – теоретичному, що являє собою аналіз математичних моделей, за допомогою яких виявляються властивості, особливості і зв'язки природних об'єктів у тих або інших умовах.

Призначенням курсу «Математичні методи фізики» є ознайомлення студентів природничо-математичних спеціальностей з математичним апаратом теоретичної фізики. Базову складову цього апарату студенти мали можливість засвоїти в рамках таких обов'язкових, традиційних дисциплін цих спеціальностей як вища математика, лінійна алгебра і аналітична геометрія. Пропонований курс «Математичні методи фізики» доповнює математичну підготовку студентів вивченням додаткових розділів математики, які сприятимуть більш ефективному розумінню засобів розв'язання специфічних задач теоретичної фізики. До даного курсу віднесено розгляд понять класичної теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних та методів їх розв'язання, основ операційного та варіаційного числення. Засвоєння курсу сприятиме також досягненню більш загальної мети: формування у студентів цілісного уявлення про основні математичні моделі фізичних явищ і процесів та методи їх дослідження, виявлення з їх допомогою особливостей поведінки фізичних об'єктів, оволодіння уміннями висувати гіпотези і будувати моделі, застосовувати математичні методи фізики для опису фізичних моделей реальних явищ і процесів; використання набутих знань і вмій для розв'язання прикладних задач; підвищення рівня загальної культури теоретичних розрахунків.

Тематично посібник поділений на три розділи: рівняння математичної фізики, операційне числення, варіаційне числення, кожен з яких включає велику кількість розв'язаних завдань. В кінці кожного розділу містяться індивідуальні домашні завдання для студентів. Також наведено список рекомендованої літератури для більш детального розгляду матеріалу з кожного розділу.

Посібник буде корисним викладачам для підготовки і проведення лекцій і практичних занять з дисципліни та студентам закріплення теоретичного матеріалу і виконання індивідуальних домашніх завдань.

РОЗДІЛ 1

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

§ 1. Диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку

Вивчення багатьох питань теоретичної фізики в математичному плані зводять до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку. Загальний вигляд лінійного рівняння другого порядку відносно шуканої функції $u(x, y)$ з двома незалежними змінними x і y такий:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y), \quad (1)$$

де A, B, C, D, E, F – певні функції x та y . Якщо $f(x, y) = 0$, то рівняння (1) називають однорідним; якщо ж $f(x, y) \neq 0$ – неоднорідним. У випадку, коли коефіцієнти A, B, C, D, E, F – сталі, рівняння (1) називають лінійним рівнянням з сталими коефіцієнтами.

Більш загальним, ніж (1), є рівняння виду

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \quad (2)$$

де Φ – деяка (необов'язково лінійна) функція незалежних змінних x, y , шуканої функції u і її частинних похідних першого порядку. Рівняння (2) лінійне відносно похідних другого порядку.

Всю сукупність лінійних рівнянь можна поділити на 3 типи. Кожному з цих трьох типів рівнянь відповідає певне рівняння найпростішого виду, яке називають канонічним. Віднесення рівняння до того чи іншого типу залежить від співвідношення між коефіцієнтами A, B, C при похідних другого порядку; далі це уточнимо математично.

З метою зведення рівняння (2) до канонічної форми здійснимо заміну незалежних змінних за формулами

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (3)$$

які встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками (ξ, η) і (x, y) належних плоских областей. Функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ вважатимемо неперервними разом з частинними похідними першого та другого порядку. Обчислимо похідну

$$u = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

або інакше

$$u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x; \quad (4)$$

аналогічно

$$u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y;$$

далі

$$u_{xx} = (u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x)_x,$$

тобто
$$u_{xx} = u_{\xi x} \varphi_x + u_{\xi} \varphi_{xx} + u_{\eta x} \psi_x + u_{\eta} \psi_{xx} \quad (5)$$

Формули (4) для u застосуємо до u_{ξ} :

$$u_{\xi x} = u_{\xi\xi} \varphi_x + u_{\xi\eta} \psi_x.$$

Аналогічно

$$u_{\eta x} = u_{\eta\xi} \varphi_x + u_{\eta\eta} \psi_x.$$

Підставляючи $u_{\xi x}$ і $u_{\eta x}$ в (5), знаходимо:

$$u_{xx} = (u_{\xi\xi} \varphi_x + u_{\xi\eta} \psi_x) \varphi_x + u_{\xi} \varphi_{xx} + (u_{\eta\xi} \varphi_x + u_{\eta\eta} \psi_x) \psi_x + u_{\eta} \psi_{xx},$$

або
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_x \psi_x + u_{\eta\eta} \psi_x^2 + u_{\xi} \varphi_{xx} + u_{\eta} \psi_{xx}, \quad (6)$$

Аналогічно обчислюємо ще похідні:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_y \psi_y + u_{\eta\eta} \psi_y^2 + u_{\xi} \varphi_{yy} + u_{\eta} \psi_{yy}, \quad (7)$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \varphi_x \varphi_y + u_{\xi\eta} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + u_{\eta\eta} \psi_x \psi_y + u_{\xi} \varphi_{xy} + u_{\eta} \psi_{xy}. \quad (8)$$

Підставляючи знайдені значення u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} в рівняння (2), дістанемо:

$$au_{\xi\xi} + 2bu_{\xi\eta} + cu_{\eta\eta} + \Phi_1(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0, \quad (9)$$

де Φ_1 – деяка нова функція своїх аргументів і

$$\begin{aligned} a &= A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2, \\ b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_x\psi_y, \\ c &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2, \end{aligned} \quad (10)$$

Безпосередня перевірка вказує, що

$$b^2 - ac \equiv (B^2 - AC)(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)^2. \quad (11)$$

§ 2. Класифікація диференціальних рівнянь в частинних похідних

За загальноприйнятою класифікацією вважають, що рівняння (1.2) належать до:

- 1) **гіперболічного** типу, коли $B^2 - AC > 0$
- 2) **еліптичного** типу, коли $B^2 - AC < 0$
- 3) **параболічного** типу, коли $B^2 - AC = 0$.

Це слід розуміти так. Якщо умова $B^2 - AC > 0$ справджується в деякій області Δ площини x, y , то кажуть, що в області Δ рівняння (1.2) належить до гіперболічного типу; аналогічно говорять і про інші типи рівнянь – еліптичний, параболічний.

Із тотожності (1.11) випливає, що при заміні незалежних змінних за формулами (1.3) тип рівняння (1.2) не зміниться. Справді, відповідність між ξ, η і x, y взаємно однозначна, якобіан перетворення (1.3) відмінний від нуля: $\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x \neq 0$ (ця умова випливає з розгляду неоднорідної системи рівнянь $d\xi = \varphi_x dx + \varphi_y dy, d\eta = \psi_x dx + \psi_y dy$, яка повинна допускати відмінні від нуля однозначні розв'язки для dx, dy).

Розглянемо зведення рівняння (1.2) до канонічної форми у трьох випадках: $B^2 - AC > 0, B^2 - AC < 0, B^2 - AC = 0$.

1) $B^2 - AC > 0$ в деякій області Δ площини x, y . У цьому випадку існують такі функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ в області Δ , що заміною змінних (1.3) рівняння (1.2) зводиться до найпростішої форми

$$u_{\xi\eta} + \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi u_\eta) = 0, \quad (1)$$

яку називають канонічною.

Далі подаємо лише метод відшукування функцій φ та ψ перетворення (1.3), яке зводить рівняння (1.2) до канонічної форми (1): умови існування функцій φ та ψ детально не аналізуємо.

Якщо $A \equiv C \equiv 0$ в розглядуваній області, то рівняння (1.2) за допомогою ділення на $2B$ відразу зводиться до канонічної форми. Тому вважатимемо, що хоча б один з цих двох коефіцієнтів відмінний від нуля. Наприклад, в усіх точках області Δ нехай буде $A \neq 0$. У цьому випадку за $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ в формулах (1.3) слід взяти функції, які перетворюють в нуль коефіцієнти a та c зведеного рівняння (1.9), тобто які є розв'язками рівнянь

$$\begin{aligned} a = A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 &= 0 && : \varphi_y^2 \\ c = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 &= 0 && : \psi_y^2 \end{aligned}$$

Ці квадратні відносно $\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ та $\frac{\psi_x}{\psi_y}$ рівняння зовсім однакові. Кожне з них

розпадається на два рівняння типу

$$\frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (2)$$

які в свою чергу приводять, як це обґрунтовується в курсах диференціальних рівнянь, до розгляду звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

У відокремленій формі ці останні рівняння такі:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (3)$$

Отже, в розглянутому випадку функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$, що перетворюють в нуль коефіцієнти a та c , є розв'язками рівнянь (3). Тут $b \neq 0$ (це видно з тотожності (1.11)), і за допомогою ділення 2 в рівняння (1.9) зводиться до канонічної форми.

Загальні розв'язки двох рівнянь (3), тобто

$$\varphi(x, y) = c_1, \quad \psi(x, y) = c_2 \quad (4)$$

називають характеристиками рівнянь (1.2). Самі рівняння (3) є диференціальними рівняннями характеристик. Ніякі дві характеристики з двох різних сімейств не дотикаються одна одній, тому що праві частини (3) різні. Розглянутий метод зведення рівняння (1.2) називають перетворенням рівняння (1.2) до характеристик.

Канонічний тип гіперболічного рівняння подають і в іншій формі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}), \quad (5)$$

тому при заміні змінних

$$\xi = \alpha + \beta; \eta = \alpha - \beta$$

друга похідна $u_{\xi\eta}$ в (1) перетворюється в різницю $\frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$. Дійсно, якщо

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta),$$

то
$$u_{\xi} = u_{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + u_{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(u_{\alpha} + u_{\beta}), \quad u_{\eta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha} - u_{\beta}),$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha} + u_{\beta})_{\eta} = \frac{1}{2} \left[(u_{\alpha} + u_{\beta})_{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + (u_{\alpha} + u_{\beta})_{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right] = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\alpha}) - \frac{1}{4}(u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}) = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

Отже, у випадку $B^2 - AC > 0$ рівняння (1.2) зводиться до канонічної форми, коли за нові незалежні змінні ξ, η обрати функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$, що визначають різні сімейства його характеристик.

2) $B^2 - AC < 0$ в області Δ площини x, y . У цьому випадку в області Δ існують такі функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$, що заміною змінних (1.3) рівняння (1.2) зводиться до канонічної форми:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \Phi_1(\xi, \eta, u, u_{\xi}u_{\eta}) = 0. \quad (6)$$

Переконатися в справедливості цього твердження можна так. Коли здійснити формально таке саме перетворення, як і в першому випадку, то матимемо знову канонічне рівняння (1), яке в змінених позначеннях має вигляд:

$$u_{\sigma\tau} + \Phi(\sigma, \tau, u, u_{\sigma}u_{\tau}) = 0 \quad (7)$$

(замість ξ, η введено нові позначення незалежних змінних σ, τ).

Оскільки $\sqrt{B^2 - AC} = i\sqrt{AC - B^2}$, диференціальні рівняння (3) будуть мати вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + i\sqrt{AC - B^2}}{A}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - i\sqrt{AC - B^2}}{A},$$

і їм відповідають комплексно спряжені загальні розв'язки, які подамо у вигляді:

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c_1 \quad \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = c_2. \quad (8)$$

Отже, незалежні змінні виявляються в цьому випадку комплексно спряженими:

$$\sigma = \varphi(x, y) + i\psi(x, y); \quad \tau = \varphi(x, y) - i\psi(x, y).$$

Щоб переписати рівняння (7) в дійсних змінних, слід обрати за нові незалежні змінні такі дійсні функції:

$$\xi = \frac{1}{2}(\sigma + \tau), \quad \eta = \frac{1}{2i}(\sigma - \tau) \quad (9)$$

або
$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (10)$$

Тоді звичайні обчислення дають $u_{\sigma\tau} = \frac{1}{4}(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta})$, і остаточно канонічна форма еліптичного рівняння така:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad (11)$$

Отже, у випадку $B^2 - AC < 0$ рівняння (1.2) зводиться до канонічної форми заміною змінних

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

де ξ, η - нові незалежні змінні, а $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ - дійсна та уявна частини комплексно спряжених загальних розв'язків (1.1) диференціальних рівнянь характеристик. Зауважимо, що самі характеристики в розглядуваному випадку уявні.

3) $B^2 - AC = 0$ в області Δ площини x, y . У цьому випадку в області Δ існують такі дві функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$, що заміна змінних (1.3) приводить рівняння (2.2) до канонічної форми:

$$u_{\eta\eta} + \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \quad (12)$$

Знову подаємо тільки спосіб визначення функцій $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$.

Функцію $\varphi(x, y)$ підбираємо так, щоб коефіцієнт a перетвореного рівняння (1.9) дорівнював нулю:

$$a \equiv A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0.$$

На відміну від випадку гіперболічного рівняння тепер маємо тільки одне сімейство характеристик, диференціальне рівняння якого

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} \quad (13)$$

(вважаємо, як і раніше, що $A \neq 0 \pm$ в області Δ), і загальний розв'язок цього рівняння буде $\varphi(x, y) = const$.

Якщо за першу з двох нових незалежних змінних взяти функцію $\xi = \varphi(x, y)$, то не тільки коефіцієнт a , але й коефіцієнт b перетвореного рівняння дорівнюватиме 0 (це видно з тотожності (1.11) та умови параболічності $B^2 - AC = 0$). За другу незалежну змінну можна взяти функцію $\eta = \psi(x, y)$ де $\psi(x, y)$ - довільна двічі диференційована функція така, що не перетворює в нуль коефіцієнт c , ми й дістанемо шукану канонічну форму (12).

Отже, у випадку $B^2 - AC = 0$ рівняння (1.2) зводиться до канонічної форми, коли за нові незалежні змінні ξ і η взяти функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$, перша з яких визначає сімейство характеристик, а друга $\psi(x, y)$ довільна двічі диференційована функція, що не перетворює в нуль вираз $c = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0$

§ 3. Поперечні коливання струни. Рівняння гіперболічного типу

Розглянемо деякі фізичні задачі, які приводять до рівнянь в частинних похідних. Перша така задача - про рівняння коливань струни (рис. 1).

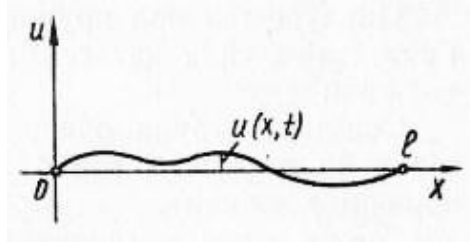


Рис. 1

Нехай струна, тобто натягнута пружна нитка, розташована вздовж вісі Ox . Будемо вважати її однорідною з лінійною густиною $\rho = \frac{dm}{dx} = const$, абсолютно гнучкою, пружною, туго натягнутою, а коливання – малі, плоскі і поперечні. Абсолютна гнучкість означає, що струна не працює на згин, тому сила натягу в довільній точці струни направлена завжди по дотичній до профілю струни. Припущення про пружність дає змогу застосовувати закон Гука: зміна сили натягування пропорційна зміні її довжини. Термін “малі коливання” означає, що відхилення точок струни від положення рівноваги мале порівняно з її довжиною, а нахил струни (тангенс кута нахилу) малий порівняно з одиницею. При плоских поперечних коливаннях струна весь час залишається в одній площині (назвемо її Oxu) і кожна точка струни, яка має в положенні рівноваги абсцису x , зберігає ту ж абсцису в процесі коливання; ордината цієї ж точки u змінюється з часом, тобто $u = u(x, y)$ - цю функцію і потрібно знайти. Для цього складемо диференціальне рівняння, якому задовольняє ця функція.

Розглянемо ділянку струни AB з абсцисами x і $x + dx$ на кінцях. Запишемо другий закон Ньютона для цієї ділянки. Позначимо сили натягу в

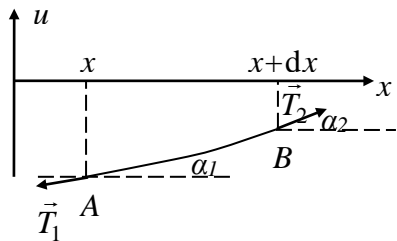


Рис. 1

точках A і B через \vec{T}_1 та \vec{T}_2 , а кути нахилу дотичної до вісі абсцис через α_1 та α_2 . Оскільки проекція прискорення на вісь Ox дорівнює 0, то з другого закону Ньютона отримаємо в горизонтальній проекції $\sum T = 0$,

$$T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 = 0, \text{ звідки}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} \cong 1 \Rightarrow T_1 \cong T_2 \cong T \quad (1)$$

В проекції на вісь Ou маємо:

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum T_x = T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1 \quad (2)$$

(причому $dm = \rho dx$).

Але $\sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$; аналогічно $\sin \alpha_2 = \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x}$.

Тоді рівняння (2) прийме вигляд:

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left[\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = T \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

звідки $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

де $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Розмірність “ a ” – м/с ($[T] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$, $[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}$, $a^2 = \left[\frac{T}{\rho} \right] = \text{м}^2 / \text{с}^2$).

Отже “ a ” має розмірність швидкості. Ми отримали рівняння вільних коливань струни, або одновимірне хвильове рівняння. З математичної точки зору це є диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних. Якщо ж на струну діє деяка зовнішня сила, то в рівнянні (3) з’явиться додатковий доданок φ , а рівняння прийме вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t). \quad (4)$$

Схожим виявляється двовимірне хвильове рівняння для малих коливань мембрани – тонкої пружної туго натягнутої плоскої пластини (барабан):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \varphi(x, y, t). \quad (5)$$

Закон коливання мембрани $u = u(x, y, t)$ описує профіль мембрани в будь-який момент часу влюбій її точці. В математичній фізиці зустрічаються диференціальні рівняння з усіма другими частинними похідними. Всі вони також описують хвильові процеси. Всі диференціальні рівняння типу (3-5) відносяться до класу рівнянь гіперболічного типу.

§ 4. Початкові та крайові умови.

Рівняння коливання струни (3) має безліч розв’язків. Щоб знайти тільки один розв’язок – той, що дає закон коливань даної конкретної струни, на шукану функцію $u(x, t)$ необхідно накласти певні додаткові умови, які впливають із фізичних міркувань і характеризують дану конкретну струну. В задачах математичної фізики ці додаткові умови звичайно бувають двох типів: початкові і крайові.

Початкові умови характеризують функцію $u(x, t)$ в початковий момент часу. Нехай в певний момент часу (наприклад $t = 0$) точки струни зміщені на відстані, які для різних « x » характеризуються функцією $f(x)$, а швидкість точок струни дорівнюють $F(x)$. Тоді початкові умови можна задати рівностями:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (1)$$

Граничні або крайові умови характеризують поведінку шуканої величини на границі розглядуваної області в будь-який момент часу.

Наприклад, якщо кінці струни закріплені нерухомо, то при $x=0$ і $x=\ell$ (лівий і правий кінець струни) відхилення $u=0$ в будь-який момент часу

$$u(0,t)=0, u(\ell,t)=0 \quad (2).$$

§ 5. Задача Коші. Метод Даламбера розв'язування задачі Коші (метод біжучих хвиль)

Розглянемо задачу про коливання нескінченної струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; u(x,0) = f(x); \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (1)$$

Цю задачу – її називають задачею Коші (задача з початковими умовами) – можна тлумачити як таку, що визначає закон коливання середньої частини достатньо довгої струни, якщо нехтувати впливом кінцевих її точок (нехтувати хвилями, що відбиваються від кінців і йдуть до середини струни). Оскільки в ідеалізованій постановці задачі кінцеві точки струни зовсім відсутні (струна вважається нескінченною), то відсутні також і крайові умови.

Можна довести, що задача Коші (1) має розв'язок і єдиний, якщо $f(x)$ – двічі диференційована функція, а $F(x)$ – диференційована один раз.

Щоб знайти загальний розв'язок диференційного рівняння (1), здійснимо перехід від незалежних змінних x, t до нових незалежних змінних ξ, η за формулами:

$$\xi = x - at; \eta = x + at. \quad (2)$$

Після такої заміни функція u буде залежати вже від змінних ξ, η .

Обчислюємо похідні в рівнянні (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = u_{\xi}(-a) + u_{\eta}(a) = a(-u_{\xi} + u_{\eta}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = a \left\{ - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\xi} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\eta} \right\} = a \left\{ - [a(-u_{\xi} + u_{\eta})]_{\xi} + [a(-u_{\xi} + u_{\eta})]_{\eta} \right\} = a^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}). \quad (4)$$

Аналогічно знаходимо для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_{\xi} \cdot 1 + u_{\eta} \cdot 1 = u_{\xi} + u_{\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = (u_{\xi} + u_{\eta})_{\xi} + (u_{\xi} + u_{\eta})_{\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \quad (5)$$

Підставляючи (4) і (5) в (1), отримаємо рівняння коливань струни в нових змінних:

$$u_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \cdot \partial \eta} = 0. \quad (6)$$

Це рівняння легко інтегрується. Перепишемо його в вигляді: $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$. Інтегруючи, маємо $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \varphi'(\xi)$, де $\varphi'(\xi)$ - довільна функція.

Повторне інтегрування дає:

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta), \quad (7)$$

де $\psi(\eta)$ - нова довільна функція. Повертаючись до вихідних незалежних змінних x і t , подамо (7) у вигляді:

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \quad (8)$$

Ми знайшли загальний розв'язок рівняння (1). Довільність функцій φ і ψ показує, що струна може здійснювати коливання різноманітного характеру. В кожному конкретному випадку функції φ і ψ визначаються з початкових умов, тобто залежно від функцій $f(x)$ та $F(x)$ в (1). Для з'ясування фізичного змісту аргументів функцій φ і ψ розглянемо одну функцію

$$u = \varphi(x - at). \quad (9)$$

Зміщення точки $x = x_0$ від положення рівноваги при $t = t_0$ дорівнює $u_0 = \varphi(x_0 - at_0)$.

Якщо, починаючи від моменту t_0 , зміщуючись від точки x_0 в напрямку вісі Ox за законом $x - at = x_0 - at_0$, тобто з сталою швидкістю $\frac{dx}{dt} = a$, то відповідно до (9) відхилення точки струни u буде незмінним. Оскільки x_0 довільне, відхилення всіх точок ніби зміщуються вздовж осі Ox з сталою швидкістю a . Інакше, зсувається в напрямі вісі Ox весь профіль струни. При цьому точки, струни не рухаються в напрямі вісі Ox , а коливаються перпендикулярно до вісі Ox . Ми маємо поперечну хвилю, яка поширюється в напрямі вісі Ox з швидкістю $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$; аналогічно $\psi(x + at)$ описує хвилю, що поширюється в протилежному напрямі.

Знайдемо тепер функції φ та ψ залежно від функцій $f(x)$ та $F(x)$, які задані за початковими умовами руху. За формулами (8), використовуючи початкові умови (1), отримаємо:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x) \end{cases}. \quad (10)$$

Друге рівняння (10) проінтегруємо:

$$\begin{cases} -\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(\alpha) d\alpha + c \\ \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \end{cases}. \quad (11)$$

Віднімаючи та додаючи рівняння (11), знайдемо

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(\alpha) d\alpha - \frac{c}{2}; \quad \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(\alpha) d\alpha + \frac{c}{2}; \quad (12)$$

Простою заміною аргументу x в функцію $\varphi(x)$ на $x - at$, а в $\psi(x)$ на $x + at$ знаходимо:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(\alpha) d\alpha - \frac{c}{2}; \quad \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(\alpha) d\alpha + \frac{c}{2}. \quad (13)$$

Додаючи ці функції і об'єднуючи з інтегралами в (1), матимемо на підставі (8):

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\alpha) d\alpha. \quad (14)$$

Формула (14) є розв'язком Даламбера задачі Коші для рівняння вільних коливань струни.

§ 6. Метод відокремлення змінних. Метод Фур'є

а) Суть методу

Розглянемо один з найбільш поширених методів розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних – метод Фур'є або метод розділення змінних. Розглянемо його на прикладі задачі про коливання струни, закріпленої в точках $x = 0$ і $x = l$. Функція $u(x,t)$ задовольняє рівнянню:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

з початковими і крайовими умовами типу:

$$u(x,0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \quad (2)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \quad (3)$$

Оскільки рівняння (1) лінійне і однорідне, його загальний розв'язок можна знайти як суму частинних розв'язків, тому що сума цих розв'язків будь-якого лінійного і однорідного диференціального рівняння також є його розв'язком. Тому спробуємо спочатку знайти частинні розв'язки рівняння (1), які задовольняють однорідні крайові умови (3).

В методі Фур'є частинні розв'язки шукають у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad (4)$$

тобто як добуток функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної. Підставляючи (4) в (1), дістанемо $XT'' = a^2 X''T$, або, поділивши на $a^2 XT$,

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}. \quad (5)$$

Ліва частина рівності (5) не залежить від x , а права – від t . Тому ліва частина (а отже, і права) не залежить ні від x , ні від t , тобто є сталою, яку позначимо $-\lambda$:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda. \quad (6)$$

Знак «-» перед λ поставлено лише для зручності дальших обчислень; λ буде визначено пізніше. З (6) маємо вже звичайні диференціальні рівняння (а не в частинних похідних) для визначення функцій $X(x)$ і $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (7)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (8)$$

Крайові умови (3) вносять свої обмеження згідно з (4):

$$\begin{cases} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(\ell,t) = X(\ell)T(t) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Якщо множник $T(t) = 0$, то дістанемо $u(x,t) = X(x)T(t) = 0$ - струна нерухома. Цей випадок тривіальний і надалі нас цікавити не буде. Тому крайові умови (9) вносять обмеження лише на функцію $X(x)$:

$$X(0) = X(\ell) = 0. \quad (10)$$

Для визначення функції $X(x)$ дістали таку задачу: знайти розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$X'' + \lambda X = 0 \text{ при умові } X(0) = X(\ell) = 0. \quad (11)$$

Звертаємо увагу на те, що параметр λ не заданий, а з'явиться в ході розв'язування поставленої задачі. Можливі значення параметра λ для яких існують нетривіальні ($X(x) \neq 0$) розв'язки задачі (11), повинні бути знайдені в процесі самого розв'язування задачі. Виявляється, що при деяких значеннях λ задача (11) дійсно має нетривіальні розв'язки. Тому питання про визначення $X(x)$ точніше слід формулювати так: знайти всі значення параметра λ , для яких існують нетривіальні розв'язки задачі (11) і відшукати ці розв'язки. Сформульована задача є окремим випадком важливої для математичної фізики більш загальної задачі Штурма – Ліувілля.

б) Частинні розв'язки задачі

Розв'язуючи диференціальне рівняння (11), врахуємо, що воно є лінійним з сталими коефіцієнтами. Візьмемо $X(x) = e^{rx}$ та складемо відповідне характеристичне рівняння:

$$r^2 + \lambda = 0. \quad (12)$$

Дослідимо можливі випадки: 1) $\lambda < 0$, 2) $\lambda = 0$, 3) $\lambda > 0$.

1) При $\lambda < 0$, задача не має нетривіальних розв'язків. Дійсно, корені характеристичного рівняння (12) дійсні, $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ і загальний розв'язок має вигляд:

$$X(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad (13)$$

де A, B – сталі інтегрування. Крайові умови задачі (11) дають:

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(\ell) = Ae^{r_1 \ell} + Be^{r_2 \ell} = 0 \end{cases}$$

Оскільки детермінант цієї однорідної системи відмінний від 0,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{r_1 \ell} & e^{r_2 \ell} \end{vmatrix} = e^{r_1 \ell} - e^{r_2 \ell} \neq 0$$

то система має лише єдиний тривіальний розв'язок $A = B = 0$. Підстановка цих значень у (13) приводить до висновку: при $\lambda < 0$, задача (11) не має розв'язків, відмінних від тотожного нуля.

2) При $\lambda = 0$ також не існує нетривіальних розв'язки задачі (11). Справді, обидва корені характеристичного рівняння (12) дорівнюють $r_1 = r_2 = 0$ і загальний розв'язок буде $X(x) = A + Bx$. Із крайових умов:

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(\ell) = A + B\ell = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0.$$

3) При $\lambda > 0$ корені характеристичного рівняння (12) уявні:

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}, \quad (14)$$

і розв'язок можна подати через тригонометричні функції:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad (15)$$

За крайовими умовами:

$$\begin{cases} X(0) = A \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 0) + B \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 0) = 0 \\ X(\ell) = A \cos(\sqrt{\lambda} \cdot \ell) + B \sin(\sqrt{\lambda} \cdot \ell) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Звідси} \quad A = 0, \quad (16)$$

$$B \sin(\sqrt{\lambda} \cdot \ell) = 0 \quad (17)$$

Нетривіальним розв'язком (15) буде при $B \neq 0$, і водночас

$$\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0 \quad (18)$$

$$\text{Таким чином, нетривіальний розв'язок (14) буде } X(x) = B \sin \sqrt{\lambda} \cdot x, \quad (19)$$

де B – довільна стала. Рівняння (17) служить для визначення можливих значень λ :

$$\sqrt{\lambda} \cdot \ell = n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (20)$$

($n \neq 0$, бо за умовою $\lambda > 0$). З (20) знаходимо

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad (21)$$

Відповідні різним значенням параметра λ функції $X(x)$ згідно з (19) такі:

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (22)$$

де B_n – довільні сталі, а $n = 1, 2, \dots, \infty$; від'ємні n лише змінюють знак функцій (21), який можна внести в довільні сталі B_n . Числа λ_n , визначені формулою (21), при яких існують нетривіальні розв'язки задачі (11), називаються власними числами цієї задачі, а відповідні їм нетривіальні розв'язки (22) (взяті без довільних множників B_n) називаються власними функціями задачі (11).

$$\text{Отже, задача (11) має власні числа} \quad \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2, \left(2\frac{\pi}{\ell}\right)^2, \dots, \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2, \dots, \quad (23)$$

і відповідні їм власні функції $\sin \frac{\pi}{\ell} x, \sin 2 \frac{\pi}{\ell} x, \dots, \sin n \frac{\pi}{\ell} x, \dots$. Отже, питання про визначення функції $X(x)$ розв'язане.

Згідно з (8) кожному значенню параметра $\lambda = \lambda_n$ відповідає своя функція $T = T_n(t)$. Тому рівняння (8) перепишемо так:

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{\ell} a\right)^2 T_n(t) = 0. \quad (24)$$

Ніяких додаткових умов для функції $T_n(t)$ немає. Характеристичне рівняння для (24) має вигляд $r^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell} a\right)^2 = 0$, його корені уявні, так що загальний розв'язок (24) такий:

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi}{\ell} at + D_n \sin \frac{n\pi}{\ell} at, \quad (25)$$

де C_n, D_n – довільні сталі. Згідно з представленням частинного розв'язку (4) задачі (1-3) $u(x,t) = X(x)T(t)$ ми тепер можемо знайти частинні розв'язки для кожного значення n :

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(C_n \cos \frac{n\pi}{\ell} at + D_n \sin \frac{n\pi}{\ell} at\right) B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

або, вводячи позначення $C_n B_n = a_n, D_n B_n = b_n$,

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} at + b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} at\right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (26)$$

де a_n, b_n – довільні сталі. Знайдені функції $u_n(x,t), n=1,2,\dots$, є частинними розв'язками диференціального рівняння (1), які задовольняють крайові умови (3). Початкові значення для $u_n(x,t)$, легко знайти з функції (26) і її похідної при $t=0$ маємо:

$$u_n(x,0) = a_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{n\pi a}{\ell} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Ми бачимо, що частинні розв'язки задовольняють початкові умови цілком певного типу.

в) Загальний розв'язок задачі

Оскільки диференціальне рівняння (1) лінійне і однорідне, то сума частинних розв'язків (26) теж є розв'язком рівняння і загальний розв'язок задачі можна шукати у вигляді такої суми:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t), \quad (27)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t\right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (28)$$

Ця функція задовольняє рівняння (1) і крайові умови (3), бо всі задовольняють їх. Ряд (28) вважаємо збіжним і двічі диференційованим. Загальний розв'язок повинен задовольняти початкові умови (2):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} \cdot 0 + b_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} \cdot 0\right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{\ell} \left(-a_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} \cdot 0 + b_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} \cdot 0 \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x = F(x)$$

або

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = f(x) \quad (29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{\ell} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = F(x) \quad \Big|_0^{\ell} \int \dots \sin \frac{m\pi}{\ell} x dx \quad (30)$$

Отже, якщо в (28) сталі a_n, b_n підібрати так, щоб справджувалися рівності (29-30), то функція (28) задовольнятиме також і початкові умови. Щоб знайти всі a_n , перепишемо (29) в розгорнутому вигляді і помножимо на $a_m \sin \frac{n\pi}{\ell} x$, та проінтегруємо по x від 0 до ℓ :

$$\int_0^{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot \left(a_1 \sin \frac{\pi}{\ell} x + a_2 \sin 2 \frac{\pi}{\ell} x + \dots + a_n \sin n \frac{\pi}{\ell} x + \dots \right) dx = \int_0^{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot f(x) dx \quad (31)$$

В лівій частині перетворення в 0 всі інтеграли, крім того, що має множник a_n . Справді, при $n \neq m$ маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left\{ \cos(m-n) \frac{\pi}{\ell} x - \cos(m+n) \frac{\pi}{\ell} x \right\} dx = \\ &= \frac{\ell}{2\pi} \left\{ \frac{1}{m-n} \sin(m-n) \frac{\pi}{\ell} x - \frac{1}{m+n} \sin(m+n) \frac{\pi}{\ell} x \right\} \Big|_0^{\ell} = 0 \end{aligned}$$

Отже, інтегрування виразу (31) дає:

$$a_n \int_0^{\ell} \sin^2 n \frac{\pi}{\ell} x dx = \int_0^{\ell} f(x) \sin n \frac{\pi}{\ell} x dx \quad (32)$$

Але $\int_0^{\ell} \sin^2 n \frac{\pi}{\ell} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (1 - \cos \frac{2n\pi}{\ell} x) dx = \frac{\ell}{2}$, тому із (32) \Rightarrow

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx. \quad (33)$$

Аналогічно із (30):
$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^{\ell} F(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx. \quad (34)$$

Отже, функція (28) є загальним розв'язком задачі (1-3); коефіцієнти a_n, b_n визначаються формулами (33-34). Звернемо увагу на те, що рівність (29) можна розглядати як розклад функції в ряд Фур'є по синусах в інтервалі $(0, \ell)$, а (33) як формули для коефіцієнтів такого розкладу.

г) Інтерпретація частинних розв'язків

З'ясуємо фізичний зміст частинних розв'язків (25). Для цього в u_n скористаємося перетворенням:

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = C \sin(\alpha + \varepsilon), \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \text{tg } \varepsilon = \frac{A}{B}. \quad (35)$$

Тоді вираз для u_n прийме вигляд:

$$u_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi a}{\ell}t + \varepsilon_n\right) \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{a_n}{b_n}. \quad (36)$$

Згідно (36) всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з частотою $\omega_n = n\frac{\pi a}{\ell}$ і знаходяться в однаковій фазі $\omega_n t + \varepsilon_n$. Амплітуда коливань залежить від x і дорівнює $C_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$. Окремі частинні розв'язки такі:

$$u_1 = c_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) \sin\frac{\pi}{\ell}x, \quad \omega_1 = \frac{\pi a}{\ell}; \quad u_2 = c_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \sin\frac{2\pi}{\ell}x, \quad \omega_2 = 2\frac{\pi a}{\ell},$$

і т.д. В кожному з цих розв'язків всі точки струни одночасно досягаються максимального відхилення (якщо $\sin(\omega_n t + \varepsilon_n) = \pm 1$) і одночасно проходять через положення рівноваги (якщо $\sin(\omega_n t + \varepsilon_n) = 0$). На малюнках показані профілі коливань u_1, u_2, u_3 - синусоїди.

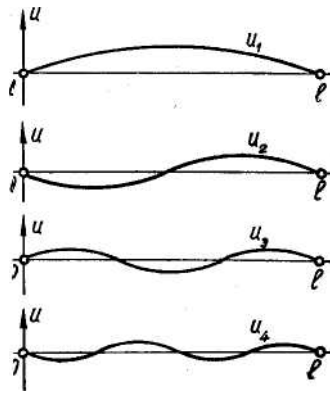


Рис. 3

В коливанні струна u_2 поділяється 2 на рівних частин, в коливанні u_3 на 3 і т.д. Частоти $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ коливань u_1, u_2, u_3 називають власними частотами струни. Найменша власна частота $\omega_1 = \frac{\pi a}{\ell} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Всі частоти пропорційні числам натурального ряду, тобто $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 \dots = 1 : 2 : 3 \dots$

Найменшій частоті ω_1 відповідає так званий основний тон, а іншим частотам – обертони. Нерухомі точки струни називають вузлами; в коливанні вузли розміщені в точках $x = 0, \frac{\ell}{n}, 2\frac{\ell}{n}, \dots, n\frac{\ell}{n} = \ell$. Посередині між вузлами знаходяться максимально зміщені від положення рівноваги точки – пучності. З проведеного аналізу видно, що частинним розв'язкам $u_n(x,t)$ відповідають стоячі хвилі.

§ 7. Рівняння параболічного типу.

Рівняння параболічного типу найчастіше зустрічаються в задачах, пов'язаних з вивченням процесів теплопровідності і дифузії.

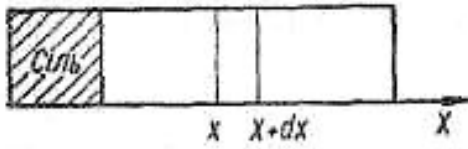


Рис. 4

1) Рівняння дифузії. Якщо концентрація розчиненої речовини в деякому об'ємі не є сталою, то відбувається дифузія речовини від місць з більшою концентрацією до місць з меншою концентрацією. (див. рис. 4)

Розглянемо для прикладу дифузію солі у воді. Нехай сіль займає частину горизонтальної циліндричної пробірки і дифузує у воду. Концентрацію солі в довільному поперечному перерізі x в момент t вважатимемо певною функцією $u(x, t)$. За законом Фернста, маса солі, що пройшла за час dt через поперечний переріз x трубки, дорівнює

$$dm_x = -D \frac{\partial u}{\partial x} S dt, \quad (1)$$

де D – коефіцієнт дифузії, який вважаємо сталим, S – площа поперечного перерізу. За тим же законом через переріз $x + dx$ за час dt проходить маса

$$dm_{x+dx} = -D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) S dt. \quad (2)$$

Приріст кількості солі в елементі об'єму $(x, x + dx)$ за час t дорівнює

$$dm = dm_x - dm_{x+dx} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S dx dt. \quad (3)$$

Приріст кількості солі викликає зміну концентрації розчину з часом, тобто

$$dm = \frac{\partial u}{\partial t} dt S dx. \quad (4)$$

Прирівнюючи два вирази для dm , отримаємо рівняння дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5)$$

2) Рівняння теплопровідності:

Виділимо в нерівномірно нагрітому тілі замкнену поверхню S . Через елемент dS цієї поверхні за одиницю часу проходить кількість тепла

$$dQ = q_n dS, \quad (6)$$

де q_n – густина теплового потоку, яка задовольняє закону Фур'є:

$$\vec{q} = -\kappa \text{grad} T, \quad (7)$$

де κ – коефіцієнт теплопровідності. Через всю поверхню проходить кількість тепла

$$Q = \oint_S q_n dS. \quad (8)$$

З іншого боку, оскільки $\frac{\partial Q}{\partial t}$ є приріст кількості тепла в одиниці об'єму

за одиницю часу, то об'ємний інтеграл $-\int_V \frac{\partial Q}{\partial t} dV$ (із знаком “–”) визначає зменшення теплової енергії у всьому об'ємі V . По закону збереження енергії

$$-\int_V \frac{\partial Q}{\partial t} dV = \oint_S q_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{q} dV. \quad (9)$$

Оскільки V – довільний об'єм, то

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{q} \quad (10)$$

(10) виражає закон збереження теплової енергії в диференціальній формі. Використовуючи закон Фур'є, отримаємо:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \nabla^2 T. \quad (11)$$

Оскільки $dQ = C_V dT$, де C_V – об'ємна теплоємність речовини, то отримаємо

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad \text{або} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T, \quad (13)$$

де $a^2 = \frac{\kappa}{C_V} = \text{const}$, $T = T(x, y, z, t)$. Для стержня маємо

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (14)$$

а при наявності джерел тепла (наприклад в провіднику тече струм):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(x, t). \quad (15)$$

Рівняння (5) і (14) схожі – вони містять першу похідну по t і другі похідні по координатам. Диференціальні рівняння типу дифузії (5) або теплопровідності відносяться до рівнянь параболічного типу (рівняння параболи $y = ax^2 + bx$). Як і у випадку гіперболічних рівнянь, їх необхідно доповнити початковими і крайовими умовами, що впливають з фізичних умов конкретної задачі. Наприклад, для рівняння теплопровідності початкова умова зводиться до задання температури в усіх точках x стержня в певний момент часу, який будемо вважати моментом $t = 0$ (тобто ми введемо відрахунок часу від цього моменту). Отже, початкова умова має вигляд

$$T(x, 0) = f(x), \quad (16)$$

де $f(x)$ – задана функція.

Крайові умови задаються на кінцях стержня, абсциси яких нехай дорівнюють $x = 0$ (лівий кінець) і $x = \ell$ (правий кінець). Їх можна записати, наприклад, у вигляді:

$$T(0, t) = \alpha(t), \quad T(\ell, t) = \beta(t), \quad (17)$$

де $\alpha(t)$ – закон, по якому змінюється температура в лівому кінці стержня, $\beta(t)$ – в правому. Якщо, наприклад, кінці знаходяться при сталих температурах T_1, T_2 , то

$$T(0, t) = T_1, \quad T(\ell, t) = T_2. \quad (18)$$

Інший вигляд мають граничні умови у випадку, коли через поперечний переріз стержня у лівому і правому його кінцях надходить тепло з оточуючого середовища. Тоді граничні умови:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_0 [T(0,t) - T_0], \quad -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = h_0 [T(l,t) - T_1], \quad (19)$$

де T_0 і T_1 – температури середовищ, оточуючих кінці стержня.

Розв'язок рівнянь параболічного типу можна також здійснити за методом розподілу змінних – методом Фур'є, який ми розглянули в § 6, і тому тепер розглядати не будемо. Його ідеї залишаються в силі і для виведених тут рівнянь дифузії і теплопровідності, і для інших рівнянь даного типу.

§ 8. Інтеграл Фур'є

При вивченні хвильових рівнянь виникла необхідність розкласти функції в ряди Фур'є. Інтегрування рівнянь теплопровідності вимагають в ряді випадків використання інтегралів Фур'є, які можна розглядати як певне узагальнення рядів Фур'є.

Відомо, що всяку періодичну функцію $f(x)$ яка задовольняє умови Діріхле¹, можна подати тригонометричним рядом Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

де коефіцієнти ряду виражаються формулами

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{k\pi u}{l} du \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{k\pi u}{l} du \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Ряд Фур'є (1) можна розглядати як формулу для розкладання періодичної функції (період дорівнює $2l$) на гармонічні компоненти (на суму гармонік), частоти яких становлять дискретну сукупність значень $\frac{\pi}{l}, 2\frac{\pi}{l}, 3\frac{\pi}{l}, \dots$

Інтеграл Фур'є є формулою для розкладання неперіодичної функції на гармонічні компоненти з неперервною сукупністю частот. А саме, якщо функція $f(x)$ задовольняє на кожному скінченному відрізку умови Діріхле і

абсолютно інтегрована, тобто інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ дорівнює скінченному числу,

то є справедливою рівність

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (3)$$

де коефіцієнти дорівнюють $a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du$ (4)

¹ Кажуть, що функція $f(x)$ задовольняє в інтервалі (a, b) умови Діріхле, якщо вона або неперервна в цьому інтервалі, або має скінченну кількість розривів першого роду і, крім того, має скінченну кількість максимумів та мінімумів в цьому інтервалі.

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du. \quad (5)$$

Порівняння цих формул доводить, що інтеграл Фур'є (3) є узагальненням ряду Фур'є (1). У випадку інтеграла Фур'є (3) частота λ набуває неперервних значень від 0 до ∞ . Інтеграл Фур'є найчастіше подають в більш компактній формі

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du. \quad (6)$$

На закінчення зауважимо, що оскільки $\cos \lambda(u-x)$ парна функція відносно λ , розклад функції $f(x)$ в інтеграл Фур'є (6) можна подати так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du, \quad (7)$$

або
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (8)$$

де
$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du. \quad (9)$$

§ 9. Поширення теплоти в безмежному стержні

Розглянемо задачу про поширення теплоти в безмежному стержні (абсциса лівого кінця стержня $x = -\infty$, правого $x = \infty$), коли температура $T(x, t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

і початкову умову
$$T(x, 0) = f(x). \quad (2)$$

Задачі такого роду (без крайових умов) називають, як відомо, задачами з початковими умовами або задачами Коші. Сформульована задача має таке практичне значення: $T(x, t)$ характеризує температуру середньої частини досить довгого стержня протягом деякого проміжку часу (доки температурні умови на кінцях стержня не впливають на розподіл температури в середній його частині).

Шукатимемо розв'язок задачі методом відокремлення змінних Фур'є. Беремо

$$T(x, t) = X(x) \Theta(t) \quad (3)$$

і підставимо це значення в (1); дістанемо $X \Theta' = a^2 X'' \Theta$, звідки

$$\frac{\Theta'}{a^2 \Theta} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \quad (4)$$

Тут спільне значення двох відношень стало, тому стали позначено через $-\lambda^2$. З (4) знаходимо $d \ln \Theta = -a^2 \lambda^2 dt$, звідки $\ln \Theta = -a^2 \lambda^2 t + \ln C$, або

$$\Theta = Ce^{-a^2 \lambda^2 t} \quad (5)$$

(для константи $+ \lambda^2$ матимемо $\Theta = Ce^{-a^2 \lambda^2 t}$; і тоді $\Theta \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, що фізично неможливо). З (4) також маємо $X'' + \lambda^2 X = 0$, звідки

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x. \quad (6)$$

Підставляючи (5) і (6) в (3), знаходимо

$$T(x, t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) Ce^{-a^2 \lambda^2 t},$$

або

$$T = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (7)$$

Ми знайшли частинний розв'язок рівняння (1). Функція (7) задовольняє рівняння (1) при будь-якому дійсному λ . Для кожного λ константи α і β можна добирати довільно. Тому α і β можуть бути довільними функціями λ : $\alpha = \alpha(\lambda)$, $\beta = \beta(\lambda)$. Так дістаємо частинні розв'язки рівняння (1) у вигляді:

$$T_\lambda(x, t) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (8)$$

Параметр λ може набирати будь-які дійсні значення з інтервалу $-\infty < \lambda < \infty$.

Оскільки рівняння (1) однорідне і лінійне, його задовольняє також сума частинних розв'язків: Тому беремо

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} T_\lambda(x, t) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda. \quad (9)$$

Тепер залишається визначити коефіцієнти α і β так, щоб задовольнялась початкова умова (2):

$$T(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x). \quad (10)$$

Цю рівність можна розглядати як інтеграл Фур'є (8.8) функції $f(x)$. Коефіцієнти Фур'є за формулами (9) дорівнюють

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad (11)$$

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du. \quad (12)$$

Підставляючи $\alpha(\lambda)$ і $\beta(\lambda)$ в (9), знайдемо температуру стержня

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) [\cos \lambda u \cos \lambda x + \sin \lambda u \sin \lambda x] du,$$

або

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(x - u) d\lambda \right\} du,$$

нарешті, змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(x-u) d\lambda \right\} du. \quad (13)$$

Внутрішній інтеграл формули (22) обчислюється методом диференціювання по параметру так. Здійснимо заміну змінної λ на нову змінну

ξ за формулою $\lambda = \frac{\xi}{a\sqrt{t}}$ (14) і введемо для скорочення параметр ω :

$$\frac{x-u}{a\sqrt{t}} = \omega. \quad (15)$$

$$\text{Маємо} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(x-u) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \xi \omega d\xi. \quad (16)$$

Щоб обчислити інтеграл $I(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \xi \omega d\xi$ (17), знайдемо похідну

по параметру ω :

$$I'(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-\xi^2} \sin \xi \omega d\xi$$

і перетворимо, інтегруючи частинами $\left(\sin \xi \omega = u; \frac{1}{2} e^{-\xi^2} = v \right)$,

$$I'(\omega) = \frac{1}{2} e^{-\xi^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \xi \omega d\xi = -\frac{\omega}{2} I(\omega).$$

Тут маємо диференціальне рівняння $\frac{I'(\omega)}{I(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$, звідки, інтегруючи

його, $\ln I(\omega) = -\frac{\omega^2}{4} + \ln C$, і тому

$$I(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (18)$$

Але за формулою (17) $I(0)$ є відомий з математичного аналізу інтеграл Пуассона, який дорівнює $\sqrt{\pi}$: $I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$ (19.) З (19) та (18) маємо

$C = \sqrt{\pi}$. Формула (18) остаточно така:

$$I(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}. \quad (20)$$

На підставі (17) і (19) інтеграл (16) дорівнює $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(x-u) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} I(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$, або, переписуючи в старих змінних,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(x-u) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}}. \quad (21)$$

Підставляючи інтеграл (21) в (13), знайдемо остаточно формулу для температури стержня

$$T(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}} du. \quad (22)$$

Можна прямою перевіркою переконатись *e*, тому, що функція (22) дійсно задовольняє як диференціальне рівняння задач (1), так і крайову умову (2).

2. Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності і його фізичний зміст. Щоб з'ясувати фізичний зміст розв'язку (22), розглянемо спочатку окремий випадок. Нехай температура в початковий момент дорівнює нулю скрізь на стержні, крім інтервалу $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ довжиною 2ε , а на цьому

інтервалі нехай вона дорівнює сталій T_0 (див. рис. 5).

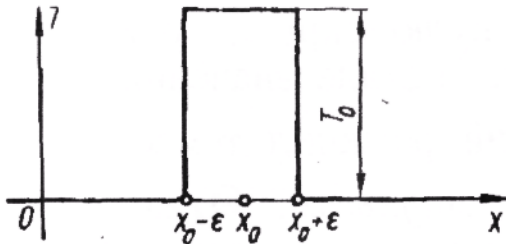


Рис. 5

Такий ступінчастий розподіл температури можна дістати, якщо до стержня, температура якого на початку скрізь дорівнювала нулю, підвести на інтервалі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ потрібну кількість тепла (піднести високотемпературне полум'я на цьому інтервалі), а саме:

$$Q = 2\varepsilon S \rho (T_0 - 0) c = 2\varepsilon T_0 S \rho c \quad (23),$$

де $2\varepsilon S$ - об'єм елемента, $2\varepsilon S \rho$ - його маса, c - питома теплоємність матеріалу стержня. Температуру стержня в довільній точці x в момент t знайдемо за формулою (22)

$$T(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} T_0 e^{-\frac{(x-\xi_0)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Застосовуючи теорему про середнє значення, матимемо

$$T(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot 2\varepsilon T_0 e^{-\frac{(x-\xi_0)^2}{4a^2 t}}.$$

де ξ_0 — певна точка з інтервалу інтегрування $x_0 - \varepsilon < \xi_0 < x_0 + \varepsilon$.

Цю формулу можна на підставі (23) переписати у вигляді

$$T(x,t) = \frac{Q}{S \rho c} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi_0)^2}{4a^2 t}}. \quad (24)$$

Значення початкової температури T_0 можна вибрати довільно. Стандартизуємо розглядуваний окремий випадок так, щоб площа ступеньки

дорівнювала одиниці, тобто нехай $T_0 = \frac{1}{2\varepsilon}$ (це означає, якщо інтервал має 2ε одиниць довжини, то температура дорівнює $\frac{1}{2\varepsilon}$ градусів). При такому виборі початкової температури $2\varepsilon T_0 = 1$ (або $Q = S\rho c$) і формула (24) остаточно така:

$$T(x,t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi_0)^2}{4a^2 t}}. \quad (25)$$

Знайдена функція визначає температуру в довільній точці x стержня в довільний момент $t > 0$, якщо в початковий момент $t = 0$ вона дорівнювала нулю скрізь, крім інтервалу $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon$, в точках якого її стало значення було $T_0 = \frac{1}{2\varepsilon}$ градусів. Такий початковий розподіл температури називають *фізичним тепловим імпульсом*. Отже, формула (25) визначає розподіл температури в стержні, що відповідає фізичному тепловому імпульсу одиничної інтенсивності. (рис. 6)

Формула (25) справедлива, яким би малим не було ε . Якщо $\varepsilon \rightarrow 0$,

матимемо $T_0 = \frac{1}{2\varepsilon} \rightarrow 0$ (добуток $2\varepsilon T_0$

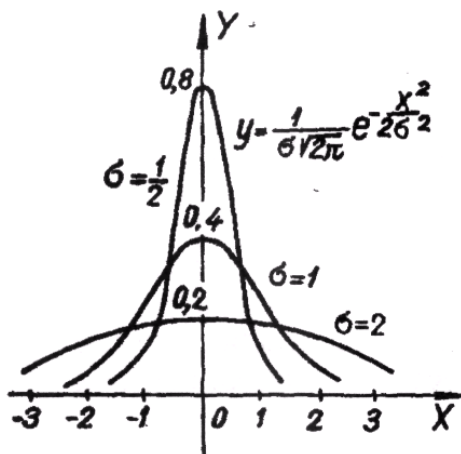


Рис. 6

залишається при граничному переході незмінним і постійно дорівнює одиниці), $\xi_0 \rightarrow x_0$ і тому з формули (25) при $\varepsilon \rightarrow 0$ знаходимо

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}. \quad (26)$$

Тут ми позначили температуру T буквою $\varphi(x,t)$. Функцію $\varphi(x,t)$ називають *фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності* (параметр x_0 може мати

довільне дійсне значення). Фундаментальному розв'язку (26) відповідає «точковий» тепловий імпульс одиничної інтенсивності. Отже, *фундаментальний розв'язок* рівняння теплопровідності має важливий фізичний зміст: він характеризує розподіл температури в стержні (в довільній точці x в будь-який момент $t > 0$), якщо в початковий момент $t = 0$ існував точковий тепловий імпульс одиничної інтенсивності в точці x_0 .

Точковий тепловий імпульс є, звичайно, науковою абстракцією. Його можна реалізувати більш-менш точно як фізичний імпульс на дуже малому інтервалі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$; правда, практично розподіл температури не буде повністю ступінчастим; він виявляється неперервним, близьким до ступінчастого. Для подібних теоретичних побудов можливість абсолютно точної практичної реалізації розглядуваних абстракцій зовсім не обов'язкова.

Цікаво відмітити ряд властивостей закону розподілу температури, що відповідає фундаментальному розв'язку $\varphi(x, t)$:

1) графік температури (26) симетричний відносно точки прикладання теплового імпульсу $x - x_0$; максимального значення температура досягає в точці $x = x_0$, де вона дорівнює $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$. Нарис. показано графік кривої

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \text{ хід якої аналогічний (26);}$$

2) площа під кривою $\varphi(x, t)$ дорівнює одиниці. Справді, ця площа виражається інтегралом

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} dx,$$

який після заміни змінної $\frac{x-x_0}{2a\sqrt{t}} = \xi$, $dx = 2a\sqrt{t}d\xi$ набуває вигляду інтеграла

Пуассона $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1$. Щоб з'ясувати фізичний зміст цього факту,

обчислимо теплову енергію стержня (тобто зміну енергії при переході від стану $T > 0$ до стану $T = \varphi(x, t)$); маємо

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} S\rho c\varphi dx = \frac{S\rho c}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} dx.$$

Як показано, інтеграл для будь-якого моменту дорівнює одиниці, і тому $Q = S\rho c = const$.

Отже, сталість площі під кривою температури (площа дорівнює одиниці) означає, що кількість теплової енергії, яку в момент $t = 0$ передано стержню в певній його точці, залишається з часом в цілому незмінною (в довільний момент t енергії розподілена по всьому стержню). Це й зрозуміло: бічна поверхня стержня має теплову ізоляцію.

3) У кожній фіксованій точці $x \neq x_0$ температура $\varphi(x, t)$ спочатку зростає від 0 при $t = 0$ до деякого максимального значення, а потім монотонно зменшується і наближується до нуля $t \rightarrow \infty$. Застосовуючи правило Лопіталя, можна довести, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = 0.$$

При закінченні з'ясуємо фізичний зміст розв'язку (22) задачі про поширення теплоти в безмежному стержні. Його можна розглядати як суперпозицію (накладання) температур, що виникають в точці x в момент t внаслідок неперервного розподілу по стержню теплових імпульсів інтенсивності $f(u)du$ (на інтервалі $(u, u + du)$), прикладених в момент $t = 0$.

§ 10. Рівняння еліптичного типу

Рівняння еліптичного типу найчастіше зустрічаються при вивченні стаціонарних процесів різної природи: коливань (механічних, звукових, електро – магнітних і т. д.), теплопровідності, дифузії і ін. Найпростішим рівнянням такого типу є рівняння:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \quad (1)$$

яке називають рівнянням Пуассона. Відповідне однорідне рівняння:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

називають рівнянням Лапласа. Рівняння такого типу отримується і в рівняннях параболічного типу, і в рівняннях гіперболічного типу, якщо функція $u = u(x, y, z)$ не залежить від часу (стаціонарний процес). До рівнянь еліптичного типу відносяться, наприклад, основне рівняння електростатики:

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho. \quad (3)$$

(Воно отримується з рівняння Гауса $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$, якщо в нього підставити вираз, який зв'язує напруженість електростатичного поля з потенціалом: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = -4\pi\rho$). Це є рівняння Пуассона. Якщо ж в деякій області зарядів немає ($\rho = 0$), то потенціал $\varphi(x, y, z)$ задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (4)$$

Функцію $u = u(x, y, z)$ називають гармонічною в області V , якщо вона неперервна в ній разом з своїми похідними першого й другого порядку і задовольняє рівняння Лапласа (4). Простим прикладом гармонічної функції і є функція $\varphi = \frac{1}{r}$, де $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ - відстань між т. $M(x, y, z)$ і т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ простору. Це можна довести розв'язуванням рівняння Лапласа з сферичною симетрією, тобто коли $\varphi = \varphi(r)$ (при цьому початок СК поміщено в т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$). Тоді рівняння Лапласа в сферичних

координатах: $\nabla^2 \varphi = \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$. Інтегруємо: $r^2 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} = -c, \Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{c_1}{r^2};$

$\varphi = \frac{c_1}{r} + c_2$, де c_1, c_2 - довільні сталі. Зокрема, при $c_1 = 1$ і $c_2 = 0$, $\varphi = \frac{1}{r}$ - цю функцію називають фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа.

§ 11. Формули Гріна

Виведемо 2 важливі формули, які впливають з теореми Остроградського – Гауса. Нехай в об'ємі V , обмеженому поверхнею S , існують неперервні функції φ і ψ з неперервними похідними 1-го порядку. Розглянемо в об'ємі V векторну поле

$$\vec{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi \quad (1)$$

і застосуємо формулу Остроградського – Гауса :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \oint_S a_n dS \quad (2)$$

Але

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) = \varphi \nabla^2 \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi), \quad (3)$$

і також

$$a_n = (\varphi \operatorname{grad} \psi)_n = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (4)$$

Підставивши (3) і (4) в (2), дістанемо так звану першу формулу Гріна:

$$\int_V \{\varphi \nabla^2 \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)\} dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (5)$$

Поміняємо в (5) φ і ψ місцями:

$$\int_V \{\psi \nabla^2 \varphi + (\operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \varphi)\} dV = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (6)$$

і віднімемо цю формулу від попередньої (5), тоді отримаємо другу формулу Гріна:

$$\int_V \{\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi\} dV = \oint_S (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) dS. \quad (7)$$

Із першої формули Гріна при $\varphi = \psi$ знаходимо:

$$\int_V \{\varphi \nabla^2 \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2\} dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (8)$$

а при $\varphi = 1$:

$$\int_V \nabla^2 \psi dV = \oint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (9)$$

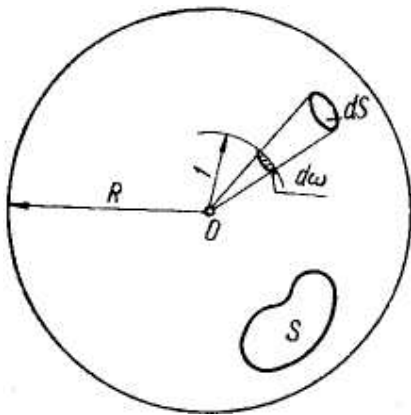


Рис. 7

Похідну $\frac{\partial}{\partial n}$ в цих формулах беруть за напрямом зовнішньої до поверхні S нормалі. Якщо функції φ і ψ не визначені назовні від поверхні S , то $\frac{\partial}{\partial n}$ слід замінити на $-\frac{\partial}{\partial n_i}$, де $\frac{\partial}{\partial n_i}$ – похідна за напрямом внутрішньої до поверхні S нормалі. (рис. 7)

Зауваження. Формули Гріна залишаються правильними для областей, які простягаються до ∞ , якщо тільки значення функцій $\varphi(M), \psi(M)$ досить швидко зменшуються при $M \rightarrow \infty$. Щоб уточнити це твердження, розглянемо спочатку область, обмежену зовні поверхнею сфери Σ настільки великого радіусу R , що всі інші поверхні, які становлять межу області (якщо вони ϵ), лежать всередині сфери. Тоді поверхневі інтеграли в 1-ій і 2-ій формулах Гріна слід брати по поверхні сфери Σ . Але елемент поверхні сфери дорівнює (див. мал. 7)

$dS = R^2 d\Omega$, де $d\Omega$ – тілесний кут, під яким видно елемент dS з центра O сфери Σ . Розглянемо тепер інтеграли по поверхні сфери, які входять до формули Гріна:

$$\oint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} R^2 d\Omega, \quad \oint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) R^2 d\Omega.$$

З структури цих формул видно, що при $R \rightarrow \infty$ інтеграли зникнуть, якщо φ і $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (а також ψ і $\frac{\partial \psi}{\partial n}$) зменшуються при збільшенні R з такою ж швидкістю, як $\frac{1}{R}$ і $\frac{1}{R^2}$ відповідно. Отже, при виконанні цієї умови формули Гріна справедливі і для областей, що простягаються до ∞ .

§ 12. Формули Гріна для гармонічних функцій

Оскільки, як відзначалось у §10, гармонічна функція задовольняє рівняння Лапласа: $\nabla^2 \varphi = 0$, $\nabla^2 \psi = 0$, то з формул Гріна (10.5) і (10.7) отримаємо для них:

$$\oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int_V (\text{grad} \varphi, \text{grad} \psi) dV, \quad (1)$$

$$\oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (2)$$

$$\oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV. \quad (3)$$

Із цих формул випливає ряд властивостей гармонічних функцій:

1) Якщо в (2) підставити $\psi = 1$, то для довільної гармонічної функції φ маємо:

$$\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0, \quad (4)$$

тобто інтеграл по замкнутій поверхні від нормальної похідної гармонічної функції дорівнює 0. При цьому припускається, що в області S функція φ скрізь гармонічна і неперервна разом з першими частинними похідним аж до межі.

2) Нехай функція φ має сталі значення C на поверхні S : $\varphi = C = \text{const}$ (тобто S – поверхня рівня для φ). За доведеною властивістю (4) знаходимо:

$\oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \oint_S C \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = C \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0$. Застосування ж формули (3) приводить до рівності

$$\oint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV = 0, \quad \text{звідки,} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad (5)$$

тому що інтеграл від невід'ємної функції $= 0$ тільки тоді, коли підінтегральна функція $= 0$ скрізь в об'ємі інтегрування. Із (5) \Rightarrow , що $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, тобто $\varphi = const = C$ в області V . Отже, якщо гармонічна в області V функція неперервна в області $V + S$ і набуває сталого значення C на межі S , то вона дорівнює тій же сталій C скрізь в області V . Звідси випливає, що замкнута поверхня не може бути поверхнею рівня гармонічної функції, відмінної від тотожної константи. Якщо ж для функції φ замкнута поверхня S є поверхнею рівня, то всередині поверхні S функція φ не скрізь визначена або не скрізь є гармонічною.

3) Дві гармонічні функції, значення яких дорівнюють одне одному в усіх точках замкнutoї поверхні, тотожно рівні в області, обмеженій заданою поверхнею. Для доказу використаємо властивість 2) до гармонічної функції $f = \varphi - \psi$, яка дорівнює 0 на поверхні S , тому скрізь всередині S ця функція тотожно дорівнює 0, тобто, виконується рівність $f = \varphi - \psi = 0$, звідки $\varphi = \psi$.

З встановленою властивістю гармонічних функцій зв'язана постановка задачі Діріхле: визначити в області V функцію $\varphi(x, y, z)$, яка 1) задовольняє в області V рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$; 2) неперервна в замкнутій області $V + S$; 3) набуває на межі S заданих значень. Таким чином, задача Діріхле полягає у визначенні гармонічної функції за її значенням на замкнутій поверхні.

4) Якщо на замкнутій поверхні S нормальна похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ гармонічної функції дорівнює 0: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, то за формулою (3) маємо

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV = 0, \text{ звідки, як і у випадку другої властивості,}$$

знаходимо, що $\varphi = const$ в усіх точках області V . Отже, якщо нормальна похідна гармонічної функції дорівнює 0 на замкнутій поверхні, то в усіх точках усередині поверхні функція має одне й те саме стале значення. З цією властивістю випливає постановка задачі Неймана про визначення гармонічної в області функції, якщо задано значення похідної цієї функції $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ по нормалі на межі області.

§ 13. Інтегральні формули для гармонічних функцій

В теоретичній фізиці широко застосовується формула, яка визначає значення гармонічної функції в довільній внутрішній точці області через значення цієї функції та значення її похідної по нормалі на межі області.

1) Інтегральна формула визначає гармонічну функцію φ всередині області V , якщо відомі значення цієї функції та її похідної по нормалі на межі S області V (без виводу):

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (1)$$

2) Теорема про середнє значення гармонічної функції: значення гармонічної функції в даній точці дорівнює середньому арифметичному значень цієї функції на поверхні сфери довільного радіуса з центром в даній точці.

Дійсно, нехай S у формулі (1) – сфера радіуса R з центром в т. P . Тоді напрям зовнішньої нормалі є напрямом радіуса сфери, і тому $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$. Підставляючи цю похідну в (1), знаходимо:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi R} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \varphi dS. \text{ Але перший інтеграл за властивістю (12.4)}$$

дорівнює 0 і тому:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \varphi dS. \quad (2)$$

3) Принципи екстремального значення: відмінна від константи гармонічна функція, визначена і неперервна в області $V+S$, досягає свого найбільшого і найменшого значень лише на межі S – області. Доказ здійснюється від супротивного: припущення про те, що гармонічна функція досягає найбільшого або найменшого значень в якійсь внутрішній точці області V , суперечить, очевидно, теоремі про середнє значення.

4) Інтегральна формула для довільної функції: якщо в області V , обмеженій поверхнею S , задано довільну функцію φ , неперервну в області V аж до границі S разом з своїми похідними 1-го порядку і неперервними похідними 2-го порядку в області V , то її значення в довільній т. P внутрішньої області визначаються за формулою:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \varphi \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla^2 \varphi}{r} dV. \quad (3)$$

У формулі (3) подано інтеграли 3-х типів: $\int_V \frac{1}{r} f dV$; $\oint_S \frac{1}{r} \sigma dS$; $\oint_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \mu dS$, де f , σ , μ – деякі функції. Перший з них називають об'ємним потенціалом, другий – потенціалом простого шару, третій – потенціалом подвійного шару. Формула (3) подає довільну функцію як суму трьох потенціалів: об'ємного, простого і подвійного шару.

Формулу (4) можна застосувати і до всього нескінченного простору. Нехай S – сфера радіуса R' і $R' \rightarrow \infty$. Якщо φ при $R' \rightarrow \infty$ спадає як $\frac{1}{R'}$, то поверхневий інтеграл в (3) при $R' \rightarrow \infty$ зникає, і тому для будь-якої точки простору дістанемо

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_R \frac{\nabla^2 \varphi}{r} dV, \quad (4)$$

де інтеграл береться вже по всьому нескінченному простору R .

§ 14. Сферичні та кульові функції. Поліноми Лежандра.

Усі ці функції часто застосовуються при розгляді рівняння Лапласа в сферичних координатах., яке виникає у фізичних задачах зі сферичною симетрією. Знайдемо розв'язок рівняння Лапласа у сферичних координатах:

$$\nabla^2 u = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

Застосовуючи метод Фур'є розподілу змінних, візьмемо: $u = R(r)Y(\theta, \varphi)$ (2)

Після звичайного розподілу змінних матимемо рівняння:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0 \quad (3);$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0 \quad (4)$$

Обмежені в області $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ розв'язки рівняння (4) такі, що $Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$ називаються сферичними функціями. Якщо і в рівнянні (4) розділити ще далі змінні, тобто взяти, що

$$Y(\theta, \varphi) = \Psi(\theta)\Phi(\varphi), \quad (5)$$

то дістанемо:

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) \Psi = 0; \quad (6)$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0. \quad (7)$$

З умови періодичності $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ знаходимо, що $\mu = k^2$, (k – ціле число), і тому

$$\Phi(\varphi) = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi. \quad (8)$$

Далі, якщо в (6) зробити заміну змінної: $\cos \theta = x$ (9)

то отримаємо рівняння:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - 2x \frac{d\Psi}{dx} + \left(\lambda - \frac{k^2}{1 - x^2} \right) \Psi = 0. \quad (10)$$

Обмежені на відріжку $(-1, 1)$ розв'язки рівняння (10) називаються приєднаними функціями Лежандра ($x = \pm 1$ - особливі точки коефіцієнтів в рівнянні (10)). Можна довести, що приєднані функції Лежандра мають вигляд:

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{k/2} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x); \quad 0 \leq k \leq n, \quad (11)$$

вони є розв'язками рівняння (10) з власними числами

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

а функції $P_n(x)$, що входять в (11), називають поліномами Лежандра і задовольняють однорідне диференціальне рівняння Лежандра

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad \text{або} \quad \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0 \quad (-1 < x < 1). \quad (13)$$

Функції $P_n(x)$ є поліномами n -го степеня. При парному n поліномом $P_n(x)$ містить тільки парні степені x , при непарному n - непарні. Наприклад:

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \quad (14)$$

З цієї причини $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. (15)

Має місце рекурентне співвідношення, що зв'язує три послідовні поліноми Лежандра:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (16)$$

Це співвідношення дозволяє обчислити всі компоненти $P_2(x)$, $P_3(x) \dots P_n(x) \dots$, якщо відомі перші 2: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$.

Поліноми Лежандра задовольняють вимогу ортогональності:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m \end{cases} \quad (17)$$

Має місце також формула Родріга:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (18)$$

Приєднані функції Лежандра також ортогональні на відрізку $[-1, 1]$, тобто для них виконується рівність

$$\int_{-1}^1 P_n^k(x)P_m^k(x)dx = 0, \quad n \neq m. \quad (19)$$

Виходячи з вищесказаного, отримаємо, що розв'язком (5) рівняння (4) є функції

$$P_n^0(\cos \theta), P_n^k(\cos \theta) \sin k\varphi, P_n^k(\cos \theta) \cos k\varphi.$$

Позначимо ці функції так:

$$Y_n^k(\theta, \varphi) = P_n^k(\cos \theta) \sin k\varphi, Y_n^{-k}(\theta, \varphi) = P_n^k(\cos \theta) \cos k\varphi,$$

$$Y_n^0(\theta, \varphi) = P_n^0(\cos \theta) = P_n(\cos \theta). \quad (20)$$

Тут ми умовно написали верхній індекс k в сферичній функції з множником $\sin k\varphi$, і індекс $-k$ в функції з множником $\cos k\varphi$. Функції (20) називають фундаментальними сферичними функціями виміру n . Якщо домножити ці функції на довільні константи та додати, знову матимемо сферичну функцію виміру n :

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{k=-n}^n C_k Y_n^k(\theta, \varphi). \quad (21)$$

Нарешті, рівняння (3) при $\lambda = n(n+1)$ має розв'язки:

$$R_1(r) = r^n, R_2(r) = \frac{1}{r^{n+1}}.$$

Тому розв'язки (2) рівняння Лапласа (гармонічні функції) остаточно такі:

$$u_1(r, \theta, \varphi) = r^n Y_n(\theta, \varphi), u_2(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi). \quad (22)$$

Ці функції називаються кульовими функціями виміру n . Очевидно, сферичні функції виміру n , тобто $Y_n(\theta, \varphi)$ є значеннями кульових функцій виміру n на сфері одиничного радіуса ($r = 1$).

Можна довести, що сферичні функції ортогональні на поверхні одиничної сфери, тобто

$$\iint Y_n(\theta, \varphi) Y_m(\theta, \varphi) dS = 0, \quad n \neq m,$$

де інтеграл береться по поверхні одиничної сфери.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Тема 1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Задача 1. Звести рівняння до канонічного вигляду в кожній із областей, де його тип зберігається

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0. \quad (1)$$

Розв'язання. Тут $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = x \Rightarrow D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0 - x = -x$. Отже, можливі наступні випадки:

1) $D > 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ рівняння (1) – це рівняння гіперболічного типу. Характеристичне рівняння має вигляд

$$(dy)^2 + x(dx)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (-x) = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - \sqrt{-x} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} + \sqrt{-x} = 0,$$

$$y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2} = \text{const}, \quad y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2} = \text{const}.$$

В рівнянні (1) проводимо заміну змінних

$$\xi = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}. \quad (2)$$

Тоді

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi} \left(-(-x)^{1/2}\right)^2 + 2u_{\xi\eta} \left(-(-x)^{1/2}\right) (-x)^{1/2} + u_{\eta\eta} \left((-x)^{1/2}\right)^2 + \\ &+ u_{\xi} \frac{1}{2}(-x)^{1/2} + u_{\eta} \left(-\frac{1}{2}(-x)^{1/2}\right) = -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - \\ &- xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{-1/2} - \frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2}; \end{aligned}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot (1)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot (1)^2 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в (1), дістанемо

$$\begin{aligned} -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{1/2} - \frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2} + \\ + xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} + xu_{\eta\eta} = 0, \\ 4xu_{\xi\eta} + \frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{1/2} - \frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2} = 0, \\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{8(-x)^{3/2}}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

З (2) маємо

$$\xi - \eta = \frac{4}{3}(-x)^{3/2} \Rightarrow (-x)^{3/2} = \frac{3}{4}(\xi - \eta). \quad (4)$$

Провівши заміну в (3) згідно (4), отримаємо

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0.$$

2) $D < 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ рівняння (1) – це рівняння еліптичного типу. Характеристичне рівняння має вигляд

$$(dy)^2 + x(dx)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - i\sqrt{x} = 0 \text{ або } \frac{dy}{dx} + i\sqrt{x} = 0,$$

$$y + \frac{2}{3}ix^{3/2} = \text{const}, \quad y - \frac{2}{3}ix^{3/2} = \text{const}.$$

В рівнянні (1) проводимо заміну змінних

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

де

$$\varphi = y + \frac{2}{3}ix^{3/2}, \quad \varphi^* = y - \frac{2}{3}ix^{3/2}.$$

Тоді

$$\alpha = y, \quad \beta = \frac{2}{3}x^{3/2};$$

$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha} \cdot 0 + 2u_{\alpha\beta} \cdot 0 + u_{\beta\beta} \left(x^{1/2}\right)^2 + u_{\alpha} \cdot 0 + u_{\beta} \frac{1}{2}x^{-1/2} = xu_{\beta\beta} + \frac{1}{2}u_{\beta}x^{-1/2};$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha}.$$

З (1) отримаємо

$$u_{\beta\beta} + \frac{1}{2}u_{\beta}x^{-1/2} + xu_{\alpha\alpha} = 0,$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{2x^{3/2}}u_{\beta} = 0. \quad (5)$$

Оскільки $x^{3/2} = \frac{3}{2}\beta$, то з (1.8) дістанемо

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\beta}u_{\beta} = 0.$$

3) $D = 0 \Rightarrow x = 0$ і рівняння (1) вироджується в рівняння $u_{xx} = 0$.

Отже,

1) $x < 0$:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0, \quad \xi = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}.$$

2) $x > 0$:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\beta^{3/2}}u_{\beta} = 0, \quad \alpha = y, \quad \beta = \frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Індивідуальні домашні завдання до теми 1

1-5. Звести рівняння до канонічного вигляду.

1. $y^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$

2. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0.$

3. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} - 2xyu_x = 0.$

4. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0.$

5. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 2yu_x + ye^{y/x} = 0.$

6-10. Звести рівняння до канонічного вигляду в кожній із областей, де його тип зберігається.

6. $u_{xx} - xyu_{yy} = 0.$

7. $u_{xx} + yu_{yy} = 0.$

8. $(1+x^2)^2u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0.$

9. $u_{xx} - (1+y^2)^2u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0.$

10. $u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0.$

Тема 2. Зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

Задача 1. Звести наступне диференціальне рівняння з частинними похідними до канонічного вигляду

$$2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0. \quad (1)$$

Розв'язання. Тут $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = -1 < 0$, $a_{11} = 2, a_{12} = 1, a_{22} = 1$. Отже, рівняння (1) – це рівняння еліптичного типу. Характеристичне рівняння має наступний вигляд:

$$2(dy)^2 - 2dx dy + (dx)^2 = 0,$$

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Отже,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+i}{2} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-i}{2}.$$

Розв'язавши вищевказані звичайні диференціальні рівняння, отримаємо рівняння першої характеристики

$$2y - (1+i)x = \text{const},$$

та рівняння другої характеристики

$$2y - (1-i)x = \text{const}.$$

Щоб отримати рівняння з дійсними коефіцієнтами проведемо наступну заміну змінних

$$\alpha = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2},$$

де $\varphi = 2y - (1+i)x$, $\bar{\varphi} = 2y - (1-i)x$. Тоді

$$\alpha = 2y - x, \quad \beta = -x.$$

Проводимо заміну похідних:

$$u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = -u_\alpha - u_\beta;$$

$$u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = 2u_\alpha;$$

$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha} \alpha_x^2 + 2u_{\alpha\beta} \alpha_x \beta_x + u_{\beta\beta} \beta_x^2 + u_\alpha \alpha_{xx} + u_\beta \beta_{xx} = u_{aa} + 2u_{a\beta} + u_{\beta\beta};$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha} \alpha_y^2 + 2u_{\alpha\beta} \alpha_y \beta_y + u_{\beta\beta} \beta_y^2 + u_\alpha \alpha_{yy} + u_\beta \beta_{yy} = u_{aa};$$

$$u_{xy} = u_{\alpha\alpha} \alpha_x \alpha_y + (\alpha_x \beta_y + \beta_x \alpha_y) u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta} \beta_x \beta_y + u_\alpha a_{xy} + u_\beta \beta_{xy} = -2u_{aa} - 2u_{a\beta}.$$

Підставивши знайдені похідні в (1), отримаємо:

$$2(u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}) - 2(-2u_{\alpha\alpha} - 2u_{\alpha\beta}) - 4u_{\alpha\alpha} + 4(-u_\alpha - u_\beta) + 8u_\beta + u = 0,$$

$$2u_{\alpha\alpha} + 2u_{\beta\beta} + 4u_\alpha - 4u_\beta + u = 0,$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + 2u_\alpha - 2u_\beta + \frac{1}{2}u = 0. \quad (2)$$

Для подальшого спрощення введемо заміну

$$u(\alpha, \beta) = v(\alpha, \beta) e^{\lambda\alpha + \mu\beta},$$

де $v(\alpha, \beta)$ - нова невідома функція; λ, μ - сталі, які потрібно знайти.

Тоді

$$u_\alpha = (v_\alpha + \lambda v) e^{\lambda\alpha + \mu\beta};$$

$$u_\beta = (v_\beta + \mu v) e^{\lambda\alpha + \mu\beta};$$

$$u_{\alpha\alpha} = (v_{\alpha\alpha} + 2\lambda v_{\alpha} + \lambda^2 v) e^{\lambda\alpha + \mu\beta};$$

$$u_{\beta\beta} = (v_{\beta\beta} + 2\mu v_{\beta\beta} + \mu^2 v) e^{\lambda\alpha + \mu\beta}.$$

Проводячи заміну, з рівняння (2) дістанемо

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + (2\lambda + 2)v_{\alpha} + (2\mu + 2)v_{\beta} + (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda - 2\mu + \frac{1}{2})v = 0. \quad (3)$$

Виберемо λ та μ з умови рівності нулю коефіцієнтів при v_x та v_y . Маємо

$$\begin{cases} 2\lambda + 2 = 0, \\ 2\mu - 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1, \\ \mu = 1. \end{cases}$$

При знайдених λ та μ з (3) отримаємо

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} - \frac{3}{2}v = 0,$$

$$\text{де } u(\alpha, \beta) = v(\alpha, \beta) e^{-\alpha + \beta}, \quad \alpha = 2y - x, \quad \beta = -x.$$

Індивідуальні домашні завдання до теми 2

Звести рівняння до канонічного вигляду.

1. $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} = 0$.
2. $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0$.
3. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$.
4. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 44 = 0$.
5. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$.
6. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0$.
7. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y + \sin(x + y) = 0$.
8. $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0, a, b, c - \text{const.}$
9. $au_{xx} + 4au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + 4 = 0, a, b, c - \text{const.}$

Тема 3. Задача Коші для рівнянь гіперболічного типу. Метод характеристик

Задача 1. Розв'язати задачу Коші

$$u_{tt} = u_{xx} + bx^2,$$

$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = d, \quad d = \text{const.}$$

Розв'язання. Як відомо, розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

можна знайти за формулою

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz d\tau. \quad (1)$$

Використовуючи (1) в нашому випадку, отримаємо

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{e^{-(x+t)} + e^{-(x-t)}}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} dz + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} bz^2 dz d\tau = \\
 &= e^{-x} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{1}{2} d(x+t - x+t) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{b}{3} \left((x+t-\tau)^3 - (x-t+\tau)^3 \right) d\tau = \\
 &= e^{-x} \cdot cht + dt - \frac{b}{6} \int_0^t (x+t-\tau)^3 d(x+t-\tau) - \frac{b}{6} \int_0^t (x-t+\tau)^3 d(x-t+\tau) = \\
 &= e^{-x} cht + dt - \frac{b}{24} (x+t-\tau)^4 \Big|_0^t - \frac{b}{24} (x-t+\tau)^4 \Big|_0^t = \\
 &= e^{-x} cht + dt - \frac{b}{24} \left(x^4 - (x+t)^4 + x^4 - (x-t)^4 \right) = \\
 &= e^{-x} cht + dt + \frac{b}{2} x^2 t^2 + \frac{b}{12} t^4.
 \end{aligned}$$

Задача 2. Знайти загальний розв'язок рівняння, попередньо звівши його до канонічного вигляду

$$2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0. \quad (2)$$

Розв'язання. Визначимо тип рівняння (2).

$D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 3^2 - 2 \cdot 4 = 1 > 0 \Rightarrow$ рівняння (2) є рівнянням гіперболічного типу. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{aligned}
 2(dy)^2 - 6dydx + 4(dx)^2 &= 0, \\
 (dy)^2 - 3dydx + 2(dx)^2 &= 0, \\
 (dy - 2dx)(dy - dx) &= 0, \\
 dy - 2dx = 0 \text{ або } dy - dx &= 0, \\
 y - 2x = const, \quad y - x &= const.
 \end{aligned}$$

Проводимо наступну заміну змінних:

$$\xi = y - 2x, \quad \eta = y - x.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -2u_\xi - u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta. \\
 u_{xx} &= u_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \\
 u_{yy} &= u_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \\
 u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\eta \eta_{xy} + u_\xi \xi_{xy} = \\
 &= -2u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta}.
 \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння (2), отримуємо

$$\begin{aligned}
 8u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta} - 12u_{\xi\xi} - 18u_{\xi\eta} - 6u_{\eta\eta} + 4u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} - \\
 - 2u_{\xi\eta} - u_\xi = 0,
 \end{aligned}$$

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}u_\xi = 0. \quad (3)$$

В рівнянні (3) проведемо наступну заміну:

$$u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} v(\xi, \eta),$$

де $v(\xi, \eta)$ - нова невідома функція ; λ, μ - поки що довільні константи.

Тоді

$$u_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\xi + \lambda v), \quad u_\eta = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\eta + \mu v), \quad u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),$$

$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v), \quad u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).$$

З (3) отримуємо

$$e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v) + \frac{1}{2} e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\xi + \lambda v) = 0,$$

$$v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + (\mu + \frac{1}{2}) (v_\xi + \lambda v) = 0. \quad (4)$$

Поклавши $\lambda = 0$, $\mu = -\frac{1}{2}$, рівняння (4) набуває вигляду:

$$v_{\xi\eta} = 0. \quad (5)$$

Інтегруємо рівняння (5)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \eta} = f(\eta),$$

де $f(\eta)$ - довільна функція. Далі

$$v(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi),$$

де $f_1(\xi)$ - довільна функція. Отже,

$$v(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Повертаючись до вище проведених замін змінних, дістанемо

$$u(\xi, \eta) = (f_1(\xi) + f_2(\eta)) e^{-\frac{1}{2}\eta},$$

$$u(x, y) = (f_1(y - 2x) + f_2(y - x)) e^{\frac{x-y}{2}},$$

де f_1, f_2 - довільні, двічі неперервно диференційовні функції.

Індивідуальні домашні завдання до теми 3

1-5. Розв'язати задачу Коші.

1. $u_{tt} = u_{xx} + axt$,

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = \sin x.$$

2. $u_{tt} = u_{xx} + ae^{-t}$,

$$u(x, 0) = b \sin x, \quad u_t(x, 0) = c \cos x.$$

3. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x$,

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

4. $u_{tt} = 9u_{xx} + 6$,

$$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 4x.$$

$$5. \quad u_{tt} = 4u_{xx} + \sin x,$$

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

6-9. Знайти загальний розв'язок рівняння, попередньо звівши його до канонічного вигляду.

$$6. \quad 3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + \frac{5}{16}u = 0.$$

$$7. \quad 3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + \frac{1}{16}u - 16xe^{-\frac{x+y}{16}} = 0.$$

$$8. \quad 3u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x.$$

$$9. \quad u_{xx} - 2 \sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0.$$

Тема 4. Метод розділення змінних (метод Фур'є)

для рівнянь гіперболічного типу

Задача 1. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, 0 < x < l,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

Розв'язання. Як відомо, розв'язок крайової задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, 0 < x < l,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),$$

згідно методу розділення змінних подається у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

В нашому випадку $\varphi(x) = 0$, а тому $A_n = 0, n = 1, 2, \dots$. Отже,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Для визначення B_n маємо

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \cos \frac{\pi n}{l} at \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \sin \frac{2\pi}{l} x. \quad (1)$$

Рівність (1) можлива лише у випадку

$$B_n = \begin{cases} 0, n \neq 2; \\ \frac{l}{2\pi a}, n = 2. \end{cases}$$

Отже, $u(x, t) = \frac{l}{2\pi a} \sin \frac{2\pi}{l} at \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x$.

Задача 2. Розв'язати крайову задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{5\pi}{2l} x, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2l} x. \quad (4)$$

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0. \quad (5)$$

Підставляючи (5) в рівняння (2) та граничні умови (3), розділяючи змінні, отримуємо рівняння для функції $T(t)$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \quad T(t) \neq 0 \quad (6)$$

та задачу Штурма–Ліувіля для функції $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (7)$$

$$X(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \quad (8)$$

Можливі наступні випадки:

1) $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$, де C_1, C_2 - довільні константи.

З граничних умов (8) отримуємо $C_1 = 0, C_2 = 0$. Отже, $\lambda = 0$ не є власним значенням, оскільки $X(x) \equiv 0$.

2) $\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

З граничних умов (8) отримуємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ \sqrt{-\lambda} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + \sqrt{-\lambda} C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 = C_2, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0, \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 0.$$

Отже, немає власних значень $\lambda < 0$, оскільки $X(x) \equiv 0$.

3) $\lambda > 0 \Rightarrow X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$.

З граничних умов (8) отримуємо

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}l + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Отже, власним значенням

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right)^2$$

відповідають власні функції

$$X_n(x) = C_2 \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Розв'язуючи рівняння (6) при знайдених λ_n та враховуючи (5), (9), дістанемо

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} at + B_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} at \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x,$$

де A_n, B_n довільні константи.

З початкових умов (4) маємо:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x = \sin \frac{5\pi}{2l} x \Rightarrow A_n = \begin{cases} 1, n = 2; \\ 0, n \neq 2. \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi a}{2l} B_n \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x = \sin \frac{\pi}{2l} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n = \begin{cases} \frac{2l}{\pi a}, n = 0; \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } u(x, t) = \frac{2l}{\pi a} \sin \frac{\pi}{2l} at \cdot \sin \frac{\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} at \cdot \sin \frac{5\pi}{2l} x.$$

Задача 3. Розв'язати наступну крайову задачу:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (10)$$

$$u(0, t) = t^2, \quad u(\pi, t) = t^3,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

Розв'язання. Якщо при $x = 0, x = l$ задано неоднорідні граничні умови першого роду

$$u(0, t) = \mu^{(1)}(t), \quad u(l, t) = \mu^{(2)}(t),$$

то вводячи заміну

$$u(x, t) = \omega(x, t) + \mu^{(1)}(t) + x \frac{\mu^{(2)}(t) - \mu^{(1)}(t)}{l},$$

ми отримаємо однорідні граничні умови для нової невідомої функції $\omega(x, t)$.

В нашому випадку

$$u(x, t) = \omega(x, t) + t^2 + x \frac{t^3 - t^2}{\pi}. \quad (11)$$

Тоді, знайшовши похідні u_{tt}, u_{xx} та підставивши їх у рівняння (10), дістанемо наступну першу мішану крайову задачу для нової невідомої функції $\omega(x, t)$:

$$\omega_{tt} = \omega_{xx} - 2 - \frac{x}{\pi}(6t - 2),$$

$$\omega(0, t) = 0, \quad \omega(\pi, t) = 0,$$

$$\omega(x, 0) = \sin x, \quad \omega_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

Як відомо, розв'язок крайової задачі

$$\omega_{tt} = a^2 \omega_{xx} + f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in (0, l),$$

$$\omega(0, t) = \omega(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\omega(x, 0) = \varphi(x), \quad \omega_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l]$$

подається у вигляді ряду

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \int_0^t \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \cdot \sin \frac{\pi n a}{l} (t - \tau) d\tau \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned}$$

де

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Знайшовши A_n, B_n , ми знайдемо $\omega(x, t)$, а з (11) - невідому функцію $u(x, t)$.

Індивідуальні домашні завдання до теми 4

1. Вивчити процес вільних коливань однорідної струни довжини $l = 2$, лівий кінець $x = 0$ якої вільний, а правий $x = 2$ нерухомо закріплений, якщо в початковий момент часу струна займала прямолінійне положення, а початкова швидкість її точок була рівна $\psi(x) = 4 - x^2$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.
2. Вивчити процес вільних коливань однорідної струни довжини l , у якої лівий кінець вільний, а правий пружно закріплений ($h = 1$), якщо в початковий момент часу відхилення точок струни задане функцією

$$\varphi(x) = x^3(2 - l) - x^2(3l - l^2),$$
 а їх швидкість рівна нулеві.
3. Дослідити процес коливань однорідної струни довжини l з вільними кінцями, якщо на струну діє рівномірно розподілена зовнішня сила інтенсивності $A \sin t$, де $A = const$. Початкові відхилення та швидкості відсутні.
4. Дати фізичну інтерпретацію та знайти розв'язки наступних змішаних задач:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + A e^{-t} \cos \frac{\pi}{2l} x, \quad t > 0, \quad x \in (0; l), \quad A = const,$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l],$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0;$$

5. Дати фізичну інтерпретацію та знайти розв'язки наступних змішаних задач:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + \sin 2t, \quad t > 0, \quad x \in (0; l),$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = -2 \cos \frac{2}{a} x, \quad x \in [0; l],$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = \frac{2}{a} \sin \frac{2l}{a} \sin 2t, \quad t \geq 0;$$

6. Дати фізичну інтерпретацію та знайти розв'язки наступних змішаних задач:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x), \quad t > 0, \quad x \in (0; l),$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l],$$

$$U_x(t, 0) - hU(t, 0) = \alpha, \quad U(t, l) = \beta, \quad t \geq 0, \quad h, \alpha, \beta - const;$$

7. Дати фізичну інтерпретацію та знайти розв'язки наступних змішаних задач:

$$U_{tt} = 16U_{xx} + \sin \frac{7\pi}{10} x, \quad t > 0, \quad x \in (0; 5),$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; 5],$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 5) = 0, \quad t \geq 0.$$

8. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання прямокутної мембрани $x \in [0; b]$, $y \in [0; c]$ з нерухомо закріпленим краєм, якщо мембрана коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне $\sin \frac{\pi}{b} x \cdot \sin \frac{\pi}{c} y$;

9. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання прямокутної мембрани $x \in [0; b]$, $y \in [0; c]$ з нерухомо закріпленим краєм, якщо коливання викликані неперервно розподіленою по мембрані поперечною силою з густиною $f(t, x) = e^{-t} x(x - b) \sin \frac{2\pi}{c} y$.

10. Проінтегрувати змішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + f(t, x, y), \quad t > 0, \quad x \in (0; b), \quad y \in (0; c),$$

$$U(0, x, y) = 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0; b], \quad y \in [0; c],$$

$$U(t, 0, y) = U(t, b, y) = U(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, c) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\text{де } f(t, x, y) = -2xy(x - b) \cos \frac{\pi}{c} y \cos t - ty(x^2 - bx + 2) \sin t.$$

11. Вивчити радіальні коливання пружного газу в сферичному резонаторі, стінки якого є ідеально відображаючими (тобто $\left. \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \right|_s = 0$), якщо задані початкові значення потенціалу швидкостей і його похідної по часу:

$$U(0, \rho) = \varphi(\rho), \quad U_t(0, \rho) = 0, \quad \rho \in (0; R).$$

12. Кругла однорідна мембрана радіуса R , закріплена на краї, знаходиться в стані рівноваги при натягу T . В момент часу $t = 0$ до мембрани

прикладений нормальний тиск P на одиницю площі. Знайти закон коливань мембрани.

13. Вивчити власні коливання однорідної кругової мембрани радіуса R , яка нерухомо закріплена на краї, якщо в початковий момент часу вона має форму параболоїда обертання $U(0, r) = A(1 - r^2 R^{-2})$, де $A = const$.

РОЗДІЛ 2

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

§ 15. Поняття функціонала

Поняття функціонала природно виникає при розв'язуванні широкого класу геометричних і фізичних задач. Для прикладу, розглянемо найпростішу задачу про обчислення площі фігури, обмеженої на площині XOY графіком неперервної однозначної функції $y = y(x)$, прямими $x = x_1$, $x = x_2$ та віссю

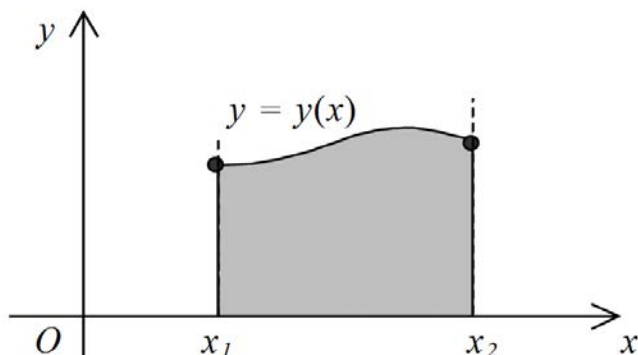


Рис. 8

абсцис OX (рис.8). Ця площа, як відомо, визначається інтегралом

$$S = \int_{x_1}^{x_2} dx |y(x)|, \quad (1)$$

і тому набуває того чи іншого значення в залежності від функції $y = y(x)$. Іншими словами, площа S є функцією кривої $y = y(x)$, тобто числовою функцією від функції.

Означення 1. Кажуть, що на деякому класі функцій задано функціонал J , якщо вказано правило, за яким кожній функції $y(x)$ цього класу ставиться у відповідність певне число $J[y]$.

У наведеному прикладі функціонал площі $S = S[y]$ задається на класі $C([x_1, x_2])$ функцій, неперервних на відрізку $[x_1, x_2]$. Надалі під класом $C^k([x_1, x_2])$ розумітимемо множину функцій, неперервних на відрізку $[x_1, x_2]$ разом зі своїми k -першими похідними.

Клас функцій, на якому задано функціонал, називають *областю визначення функціонала*. Підкреслимо: щоб задати функціонал, треба вказати як правило відповідності, так і область визначення.

§ 16. Основна задача варіаційного числення

Основна задача варіаційного числення полягає у відшуканні такої кривої (чи поверхні) $y_0(x)$, для якої значення $J[y_0]$ заданого функціонала є

найменшим або найбільшим по відношенню до його значень $J[y]$ на всіх близьких до $y_0(x)$ кривих $y(x)$ із заданого класу функцій. Кривих (поверхонь) із цією властивістю може бути декілька; вони називаються *екстремальми* функціонала J .

Сформульована задача подібна до задачі диференціального числення про відшукування екстремумів функції $f(x)$, тобто тих значень x_0 змінної x , для яких величини $f(x_0)$ є найменшими або найбільшими у порівнянні зі значеннями $f(x)$ у достатньо близьких до x_0 точках.

Зупинимося на більш точних означеннях.

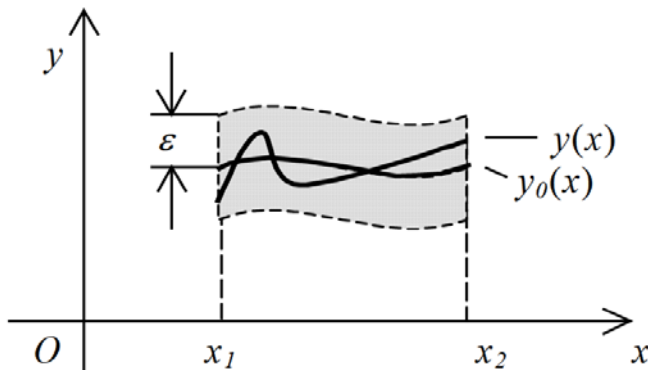


Рис. 9

Означення 1. ε -околом порядку k кривої $y_0(x)$ на проміжку $[x_1, x_2]$ називають множину всіх кривих $y(x)$, для яких скрізь на цьому проміжку виконуються нерівності

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \varepsilon, \quad |y'(x) - y_0'(x)| \leq \varepsilon, \dots, \\ |y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| \leq \varepsilon.$$

Число ε називають

відстанню порядку k між кривими $y(x)$ і $y_0(x)$.

Означення 2. Кажуть, що функціонал J має на кривій $y_0(x)$ із заданої множини кривих класу $C^k([x_1, x_2])$ відносний екстремум, якщо нерівність $J[y] \leq J[y_0]$ (або $J[y] \geq J[y_0]$) виконується для всіх кривих $y(x)$ цієї множини, належних ε -околові порядку k кривої $y_0(x)$. Якщо ж ця нерівність справджується для всіх кривих $y(x)$ заданої множини, розміщених у деякій області D площини XOY , то кажуть, що функціонал $J[y]$ набуває на кривій $y_0(x)$ абсолютного екстремуму в області D .

§ 17. Необхідні умови існування екстремуму функціонала. Теорема Ейлера-Лагранжа

Розглянемо найпростіший тип функціонала

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y'), \quad (1)$$

де функція $F(x, y, y')$ є неперервною разом зі своїми першими та другими похідними за всіма аргументами в деякій області D площини XOY і при довільних значеннях

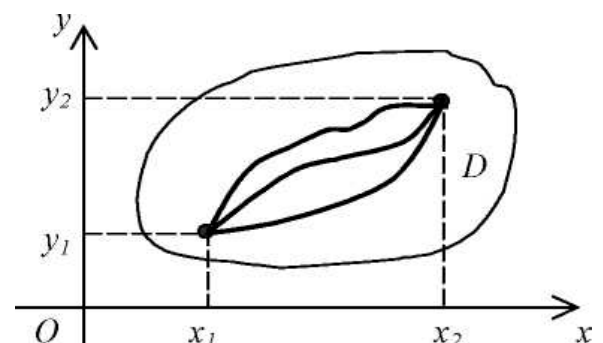


Рис. 10

похідної $y'(x)$.

Для дослідження необхідних умов існування екстремумів функціоналів виду (1) використовується наступний факт.

Лема 1. Якщо неперервна функція $f(x)$ задовольняє співвідношення

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x)h(x) = 0,$$

де $h(x)$ - довільна функція, що є гладкою на проміжку $[x_1, x_2]$ та дорівнює нулю на його кінцях ($h(x_1) = h(x_2) = 0$), то скрізь на цьому проміжку $f(x) = 0$.

Доведення. Припустимо, що твердження леми хибне. Тоді в деякій точці x_0 проміжку $[x_1, x_2]$ значення $f(x_0) \neq 0 \neq 0$, наприклад, $f(x_0) > 0$. Унаслідок неперервності функція $f(x)$ буде додатною й у деякому околі $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, точки x_0 , який повністю належить $[x_1, x_2]$. Скориставшись тепер довільністю $h(x)$, візьмемо її у вигляді

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq x \leq x_0 - \delta \\ \eta^2(x), & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \\ 0, & x_0 + \delta < x \leq x_2, \end{cases}$$

де $\eta(x)$ - довільна гладка функція, яка відмінна від нуля при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ та дорівнює нулю при $x = x_0 \pm \delta$. Дістаємо

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x)h(x) = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} dx f(x)\eta^2(x) > 0,$$

що суперечить умові леми.

Зауважимо, що подібну лему можна довести й для кратних інтегралів. Її часто називають основною лемою варіаційного числення.

Лема 2. Нехай крива $y_0(x)$ повністю лежить в області D і є екстремаллю функціонала (1) у класі $C^2([x_1, x_2])$ функцій зі спільним початком і спільним кінцем (рис. 10):

$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2. \quad (2)$$

Тоді вона задовольняє диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (3)$$

Доведення. Нехай $y_0(x)$ - екстремаль функціонала (1). Розглянемо множину кривих $y(x) = y_0(x) + \delta y(x) \equiv y_0(x) + \alpha h(x)$ з ε -околу другого порядку кривої $y_0(x)$. Тут δy - відхилення функції y від екстремалі, α - близький до нуля параметр ($\alpha \leq \alpha_0$), $h(x)$ - довільна гладка функція, для якої $\max_{x_1 \leq x \leq x_2} \{|\delta y(x)|, |\delta' y(x)|, |\delta'' y(x)|\} < \varepsilon$. На кінцях проміжку $y(x_i) = y_0(x_i) + \alpha h(x_i)$, або $y_i = y_0 + \alpha h(x_i)$ ($i = 1, 2$), звідки $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Зауважимо, що криві $y(x)$ з області визначення функціонала називають *допустимими* кривими

досліджуваної варіаційної задачі.

Функціонал (2) при підстановці в нього функції $y(x)$ являє собою функцію від параметра α :

$$\varphi(\alpha) = J[y_0 + \alpha h] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y_0 + \alpha h, y_0' + \alpha h'),$$

яка при $\alpha = 0$ має екстремум (оскільки $J[y_0]$ - екстремальне значення функціонала); тому $\varphi'(0) = 0$.

Умови, які задовольняє функція $F(x, \alpha) \equiv F(x, y_0 + \alpha h, y_0' + \alpha h')$, означають, що функції $F(x, \alpha)$ і $\partial F(x, \alpha) / \partial \alpha$ неперервні в прямокутнику $[x_1, x_2] \times [-\alpha_0, \alpha_0]$, $\alpha_0 \cdot \max_{x_1 \leq x \leq x_2} \{|h(x)|, |h'(x)|\} < \varepsilon$ диференціювання за α під знаком інтеграла є законним. Маємо:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \Big|_{y=y_0+\alpha h, y'=y_0'+\alpha h'} \cdot h(x) + \\ + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \Big|_{y=y_0+\alpha h, y'=y_0'+\alpha h'} \cdot h'(x) \end{array} \right\}.$$

Підставляючи $\alpha = 0$ та інтегруючи другий доданок частинами, дістаємо:

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \Big|_{y=y_0, y'=y_0'} \cdot h(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \Big|_{y=y_0, y'=y_0'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \Big|_{y=y_0, y'=y_0'} \right\} h(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Перший доданок у формулі (4) після підстановки меж інтегрування дорівнює нулю. Другий доданок містить під знаком інтеграла довільну функцію $h(x)$; згідно з Лемою 1, він дорівнює нулю лише за умови, що дорівнює нулю вираз у фігурних дужках. Останній є ніщо інше, як рівняння (3), записане для функції $y_0(x)$.

Зробимо деякі зауваження і введемо ряд нових понять. Можна довести, що рівняння (3) справджується й тоді, коли екстремум шукається на множині функцій із класу $C^1([x_1, x_2])$. Більше того, якщо функція $y_0(x)$ - екстремаль, то похідна $\partial F / \partial y'$ є на ній функцією, яка має повну похідну за x , а в тих точках кривої $y_0(x)$, де $\partial^2 F / \partial y'^2 \neq 0$, існує неперервна друга похідна $y_0''(x)$. Отже, необхідну умову існування екстремуму (відносного, абсолютного) функціонала (2) у класі гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем можна сформулювати таким чином:

Теорема Ейлера-Лагранжа. Для того щоб функція $y_0(x)$ із класу $C^1([x_1, x_2])$ надавала екстремум функціоналу (1) за умов (2), необхідно, щоб вона задовольняла рівняння (3). Якщо $\partial^2 F / \partial y'^2 \neq 0$ всюди на відрізку $[x_1, x_2]$, то $y_0(x) \in C^2([x_1, x_2])$.

У загальному випадку рівняння Ейлера-Лагранжа є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку відносно функції $y(x)$. Серед двічі неперервно диференційовних функцій воно відбирає ті, що можуть бути екстремалами, але не обов'язково ними є. Відібрані функції, взагалі кажучи, залежать від двох довільних сталих інтегрування, тобто утворюють двопараметричну сім'ю кривих $y = y(x, C_1, C_2)$. Сталі C_1 і C_2 визначаються за допомогою умов (2) на межах проміжку $[x_1, x_2]$.

З упевненістю можна стверджувати, що функціонал (1) не має екстремалей, якщо рівняння Ейлера-Лагранжа взагалі не має розв'язків; або має розв'язки, але вони не задовольняють умови (2); або має розв'язки, що задовольняють умови (2), але не належать класу $C^1([x_1, x_2])$.

У задачах прикладного характеру факт існування гладкого екстремуму визначається, як правило, самою постановкою задачі.

3) Функцію $\delta y(x)$ називають *варіацією функції* $y(x)$, а величину $\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y]$ - приростом функціонала $J[y]$, зумовленим варіацією δy . Головну (лінійну) за δy частину приросту функціонала називають *варіацією функціонала* δJ . Для знаходження δJ у нашому випадку в різниці ΔJ досить виділити член, лінійний за δy :

$$\begin{aligned} \Delta J[y] &= J[y + \delta y] - J[y] = J[y + \alpha h] - J[y] = \varphi(\alpha) - \varphi(0) = \\ &= \varphi(0) + \varphi'(\alpha)\alpha + O(\alpha^2) + \dots - \varphi(0) = \varphi'(\alpha)\alpha + O(\alpha^2) + \dots \end{aligned}$$

Відокремлюючи перший доданок, маємо:

$$\delta J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right\} dx.$$

Якщо $y(x) \in C^2([x_1, x_2])$, то, враховуючи формулу (5.4), знаходимо:

$$\delta J[y] = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx.$$

Для кривих із закріпленими кінцями

$$\delta J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx. \quad (5)$$

Для екстремальної кривої $y = y_0(x)$ маємо: $\delta J[y_0] = 0$. Це співвідношення нагадує теорему Ферма для точок екстремуму x_0 функції $f(x)$: $df(x_0) = 0$. Аналогія між повним диференціалом функції та варіацією функціонала дозволяє шукати останній за звичайними правилами знаходження диференціала $df(x) = f'(x)dx$, тільки тепер у ролі приросту аргументу dx виступає варіація функції δy , і підінтегральний вираз у формулі для $\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y]$ формально розвивається в ряд за δy . Варіацію δy

можна диференціювати один або декілька разів, причому $\frac{d^k \delta y}{dx^k} = \delta \frac{d^k y}{dx^k}$.

Підкреслимо: якщо існує варіація функціонала як диференціал за параметром (див. Лему 3.2), то існує й варіація функціонала як головна лінійна частина приросту функціонала, і ці два означення рівносильні.

Внески в $\Delta J[y]$, пропорційні другому та більш високим степеням δy , називають другою варіацією ($\delta^2 J[y]$) та варіаціями вищих порядків.

§ 18. Функціональна похідна. Інваріантність рівняння Ейлера-Лагранжа відносно перетворення координат

Аналогом похідної у варіаційному численні виступає функціональна похідна.

Виберемо варіацію δy так, щоб вона відрізнялася від нуля в малому Δ -околі точки x_0 , тобто щоб криві y та $y + \delta y$ збігалися скрізь на проміжку $[x_1, x_2]$, за винятком інтервалу $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \subset [x_1, x_2]$. (рис. 11)

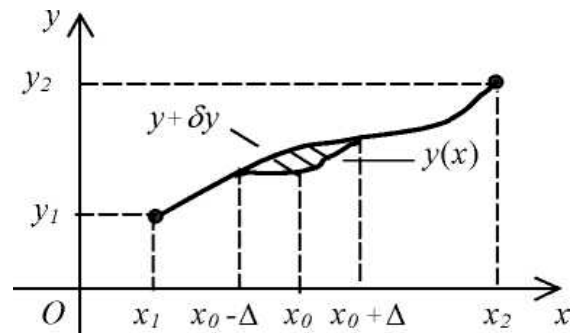


Рис. 11

Користуючись теоремою про середнє, інтеграл (6) перепишемо у вигляді

$$\delta J[y] = \int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx = \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \Big|_{x = \tilde{x}_0} \cdot S,$$

де $S = \int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} dx \delta y(x)$ - з точністю до знака площа (заштрихованої області) між кривими y та $y + \delta y$ та $y + \delta y$ (називатимемо її площею Δ -околу), \tilde{x}_0 - деяка точка з Δ -околу.

Функціональною похідною за кривою y у точці x_0 називають границю відношення

$$\frac{\delta J[y]}{\delta y} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta J[y]}{S} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \Big|_{x = \tilde{x}_0}. \quad (1)$$

Функціональна похідна вздовж екстремальної кривої дорівнює нулю в кожній точці цієї кривої.

Поняття функціональної похідної дозволяє досить просто довести той факт, що властивість кривої бути екстремаллю є інваріантна відносно перетворення координат.

Теорема. Нехай крива $y = y_0(x)$ є екстремаллю функціонала (17.1) на множині кривих, що з'єднують точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) . Крім того, нехай після переходу від координат (x, y) до криволінійних координат (t, q) за формулами

$$x = \varphi(t, q), \quad y = \psi(t, q)$$

з відмінним від нуля якобіаном переходу

$$I \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0,$$

її рівняння набирає вигляду $q = q_0(t)$, а функціонал $J[y]$ перетворюється на функціонал $J_1[y]$

$$J[y] = J_1[y] = \int_t^{t_1} dt L(t, q, q') \quad (2)$$

від кривих $q = q(t)$, що з'єднують точки (t_1, q_1) і (t_2, q_2) на площині TOQ , де $x_i = \varphi(t_i, q_i)$, $y_i = \psi(t_i, q_i)$, $i = 1, 2$. Тоді екстремум функціонала $J_1[y]$ досягається саме на кривій $q = q_0(t)$, яка буде розв'язком рівняння Ейлера-Лагранжа для $J_1[y]$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'} = 0. \quad (3)$$

Іншими словами, якщо загальний розв'язок рівняння (17.3) має вигляд $y = y_0(x, C_1, C_2)$, то загальний розв'язок рівняння (3) визначається як неявна функція $q = q_0(t)$, що задовольняє рівняння $\psi(t, q_0(t)) = y_0(\varphi(t, q_0(t)), C_1, C_2)$.

Доведення. Справді, якщо в околі кожної точки x_0 з інтервалу (x_1, x_2) для екстремальної кривої виконується співвідношення

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta J[y]}{S} = 0,$$

то й в околі кожної відповідної точки t_0 з інтервалу (t_1, t_2) функціональна похідна від $J_1[y]$ дорівнюватиме нулю:

$$\lim_{\Delta_1 \rightarrow 0} \frac{\delta J_1[y]}{S_1} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta J[y]}{S} \frac{S}{S_1} = 0,$$

оскільки відношення площ S і S_1 старого й нового околів прямує до детермінанта I , який не дорівнює нулю.

Інваріантність рівняння Ейлера-Лагранжа відносно перетворення координат дозволяє при розв'язуванні конкретних геометричних та фізичних задач в однаковій мірі користуватися різними криволінійними системами координат, лише б вони були взаємно однозначно пов'язані з декартовими. Перехід до криволінійних координат, наприклад, сферичних, стає особливо ефективним у тому випадку, коли система має відповідну симетрію, зокрема, сферичну, оскільки тоді рівняння Ейлера-Лагранжа набирають найбільш простого вигляду. Зауважимо, що перехід до нових координат можна здійснювати безпосередньо в підінтегральному виразі (17.1), а потім для нового інтеграла писати рівняння Ейлера-Лагранжа - це й буде початкове рівняння в

декартових координатах, віднесене до нових змінних.

§ 19. Випадки повної інтегровності та перші інтеграли рівняння Ейлера-Лагранжа

Як уже зазначалося, рівняння Ейлера-Лагранжа є, взагалі кажучи, звичайним диференціальним рівнянням другого порядку, і тому знаходження його розв'язків є в більшості випадків задачею значно складнішою, ніж розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. У зв'язку з цим особливий інтерес привертають умови, за яких його порядок можна понизити чи, навіть, це рівняння можна аналітично розв'язати. Виявляється, що це можливо в тих випадках, коли ядро $F(x, y, y')$ функціонала (17.1) не залежить від одного чи двох своїх аргументів. У фізичних задачах відсутність такої залежності є проявом певних симетрій, наприклад, простору та часу, що призводять до виконання відповідних законів збереження.

Зупинимось на цьому більш детально. Нагадаємо, що під x і y можна розуміти довільні криволінійні координати.

Якщо $F = F(y')$, тобто залежить лише від похідної y' , то $\partial F / \partial y = 0$ і $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx}$. Рівняння (4) зводиться до

$$y'' \left(\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2} \right) = 0, \quad (1)$$

і хоча б один із співмножників повинен дорівнювати нулю. Нехай $y''(x) = 0$, тоді $y'(x) = C_1$, $y(x) = C_1 x + C_2$. Ці криві утворюють двопараметричну сім'ю прямих. В іншому можливому випадку, коли

$$y'' \left(\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2} \right) \equiv f(y') = 0,$$

рівняння $f(y') = 0$ є функціональним рівнянням відносно похідної y' . Нехай $y'_i(x) \equiv k_i$ - усі його дійсні корені (їх може й не бути). Тоді $y_i(x) = k_i x + C$. Ці криві утворюють більш вузьку однопараметричну (k_i - фіксовані числа) сім'ю прямих, що входить до зазначеної вище двопараметричної.

Таким чином, у випадку, коли $F = F(y')$, екстремальми функціонала (17.1) можуть бути лише прямі

$$y(x) = C_1 x + C_2. \quad (2)$$

Якщо $F = F(x, y)$, тобто не залежить від похідної y' , то $\partial F / \partial y' = 0$, і рівняння (1) вироджується у функціональне відносно $y(x)$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \equiv g(x, y) = 0. \quad (3)$$

Якщо розв'язки $y_i = y_i(x)$ рівняння (12) існують, то, на відміну від розв'язків диференціального рівняння, вони не містять довільних сталих,

підбором яких задовольняють умови (17.2). Знайдені функції $y_i(x)$ підпорядковуватимуться умовам (17.2) лише у виключних ситуаціях, тобто в загальному випадку відповідний функціонал не матиме екстремалей.

Якщо F залежить від y' лінійно, тобто має вигляд $F = a(x, y) + b(x, y)y'$, де $a(x, y), b(x, y)$ - деякі функції, то рівняння Ейлера-Лагранжа знову вироджується у функціональне:

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} \equiv g(x, y) = 0.$$

Як щойно було зазначено, розв'язок подібного рівняння у загальному випадку не задовольняє умови в крайніх точках, і тому функціонал (17.1), найімовірніше, екстремалей не має. Більше того, варіаційна задача взагалі втрачає зміст, якщо

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} \equiv 0.$$

бо тоді вираз $a(x, y)dx + b(x, y)dy$ є повним диференціалом, і значення функціонала (17.1) залежать лише від початкової та кінцевої точок, а не від вибору кривої $y = y(x)$.

$F = F(x, y')$, тобто не залежить явно від y (змінну y у цьому випадку називають *циклічною*). Тоді $dF / dy = 0$, і рівняння (17.3) набуває вигляду

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = 0.$$

Його відразу можна один раз проінтегрувати; іншими словами, рівняння Ейлера-Лагранжа має перший інтеграл

$$\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = C_1. \quad (4)$$

Це є диференціальне рівняння першого порядку, яке не залежить явно від функції $y(x)$. Розв'язавши його відносно y' , отримаємо рівняння або декілька рівнянь типу $y' = f(x, C_1)$, звідки $y(x)$ знаходимо інтегруванням:

$$y(x) = \int dx f(x, C_1) + C_2. \quad (5)$$

$F = F(y, y')$, тобто не залежить явно від x . Помноживши обидві частини виразу

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' = 0.$$

на y' , перепишемо його як повну похідну

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Відповідно, рівняння Ейлера-Лагранжа має перший інтеграл

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1. \quad (6)$$

Це диференціальне рівняння першого порядку, яке не залежить явно від

х. Розв'язавши його відносно y' , дістанемо рівняння або декілька рівнянь типу $y' = f(y, C_1)$. Після відокремлення змінних та інтегрування, функції y знаходимо із співвідношення

$$\int \frac{dy}{f(y, C_1)} = x + C_2. \quad (7)$$

Зауваження. Інтеграл (13) і (15) інколи називають *інтегралом імпульсу* та *інтегралом енергії*. Ці назви походять із класичної механіки, де кожній механічній системі, підпорядкованій ідеальним в'язям, ставиться у відповідність певна функція $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ від $s \geq 1$ *узагальнених координат* $q_k(t)$ та *узагальнених швидкостей* \dot{q}_k точок системи, а також часу t . Нагадаємо, що узагальненими координатами називають будь-які величини (не обов'язково декартові координати точок системи), за допомогою яких можна однозначно задати положення системи у просторі. Узагальнені швидкості означаються як похідні $\dot{q}_k \equiv dq_k/dt$.

Функцію $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ називають *функцією Лагранжа*; вона дорівнює різниці кінетичної K та потенціальної Π енергій системи як функцій змінних \dot{q}_k і $q_k(t)$. Її похідні

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad F_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (8)$$

називаються відповідно *узагальненими імпульсами* та *узагальненими силами*. Повна енергія механічної системи

$$E = K + \Pi = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L. \quad (9)$$

Згідно з *принципом найменшої дії (принципом Гамільтона)*, рух системи на проміжку часу $[t_1, t_2]$ між двома фіксованими положеннями, які характеризуються значеннями $q_k(t_1)$ і $q_k(t_2)$ узагальнених координат точок системи, відбувається так, що функціонал дії

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (10)$$

набуває екстремального (зазвичай - мінімального) значення:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q_k, \dot{q}_k, t) = 0 \quad (11)$$

Для одновимірної системи з одним ступенем вільності $q(t)$ необхідною умовою для цього є виконання рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (12)$$

Як буде показано далі, при наявності s ступенів вільності $q_k(t)$ еволюція останніх від початкового положення $q_k(t_1)$ до кінцевого $q_k(t_2)$ визначається системою диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0. \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (13)$$

Система рівнянь (13) залишається інваріантною відносно вибору узагальнених координат $q_k(t)$. Для знаходження сталих інтегрування в розв'язках цих рівнянь замість умов типу (17.2) (тобто значень координат точок системи в початковий та кінцевий моменти часу: $q_k(t_1) = q_k^{(1)}$ і $q_k(t_2) = q_k^{(2)}$) використовують так звані початкові умови - значення координат і швидкостей у початковий момент часу t_1 : $q_k(t_1) = q_k^{(1)}$, $\dot{q}_k(t_1) = v_k^{(1)}$ (зазвичай вважають, що $t_1 = 0$). У фізичному плані це означає, що рух механічної системи жорстко детермінований: при відомому рівнянні руху він повністю визначається початковими координатами та початковими швидкостями точок системи.

За допомогою позначень (8) рівняння руху (13) набирають вигляду рівнянь Ньютона, записаних для узагальнених імпульсів та узагальнених сил:

$$\dot{P}_k = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (14)$$

У порівнянні з рівняннями Ньютона, записаними для кожної матеріальної точки системи, рівняння (13), мають ту перевагу, що їх кількість дорівнює кількості ступенів вільності системи, і при наявності в'язей, що обмежують рух системи, є меншою від $3N$, тобто є меншою від кількості рівнянь Ньютона, потрібних для опису системи N матеріальних точок. Крім того, у рівняння Ейлера-Лагранжа не входять сили реакції в'язей, які наперед невідомі.

§ 20. Екстремальні принципи у фізиці

Принцип найменшої дії Гамільтона, який було сформульовано в попередньому параграфі для механічних систем матеріальних точок, є найбільш загальним формулюванням закону їх руху. Його перевага перед іншими полягає в тому, що він легко поширюється на системи іншої фізичної природи, наприклад, електромагнітне поле, поля елементарних частинок чи кварк-глюонні поля. А саме, кожній такій системі ставиться у відповідність функціонал дії S , який залежить від координат точкових мас і часу, а у випадку полів - від векторних або скалярних польових функцій від координат точок простору-часу (напруженостей електричного $E(r,t)$ та магнітного $H(r,t)$ полів, хвильової функції $\psi(r,t)$ мезонного поля і т. д.). Закономірності зміни стану системи у просторі та часі між двома фіксованими моментами t_1 і t_2 описуються певними диференціальними рівняннями, які впливають з умови екстремальності S на відрізку $[t_1, t_2]$.

Важливе місце посідає окремий випадок рівноважних систем, параметри яких не змінюються з часом. У цьому випадку принципу найменшої дії придають дещо інше, але еквівалентне формулювання у вигляді так званих *умов рівноваги*. Нагадаємо декотрі з них: стійкому стану рівноваги механічної системи, що знаходиться в полі потенціальних сил і підпорядкована голономним (тобто накладеними тільки на координати) ідеальним

стаціонарним в'язям, відповідає таке розміщення її частин, при якому повна потенціальна енергія системи є мінімальною (теорема Лагранжа-Діріхле); енергія істинного електростатичного поля провідників є мінімальною по відношенню до енергії полів, які створювалися б усіма іншими розподілами зарядів по об'єму провідників (теорема Томсона). Аналогічне твердження вірне і для магнітостатичних полів, спричинених стаціонарними струмами; у стані теплової рівноваги вільна енергія $F(T, V)$ термодинамічної системи (тобто робота, яку система здатна здійснити при оборотному ізотермічному процесові) є мінімальна в порівнянні з усіма іншими змінами стану при сталих температурі T та об'ємові V . Такі самі теореми справджуються й для інших термодинамічних потенціалів як функцій власних змінних - термодинамічного потенціалу Гіббса $\Phi(T, P)$, внутрішньої енергії $E(S, V)$ і теплової функції $W(S, P)$. Тут S - ентропія системи, P - тиск у системі.

Принципом найменшої дії рух механічної системи визначається повністю: розв'язуючи відповідні рівняння, можна знайти як форму траєкторії, так і залежність просторового положення системи від часу. Якщо ж залишити осторонь часову частину задачі та обмежитися більш вузьким питанням про відшукання лише траєкторії, то можна користуватися таким спрощеним формулюванням принципу найменшої дії: траєкторія руху матеріальної точки масою m у полі потенціальних сил із потенціалом Π між двома положеннями 1 та 2 є екстремаллю функціонала

$$S_0 = \int_1^2 dl \sqrt{2m(E - \Pi)}, \quad (1)$$

де E - повна механічна енергія точки. Це - принцип Мопертюї.

Функціонал S_0 називають *укороченою дією*. Екстремальна властивість S_0 впливає з аналогії між геометричною оптикою та механікою, зміст якої можна сформулювати наступним чином: траєкторія матеріальної точки при її русі в стаціонарному потенціальному полі Π зі швидкістю $v(l) = \sqrt{2(E - \Pi)}/m$ збігається з траєкторією променя світла, що поширюється в оптично неоднорідному середовищі з показником заломлення $n(x, y, z) \propto \sqrt{2m(E - \Pi)}$ (тобто величина $\sqrt{2m(E - \Pi)}$ в механіці відіграє ту ж роль, що й показник заломлення $n(x, y, z)$ в оптиці). Оскільки промінь світла поширюється в неоднорідному середовищі зі швидкістю $u = c/n(x, y, z)$ і його істинним шляхом реалізується екстремум функціонала $T[y] = \int_0^l \frac{dl}{u(x, y)} = \frac{1}{c} \int_0^l dl n(x, y)$, то істинною траєкторією матеріальної точки реалізується екстремум функціонала (1).

§ 21. Достатні умови існування мінімуму (максимуму) функціонала

Зупинимось коротко на достатніх умовах існування мінімуму (максимуму) функціонала найпростішого типу (17.1). Обмежимося розглядом

мінімуму, який реалізується на множині гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем.

Нехай $y_0(x)$ - крива, яка надає мінімум функціоналові (17.1). Тоді для довільної гладкої функції $h(x)$, що задовольняє умови $h(x_1) = h(x_2) = 0$, і достатньо малих значень параметра α маємо

$$\varphi_k(\alpha) = J[y_0 + \alpha h] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y_0 + \alpha h, y_0' + \alpha h') > \varphi(0) = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y_0, y_0'), \quad |\alpha| > 0,$$

тобто

$$\varphi_k'(0) = 0, \quad \varphi_k''(0) \geq 0. \quad (1)$$

Як було встановлено раніше (див. Лему 17.2), перша з цих умов веде до рівняння Ейлера-Лагранжа (17.3). Розв'язавши його та скориставшись умовами жорсткого закріплення (17.2), знаходимо $y_0(x)$.

Позначимо через $C_0^1([x_1, x_2])$ множини гладких функцій на відрізку $[x_1, x_2]$, які дорівнюють нулю при $x = x_1$ і $x = x_2$. Друге із співвідношень (1) потребує проаналізувати умови, за яких для довільної функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ справджується нерівність

$$\varphi_k''(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx F(S h^2 + R h'^2) \geq 0, \quad (2)$$

де S та R виражаються через $y_0(x)$ за формулами

$$S(x) \equiv \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \Big|_{y=y_0}, \quad R(x) \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \Big|_{y=y_0} \quad (3)$$

Надалі вважаємо, що $S(x)$ і $R(x)$ - неперервні функції на відрізку $[x_1, x_2]$, і що $R(x)$ ще має на $[x_1, x_2]$ неперервну похідну.

Теорема. Нерівність (2) виконується для довільної функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ лише тоді, коли

$$\mu \equiv \min_{x \in [x_1, x_2]} R(x) \geq 0. \quad (3)$$

Доведення. Припустимо, що $R(x)$ досягає мінімуму в точці $x_0 \in (x_1, x_2)$, і що $R(x_0) = \mu < 0$. Оскільки $R(x)$ — неперервна функція, існує таке $\Delta > 0$ що $R(x) < \frac{\mu}{2}$, якщо $|x - x_0| \leq \Delta$.

Розглянемо послідовність функцій

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[\sin \frac{\pi n}{\Delta} (x - x_0) - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi n}{\Delta} (x - x_0) \right], & |x - x_0| < \Delta, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0, & |x - x_0| > \Delta, \end{cases}$$

Усі ці функції належать множині $C_0^1([x_1, x_2])$, і для них

$$\int_{x_1}^{x_2} dx F h_n^2(x) = \int_{x_1-\Delta}^{x_2+\Delta} dx h_n^2(x) = \frac{5}{4},$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx F h_n'^2(x) = \int_{x_1-\Delta}^{x_2+\Delta} dx h_n'^2(x) = \frac{2\pi^2 n^2}{\Delta^2}.$$
(4)

Нехай $M \equiv \max_{x \in [x_1, x_2]} S(x)$. Тоді згідно з (4)

$$\begin{aligned} \varphi_k''(0) &= \int_{x_1}^{x_2} dx [S(x) h_n^2(x) + R(x) h_n'^2(x)] = \int_{x_1-\Delta}^{x_2+\Delta} dx [S(x) h_n^2(x) + R(x) h_n'^2(x)] \leq \\ &\leq M \int_{x_1-\Delta}^{x_2+\Delta} dx h_n^2(x) + \frac{\mu}{2} \int_{x_1-\Delta}^{x_2+\Delta} dx h_n'^2(x) = \frac{5}{4} M + \frac{\pi^2 n^2 \mu}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Бачимо, що $\varphi_n''(0) < 0$ при $n > \sqrt{5\Delta^2 M / 4\pi|\mu|}$. Отже, умова (3) є необхідною для того, щоб функція $y_0(x)$ надавала мінімум функціоналу.

Надалі вважатимемо, що $R(x) > 0$, тобто $\mu > 0$. Ця умова називається посиленою умовою Лежандра.

§ 22 Задачі на умовний екстремум

22.1. Ізопериметрична задача

У задачах на умовний екстремум екстремаль функціонала відшукується серед функцій заданого класу, які, крім крайових, задовольняють й інші додаткові умови. У багатьох випадках їх можна розв'язати, звівши їх до звичайних задач варіаційного числення для функціоналів більш загального виду.

Зупинимось спершу на *ізопериметричній задачі*. У найпростішому варіанті вона формулюється так: серед гладких функцій із жорстко закріпленими кінцями знайти екстремаль функціонала

$$J[y] = \int_x^{x_1} dx F(x, y, y'),$$
(1)

для якої інший функціонал набуває заданого сталого значення:

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx G(x, y, y') = L_0$$
(2)

Як і раніше, вважатимемо, що функції $F(x, y, y')$ і $G(x, y, y')$ є неперервними разом зі своїми першими та другими похідними за усіма аргументами в деякій області D площини XOY і при довільних значеннях похідної $y'(x)$.

Теорема Ейлера. Якщо крива $y_0 \in C^2([x_1, x_2])$ надає екстремум функціоналу (1) у класі $C^1([x_1, x_2])$ за умови (2) та звичайних умов жорсткого закріплення

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad (3)$$

і якщо $y_0(x)$ не є екстремаллю функціонала (2) (тобто число L_0 не є екстремальним значенням функціонала (2)), то існує така стала λ , що крива $y_0(x)$ надає екстремум функціоналу

$$J^*[y] = J[y] - \lambda L[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx [F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y')]. \quad (4)$$

Параметр λ називається невизначеним множником Лагранжа.

Доведення. Називатимемо допустимими такі варіації $\delta y(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ кривої $y_0(x)$, для яких

$$L[y_0 + \delta y] = L_0 \quad (5)$$

Для допустимих варіацій маємо

$$\delta L[y_0] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx = 0, \quad (6)$$

а також, як і у випадку функціонала найпростішого типу,

$$\delta J[y_0] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx = 0, \quad (7)$$

Умова (6) істотно звужує клас можливих варіацій екстремальної кривої. Зокрема, не є допустимими варіації, які відрізняються від нуля в малому околі лише однієї точки $x_0 \in (x_1, x_2)$, для якої

$$\left[\frac{\partial G(x, y_0(x), y_0'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G(x, y_0(x), y_0'(x))}{\partial y'} \right]_{x=x_0} \neq 0 \quad (8)$$

Точки, для яких справджується умова (8), існують, бо інакше функція $y_0(x)$ задовольняла б на інтервалі (x_1, x_2) рівняння

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} = 0$$

для екстремалі функціонала (17.2), а це суперечить умові теореми.

Розглянемо тепер таку допустиму варіацію, яка відмінна від нуля в як завгодно малих δ -околах точки x_0 та іншої (довільної) точки $x' \in (x_1, x_2)$.

Позначивши

$$S_0 \equiv \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \delta y(x) dx, \quad S' \equiv \int_{x'-\delta}^{x'+\delta} \delta y(x) dx,$$

замість (6) і (7) можемо записати:

$$\delta L \approx \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_{x=x_0} \cdot S_0 + \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_{x=x'} \cdot S' = 0, \quad (9)$$

$$\delta J \approx \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_0} \cdot S_0 + \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x'} \cdot S' = 0. \quad (10)$$

Із рівняння (9) знаходимо:

$$S_0 = - \frac{\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_{x=x'}}{\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_{x=x'}} \cdot S'.$$

Поклавши тепер

$$\lambda = - \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_0}}{\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_0}},$$

рівняння (10) можемо подати у вигляді

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \lambda \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right] \right\}_{x=x'} \cdot S' = 0.$$

Оскільки S' - мале, але довільне число, а x' - довільна точка інтервалу (x_1, x_2) , бачимо, що екстремальна функція задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial y}(F - \lambda G) - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'}(F - \lambda G) = 0. \quad (11)$$

Таким чином, щоб розв'язати ізопериметричну задачу (1)-(3), спершу за допомогою заданих функціоналів $J[y]$ та $L[y]$ будемо функціонал $J'[y]$ (4) з підінтегральною функцією $F^*(x, y, y') = F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y')$ та виписуємо для нього відповідне диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа (11). Розв'язавши це рівняння, отримуємо трипараметричну сім'ю кривих $y = y(x, \lambda, C_1, C_2)$, серед яких, можливо, знаходиться функція, що є екстремаллю функціонала (1) і надає фіксованого (не екстремального) значення функціоналу (2). Щоб її відокремити, за допомогою крайових умов (3) та умови (2) знаходимо значення сталих інтегрування C_1, C_2 та параметра λ :

$$y(x_1; \lambda, C_1, C_2) = y_1, \quad y(x_2; \lambda, C_1, C_2) = y_2, \quad L[y(x; \lambda, C_1, C_2)] = L_0$$

22.2. Задача Лагранжа

Інший тип задач на умовний екстремум дістаємо, вимагаючи, щоб екстремаль функціонала (18) замість умови сталості функціоналів (19) задовольняла в'язі

$$f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n; x, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m < n.$$

Ця задача називається *задачею Лагранжа*. Зауважимо, що в'язь f_j . Називається *голономною*, якщо вона не містить (або зводиться до вигляду, що не містить) похідні $y'_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. У протилежному разі вона називається *не голономною*.

Прикладами задачі Лагранжа з голономною в'яззю є розглянуті вище

задачі про геодезичну, яка з'єднує задані точки на певній поверхні

$$f(x, y, z) = 0. \quad (22)$$

Отже, в найпростішому варіанті задачу Лагранжа можна сформулювати так: знайти екстремаль функціонала виду

$$J[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, z, y', z'), \quad (23)$$

яка задовольняє голономну в'язь (22) та крайові умови жорсткого закріпленім

$$y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad z(x_2) = z_2. \quad (24)$$

Теорема 3.2.1. Нехай функції $F(x, y, z, y', z')$ та $f(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними відповідно до другого та першого порядків включно. Тоді екстремаль функціонала (23) за умов (22), (24) задовольняє систему диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z'} = 0, \quad (25)$$

де

$$\tilde{F}(x, y, z, \lambda; y', z') = F(x, y, z, \lambda; y', z') - \lambda(x) f(x, y, z), \quad (26)$$

а $\lambda(x)$ - невизначена функція класу $C^1([x_1, x_2])$.

Сталі інтегрування і функція $\lambda(x)$ в загальному розв'язку системи (25) знаходяться за допомогою крайових умов (24) і в'язі (22).

Доведення. Як і у випадку ізопериметричної задачі, спробуємо задачу (22)-(24) на умовний екстремум функціонала (23) звести до задачі про звичайний екстремум функціонала більш загального виду з підінтегральною функцією (26):

$$\tilde{J}[y, z, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} dx \tilde{F}(x, y, z, \lambda; y', z'). \quad (27)$$

Якщо розглядати $\lambda(x)$ як ще одну функцію, від якої залежить функціонал $\tilde{J}[y, z, \lambda]$, то його екстремаль повинна задовольняти систему трьох диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа, а саме, два рівняння (25) та рівняння

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda'} = 0. \quad (28)$$

А це є не що інше, як рівняння (22.3.23).

Завдання 1. Доведіть, що головна нормаль до геодезичної лінії поверхні збігається в кожній точці з нормаллю до поверхні. (Основна властивість геодезичної).

Розв'язання. Потрібно проаналізувати задачу Лагранжа (22)-(24), де у випадку геодезичної лінії підінтегральна функція функціонала (23) має вигляд

$$F(y', z') = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}. \quad (29)$$

Ще одне рівняння дістанемо, диференціюючи (22.3.23) за змінною x :

$$f_x + f_y y' + f_z z' = 0.$$

Тепер помножимо обидві частини цієї рівності на λ та підставимо замість λf_y і λf_z їх значення з формул (29):

$$-y' \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{F} \right) - z' \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{F} \right) + \lambda f_x = 0.$$

Розкриваючи похідні за x та враховуючи співвідношення

$$F^2 = 1 + y'^2 + z'^2, \quad F \frac{dF}{dx} = y'y'' + z'z'',$$

знаходимо:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{F} \right) + \lambda f_x = 0. \quad (30)$$

Вирази в дужках під знаком похідної дорівнюють напрямним косинусам дотичної до геодезичної, тому рівняння (29), (30) можна переписати так:

$$\frac{d \cos \alpha}{dx} + \lambda f_x = 0, \quad \frac{d \cos \beta}{dx} + \lambda f_y = 0, \quad \frac{d \cos \gamma}{dx} + \lambda f_z = 0. \quad (31)$$

Користуючись формулою $dx/dl = \cos \alpha$, операцію диференціювання за змінною x у формулах (31) замінимо операцією диференціювання за довжиною геодезичної: $\frac{d}{dx} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{d}{dl}$. Отримуємо:

$$\frac{d \cos \alpha}{dl} = \mu f_x, \quad \frac{d \cos \beta}{dl} = \mu f_y, \quad \frac{d \cos \gamma}{dl} = \mu f_z. \quad (32)$$

де $\mu \equiv -\lambda \cos \alpha$.

Як відомо з диференціальної геометрії, ліві частини формул (32) пропорційні напрямним косинусам головної нормалі до кривої, а праві - напрямним косинусам нормалі до поверхні. Звідси й випливає, що вздовж геодезичної лінії головна нормаль до неї є одночасно й нормаллю до поверхні.

Загальна задача Лагранжа про відшукання екстремуму функціонала (18) за умови, що шукані функції $y_i(x)$ належать класу $C^1([x_1, x_2])$, задовольняють m диференціальних співвідношень (неголономні в'язі) (21) та певні крайові умови кількістю $2n + m$, розв'язується аналогічно до попередньої.

Нехай функції (21) визначені та мають неперервні частинні похідні другого порядку за всіма своїми аргументами, а матриця $\|\partial f_j / \partial y_i'\|$ має ранг m в усіх точках $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ деякої просторової області, коли похідні y_1', y_2', \dots, y_n' пробігають довільні значення на кінцях інтервалу $[x_1, x_2]$. Тоді шуканою екстремаллю є інтегральна крива системи $(n + m)$ диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

$$f_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m < n, \quad (34)$$

де допоміжна функція

$$\tilde{F} = f - \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) f_j \quad (35)$$

а невизначені функції Лагранжа $\lambda_j(x)$ належать класу $C^1([x_1, x_2])$.

Зауважимо, що співвідношення (34) можна розглядати як рівняння Ейлера-Лагранжа, у яких функція (35) диференціюється за невідомими функціями A .

Завдання 2. По якій замкненій кривій у горизонтальній площині повинен рухатися літак зі сталою за величиною власною швидкістю v , щоб за фіксований проміжок часу облетіти найбільшу площу? Під час руху літака дме вітер, швидкість якого відносно землі стала за напрямом та величиною $w < v$.

(Задача Чаплигіна про максимальну площу обльоту).

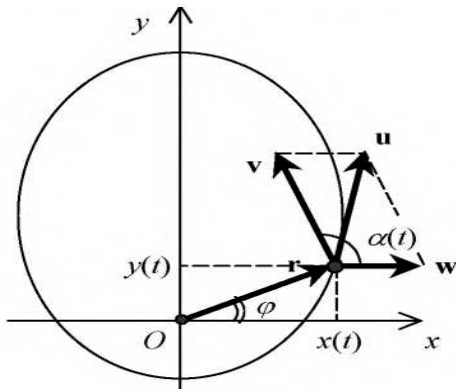


Рис. 12

Розв'язання. Вивчатимемо рух літака відносно нерухомої системи відліку, пов'язаної із землею. Нехай рух відбувається в горизонтальній площині XOY , а вісь OX напрямлена вздовж швидкості вітру w . Позначимо через $\alpha(t)$ кут між напрямом власної швидкості літака v та віссю OX , а через $x(t)$ і $y(t)$ – компоненти радіус-вектора центра мас літака r у момент часу t . Тоді швидкість літака відносно землі $u = v + w$ у має компоненти (рис.

12)

$$\dot{x} = v \cos \alpha + w, \quad \dot{y} = v \sin \alpha. \quad (36)$$

Площа, яку описує літак у горизонтальній площині за час dt , дорівнює половині модуля (фактично половині z -компоненти) векторного добутку $[r, u, dt]$. Тому площа, яку літак облітає за проміжок часу T , виражається інтегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T dt (x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (37)$$

Задача, таким чином, зводиться до відшукування трьох функцій $\alpha(t)$, $x(t)$ і $y(t)$, що надають максимум функціоналу (37) та задовольняють дві неголономні в'язі (36).

Побудуємо систему рівнянь (33). Оскільки функція (35) у нашому випадку має вигляд

$$\tilde{F} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \lambda_1(t)(\dot{x} - v \cos \alpha - w) - \lambda_2(t)(\dot{y} - v \sin \alpha), \quad (38)$$

дістаємо:

$$\dot{\lambda}_1 + \dot{y} = 0, \quad \dot{\lambda}_2 + \dot{x} = 0, \quad -\lambda \sin \alpha + \lambda \cos \alpha = 0. \quad (39)$$

Із перших двох рівнянь

$$\lambda_1 = -y + C_1, \quad \lambda_2 = x + C_2. \quad (40)$$

Паралельним перенесенням осей координат можна домогтися, щоб сталі C_x та C_2 дорівнювали нулю. Тоді третє рівняння руху набирає вигляду

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0 \quad (41)$$

Разом із двома рівняннями в'язей (36) воно утворює замкнену систему для знаходження функцій $\alpha(t)$, $x(t)$ та $y(t)$.

Перейдемо до полярних координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Тоді рівняння (41) зводиться до

$$\cos(\alpha - \varphi) = 0,$$

звідки

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}. \quad (42)$$

З урахуванням цього співвідношення рівняння (36.3.37) набирають вигляду

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} &= -v \sin \varphi + w, \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} &= v \cos \varphi. \end{aligned} \quad (43)$$

Помножимо перше з цих рівнянь на $\cos \varphi$, друге - $\sin \varphi$, та додамо їх ліві та праві частини. Маємо

$$\frac{dr}{dt} = w \cos \varphi,$$

тобто

$$\frac{dr}{dt} = \frac{w}{v} \frac{dy}{dt}$$

Обидві частини цього рівняння легко інтегруються:

$$r = \frac{w}{v} y + C = \frac{w}{v} r \sin \varphi + C,$$

де C - стала інтегрування. Звідси

$$r = \frac{C}{1 - \frac{w}{v} \sin \varphi} = \frac{C}{1 + \frac{w}{v} \cos \alpha}. \quad (44)$$

Бачимо, що траєкторія літака з максимальною площею обльоту - це конічний переріз із фокусом у початку координат і ексцентриситетом $\varepsilon = w/v$. Оскільки швидкість вітру вважається меншою за швидкість літака, то $\varepsilon < 1$ тобто цей переріз є еліпсом із великою віссю вздовж осі OY . Рухаючись по такому еліпсові, пілот повинен витримувати кут (42) для напрямку власної швидкості літака відносно землі.

§ 23. Функціонали від функцій багатьох змінних. Рівняння Ейлера-Остроградського

У цьому параграфі вивчається основна задача варіаційного числення для функціоналів, що залежать від функцій декількох змінних та їх частинних похідних. Найпростіший представник такого типу функціоналів залежить від

функції двох змінних та її перших похідних:

$$J[z] = \iint_D dx dy \left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right). \quad (1)$$

Вважатимемо, що допустимі функції $z = z(x, y)$ визначені в деякій області D площини XOY із кусково-гладкою межею Γ , є неперервні разом зі своїми першими частинними похідними, а множина їх значень для точок $(x, y) \in D$ утворює деяку просторову область G (рис. 13).

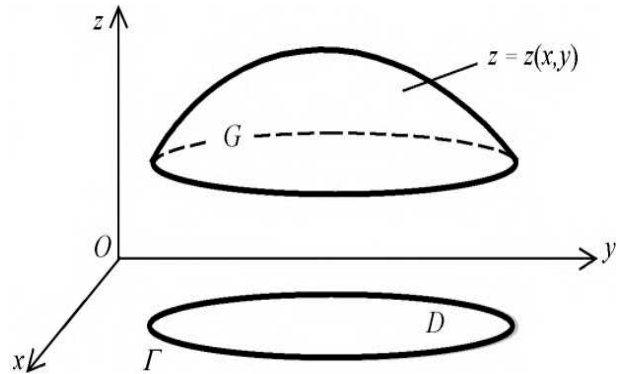


Рис. 13

Теорема 1. Нехай при довільних скінченних значеннях $z_x \equiv \partial z / \partial x$ та $z_y \equiv \partial z / \partial y$ підінтегральна функція $F(x, y, z, z_x, z_y)$ у функціоналі (1) є в

області G двічі неперервно диференційовною за своїми аргументами. Якщо функція $z_0(x, y)$, яка надає екстремум функціоналу (1) на множині допустимих функцій з однаковими фіксованими значеннями $z(x, y)$ на контурі Γ , має неперервні другі похідні, то вона задовольняє рівняння *Ейлера-Остроградського*

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z_y} = 0 \quad (2)$$

Доведення. Розглянемо множину допустимих поверхонь

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \delta z(x, y) = z_0(x, y) + \alpha h(x, y),$$

для яких на межі Γ $\delta z(x, y)|_{\Gamma} = h(x, y)|_{\Gamma} = 0$. Варіацію функціонала (1)

$$\delta J = \alpha \iint_D dx dy \left(\frac{\partial F}{\partial z} h + \frac{\partial F}{\partial z_x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_y} \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

за допомогою двовимірних векторів $A = \left(\frac{\partial F}{\partial z_x}, \frac{\partial F}{\partial z_y} \right)$, $\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right)$ та

тотожності

$$A \cdot \nabla h = \nabla(hA) - h\nabla A$$

подамо у вигляді

$$\delta J = \alpha \iint_D dx dy \left(\frac{\partial F}{\partial z} h + A \cdot \nabla h \right) = \alpha \iint_D dx dy \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \nabla A \right) h + \nabla(hA) \right\}.$$

Застосовуючи до останнього члена в δJ двовимірний варіант теореми Остроградського-Гаусса

$$\iint_D dx dy \nabla(hA) = \oint_{\Gamma} dl h A_n,$$

де A_n - перпендикулярна до контуру Γ компонента вектора A , дістаємо:

$$\delta J = \iint_D dx dy \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \nabla A \right) = \delta(x, y) + \oint_{\Gamma} dl \delta z(x, y) A_n. \quad (3)$$

Другий доданок у формулі (3) дорівнює нулю, оскільки значення допустимих поверхонь на контурі Γ фіксовані. Рівність $\delta J[z_0] = 0$ справджуватиметься для довільних значень варіації $\delta z(x, y)|_D$ всередині області D лише тоді, коли скрізь в області D функція $z_0(x, y)$ задовольнятиме рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \nabla A = 0,$$

тобто рівняння (2).

Завдання 1. Випишіть рівняння Ейлера-Остроградського для задачі про знаходження мінімальної площі, натягнутої на контур Γ .

Вказівка. Треба знайти мінімум функціонала площі поверхні, що натягнена на контур Γ і проектується на область D :

$$J[z] = \iint_D dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}.$$

Відповідне рівняння Ейлера-Остроградського

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} = 0$$

означає, що середня кривина шуканої поверхні скрізь у D дорівнює нулю.

Завдання 2. Узагальніть рівняння Ейлера-Остроградського на випадок функціонала виду

$$J[z] = \iiint \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n F(x_1, x_2, \dots, x_n; z, z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_n}),$$

де $z_{x_i} \equiv \partial z(x_1, x_2, \dots, x_n) / \partial x_i$

Відповідь:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial z_{x_i}} = 0. \quad (4)$$

Завдання 3. Покажіть, що потенціал електростатичного поля у вакуумі задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta \varphi(r) = 0.$$

Вказівки. Об'ємна густина енергії електростатичного поля

$$w(r) = \frac{1}{8\pi} E^2(r) = \frac{1}{8\pi} E^2(x, y, z).$$

Узявши до уваги зв'язок між напруженістю поля $E(r)$ та його потенціалом $\varphi(r)$:

$$E(r) = -\nabla \varphi(r),$$

виразіть повну енергію електростатичного поля

$$W = \int_V dr w(r) = \frac{1}{8\pi} \int_V dr E^2(r) = \frac{1}{8\pi} \iiint_V dx dy dz E^2(x, y, z)$$

через потенціал $\varphi(r)$ та скористайтесь теоремою Томсона про мінімум енергії істинного електростатичного поля.

Оскільки W належить до класу функціоналів, що залежать від функції декількох змінних та її перших похідних, його екстремальна поверхня має задовольняти рівняння Ейлера-Остроградського (4):

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} = 0,$$

де в нашому випадку

$$F = \frac{1}{8\pi} (\nabla \varphi)^2 = \frac{1}{8\pi} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2).$$

Завдання 4. Інтегралом Діріхле від функції $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по області D n -вимірного простору називається інтеграл

$$J[z] = \int_D \dots \int dx_1 \dots dx_n \sum_{i=1}^n (z_{x_i})^2.$$

Вважаючи, що функція z набуває заданих значень на границі області D , знайдіть умови, за яких досягається мінімум інтеграла Діріхле.

Відповідь. Функція z має задовольняти n -вимірне рівняння Лапласа

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = 0.$$

Завдання 5. Те ж саме для функціонала

$$J[z] = \int_D \dots \int dx_1 \dots dx_n \left[\sum_{i=1}^n (z_{x_i})^2 + 2zf(x_1, \dots, x_n) \right].$$

Відповідь. Функція z повинна задовольняти n -вимірне рівняння Пуассона

$$\Delta z = f.$$

Завдання 6. Нехай екстремум функціонала (1.4.1) шукається серед поверхонь, краї яких можуть вільно ковзати в напрямі, перпендикулярному до площини XOY , залишаючись при цьому над контуром Γ (рис. 4.2). Вважаючи решту умов *Теорема 4.1.1* на підінтегральну функцію $F(x, y, z, z_x, z_y)$ та на допустимі функції виконаними, знайдіть необхідні умови, які тепер повинна задовольняти екстремальна поверхня (x, y) функціонала (1.4.1).

Вказівка. Проаналізуйте умови, за яких справджується рівність $\delta J[z_0] = 0$ для варіації (3) при довільних значеннях варіацій $\delta z(x, y)|_D$ та $\delta z(x, y)|_\Gamma$.

Відповідь. Екстремальна поверхня $z_0(x, y)$ задовольняє рівняння Ейлера-Остроградського (2) та крайову умову

$$A_n|_\Gamma = 0, \quad (5)$$

$$\text{де } A = \left(\frac{\partial F}{\partial z_x}, \frac{\partial F}{\partial z_y} \right).$$

Завдання 7. Нехай задано функціонал типу (1), але з додатковим внеском на межі Γ :

$$J[z] = \iint_D dx dy F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) + \oint_{\Gamma} dl f(z(l)), \quad (6)$$

де гладка функція $f(z(l)), z(l) \equiv z(x, y)|_{\Gamma}$ залежить лише від значень допустимих функцій $z(x, y)$ на контурі Γ . Вважаючи решту умов *Теорема 4.1.1* на підінтегральну функцію $F(x, y, z,)$ та допустимі функції виконаними, знайдіть необхідні умови, які повинна задовольняти екстремальна поверхня $z_0(x, y)$ функціонала (6).

Відповідь. Екстремальна поверхня задовольняє рівняння Ейлера-Остроградського (2) та крайову умову

$$\left(A_n + \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

Завдання 8. Покажіть, що екстремальна поверхня функціонала

$$J[z] = \iint_D dx dy \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial z_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial z_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial z_{yy}} = 0. \quad (9)$$

Завдання 9. Покажіть, що екстремальна поверхня функціонала

$$J[z] = \iint_D dx dy \left[z_{xx}^2 + z_{yy}^2 + 2z_{xy}^2 - 2zf(x, y) \right]$$

задовольняє неоднорідне бігармонічне рівняння

$$\Delta \Delta z = f(x, y).$$

§ 24. Рівняння малих коливань систем із розподіленими параметрами

Згідно з принципом найменшої дії, механічний рух системи дискретних точок з відомою функцією Лагранжа L при наявності ідеальних в'язей можна описати за допомогою рівнянь Ейлера-Лагранжа, які є наслідком екстремальності функціонала дії для цієї системи. Для системи з неперервним розподілом маси, що заповнює область з об'ємом V , виникає потреба перейти до об'ємної густини (лагранжіана) \mathcal{L} функції Лагранжа, визначеної співвідношенням.

$$L = \int_V dV \mathcal{L} \quad (1)$$

Дія для такої системи набирає вигляду

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \mathcal{L},$$

тобто є функціоналом, що залежить від функції декількох змінних. Вимагаючи далі, щоб для істинного руху він набував екстремального значення, дістаємо рівняння руху у вигляді рівняння Ейлера-Остроградського для лагранжіана \mathcal{L} .

Почнемо розгляд таких рівнянь із випадку рівняння малих вільних поперечних коливань струни (пружної гнучкої нитки).

Нехай у стані рівноваги струна збігається з відрізком $[0, l]$ осі OX , а її коливання відбуваються у вертикальній площині XOU та характеризуються деякою функцією $u(x, t)$, яка має зміст поперечного відхилення від стану рівноваги точки x струни в момент часу t (див. рис.). Оскільки струна не має розривів, функція $u(x, t)$ неперервна.

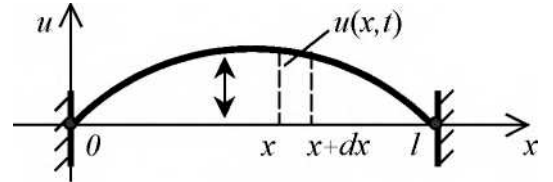


Рис. 14

Частинна похідна $u_t \equiv \partial U(x, t) / \partial t$ від зміщення за часом має зміст поперечної швидкості точки x струни в момент часу t . Оскільки струна не рветься, її сусідні точки рухаються з близькими швидкостями, тобто функція $u_t(x, t)$ теж неперервна.

Частинна похідна $u_x \equiv \partial U(x, t) / \partial x$ від зміщення за координатою пов'язана з деформацією струни: ділянка струни $(x, x + dx)$ має в деформованому стані, з точністю до нескінченно малих більш високого порядку, довжину $dl = \sqrt{1 + u_x^2(x, t)} dx$. Функція $u_x(x, t)$ також є неперервною, бо профіль струни внаслідок її гнучкості не має гострих кутів.

За означенням, коливання вважаються *малими*, якщо виконується співвідношення

$$u_x^2(x, t) \ll 1. \quad (2)$$

Довжина струни l' залишається при малих коливаннях незмінною і рівною довжині l недеформованої струни:

Це означає, що сила натягу струни в довільний момент часу дорівнює силі початкового натягу T_0 , з якою її розтягнули до моменту збудження коливань.

Виведемо рівняння поперечних коливань струни за допомогою принципу найменшої дії. Функціонал дії для струни записується у вигляді

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt (K(t) - \Pi(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l dx \mathcal{L}, \quad (3)$$

де $K(t)$, $\Pi(t)$ та \mathcal{L} - відповідно кінетична енергія, потенціальна енергія та лагранжіан струни, обчислені в наближенні (2).

Нехай $\rho(x)$ - погонна густина струни в точці x . Тоді маса елементарної ділянки $(x, x + dx)$ струни $dm(x) = \rho(x) dx$, а її кінетична енергія в момент часу t

$$dK(x,t) = \frac{1}{2} dm(x) u_t^2(x,t) = \frac{1}{2} \rho(x) u_t^2(x,t) dx.$$

Кінетична енергія всієї струни

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^l dx \rho(x) u_t^2(x,t).$$

Потенціальна енергія $d\Pi(x,t)$, яку запасає ділянка $(x, x + dx)$ у процесі коливань, дорівнює роботі dA , яку треба виконати проти сили T_0 , щоб розтягнути цю ділянку на величину

$$\delta l = dl - dx = \left(\sqrt{1 + u_x^2(x,t)} - 1 \right) dx \cong \left(1 + \frac{1}{2} u_x^2(x,t) - \frac{1}{8} u_x^4(x,t) + \dots - 1 \right) dx \cong \frac{1}{2} u_x^2(x,t) dx.$$

(Прокоментуйте ту обставину, що довжина струни при малих коливаннях вважається незмінною, $l \cong l'$, тоді як при обчисленні потенціальної енергії ми вважаємо, що $l' - l \neq 0$.)

Маємо:

$$d\Pi(x,t) = dA = T_0 \delta l \cong \frac{1}{2} T_0 u_x^2(x,t) dx$$

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l T_0 u_x^2(x,t)$$

Функція Лагранжа струни має вигляд

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l dx \left[\rho(x) u_t^2(x,t) - T_0 u_x^2(x,t) \right], \quad (4)$$

а функціонал дії струни

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left[\rho(x) u_t^2(x,t) - T_0 u_x^2(x,t) \right]. \quad (5)$$

Задача, таким чином, зводиться до відшукування екстремалей функціонала (5), що залежить від функції двох змінних та її перших частинних похідних: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t))$. Варіювання здійснюється за функцією $u(x,t)$, значення якої в точках $t = t_1, t = t_2$ (оскільки вивчається рух струни між двома фіксованими моментами часу) та в точках $x = 0, x = l$ (оскільки кінці струни жорстко закріплено) фіксовані. Іншими словами, $\delta u(0,t) = \delta u(l,t) = \delta u(x,t_1) = \delta u(x,t_2) = 0$.

Така екстремаль обов'язково задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = 0.$$

У нашому випадку

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = \rho(x) u_t(x,t), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = -T_0 u_x(x,t),$$

і, отже, рівняння малих вільних поперечних коливань струни має вигляд

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(T_0 u_x(x,t)). \quad (6)$$

Для однорідної струни густина $\rho(x)$ є сталою, тому рівняння (6) зводиться до диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),$$

де величина $a^2 = T_0/\rho$ має розмірність квадрата швидкості.

Завдання 1. Виведіть рівняння малих поперечних коливань струни, якщо в процесі коливань на неї ще діє зовнішня сила, перпендикулярна до рівноважного профілю струни. Погонна густина сили (тобто сила, яка діє одиницю довжини струни) дорівнює $f(x,t)$.

Вказівка. Узагальнена сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює частинній похідній функції Лагранжа точки за узагальненою координатою точки: $F = \partial L(q, \dot{q}, t)/\partial q$. У нашому випадку на елементарну ділянку $(x, x + dx)$ струни діє сила $f(x,t)dx = \partial \Delta L_{ext}(u, u_x, u_t, t)/\partial u$, де ΔL_{ext} - внесок цієї ділянки у функцію Лагранжа струни, зумовлений зовнішньою силою:

$$\Delta L_{ext} = \int_x^{x+dx} \mathcal{L}_{ext} dx \cong \mathcal{L}_{ext} dx.$$

Дістаємо: $f(x,t) = \partial \mathcal{L}_{ext}(u, u_x, u_t, t)/\partial u$. Узявши, зокрема, лагранжіан $\mathcal{L}_{ext}(u, u_x, u_t, t) = f(x,t)u(x,t)$, наявність зовнішньої сили можемо врахувати за допомогою додаткового внеску

$$L_{ext} = \int_0^l dx f(x,t)u(x,t) \quad (7)$$

у функцію Лагранжа (4) (або $\Pi_{ext} = -L_{ext}$ у потенціальну енергію, якщо $f(x,t)$ потенціальна сила).

Відповідь:

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(T_0 u_x(x,t)) + f(x,t). \quad (8)$$

Завдання 2. Виведіть рівняння малих поперечних коливань мембрани і закріпленим краєм при наявності поперечних потенціальних зовнішніх сил.

Вказівки. Нехай рівноважний профіль мембрани утворює у площині $ХОУ$ деяк область D , відхилення мембрани від стану рівноваги описується функцією $u = u(x, y, t)$ і на одиницю маси мембрани діє сила $f(x, y, t)$, перпендикулярна до площини $ХОУ$. Крім того, нехай функції $\rho(x, y)$ і $k(x, y)$ характеризують відповідно поверхневу густину та пружні властивості мембрани. Тоді її кінетична енергія, потенціальна енергія пружної деформації та потенціальна енергія в полі зовнішніх сил дорівнюють:

$$K(t) = \frac{1}{2} \iint_D dx dy \rho(x, y) u_t^2(x, y, t),$$

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \iint_D dx dy k(x, y) \left(\sqrt{1 + u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t)} - 1 \right) \cong \\ &\cong \frac{1}{2} \iint_D dx dy k(x, y) (u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t)), \\ \Pi_{ext}(t) &= - \iint_D dx dy \rho(x, y) f(x, y, t) u(x, y, t). \end{aligned}$$

Відповідь:

$$\rho u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x} (k u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (k u_y) + \rho f. \quad (9)$$

Завдання 3. Виведіть рівняння малих поздовжніх коливань пружного стержня та крайові умови на його кінцях, якщо вони:

а) закріплені пружно, тобто на кожний кінець діє з боку кріплення поздовжня сила, пропорційна зміщенню та напрямлена протилежно до нього;

б) закріплені жорстко;

в) вільні, тобто не закріплені.

Покажіть, що б) та в) є граничними

випадками а).

Розв'язання. а) Skorистаємося принципом найменшої дії. Функціонал дії для самого стержня записується у вигляді (3), де лагранжیان залежить від поздовжнього зміщення $u(x, t)$ точок стержня та його перших похідних: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_x, u_t)$. Функція $u(x, t)$ описує відхилення точок стержня в момент часу t від тих положень X , які вони мали в недеформованому стержні (див. рис 15).

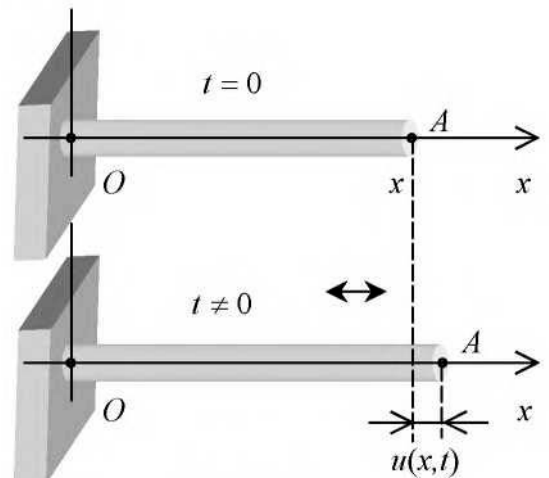


Рис. 15

Нехай $\rho(x)$ та $S(x)$ - відповідно густина та площа поперечного перерізу стержня в точці x . Знайдемо кінетичну енергію $dK(x, t)$ елементарної ділянки $(x, x + dx)$ стержня, обмеженої двома близькими поперечними перерізами x та $x + dx$, а також потенціальну енергію деформації $d\Pi(x, t)$ цієї ділянки при поздовжніх коливаннях. Оскільки коливання малі, достатньо обмежитися членами другого порядку малості за функцією $u(x, t)$ та її похідними.

Оскільки $\varepsilon(x, t) = \delta l / l$, де $l = dx$ - рівноважна довжина ділянки $(x, x + dx)$, $\delta l = u(x + dx, t) - u(x, t) \cong u_x(x, t) dx$ - її видовження, то

$$\varepsilon(x, t) \cong \frac{u_x(x, t) dx}{dx} = u_x(x, t),$$

тобто похідна $u_x(x, t)$ має зміст відносного видовження при поздовжніх коливаннях.

Проекція сили $F(x, t)$ на вісь Ox дорівнює

$$F(x, t) = -E(x)S(x)u_x(x, t),$$

де знак «-» враховує напрямціє сили. Зокрема, якщо стержень видовжується вздовж осі OX , то $u_x(x,t) > 0$ і $F(x,t) < 0$.

Потенціальна енергія $d\Pi(x,t)$, яку ділянка $(x, x + dx)$ запасає у процесі коливань, дорівнює роботі dA , що треба виконати проти сили $F(x,t)$, щоб цю ділянку розтягнути. Оскільки при розтягуванні стержня $F(x,t)$ змінюється за лінійним законом, то її середнє значення

$$\overline{F(x,t)} = -\frac{0 + E(x)S(x)u_x(x,t)}{2} = -\frac{1}{2}E(x)S(x)u_x(x,t).$$

Тоді

$$d\Pi(x,t) = dA = -\overline{F(x,t)}\delta l = E(x)S(x)u_x(x,t).$$

Інтегруючи за всіма елементарними ділянками, дістаємо кінетичну та потенціальну енергії стержня:

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^l dx \rho(x) S(x) u_t^2(x,t),$$

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l dx E(x) S(x) u_x^2(x,t).$$

Врахуємо тепер ще той факт, що кінці стержня закріплено пружно, наприклад, за допомогою пружинок із дуже малими масами та довжинами. Кінетична енергія таких пружинок практично дорівнює нулю, а їх потенціальна енергія визначається зміщеннями лівого $x = 0$ та правого $x = l$ кінців стержня:

$$\Pi_1(t) = \frac{1}{2} k_1 u^2(0,t), \quad \Pi_2(t) = \frac{1}{2} k_2 u^2(l,t),$$

де k_1 та k_2 - коефіцієнти жорсткості відповідно лівої та правої пружинок.

Отже, пружне закріплення кінців стержня враховується за допомогою додаткових внесків у точках $x = 0$ та $x = l$ до потенціальної енергії системи.

Для функціонала дії всієї системи остаточно маємо:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_0^l dx [\rho(x)S(x)u_t^2(x,t) - E(x)S(x)u_x^2(x,t)] - k_1 u^2(0,t) - k_2 u^2(l,t) \right\}. \quad (10)$$

Задача зводиться до відшукування екстремалей функціонала з додатковими внесками на краях. Варіювання проводиться за функцією $u(x,t)$, значення якої в точках $t = t_1$, $t = t_2$ у всіх випадках а) - в) фіксовані (вивчається рух системи між фіксованими моментами часу): $\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$. Значення ж функції $u(x,t)$ в точках $x = 0$ та $x = l$, а, отже, і варіацій $\delta u(0,t)$ та $\delta u(l,t)$ є, взагалі кажучи, довільними.

Для варіації дії маємо:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_0^l dx [\rho S u_t \delta u_t - E S u_x \delta u_x] - k_1 u(0,t) \delta u(0,t) - k_2 u(l,t) \delta u(l,t) \right\}.$$

Інтегруючи частинами та прирівнюючи δS до нуля, отримуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_0^l dx \left[-\rho S u_{tt} + \frac{\partial}{\partial x} (E S u_x) \right] \delta u(x,t) + (E S u_x(x,t) - k_1 u(x,t)) \Big|_{x=0} \delta u(0,t) - \right. \\ \left. - (E S u_x(x,t) + k_2 u(x,t)) \Big|_{x=l} \delta u(l,t) \right\} = 0, \quad (11)$$

звідки, внаслідок довільності варіацій $\delta u(0,t)$ та $\delta u(l,t)$, знаходимо як рівняння руху стержня, так і крайові умови:

$$\rho S u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} (E S u_x), \quad (12)$$

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) - h_2 u(l,t) = 0 \quad (13)$$

де $h_1 \equiv k_1/E(0)S(0)$, $h_2 \equiv k_2/E(l)S(l)$.

Відповіді: б) Потрібно знайти варіацію функціонала

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left[\rho(x) S(x) u_t^2(x,t) - E(x) S(x) u_x^2(x,t) \right] \quad (14)$$

за додаткової умови жорсткого закріплення: $\delta u(0,t) = \delta u(l,t) = 0$. Дістаємо рівняння (12) та крайові умови

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \quad (15)$$

Це є граничний випадок задачі а) при $k_{1,2} \rightarrow \infty$ (або $h_{1,2} \rightarrow \infty$).

в) Треба знайти варіацію функціонала (14) за додаткової умови, що кінці стержня вільні, тобто варіації $\delta u(0,t)$ і $\delta u(l,t)$ довільні. Отримуємо рівняння (12) та крайові умови

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0. \quad (16)$$

Це є граничний випадок задачі а) при $k_{1,2} \rightarrow \infty$ (або $h_{1,2} \rightarrow \infty$).

Завдання 4. Виведіть рівняння та крайові умови, які описують *малі згинальні коливання пружного стержня* із закріпленим лівим кінцем, якщо його правий кінець:

- закріплено жорстко;
- закріплено шарнірно;
- вільний.

Розгляньте частковий випадок однорідного стержня.

Розв'язання. Потенціальна енергія пружної деформації згину дорівнює

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l E(x) J(x) u_{xx}^2(x,t) dx,$$

де функція $u(x,t)$ описує поперечне відхилення точки x стержня в момент часу t .

Функціонал дії

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left[\rho(x) S(x) u_t^2(x,t) - E(x) J(x) u_{xx}^2(x,t) \right]. \quad (17)$$

Після двократного інтегрування частинами та з урахуванням умов $\delta u(x,t_1) = \delta u(x,t_2) = 0$ його перша варіація набирає вигляду

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left[\rho S u_{tt} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E S u_{xx}) \right] \delta u(x,t) - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(E J u_{xx}(x,t) \delta u_x(x,t) \right) \Big|_{x=0}^{x=l} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} E J u_{xx}(x,t) \right) \delta u(x,t) \right] \Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (18)$$

Прирівнюючи її до нуля та враховуючи довільність варіації $\delta u(x,t)$, знаходимо:

$$\rho S u_{tt} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E J u_{xx}) = 0. \quad (19)$$

Це є рівняння четвертого порядку відносно змінної x , тому його потрібно доповнити чотирма крайовими умовами.

У випадку жорсткого закріплення крайня точка стержня не зміщується, а дотична до стержня в ній залишається горизонтальною (варіації $\delta u(0,t)$ та $\delta u_x(x,t)$ у крайній точці дорівнюють нулю). Тому зліва маємо:

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = 0. \quad (20)$$

Крайові умови справа у випадку а) такі самі:

$$u(l,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0. \quad (21)$$

У випадку б) крайня права точка не зміщується ($\delta u(l,t) = 0$, а дотична до стержня в ній змінює, взагалі кажучи, свій напрям ($\delta u_x(l,t)$ - довільна). Маємо:

$$u(l,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0. \quad (22)$$

У випадку в) варіації $\delta u(l,t) = 0$ та $\delta u_x(l,t)$ довільні, тому дістаємо

$$u_{xx}(l,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (E J u_{xx}(x,t)) \Big|_{x=l} = 0. \quad (23)$$

Зокрема, для однорідного стержня

$$u_{xx}(l,t) = 0, \quad u_{xxx}(l,t) = 0. \quad (24)$$

Завдання 5. Виведіть рівняння, яке описує малі згинальні коливання пружного стержня при наявності зовнішньої сили $f(x,t)$, перпендикулярної до його рівноважного профілю і розрахованої на одиницю довжини.

Відповідь:

$$\rho S u_{tt} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E J u_{xx}) = f. \quad (25)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Тема 5. Задачі на умовний екстремум. Екстремалі функціоналів

Завдання 1. Знайдіть рівноважний профіль важкої однорідної гнучкої нерозтяжної нитки довжиною l , яка провисає під дією сили тяжіння. Кінці нитки закріплено на одному рівні. (Задача про ланцюгову лінію).

Розв'язання. Нехай кінці нитки закріплено в точках $x = \pm a$ горизонтальної осі OX , а вісь OY напрямлена вертикально вгору (рис. 16). У стані рівноваги система має мінімальну потенціальну енергію, тобто її центр

ваги Y знаходиться в найнижчій точці.

Потрібно знайти мінімум функціонала

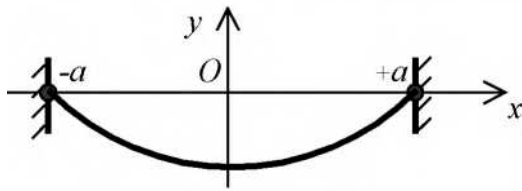


Рис. 16

$$Y[y] = \int_{-a}^{+a} dx y \sqrt{1 + y'^2}$$

за додаткової умови, що довжина нитки залишається сталою:

$$L[y] = \int_{-a}^{+a} dx y \sqrt{1 + y'^2} = l. \quad (1)$$

Розв'язком цієї ізопериметричної задачі є екстремаль функціонала

$$Y^*[y] = \int_{-a}^{+a} dx (y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2},$$

яка задовольняє крайові умови $y(-a) = y(a) = 0$ та умову (1).

Перший інтеграл відповідного рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд

$$\frac{y - \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1,$$

де λ - невизначений множник Лагранжа, C_1 - стала інтегрування. Підставляючи $y' = sh t$, знаходимо:

$$y(x) = \lambda + C_1 ch\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right).$$

Крайові умови дають:

$C_2 = 0$, $\lambda = -C_1 ch\left(\frac{a}{C_1}\right)$. З умови (12) для

сталої C_1 дістаємо рівняння

$$sh\left(\frac{a}{C_1}\right) = \frac{l}{2a} \frac{a}{C_1}.$$

У безрозмірному вигляді маємо

$$sh u = \alpha u,$$

де $u = a/C_1$, $\alpha = l/2a$.

Тривіальний розв'язок $u = 0$ цього рівняння відповідає випадку, коли $C_1 = \infty$ і $y = 0$. З фізичного погляду це можливо лише за умови, що довжина нитки $l = 2a$.

Нетривіальний розв'язок з'являється тоді, коли тангенс кута нахилу прямої $y = \alpha u$ є більшим за тангенс кута нахилу дотичної до функції $y = sh u$ в нулі (див. рис. 3.2), тобто коли $\alpha > 1$, або $l > 2a$.

Отже, задача має розв'язок за умови, що $l \geq 2a$.

Завдання 2. Серед усіх кривих довжиною l , що з'єднують фіксовані точки A та B ($l \geq AB$), знайдіть криву, яка разом із відрізком AB обмежує

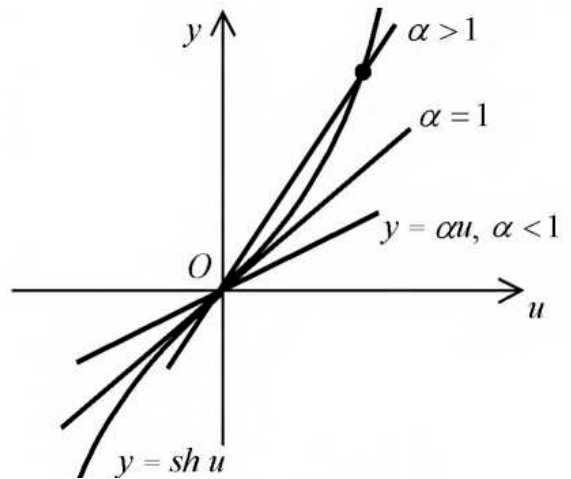
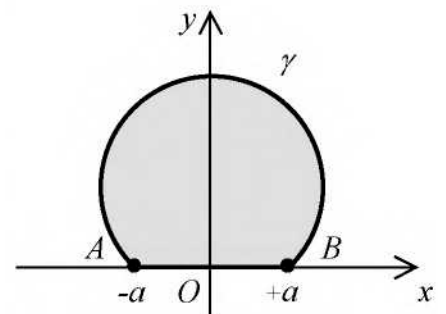


Рис. 17



плоску замкнену область із найбільшою площею.

Розв'язання. Нехай відстань $AB = 2a$. Виберемо за вісь OX пряму, що проходить через задані точки A та B , і помістимо початок координат посередині відрізка AB , тобто $A(-a, 0)$ та $B(a, 0)$ (див. рис. 18).

Вважатимемо також, що шукана крива γ знаходиться над віссю OX . Тоді задача зводиться до відшукування максимуму функціонала площі

$$S[y] = \int_{-a}^{+a} dx y \quad \text{Рис. 18}$$

за умови, що довжина кривої γ залишається сталою

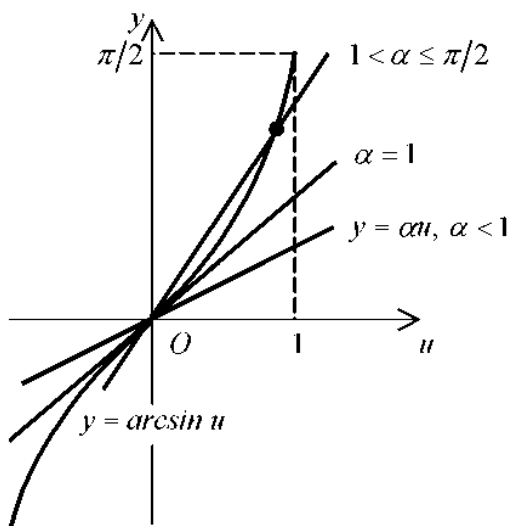


Рис. 19

$$L[y] = \int_{-a}^{+a} dx \sqrt{1 + y'^2} = l. \quad (2)$$

Згідно з теоремою Ейлера, треба знайти екстремаль функціонала

$$S^*[y] = \int_{-a}^{+a} dx \left(y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right)$$

яка задовольняє крайові умови $y(-a) = y(a) = 0$ та умову (2).

Перший інтеграл відповідного рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд

$$y = C_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

де λ - невизначений множник Лагранжа, C_1

- стала інтегрування.

Це рівнянням легко інтегрується в параметричному вигляді за допомогою підстановки $y' = \operatorname{tg} \varphi$. Маємо:

$$y = C_1 + \lambda \cos \varphi, \quad x = C_2 - \lambda \sin \varphi,$$

де C_2 - нова стала інтегрування. Виключивши параметр φ за допомогою тотожності $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, бачимо, що крива $\gamma \in$ дугою кола

$$(y - C_1)^2 + (x - C_2)^2 = \lambda^2$$

з центром у точці (C_2, C_1) і радіусом λ .

Крайові умови дають $C_1 = -\sqrt{\lambda^2 - a^2}$, $C_2 = 0$. Для сталої $\lambda > 0$ з умови (1) дістаємо рівняння

$$2\lambda \operatorname{arcsin} \left(\frac{a}{\lambda} \right) = l,$$

яке зводимо до безрозмірного вигляду

$$\operatorname{arcsin} u = \alpha u,$$

Тривіальний розв'язок цього рівняння $u = 0$ відповідає значенню $\lambda = \infty$. У цьому випадку крива γ лежить на осі OX , а відповідна площа набуває нульового (тобто тривіального) найменшого значення. Нетривіальний же

розв'язок існує, якщо тангенс кута нахилу прямої $y = \alpha u$ є більшим за тангенс кута нахилу дотичної до функції $y = \arcsin u$ в нулі (див. рис. 3.4), тобто коли $\alpha > 1$, або $l > 2a$. При цьому функція $y(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2}$, $x \in [-a, a]$, яка описує дугу γ , є однозначною лише за умови $\alpha \leq \pi/2$, тобто $l \leq \pi\alpha$. Площа, обмежена нею та відрізком АВ у цьому випадку, дорівнює

$$S_{l \leq \pi\alpha}(\lambda) = \int_{-a}^a dx \left(\sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2} \right) = -a\sqrt{\lambda^2 - a^2} + \lambda^2 \arcsin \frac{a}{\lambda} = \frac{\lambda l}{2} - a\sqrt{\lambda^2 - a^2}$$

за умови, що довжина кривої у залишається сталою

$$L[y] = \int_{-a}^a dx \sqrt{1 + y'^2} = l. \quad (3)$$

Згідно з теоремою Ейлера, треба знайти екстремаль функціонала

$$S^*[y] = \int_{-a}^a dx \left(y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right)$$

яка задовольняє крайові умови $y(-a) = y(a) = 0$ та умову (2).

Перший інтеграл відповідного рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд

$$y = C_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

де λ - невизначений множник Лагранжа, C_1 - стала інтегрування.

Це рівнянням легко інтегрується в параметричному вигляді за допомогою підстановки $y' = \operatorname{tg} \varphi$. Маємо:

$$y = C_1 + \lambda \cos \varphi, \quad x = C_2 - \lambda \sin \varphi,$$

де C_2 - нова стала інтегрування. Виключивши параметр φ за допомогою тотожності $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, бачимо, що крива γ є дугою кола

$$(y - C_1)^2 + (x - C_2)^2 = \lambda^2$$

з центром у точці (C_2, C_1) і радіусом λ .

Крайові умови дають $C_1 = -\sqrt{\lambda^2 - a^2}$, $C_2 = 0$. Для сталої $\lambda > 0$ з умови (1) дістаємо рівняння

$$2\lambda \arcsin \left(\frac{a}{\lambda} \right) = l,$$

яке зводимо до безрозмірного вигляду

$$\arcsin u = \alpha u,$$

Тривіальний розв'язок цього рівняння $u = 0$ відповідає значенню $\lambda = \infty$. У цьому випадку крива y лежить на осі OX , а відповідна площа набуває нульового (тобто тривіального) найменшого значення. Нетривіальний же розв'язок існує, якщо тангенс кута нахилу прямої $y = \alpha u$ є більшим за тангенс кута нахилу дотичної до функції $y = \arcsin u$ в нулі (див. рис. 3.4), тобто коли $\alpha > 1$, або $l > 2a$. При цьому функція $y(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2}$, $x \in [-a, a]$, яка

описує дугу γ , є однозначною лише за умови $\alpha \leq \pi/2$, тобто $l \leq \pi a$. Площа, обмежена нею та відрізком АВ у цьому випадку, дорівнює

$$S_{l \leq \pi a}(\lambda) = \int_{-a}^a dx \left(\sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2} \right) = -a\sqrt{\lambda^2 - a^2} + \lambda^2 \arcsin \frac{a}{\lambda} = \frac{\lambda l}{2} - a\sqrt{\lambda^2 - a^2}$$

Зокрема, при $l = \pi a$ радіус $\lambda = a$ і площа $S_{l=\pi a}(\lambda) = \pi a^2/2$.

Якщо ж $l > \pi a$, проекцією дуги γ на вісь OX є відрізок $[-\lambda, \lambda]$, а обмежена нею та відрізком АВ площа $S_{l > \pi a}(\lambda) = \pi \lambda^2 - S_{l=\pi a}(\lambda)$.

Завдання 3. Важка рідина густиною ρ знаходиться в циліндричному стакані з радіусом R . Стакан обертається навколо своєї вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю Ω . Вважаючи, що рух рідини усталився, і вона обертається як тверде тіло, знайдіть форму її вільної поверхні. У стані спокою висота рівня рідини у стакані H .

Вказівки. Рух рідини зручно описувати за допомогою циліндричної системи координат (r, φ, z) , у якій дно стакана лежить у площині $(r, \varphi, 0)$, а вісь стакана напрямлена вздовж вертикальної осі OZ (рис. 20). Обертаючись разом зі стаканом, така система є неінерціальною, тому рівновага рідини в ній настає за умови, що дорівнює нулю рівнодійна усіх сил (включаючи силу інерції), що діють на точки рідини. Якщо сили інерції потенціальні, то умовою рівноваги є мінімальність функціонала $(\Pi_{ext} + \Pi_{in})$, Π_{ext} - потенціальна енергія рідини в полі зовнішніх сил, Π_{in} - додаткова потенціальна енергія, пов'язана з силами інерції.

У нашому випадку зовнішньою силою є сила тяжіння F_g , яка напрямлена вертикально вниз, а силою інерції - відцентрова сила F_{in} , яка діє на частинки рідини в радіальному напрямі (перпендикулярно до осі обертання). Зокрема, на елемент рідини об'ємом $rdrd\varphi dz$ і масою $dm = \rho r dr d\varphi dz$ діє сила інерції $dF_{in} = \Omega^2 r dm$. Її можна подати у вигляді $dF_{in} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 dm \right)$, тобто потенціальна енергія елемента рідини у полі сили інерції

$$d\Pi_{in} = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 dm.$$

Сила тяжіння також потенціальна. Потенціальна енергія згаданого елемента рідини в полі тяжіння

$$d\Pi_{ext} = g z dm,$$

де g - прискорення вільного падіння.

Повна потенціальна енергія рідини, з точністю до довільної сталої,

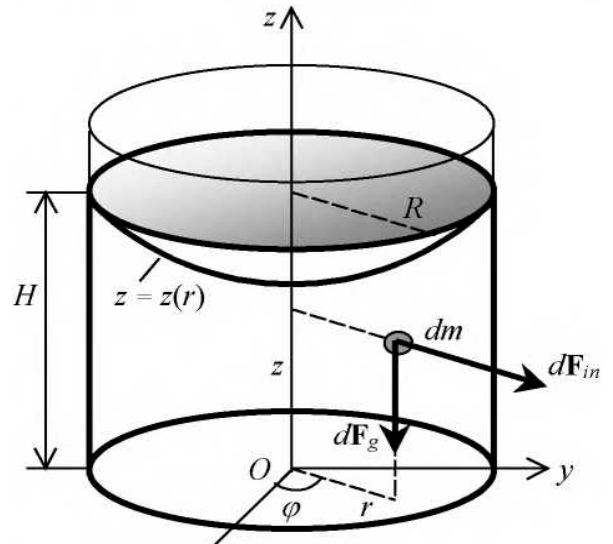


Рис. 20

дорівнює

$$P = \iiint_V \left(gz - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \right) dm,$$

де інтеграл береться за всіма елементами рідини.

Нехай $z = z(r)$ - рівняння вільної поверхні рідини (в усталеному режимі форма поверхні рідини не залежить від кута φ). Розписуючи dm та інтегруючи за φ в межах від 0 до 2π і потім за z у межах від 0 до $z(r)$, дістаємо:

$$\begin{aligned} P &= \iiint_V \left(gz - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \right) r dr d\varphi dz = 2\pi\rho \int_0^R dr \int_0^{z(r)} dz \left(g z r - \frac{1}{2} \Omega^2 r^3 \right) = \\ &= \pi\rho \int_0^R dr \left(g r z^2 - \Omega^2 r^3 z(r) \right). \end{aligned}$$

Крім того, незалежно від форми поверхні, повна маса рідини m зберігається:

$$m = \iiint_V dm = 2\pi\rho \int_0^R r dr \int_0^{z(r)} dz = 2\pi\rho \int_0^R dr r z(r) = \pi\rho R^2 H.$$

Таким чином, задача зводиться до відшукування мінімуму функціонала

$$J[z] = \int_0^R dr \left(g r z^2(r) - \Omega^2 r^3 z(r) \right)$$

за додаткової умови

$$\int_0^R dr r z(r) = \frac{1}{2} R^2 H.$$

Відповідь. Вільна поверхня набуває форми параболоїда обертання

$$z(r) = H + \frac{\Omega^2}{4g} (2r^2 - R^2).$$

Крайові умови жорсткого закріплення не є обов'язковими при формулюванні ізопериметричної задачі. Крайові умови інших типів також можливі.

Завдання 4. Покажіть, що гладка екстремаль функціонала

$$P(X) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[p(x) X'^2(x) + q(x) X^2(x) \right] dx + \frac{k_1}{2} X^2(0) + \frac{k_2}{2} X^2(l) \quad (4)$$

за умови, що інший функціонал

$$K[x] = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) X^2(x) dx \quad (5)$$

набуває сталого значення, є розв'язком *крайової задачі Штурма-Ліувілля*, що складається з однорідного диференціального рівняння

$$-\frac{d}{dx} (p(x) X'(x)) + q(x) X(x) = \lambda \rho(x) X, \quad 0 < x < l, \quad (6)$$

та однорідних крайових умов

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(l) - h_1 X(l) = 0, \quad h_1 \equiv k_1/\rho(0), \quad h_2 \equiv k_2/\rho(l) \quad (7)$$

Узагальненням найпростішої ізопериметричної задачі (1)-(3) є задача про відшукування гладкої екстремалі функціонала

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^x dx F(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \quad (8)$$

за додаткової умови, що залишаються сталими k інших функціоналів

$$L_j[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^x dx G_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = L_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (9)$$

та при фіксованих значеннях функцій $y_i(x)$ на кінцях відрізка $[x_1, x_2]$.

Аналогічно до задачі (1)-(3), вона розв'язується шляхом введення k невизначених множників Лагранжа λ_j та побудови нового функціонала

$$J^*[y_1, y_2, \dots, y_n] = J[y_1, y_2, \dots, y_n] - \sum_{j=1}^k \lambda_j J_j[y_1, y_2, \dots, y_n] \quad (10)$$

з підінтегральною функцією

$$F^* = F - \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j$$

Шукана екстремаль є розв'язком системи k диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа для функціонала $J^*[y_1, y_2, \dots, y_n]$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'_j} = 0, \quad (11)$$

який задовольняє умови (9) та умови жорсткого закріплення.

Індивідуальні домашні завдання до теми 5

Завдання 1. Знайдіть гладкі екстремалі функціоналів $J[y]$, що проходять через задані початкову та кінцеву точки, і для яких функціонали $L[y]$ набувають заданих значень:

$$1. \quad J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad L[y] = \int_0^1 dx y = 1;$$

$$2. \quad J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad L[y] = \int_0^1 dx y = 1;$$

$$3. \quad J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad L[y] = \int_0^1 dx y = 0;$$

$$4. \quad J[y] = \int_0^\pi dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad L[y] = \int_0^\pi dx y \sin x = 1;$$

$$5. \quad J[y] = \int_0^1 dx (y' + x)^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad L[y] = \int_0^1 dx xy = 1.$$

Відповіді: 1) $y(x) = -6x^2 + 6x$; 2) $y(x) = -3x^2 + 4x$; 3) $y(x) = 3x^2 - 2x$;

$$4) y(x) = \frac{2}{\pi} \sin x; \quad 5) y(x) = -\frac{95}{16}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{111}{16}x.$$

Тема 6. Варіаційне числення

Задача 1. На яких кривих може досягати екстремуму функціонал

$$J[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1?$$

Розв'язання. Тут $F(x, y) = y'^2 - 2xy$, так що рівняння Ейлера має вигляд $y'' + x = 0$. Його загальний розв'язок:

$$y(x) = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

Граничні умови дають систему лінійних рівнянь для визначення C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{6} \\ 2C_1 + C_2 = \frac{2}{6} \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{6} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Отже, екстремум може досягатися лише на кривій $y(x) = \frac{x}{6}(1 - x^2)$.

Задача 2. Знайти екстремалі функціонала $J[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)y dx$, що задовольняють граничні умови $y(1) = 1$, $y(3) = 4\frac{1}{2}$

Розв'язання. Рівняння Ейлера має вигляд $3x - 2y = 0$, звідки $y(x) = \frac{3}{2}x$. Так як екстремаль $y(x) = \frac{3}{2}x$ не задовольняє умову $y(1) = 1$, то дана варіаційна задача не має розв'язку.

Задача 3. Знайти екстремалі функціоналу:

$$J[y(x)] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx,$$

що задовольняють граничні умови $y(0) = 1$, $y(2\pi) = 1$.

Розв'язання. Рівняння Ейлера має вигляд $y'' + y = 0$; його характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$, а загальний розв'язок $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Використовуючи граничні умови, отримаємо: $y(x) = \cos x + C \sin x$, де C – довільна стала.

Індивідуальні домашні завдання до теми 6

1-26. Знайти екстремалі наступних функціоналів:

1. $v(y) = \int_{-1}^0 (12xy - y') dx,$ $y(-1) = 1, y(0) = 0.$	2. $v(y) = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' - y^2) dx,$ $y(1) = 1, y(2) = 0.$
---	---

3. $v(y) = \int_0^1 \sqrt{y(1+y^2)} dx,$ $y(0) = y(1) = 1/\sqrt{2}.$	4. $v(y) = \int_0^1 yy' dx,$ $y(0) = 1, y(1) = \sqrt[3]{4}.$
5. $v(y) = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx,$ $y(0) = 0, y(\pi) = 0.$	6. $v(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y) e^{2x} dx,$ $y(0) = 0, y(1) = e^{-1}.$
7. $v(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2xy) dx,$ $y(-1) = -1, y(1) = 1.$	8. $v(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2xy) dx,$ $y(-1) = 0, y(0) = 2.$
9. $v(y) = \int_{-1}^e (xy'^2 + yy') dx,$ $y(1) = 0, y(e) = 1.$	10. $v(y) = \int_a^b (2xy + x^2 + e^y) dx,$ $y(a) = A, y(b) = B.$
11. $v(y) = \int_0^1 (e^y + xy') dx,$ $y(0) = 0, y(1) = a.$	12. $v(y) = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) dx,$ $y(0) = 1, y(\pi/4) = 1/\sqrt{2}.$
13. $v(y) = \int_0^\pi (y'^2 - y^2) dx,$ $y(0) = 1, y(\pi) = -1.$	14. $v(y) = \int_0^1 (x + y'^2) dx,$ $y(0) = 1, y(1) = 2.$
15. $v(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx,$ $y(0) = 0, y(1) = 1.$	16. $v(y) = \int_0^1 (4y^2 + y'^2) dx,$ $y(0) = e^2, y(1) = 1.$
17. $v(y) = \int_0^1 (2e^y + y^2) dx,$ $y(0) = 1, y(1) = e.$	18. $v(y) = \int_a^b (xy' + y'^2) dx,$ $y(a) = A, y(b) = B.$
19. $v(y) = \int_a^b (y + \frac{y^3}{3}) dx,$ $y(a) = 0, y(b) = 1.$	20. $v(y) = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx,$ $y(0) = 0, y(2) = 0.$
21. $v(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx,$ $y(1) = 3, y(2) = 5.$	22. $v(y) = \int_1^2 (y'^2 - 2xy) dx,$ $y(1) = 0, y(2) = -1.$
23. $v(y) = \int_1^3 (3x - y) dx,$ $y(1) = 1, y(3) = 4, 5.$	24. $v(y) = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx,$ $y(1) = 0, y(2\pi) = 1.$
25. $v(y) = \int_0^{\pi/2} y(2x - y) dx,$ $y(0) = 0, y(\pi/2) = 1.$	26. $v(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$ $y(a) = A, y(b) = B.$

РОЗДІЛ 3

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

§ 25. Оригінали та зображення

Операційне або символічне числення є ефективним методом дослідження багатьох теоретичних і прикладних задач у різних областях науки і техніки, зокрема, фізики, математики, механіки, теорії автоматичного регулювання, електротехніки (дослідження перехідних режимів електричних ланцюгів), радіотехніки, телемеханіки та ін. Особливо значна його роль при розв'язанні лінійних диференціальних рівнянь (звичайних та у частинних похідних), інтегральних, інтегро-диференціальних та інших рівнянь.

Методи символічного числення дозволяють розглядати символ $\frac{d}{dt} = p$ як величину, над якою можна здійснювати певну систему формальних операцій. У цій системі, при деяких умовах, дії диференціювання функції $f(t)$ дійсної змінної t (*оригіналу*) відповідає дія множення на оператор p певної функції $F(p)$ комплексної змінної p (*зображення*), а дії інтегрування функції $f(t)$ відповідає ділення на p функції $F(p)$. Завдяки цьому дії над зображеннями виявляються значно простішими, ніж дії над оригіналами. Зокрема, розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно шуканої функції $f(t)$ зводиться до розв'язання відповідних алгебраїчних рівнянь відносно функції $F(p)$. Суть операційного методу полягає у наступному:

- 1) від оригіналу $f(t)$ за допомогою того чи іншого оператора здійснюється формальний перехід до відповідного зображення $F(p)$;
- 2) складається так зване *операторне рівняння* відносно $F(p)$ (воно є наслідком заданих дій над $f(t)$);
- 3) відшукується розв'язок $F(p)$ операторного рівняння;
- 4) виконується зворотній перехід від знайденого $F(p)$ до розв'язку задачі $f(t)$.

Операційне числення будується на основі *інтегральних перетворень*, тобто операцій вигляду

$$F(p) = \int_a^b K(t, p) f(t) dt, \quad (1)$$

де функція $K(t, p)$ називається *ядром перетворення*. Існує декілька різних перетворень (Бесселя, Мелліна, Фур'є, Лапласа, Карсона-Хевісайда та ін.), які різняться границями інтегрування і ядром. Форма перетворення визначається характером задач, до розв'язання яких воно застосовується. Ми будемо розглядати *перетворення Лапласа*, яке є одним з найбільш уживаних.

Нехай $f(t)$ - дійсна або комплексна функція дійсної змінної t (під t будемо розуміти час або координату).

Функція $f(t)$ називається *оригіналом*, якщо вона задовольняє наступним умовам:

$$f(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

$f(t)$ - кусково-неперервна при $t \geq 0$, тобто вона неперервна або має точки розриву 1-го роду, причому, на кожному скінченному проміжку осі t таких точок тільки скінченна множина: $f(0) = f(+0)$.

Існують такі числа $M > 0$, що для усіх $s > 0$ виконується нерівність $|f(t)| < M \cdot e^{st}$, тобто при зростанні t функція $f(t)$ може зростати не швидше деякої експоненціальної функції e^{st} . Число $s_0 \geq 0$, таке, що подана нерівність виконується при $s > s_0$ і не виконується при $s < s_0$, називається *показником зростання* функції $f(t)$.

Перша умова означає, що деякий фізичний процес, який описує функція $f(t)$, починається у момент часу $t = 0$ і розвиток цього процесу до початкового моменту (тобто при $t < 0$) не має значення. Третій умові задовольняють обмежені функції ($s_0 = 0$), степеневі t^n ($n > 0$) й багато інших. Однак не є оригіналами, наприклад, функції вигляду $f(t) = M \cdot e^{t^2}$ (не виконується умова 3), функції $f(t) = \frac{a}{t^n}$, $n > 0$ (не виконується умова (2)). Відзначимо, що умови (1) – (3) виконуються для більшості функцій, що описують реальні фізичні процеси. Зазначимо також, що комплексна функція дійсної змінної $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ буде оригіналом тільки у тому випадку, якщо обидві дійсні функції $f_1(t)$ й $f_2(t)$ також будуть оригіналами.

Найпростішим оригіналом є функція вигляду

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

яка називається *одиночною функцією* або *функцією Хевісайда*. Її графік наведений на рис. 21.

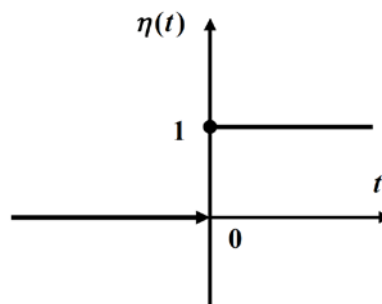


Рис. 21

Неважно бачити, що, якщо довільна функція $f(t)$ задовольняє умовам 2), 3), але не задовольняє умові 1), то функція $f(t)r(t)$ задовольняє усім умовам, тобто є оригіналом. Тому звичайно заради скорочення записів

множник $r(t)$ опускають, маючи на увазі, що усі функції $f(t)$ які розглядаються у якості оригіналів, дорівнюють 0 при від'ємних значеннях t .

Зображенням за Лапласом (далі просто зображення) оригінала $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$ така, що визначається інтегральним перетворенням

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \quad (2)$$

яке називається *перетворенням або оператором Лапласа*. Неважко бачити, що у (1) границі інтегрування $a = 0, b = +\infty$, а ядро перетворення $K(t, p) = e^{-pt}$. Інтеграл справа у (2) називається *інтегралом Лапласа*. Функція $F(p)$ визначена на множині тих значень p , при яких інтеграл Лапласа збігається, і $F(p) \rightarrow 0$ при $\text{Re } p \rightarrow +\infty$.

Відповідність між оригіналом $f(t)$ та зображенням $F(p)$ будемо записувати у вигляді $f(t) \rightarrow F(p)$ (існує й багато інших позначень перетворення Лапласа, наприклад, $f(t) = F(p), f(t) \leftarrow F(p), F(p) = L\{f(t), \dots\}$). Оригінал будемо позначати малою буквою, а його зображення - відповідною великою, наприклад, $x(t) \rightarrow X(p), y(t) \rightarrow Y(p)$.

§ 26. Основні властивості перетворення Лапласа

Теорема додавання (лінійність перетворення Лапласа). Лінійній комбінації оригіналів відповідає та ж сама лінійна комбінація зображень, тобто, якщо $f_i(t) \rightarrow F_i(p)$, то для будь-яких комплексних сталих α_i ($i = \overline{1, n}$)

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) \quad (1)$$

Справедливість формули (1) випливає з означення (25.2) перетворення Лапласа і того, що інтегрування є лінійною операцією.

Приклад. Знайти зображення функцій $\sin t, \cos t, sh t, ma ch t$.

Розв'язання.

Оскільки

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, sh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, ch t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

то за формулою (4) і властивістю (5) маємо

$$\begin{aligned} \sin t &\rightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos t \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right) = \frac{p}{p^2+1}, \\ sh t &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{p^2-1}, \quad ch t \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right) = \frac{p}{p^2-1}. \end{aligned}$$

Теорема подібності. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом й $f(t) \rightarrow F(p)$,

то для будь-якого числа $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (2)$$

Доведення. Нехай $u = \alpha t$. Тоді $t = \frac{u}{\alpha}$, $dt = \frac{1}{\alpha} du$. Отже, α

$$\int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(u) e^{-\frac{p}{\alpha} u} \frac{1}{\alpha} du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

оскільки неважливо, якою буквою позначена змінна інтегрування.

Приклад. Знайти зображення функцій $\sin at$, $\cos at$, $sh at$, та $ch at$

Розв'язання. За властивістю (2) з попереднього маємо

$$\sin at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \cos at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad (3)$$

$$sh at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 1} = \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad ch at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - a^2}. \quad (4)$$

Теорема зсунення. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом й $f(t) \rightarrow F(p)$, то

для будь-якого числа α

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow F(p + \alpha) \quad (5)$$

Доведення. Безпосередньо з означення (2) маємо

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\alpha+p)t} dt = F(p + \alpha)$$

Приклад. Знайти зображення функцій $e^{at} \sin bt$ та $e^{at} \cos bt$.

Розв'язання. За властивістю (5) (де α замінюємо на $-a$) та за формулами (3) маємо

$$e^{at} \sin bt \rightarrow \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}, \quad e^{at} \cos bt \rightarrow \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}. \quad (6)$$

Теорема запізнювання. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом й $f(t) \rightarrow F(p)$,

то для будь-якого числа $t_0 > 0$

$$f(t-t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p). \quad (7)$$

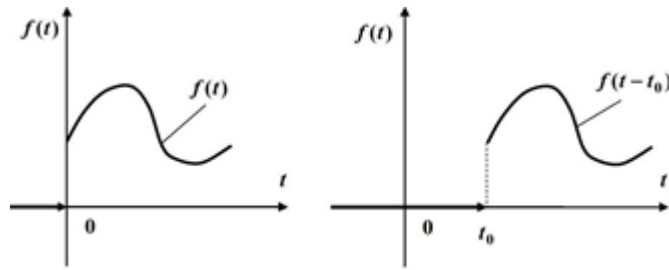


Рис. 22

Зауваження. Теорема запізнювання є двоїстою до теореми зсунення. Термін “запізнювання” означає, що якщо функція $f(t)$ є оригіналом і описує деякий фізичний процес, то функція $f(t-t_0)$ також є оригіналом і описує той самий процес, але такий, що почався із затримкою на час t_0 . Тому графік функції $f(t-t_0)$ утворюється шляхом зсуву графіка функції $f(t)$ праворуч на t_0 одиниць (рис. 2). Функцію $f(t-t_0)$ оригіналом із запізнюванням.

Доведення. Нехай $u = t - t_0$. Тоді $t = u + t_0$, $dt = du$. При змінненні t від 0 до ∞ змінна u змінюється від $-t_0$ до ∞ . Отже,

$$\int_0^{\infty} f(t-t_0)e^{-pt} dt = \int_{-t_0}^{\infty} f(u)e^{-(u+t_0)} du = e^{-pt_0} \int_{-t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-pu} du.$$

Але ж $f(u) = 0$ при $u < 0$, тобто на інтервалі $(-t_0, 0)$. Тому

$$e^{-pt_0} \int_{-t_0}^{\infty} f(u)e^{-pu} du = \int_0^{\infty} f(u)e^{-pu} du = e^{-pt_0} F(p).$$

Із використанням теореми запізнювання дуже зручно знаходити зображення кусково-неперервних функцій, а також функцій, що описують імпульсні процеси.

Приклад. Знайти зображення узагальненої одиничної функції

$$\eta(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (8)$$

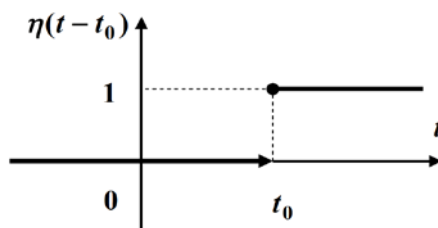


Рис.24

Розв'язання. Оскільки $\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}$, то за теоремою запізнювання

$$\eta(t-t_0) \rightarrow \frac{e^{-pt_0}}{p}$$

Узагальнена одинична функція виявляється дуже корисною для опису імпульсних і кусково-неперервних функцій. Цей опис базується на формулі

$$f(t) = \varphi(t) \cdot [\eta(t-a) - \eta(t-b)],$$

за допомогою якої подається функція

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \quad t > b, \\ \varphi(t) \neq 0 & \forall t \in (a, b) \end{cases} \quad (\text{рис. 23}).$$

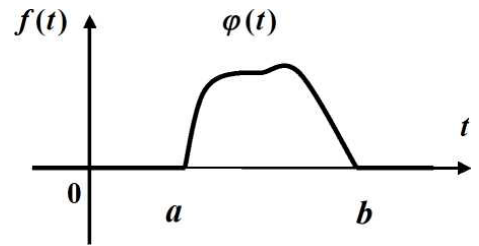


Рис. 25

Зауваження. Слід *відрізнати* звичайний оригінал $f(t-t_0) \cdot \eta(t)$ від оригіналу із запізнюванням $f(t-t_0) \cdot \eta(t-t_0)$ (рис. 25). Отже, щоб уникнути

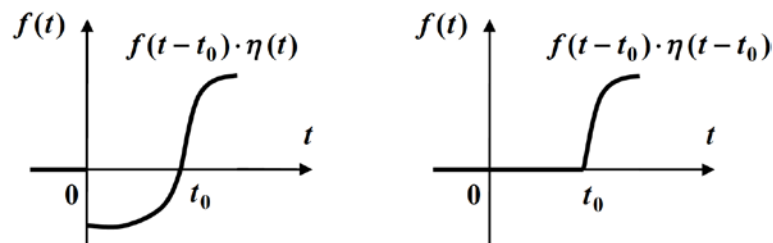


Рис. 26

неоднозначності і не уточнювати кожен раз, який саме з оригіналів мається на увазі, *Домовимося надалі множник $\eta(t-t_0)$ у запису оригіналу із запізнюванням не опускаєти і застосовувати теорему запізнювання у вигляді*

$$f(t-t_0) \cdot \eta(t-t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p). \quad (9)$$

Приклад. Знайти зображення імпульсної функції $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ h, & 3 \leq t < 5, \\ 0, & t \geq 5. \end{cases}$

Розв'язання. Графік функції наведений на рис. 27.

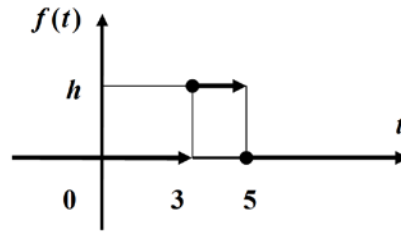


Рис. 27

За формулою (9) задана функція може бути записана у вигляді

$$f(t) = h \cdot [\eta(t-3) - \eta(t-5)].$$

Тоді за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t) \rightarrow h \cdot \left(e^{-3t} \frac{1}{p} - e^{-5t} \frac{1}{p} \right) = h \frac{e^{-3t}}{p} (1 - e^{-2t}).$$

Приклад. Знайти зображення кусково-неперервної функції, графік якої зображений на рис. 28.

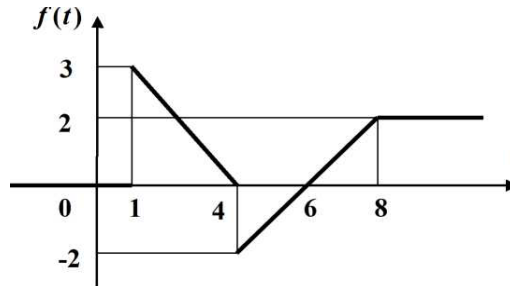


Рис. 28

Розв'язання. Опишемо задану функцію:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 4-t, & 1 < t < 4, \\ t-6, & 4 < t < 8, \\ 2, & t > 8. \end{cases}$$

Тоді за формулою (9), вона може бути подана у вигляді

$$f(t) = (4-t) \cdot [\eta(t-1) - \eta(t-4)] + (t-6) \cdot [\eta(t-4) - \eta(t-8)] + 2\eta(t-8)$$

або

$$f(t) = (4-t) \cdot \eta(t-1) + 2(t-5) \cdot \eta(t-4) + (8-t) \cdot \eta(t-8).$$

Отже, за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t) \rightarrow F(p) = \left(\frac{4}{p} - \frac{1}{p^2} \right) e^{-p} + 2 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{5}{p} \right) e^{-4p} + \left(\frac{8}{p} - \frac{1}{p^2} \right) e^{-8p}.$$

тобто інтегруванню оригіналу від 0 до t відповідає ділення зображення на p .

Приклад. Знайти зображення інтеграла $\int_0^t (u - \cos u) du$.

Розв'язання. Оскільки $f(t) = t - \cos t$ є оригіналом і $t - \cos t \rightarrow \frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2 + 1}$,

то за теоремою про інтегрування оригіналу

$$\int_0^t (u - \cos u) du \rightarrow \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Теорема про диференціювання зображення. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом й $f(t) \rightarrow F(p)$, то

$$-t \cdot f(t) \rightarrow F'(p), \quad (12)$$

тобто множенню оригіналу на $-t$ відповідає диференціювання зображення.

Доведення.

$$\begin{aligned} F'(p) &= \frac{d}{dp} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{d}{dp} (e^{-pt}) f(t) dt = \int_0^\infty (-t) e^{-pt} f(t) dt = \\ &= - \int_0^\infty e^{-pt} t f(t) dt \leftarrow -t f(t). \end{aligned}$$

Аналогічно

$$F''(p) = \frac{d}{dp} \left(- \int_0^\infty e^{-pt} t f(t) dt \right) = - \int_0^\infty \frac{d}{dp} (e^{-pt}) t f(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} t^2 f(t) dt \leftarrow t^2 f(t).$$

Послідовне застосування (16) дає

$$-t^3 \cdot f(t) \rightarrow F'''(p),$$

.....

$$(-1)^n t^n f(t) \rightarrow F^{(n)}(p).$$

Приклад. Знайти зображення функцій t^n ($n \in N$), $t \sin at$, $t \cos at$.

Розв'язання. Оскільки $1 \rightarrow \frac{1}{p}$, то за (16) маємо $-t \cdot 1 \rightarrow \frac{1}{p^2}$. Далі

знаходимо $-t^2 \rightarrow \left(\frac{1}{p^2} \right)' = -\frac{2}{p^3}$, тобто $t^2 \rightarrow \frac{2!}{p^3}$. Продовжуючи диференціювання,

отримаємо $t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Оскільки $\sin at \rightarrow \frac{a}{p^2 + a^2}$, то $\left(\frac{a}{p^2 + a^2} \right)' \rightarrow -t \sin at$, тобто

$$-\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2} \leftarrow -t \sin at, \text{ звідки } t \sin at \rightarrow \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}.$$

$$\text{Аналогічно знаходимо } t \cos at \rightarrow \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}.$$

Теорема про інтегрування зображення. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $\frac{f(t)}{t}$ і теж є оригіналом, то

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^\infty F(q) dq, \quad (13)$$

тобто діленню оригіналу на t відповідає інтегрування зображення від p до ∞ .

Приклад. Знайти зображення функцій $\varphi(t) = \frac{\sin at}{t}$ й $\varphi(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

Розв'язання. Оскільки границя $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\sin at}{t} = a$ є скінченною, то

$\varphi(t) = \frac{\sin at}{t}$ є оригіналом. Оскільки $f(t) = \sin at \rightarrow \frac{a}{p^2 + a^2} = F(p)$, то на підставі теореми про інтегрування зображення (13),

$$\frac{\sin at}{t} \rightarrow \int_p^\infty \frac{a}{q^2 + a^2} dq = a \cdot \frac{1}{a} \cdot \lim_{B \rightarrow \infty} \arctg \frac{q}{a} \Big|_p^B = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{p}{a}.$$

Зауваження. З останнього співвідношення випливає, що $\int_p^\infty \frac{\sin at}{t} e^{-pt} dt = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{p}{a}$. При $p=0$ маємо $\int_0^\infty \frac{\sin at}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Функція

$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ називається *інтегральним синусом*. Тоді за теоремою про

інтегрування оригіналу (12) маємо $Si(t) \rightarrow \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg p \right)$.

Щоб викласти наступну властивість, введемо поняття *згортки* функцій. Нехай функції $f(t)$ й $f(t)g(t)$ неперервні при $t \geq 0$. *Згорткою* цих функцій називається інтеграл $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. позначається $f * g$, тобто

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (14)$$

Дія отримання згортки називається *згортанням* функцій. Операція згортання підкорюється законам комутативності, асоціативності і дистрибутивності відносно додавання. Зокрема, $f * g = g * f$, звідки

$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$. Крім того, $|f * g| \leq |f| * |g|$. Згортка є

неперервною функцією, а якщо $f(t)$ й $g(t)$ є оригіналами з показником зростання $s_0 \leq \max\{s_1, s_2\}$.

Приклад. Знайти зображення згортки функцій $f(t) = t$ й $g(t) = e^t$.

Розв'язання. Оскільки обидві функції неперервні при $t > 0$, то за (14)

$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t \tau \cdot e^{t-\tau} d\tau = \left| \begin{array}{l} u = \tau, \quad dv = e^{t-\tau} d\tau, \\ du = d\tau, \quad v = -e^{t-\tau} \end{array} \right| = -\tau \cdot e^{t-\tau} \Big|_0^t + \int_0^t e^{t-\tau} d\tau = \\ &= -t \cdot e^0 - e^{t-\tau} \Big|_0^t = -t - 1 + e^t \rightarrow -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}. \end{aligned}$$

Теорема про множення зображень (теорема Бореля). Якщо функції $f(t)$ й $g(t)$ є оригіналами і $f(t) \rightarrow F(p)$ й $g(t) \rightarrow G(p)$, то

$$f(t) * g(t) \rightarrow F(p) \cdot G(p), \quad (15)$$

тобто згортці двох функцій відповідає добуток зображень цих функцій. Так у попередньому прикладі за теоремою Бореля

При розв'язуванні задач (зокрема при відшукуванні оригіналів зображеннями, коли зображення подається у формі добутку оригіналами множників) корисним може бути зворотне формулювання:

$$F(p) \cdot G(p) \rightarrow f(t) * g(t),$$

тобто добутку зображень відповідає згортка оригіналів.

Приклад. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$$

Розв'язання. Оскільки

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + a^2)} \cdot \frac{1}{(p^2 + a^2)}$$

й $\frac{1}{p^2 + a^2} \leftarrow \frac{1}{a} \cdot \sin at$, то за теоремою Бореля

$$\begin{aligned} F(p) &\leftarrow \int_0^t \frac{1}{a} \cdot \sin a\tau \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin a(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2a^2} \cdot \int_0^t (\cos a(2\tau - t) - \cos at) d\tau = \\ &= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{2a} \cdot \sin a(2\tau - t) \Big|_0^t - \cos at \cdot \tau \Big|_0^t \right) = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \cdot \sin at - t \cos at \right) = \\ &= \frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at), \end{aligned}$$

тобто $\frac{1}{(p^2 + a^2)^2} \leftarrow \frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$.

Наслідок (інтеграли Дюамеля). З теореми про диференціювання оригіналу та теореми Бореля безпосередньо випливає наступне співвідношення, яке називається *інтегралом (формулою) Дюамеля* за ім'ям математика, який уперше (1853 р.) застосував його при розв'язуванні задач динаміки:

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \leftarrow \int_0^t f(\tau) \cdot g'(t-\tau) d\tau + f(t) \cdot g(0). \quad (16)$$

Доведення. Інтеграл у правій частині (16.20) є згорткою функцій $f(t)$ й $g'(t)$, тобто $\int_0^t f(\tau) \cdot g'(t-\tau) d\tau = f(t) * g'(t)$.

Оскільки за властивістю (10) $g'(t) \rightarrow pG(p) - g(0)$, то за властивістю лінійності і теоремою про множення зображень будемо мати

$$g(0) \cdot f(t) + f(t) * g'(t) \rightarrow g(0) \cdot F(p) + F(p) \cdot [p \cdot G(p) - g(0)] = pF(p) \cdot G(p).$$

З урахуванням комутативності згортки отримуємо ще три аналогічні співвідношення:

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \leftarrow \int_0^t g'(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau + f(t) \cdot g(0), \quad (17)$$

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \leftarrow \int_0^t g'(\tau) \cdot f'(t-\tau) d\tau + f(0) \cdot g(t), \quad (18)$$

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) \leftarrow \int_0^t f'(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau + f(0) \cdot g(t). \quad (19)$$

З (16) - (19) випливає, що, якщо одна з функцій диференційовна, а друга неперервна, то згортка цих функцій диференційовна. Інтеграли Дюамеля використовуються при відшуванні оригіналів та зображень, а також при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь з нульовими початковими умовами (*метод Дюамеля*).

Приклад. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{2p^2}{(p^2 + 1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \quad \text{й} \quad \frac{1}{p^2 + 1} \leftarrow \sin t = f(t), \quad \frac{p}{p^2 + 1} \leftarrow \cos t = g(t),$$

то за формулою Дюамеля (20)

$$2p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \leftarrow 2 \int_0^t \cos \tau \cdot \cos(t-\tau) d\tau + \sin 0 \cdot \cos t =$$

$$2 \int_0^t \frac{1}{2} (\cos(2\tau - t) + \cos t) d\tau = \frac{1}{2} \sin(2\tau - t) \Big|_0^t + \cos t \cdot \tau \Big|_0^t = \sin t + t \cdot \cos t.$$

Розглянуті властивості перетворення Лапласа зведені у табл. 1. У табл. 2 наведені деякі основні зображення (більш докладні таблиці можна знайти у відповідній літературі).

§ 27. Обернене перетворення Лапласа. Способи відновлення оригіналу за відомим зображенням

Перетворення Лапласа кожному оригіналу $f(t)$ ставить у відповідність одне і тільки одне зображення $F(p)$. Доведено, що й обернена задача відновлення оригіналу за зображенням теж розв'язується однозначно. Це може бути здійснено за допомогою *оберненого перетворення Лапласа*, що дається наступною теоремою.

Теорема обернення. Якщо функція $f(t)$ - оригінал з показником зростання s_0 й $F(p)$ - її зображення, то у будь-якій точці неперервності $f(t)$ виражається через $F(p)$ за формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iR}^{s+iR} e^{pt} F(p) dp, \quad (1)$$

де інтеграл береться по будь-якій прямій $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і розуміється як *головне значення*, тобто

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{s-iR}^{s+iR} e^{pt} F(p) dp.$$

У точках розриву

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)].$$

Формула (1) називається *формулою обернення Рімана-Мелліна* і визначає *обернене перетворення Лапласа*.

Відшукання оригіналів безпосередньо за формулою (1) є доволі непростою задачею. Тому на практиці звичайно користуються *наслідками* з теореми обернення - так званими *теоремами розкладання*.

Перша теорема розкладання. Якщо функція $F(p)$ аналітична в нескінченно віддаленій точці, $F(\infty) = 0$ і в деякому околі цієї точки її розвинення в ряд за степенями $1/p$ має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}},$$

то функція $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ є оригіналом, що відповідає зображенню $F(p)$.

Друга теорема розкладання. Якщо зображення $F(p)$ є однозначною функцією й має лише скінченне число полюсів p_1, p_2, \dots, p_n , що лежать у скінченній частині площини, то відповідний оригінал $f(t)$ дорівнює сумі лишків функції $e^{pt} F(p)$, що обчислені в усіх полюсах p_k функції $F(p)$, тобто

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{res} \{ e^{pt} F(p) \}. \quad (2)$$

Особливе значення для практики має обернене перетворення дробово-раціональних функцій, тобто функцій вигляду $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де $P_m(p)$ й $Q_n(p)$ - многочлени степенів m й n відповідно ($n > m$), p_1, p_2, \dots, p_r - корені многочлена $Q_n(p)$ з крайностями l_1, l_2, l_r , де $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$.

На підставі відомої формули для обчислення лишку функції $\varphi(z)$ у полюсі z_0 порядку n

$$\text{res} \varphi(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ (z - z_0)^n \varphi^z \}$$

з (2) одержуємо

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}} \{ (p - p_k)^{l_k} F(p) \}, \quad (3)$$

де підсумовування виконується по усіх полюсах p_k зображення $F(p)$, тобто по усіх нулях многочлена $Q_n(p)$.

Якщо усі полюси p_k прості, то формула (3) набуває спрощеного вигляду:

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \lim_{p \rightarrow p_k} \{ (p - p_k) e^{pt} F(p) \}. \quad (4)$$

Якщо усі коефіцієнти многочленів $P_m(p)$ й $Q_n(p)$ - Дійсні числа, то у правій частині (3) корисно об'єднати доданки, що відносяться до взаємно спряжених комплексних коренів: сума кожної пари таких членів дорівнює подвоєній дійсній частині кожного з них.

У частинному випадку, коли усі корені p_1, p_2, \dots, p_n многочлена $Q_n(p)$ прості, на підставі формули для обчислення лишку відносно полюса першого порядку отримаємо

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}. \quad (5)$$

На практиці при відшуванні оригіналу не дуже складного дробово-раціонального зображення (особливо якщо корені знаменника прості) досить розкласти заданий дріб у суму найпростіших раціональних дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів, відшукати оригінали, що відповідають кожному з них (за таблицею, із застосуванням тотожних перетворень) і на підставі теореми лінійності записати шуканий оригінал. У більш складних випадках користуються іншими властивостями перетворення Лапласа і теоремами розкладання.

§ 28. Застосування операційного числення до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.

Операційне числення є зручним засобом розв'язування різних задач. Зокрема, за його допомогою можна обчислювати невластні інтеграли, підсумовувати ряди, розв'язувати звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння у частинних похідних, диференціально-різницеві і інтегральні рівняння, до яких приводять задачі про перехідні процеси лінійних фізичних систем електротехніки, радіотехніки, теорії автоматичного регулювання, теплопровідності, гірничої техніки, телемеханіки, теорії слідкуючих систем. Такий спосіб розв'язування отримав назву *операційного методу*. Тут ми розглянемо одне з найважливіших його застосувань, а саме розв'язування задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і систем таких рівнянь.

Розглянемо рівняння вигляду

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t), \quad (1)$$

де a_1, a_2, \dots, a_n - задані числа (коефіцієнти рівняння), $f(t)$ - задана функція, $x = x(t)$ - невідома функція. Треба розв'язати відповідну задачу Коші, а саме, знайти розв'язок цього рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (2)$$

де $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ - задані числа.

Припустимо, що права частина $f(t)$ є оригіналом. Доведено, що в цьому випадку розв'язок задачі Коші існує, є єдиним і також є оригіналом. Розв'язання задачі операційним методом полягає у наступному:

1. Здійснюється перехід від функцій $x(t)$ й $f(t)$ до відповідних оригіналів $X(p)$ й $F(p)$, причому, до $X(p)$ - цілковито формально, а до $F(p)$ - у відповідності з фактичним виразом $f(t)$.

2. Застосовуються теореми про диференціювання оригіналу і лінійності, завдяки чому здійснюється перехід від рівняння (1) до рівняння

$$L(p) \cdot X(p) + Q(p) = F(p), \quad (3)$$

яке називається *зображуючим* або *операторним* рівнянням. Многочлен $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ називається *характеристичним многочленом* рівняння (1.29), $Q(p)$ - деякий многочлен степеня $n - 1$, коефіцієнти якого залежать від початкових даних $x_0, x'_0(0), \dots, x_0^{(n-1)}$. Неважко бачити, що, на відміну від диференціального рівняння (2), рівняння (3) є лінійним алгебраїчним відносно $X(p)$.

3. Рівняння (3) розв'язується відносно $X(p)$:

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}. \quad (4)$$

4. Від знайденого зображення $X(p)$ будь-яким способом здійснюється зворотний перехід до оригіналу $x(t)$, який і буде розв'язком

задачі Коші.

Зауваження 1. Якщо вважати $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ довільними сталими, то знайдений розв'язок буде загальним розв'язком рівняння (1).

Зауваження 2. При нульових початкових умовах, тобто при $x_0, x'_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$, многочлен $Q(p)$ тотожно дорівнює нулю і рівняння (3) набуває вигляду

$$L(p) \cdot X(p) = F(p),$$

звідки

$$X(p) = \frac{F(p)}{L(p)}. \quad (5)$$

Функція $Z(p) = \frac{1}{L(p)}$ називається *передавальною функцією*. Отже,

$X(p) = Z(p) \cdot F(p)$. Якщо $F(p)$ розуміти як *зображення збурення* (вхідного сигналу), а $X(p)$ - як *зображення відгуку (реакції)* системи на це збурення, то зображення відгуку виходить з зображення збурення шляхом простого множення на передавальну функцію. Це особливо зручно, коли реакція деякої системи є вхідним сигналом для іншої системи і т.д.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x'' + 4x' + 4x = e^{-2t} (\cos t + 2 \sin t),$$

що задовольняє початковим умовам $x(0) = -1, x'(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо

$$x' \rightarrow pX(p) + 1, \quad x'' \rightarrow p^2 X(p) + p + 1.$$

За таблицею оригіналів і зображень і теоремою лінійності знаходимо

$$\cos t + 2 \sin t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} + 2 \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{p + 2}{p^2 + 1}.$$

Тоді за теоремою зсуення

$$e^{-2t} (\cos t + 2 \sin t) \rightarrow \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$p^2 X(p) + p - 1 + 4pX(p) = \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}.$$

або, після перетворень,

$$(p^2 + 4p + 4)X(p) + p + 3 = \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}.$$

Знайдемо звідси зображення розв'язку:

$$X(p) = -\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{\left[(p+2)^2 + 1\right](p+2)^2}.$$

Розклавши дріб у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$X(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2+1} = -\frac{p+2}{(p+2)^2+1} - 2 \cdot \frac{1}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Оскільки $\frac{p}{p^2+1} \leftarrow \cos t$, $\frac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t$, $\frac{1}{p} \leftarrow t$, то за теоремами зсуення і лінійності остаточно маємо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t) = e^{-2t} (t - \cos t - 2 \sin t).$$

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші $x'' - 2x' + x = f(t)$,

$$x(0) = 0, x'(0) = 0 \quad \text{де} \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ -1, & 1 < t < 3, \\ 2, & t > 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Права частина рівняння є кусково-неперервною функцією. За формулою (13) зобразимо її у вигляді

$$f(t) = -[\eta(t-1) - \eta(t-3)] + 2\eta(t-3)$$

або

$$f(t) = -\eta(t-1) + 3\eta(t-1).$$

Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо $x'(t) \rightarrow pX(p)$, $x''(t) \rightarrow p^2X(p)$. За таблицею оригіналів і зображень і теоремою лінійності

$$f(t) = -\eta(t-1) + 3\eta(t-1) \rightarrow -\frac{e^{-p}}{p} + 3 \cdot \frac{e^{-3p}}{p}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$(p^2 - 2p + 1)X(p) = -\frac{3e^{-3p} - e^{-p}}{p},$$

звідки зображення розв'язку

$$X(p) = -\frac{3e^{-3p} - e^{-p}}{p(p-1)^2}.$$

Розклавши дріб $\frac{1}{p(p-1)^2}$ у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Оскільки $\frac{1}{p} \leftarrow 1$, $\frac{1}{p^2} \leftarrow t$, то за теоремами зсуення і лінійності

$$\frac{1}{p(p+1)^2} \leftarrow 1 - e^t + te^t.$$

Тоді за теоремами запізнювання і лінійності остаточно маємо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t) = 3(1 - e^{t-3} + (t-3)e^{t-3})\eta(t-3) - (1 - e^{t-1} + (t-1)e^{t-1})\eta(t-1).$$

Рівняння з нульовими початковими умовами. Метод Дюамеля. Нехай треба розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння (1) при нульових початкових умовах $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$.

Якщо права частина $f(t)$ є оригіналом і $f(t) \rightarrow F(p)$, то в цьому випадку зображення $X(p)$ розв'язку задачі Коші має вигляд (5).

Розглянемо допоміжне рівняння

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 1 \quad (6)$$

з тією ж самою лівою частиною, що й в (1), і також нульовими початковими умовами. Оскільки тут $f(t) = 1 \rightarrow \frac{1}{p}$, то згідно (5) зображення розв'язку цього рівняння буде

$$X_1(p) = \frac{1}{pL(p)}.$$

Тоді

$$X(p) = \frac{F(p)}{L(p)} = pF(p)X_1(p).$$

Позначимо розв'язок рівняння (6) через $x_1(t)$ і у формулі Дюамеля покладемо $G(p) = X_1(p)$, $g(t) = x_1(t)$, $g(0) = x_1(0) = 0$. Тоді отримаємо розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot x_1'(t-\tau) d\tau. \quad (7)$$

Метод Дюамеля застосовують у випадках “нетабличної” правої частини $f(t)$, коли відшукання відповідного зображення $F(p)$ викликає труднощі. Розв'язування рівняння (1) за допомогою цього методу фактично зводиться до розв'язування більш простого рівняння (6) і застосування формули (7). Отже, якщо відомий відгук системи $x_1(t)$ на *одиничний* вхідний сигнал, то за формулою (7) можна знайти відгук $x(t)$ цієї системи на *будь-який інший* сигнал $f(t)$.

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші

$$x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Розв'язання. Оскільки права частина рівняння не є “табличною”, то застосуємо метод Дюамеля. Спочатку розв'яжемо допоміжну задачу Коші

$x'' - x' = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$. Позначимо її розв'язок через $x_1(t)$, тоді $x_1(t) \rightarrow X_1(p)$. Зображуюче рівняння має вигляд

$$(p^2 - p) \cdot X_1(p) = \frac{1}{p},$$

звідки

$$X_1(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Оскільки $\frac{1}{p^2(p-1)} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}$, то $x_1(t) = e^t - t - 1$. Тоді

$$x_1'(t) = e^t - 1.$$

і за формулою (35) розв'язок вихідної задачі Коші має вигляд

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} (e^{t-\tau} - 1) d\tau = e^t \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau} d\tau = e^t - 1 - (e^t + 1) \left(t + \ln \frac{2}{e^t + 1} \right).$$

Зауваження. Тут $\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau} d\tau = \int_0^t \left(\frac{1}{e^\tau} + \frac{1}{1+e^\tau} \right) d\tau = 1 - e^{-t} - \int_0^t \frac{d\tau}{1+e^\tau}$,

$$\int_0^t \frac{d\tau}{1+e^\tau} = \int_2^{1+e^t} \frac{dz}{z(z-1)} = \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| \Big|_2^{1+e^t} = t + \ln \frac{2}{1+e^t}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Тема 7. Відшукання зображень за означенням. Основні властивості перетворення Лапласа. Зображення узагальненої одиничної функції. Диференціювання оригіналу.

Приклад 1. Знайти зображення одиничної функції $\eta(t)$.

Розв'язання. За означенням (25.2) перетворення Лапласа при $s = \operatorname{Re} p > 0$ ($s_0 = 0$) знаходимо

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^\infty \eta(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^b = \\ &= -\frac{1}{p} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-bt} - e^0 \right) = -\frac{1}{p} (0 - 1) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Отже, $\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}$ або $1 \rightarrow \frac{1}{p}$. (1)

Приклад 2. Знайти зображення функції e^{at} , де a - довільне число.

Розв'язання. Візьмемо таке p , що $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$. Тоді за означенням (25.2) перетворення Лапласа знаходимо

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \int_0^{\infty} \eta(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^b = \\
 &= \frac{1}{p-a} \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-(p-a)b}) = \frac{1}{p-a} \left(1 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)b} \right) = \frac{1}{p-a}.
 \end{aligned}$$

оскільки $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)b} = 0$ при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$.

Отже,

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a). \quad (2)$$

Відшукування зображень безпосередньо за означенням пов'язане з обчисленням невластних інтегралів і може бути достатньо складною задачею. У багатьох випадках для цього набагато зручніше використовувати *властивості* перетворення Лапласа. Наведемо найважливіші з цих властивостей (через обмеженість обсягу підручника доведення надані тільки для деяких з них).

Індивідуальні домашні завдання до теми 7

Знайти зображення заданих функцій.

1. e^{5t-5} . 2. $t^2 e^{t-3}$ 3. $e^{-t} (t+2)^3$. 4. $e^{2t} \sin 3t \cos 5t$. 5. $(t-3)^2 \eta(t-3)$.
6. $(t-3)e^{5t-5} \eta(t-1)$. 7. $e^{-2t+10} \sin^2(t-5) \eta(t-5)$. 8. $t \sin^3(2t-2) \eta(t-1)$.
9. $\begin{cases} 2t-t, & 0 < t < 2, \\ 2t-4, & 2 < t < 3, \\ 0, & t < 0, t > 3 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2t, & 0 < t < 3, \\ t-3, & 3 < t < 6, \\ 0, & t < 0, t > 6 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} t, & 0 < t < 2, \\ 4-t, & 2 < t < 4, \\ 0, & t < 0, t > 4 \end{cases}$.
12. $t^3 \cos \frac{t}{2}$. 13. $\frac{1-e^{4t}}{te^t}$. 14. $\frac{\sin^2 t}{t}$. 15. $\frac{ch 3t - ch 2t}{t}$. 16. $\frac{e^{3t} - e^{2t}}{t}$.
17. $\frac{\cos t - \cos 2t}{t}$. 18. $e^{2t} \frac{\sin^{3t}}{t}$ 19. $\frac{sh^2 3t}{t} e^{-2t}$. 20. $\frac{\sin 4t \cdot \sin 6t}{t}$.

Відновити оригінал за даним зображенням.

21. $F(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)^2}$. 22. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$.
23. $F(p) = \frac{p+10}{p^3-6p^2+10p}$. 24. $F(p) = \frac{p+1}{p^3-2p^2-5p+6}$.
25. $F(p) = \frac{2p-1}{p^2+2p+7} e^{-p/2}$. 26. $F(p) = \frac{p+3}{p^2 8p+17} e^{-4p}$.

Тема 8. Теорема про множення зображень (теорема Бореля). Обернене перетворення Лапласа. Способи відновлення оригіналу за відомим зображенням.

Приклад 1. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+3)}.$$

Розв'язання. Розглянемо два способи.

Перший спосіб. Розкладемо дріб $\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}$ у суму найпростіших

дробів:

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+3)} = \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+3)}.$$

За таблицю оригіналів і зображень на підставі теореми лінійності знаходимо:

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Другий спосіб. У заданому дробу $P_m(p) = p+1$, $Q_n(p) = (p-1)(p+3)$. Оскільки обидва корені знаменника $p_1 = 1$ й $p_2 = -3$ прості, то за формулою (27), таблицею оригіналів та зображень і теоремою лінійності маємо:

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \left((p-1) \frac{e^{pt}(p+1)}{(p-1)(p+3)} \right) + \lim_{p \rightarrow -3} \left((p+3) \frac{e^{pt}(p+1)}{(p-1)(p+3)} \right) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

В той же час, оскільки $Q'_n(p) = 2(p+1)$, то за формулою (28) маємо той самий результат:

$$f(t) = \frac{p+1}{2(p+1)} e^{pt} \Big|_{p=1} + \frac{p+1}{2(p+1)} e^{pt} \Big|_{p=-3} = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Приклад 2. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+1)^3}.$$

Розв'язання. Розглянемо два способи.

Перший спосіб. Розкладемо дріб $\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}$ у суму найпростіших

дробів:

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+1)^3} = -\frac{1}{2(p+1)^3} - \frac{1}{4(p+1)^2} - \frac{1}{8(p+1)} + \frac{1}{8(p-1)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень на підставі теореми лінійності знаходимо:

$$f(t) = \frac{1}{4}t^2 e^{-t} - \frac{1}{4}t e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t = \frac{1}{8} [e^t - e^{-t}(2t^2 + 2t + 1)].$$

Другий спосіб. У заданому дробу $P_m(p)=1, Q_n(p)=(p-1)(p+3)^3$. Оскільки $p_1=1$ - простий корінь знаменника ($l_1=1$), $p_2=-1$ - корінь кратності $l_2=3$, то за таблицею оригіналів та зображень і теоремою лінійності маємо:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{e^{pt}(p+1)^3}{(p-1)(p+1)^3} \right)'' = \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{e^{pt}}{p-1} \right)'' = \\ &= \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -1} \left(t^2 \frac{e^{pt}}{p-1} - 2t \frac{e^{pt}}{(p-1)^2} + \frac{2e^{pt}}{(p-1)^3} \right) = \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}t^2 e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t} \right) = \\ &= \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{4}t^2 e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{1}{8}e^{-t} = \frac{1}{8} \left[e^{-t} - e^{-t}(2t^2 + 2t + 1) \right]. \end{aligned}$$

Отже, отримали той самий результат, що й першим способом.

Приклад 3. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{pe^{-3p}}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}.$$

Розв'язання. Розкладемо дріб $\frac{pe^{-3p}}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}$ у суму найпростіших

дробів:
$$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)} = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p+2} - \frac{3}{20} \cdot \frac{p + \frac{8}{3}}{p^2+4p+8}.$$

За таблицею основних зображень і за теоремою зсунення з урахуванням лінійності маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p+2} &\leftarrow \frac{1}{40}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t}, \\ -\frac{3}{20} \cdot \frac{p + \frac{8}{3}}{p^2+4p+8} &= -\frac{3}{20} \cdot \frac{p+2 + \frac{2}{3}}{p^2+4p+8} \leftarrow -\frac{3}{20} \cdot e^{-2t} \cos 2t - \frac{1}{20} \cdot e^{-2t} \sin 2t, \end{aligned}$$

отже,

$$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)} \leftarrow \frac{1}{40}e^{2t} + \frac{1}{8} \cdot e^{-2t} - \frac{3}{20} \cdot e^{-2t} \cos 2t - \frac{1}{20} \cdot e^{-2t} \sin 2t.$$

Тоді за теоремою запізнювання остаточно маємо

$$f(t) = \left[\frac{1}{40}e^{2t-6} + \frac{1}{8} \cdot e^{-2t+6} - \frac{3}{20} \cdot e^{-2t} [3\cos(2t-6) + \sin(2t-6)] \right] \cdot \eta(t-3).$$

Індивідуальні домашні завдання до теми 8

Знайти оригінал функції за її зображенням

1) а).
$$F(p) = \frac{2p-1}{(p-1)(p-2)(p-4)(p-6)},$$

$$\begin{aligned} \text{б)} F(p) &= \frac{2p-1}{(p-1)(p-2)(p-4)(p-6)} \\ 2) \text{ а)} F(p) &= \frac{p^2+p}{(p-1)(p-2)(p+3)(p+4)}, \\ \text{б)} F(p) &= \frac{p^3}{(p^4-1)(p^4+4)} \\ 3) \text{ а)} F(p) &= \frac{p^2+16p+30}{p(p+1)(p+2)(p+4)}, \\ \text{б)} F(p) &= \frac{3p}{(p+1)^2(p-2)^2} \\ 4) \text{ а)} F(p) &= \frac{2p^3+11p^2+16p+6}{p(p+1)(p+2)(p+3)}, \\ \text{б)} F(p) &= \frac{p+4}{(p^2+p+8)(p^2+2)} \\ 5) \text{ а)} F(p) &= \frac{2p^2-p+1}{(p-3)(p-4)(p+1)(p+2)}, \\ \text{б)} F(p) &= \frac{p^2}{(p^2+2p+2)(p^2+1)} \\ 6) \text{ а)} F(p) &= \frac{p^2+2p+1}{p(p-1)(p+4)(p+5)}, \\ \text{б)} F(p) &= \frac{p^3+5p^2+12p+4}{(p+2)^2(p^2+4)} \\ 7) \text{ а)} F(p) &= \frac{p^2+p}{(p-1)(p-2)(p+3)(p+4)}, \\ \text{б)} F(p) &= \frac{p^2}{(p+3)^3(p-5)^2} \\ 8) \text{ а)} F(p) &= \frac{p^2-2p+1}{(p^2-9)(p^2-4)}, \\ \text{б)} F(p) &= \frac{p^3+p+1}{(p^2+p+1)(p^2+1)} \end{aligned}$$

$$9) \quad \text{а). } F(p) = \frac{2p-1}{(p-1)(p-2)(p-4)(p-6)},$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p^2 + p + 3}{(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)}$$

$$10) \quad \text{а). } F(p) = \frac{p^2 + p}{(p-1)(p-2)(p+3)(p+4)},$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p^3}{(p^4 - 1)(p^4 + 4)}$$

Тема 9. Розв'язання систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розв'язання таких систем операційним методом принципово не відрізняється від розв'язування одного рівняння. Відміна полягає лише в тому, що замість одного операторного рівняння отримаємо систему таких рівнянь. Кожне з них буде лінійним алгебраїчним відносно зображень оригіналів, що утворюють розв'язок задачі, тому ці зображення у багатьох випадках доцільно знаходити за формулами Крамера.

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} x - x - 2y + 9t = 0 \\ y - 2x - y = 4e^t \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Розв'язання. Позначимо $x(t) \rightarrow X(p)$, $y(t) \rightarrow Y(p)$. Оскільки $t \rightarrow \frac{1}{p^2}$, $e^t \rightarrow \frac{1}{p-1}$, то з урахуванням початкових умов за теоремою про диференціювання оригіналу і теоремою лінійності отримаємо наступну систему операторних рівнянь відносно зображень $X(p)$ й $Y(p)$:

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = 1 - \frac{9}{p^2}, \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = 2 + \frac{4}{p-1}. \end{cases}$$

Знайдемо $X(p)$ й $Y(p)$ за формулами Крамера: $X(p) = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $Y(p) = \frac{\Delta y}{\Delta}$,

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3 = (p-3)(p+1),$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \frac{p^2 - 9}{p^2} & -2 \\ \frac{2p + 2}{p - 1} & p - 1 \end{vmatrix} = \frac{p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 18p - 9}{p^2(p - 1)},$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} p - 1 & \frac{p^2 - 9}{p^2} \\ -2 & \frac{2p + 2}{p - 1} \end{vmatrix} = \frac{2p^3 + 4p^2 + 18}{p^2}$$

Отже, $X(p) = \frac{p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 18p - 9}{p^2(p - 1)(p - 3)(p + 1)}$, $Y(p) = \frac{2p^3 + 4p^2 - 18}{p^2(p - 3)(p + 1)}$.

Розкладемо зображення у суму найпростіших дробів, користуючись другою теоремою розкладання:

$$X(p) = \frac{5}{p} - \frac{3}{p^2} - \frac{2}{p - 1} + \frac{2}{p - 3} - \frac{4}{p + 1}, \quad Y(p) = \frac{4}{p} - \frac{6}{p^2} + \frac{2}{p - 1} + \frac{2}{p - 3} - \frac{4}{p + 1}.$$

Відновимо оригінали, застосувавши таблицю і теорему лінійності. Отже, розв'язок задачі має вигляд:

$$x(t) = 5 - 3t - 2e^t + 2e^{3t} - 4e^{-t}, \quad y(t) = -4 + 6t + 2e^{3t} + 4e^{-t}.$$

Індивідуальні домашні завдання до теми 9

Розв'язати задачу Коші.

1. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t^2 e^t$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.
2. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^t \cos \frac{t}{2}$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$.
3. $\ddot{x} - 9x = \sin t - \cos t$, $x(0) = -3$, $\dot{x}(0) = 2$.
4. $\ddot{x} + 4x = 4e^{2t} + 4t^2$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$.
5. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \frac{e^{-2t}}{t^2 + 1}$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Застосувати метод Дюамеля.

$$6. \quad \ddot{x} - 4x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \begin{cases} 2, & t > 3, \\ 1, & 1 < t < 3, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

$$7. \quad \ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \begin{cases} 1, & t > 4, \\ 2, & 2 < t < 4, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$$

$$8. \ddot{x} + 9x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \begin{cases} t-1, & 1 < t < 2, \\ -t+3, & 2 < t < 3, \\ 0, & t < 0, \quad t > 3. \end{cases}$$

Розв'язати задачу Коші.

$$9. \begin{cases} \dot{x} - 2x - 4y = \cos t, \\ \dot{y} + x - 6y = \sin t. \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t. \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 2.$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2. \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Таблиця 1

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
Лінійність	
$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)$
Подібність	
$f(\alpha t) (\forall \alpha > 0)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) (\forall \alpha > 0)$
Зсуення	
$e^{-\alpha t} f(t) (\forall \alpha)$	$F(p + \alpha) (\forall \alpha)$
Запізнювання	
$f(t - t_0) \cdot \eta(t - t_0) (\forall t_0 > \alpha)$	$e^{-t_0 p} F(p) (\forall t_0 > \alpha)$
Диференціювання оригіналу	
$f(t)$	$F(p)$
$f'(t)$	$p F(p) - f(0)$
$f''(t)$	$p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$
$f'''(t)$	$p^3 F(p) - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0)$
..... $f^{(n)}(t)$ $p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0),$ $f^{(i)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(i)}(t) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$
Інтегрування оригіналу	
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
Диференціювання зображення	
$f(t)$	$F(p)$

$-t \cdot f(t)$	$F'(p)$
$t^2 f(t)$	$F''(p)$
$-t^3 f(t)$	$F'''(p)$
..... $(-1)^n t^n f(t)$ $F^{(n)}(p)$
Інтегрування зображення	
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(q) dq$
Згортка	
$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau)(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau$	
Теорема Бореля	
$f(t) * g(t)$	$F(t) \cdot G(t)$
Інтеграли Дюамеля	
$\int_0^t f(\tau) \cdot g'(t-\tau) d\tau + f(t) \cdot g(0)$	$p \cdot F(p) \cdot G(p)$
$\int_0^t f(\tau) \cdot f'(t-\tau) d\tau + f(0) \cdot g(t)$	

Таблиця 2

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
<p style="text-align: center;">Одинична функція Хевісайда</p> $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
<p style="text-align: center;">Узагальнена одинична функція</p> $\eta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}$	$e^{-t_0 p} \cdot \frac{1}{p}$

e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
$\text{sha } t$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\text{cha } t$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
$\cos^2 at$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
$\sin at \cdot \cos bt$	$\frac{a(p^2 + a^2 - b^2)}{[p^2 + (a-b)^2][p^2 + (a+b)^2]}$
$t \sin at$	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$
$t \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
$t \text{ shat}$	$\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$
$t \text{ chat}$	$\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$

$e^{at} \cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$
$e^{at} \operatorname{sh} bt$	$\frac{b}{(p-a)^2 - b^2}$
$e^{at} \operatorname{ch} bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - b^2}$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\frac{\sin at}{t}$	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{P}{a}$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Вступ до математичної фізики. Одеса: Астропринт, 2014.
2. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення : навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів. Одеса: Астропринт, 2005.
3. Бугаєнко Г. О. Методи математичної фізики. Київ: Вища школа, 1970.
4. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Операційне числення та його застосування. К.: КНЕУ, 2003.
5. Горгула В. І., Сікора Б. С., Волковецький С. В. Теорія функцій комплексної змінної і операційне числення: Навчальний посібник. Івано-Франківськ: ІФДТУНГ, 1998.
6. Мартиненко М. А., Юрик І. І. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення. К. : Видавничий дім «Слово», 2013.
7. Математичні методи фізики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей / Укладачі М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко, С.О. Декарчук. Умань: ПП «Жовтий», 2016.
8. Мельничук О. В., Шевчук О. Г. Застосування основ операційного числення до розв'язання деяких класів задач прикладної та теоретичної фізики. Ніжин: НДУ, 2006.
9. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. К.: ВПЦ "Київський університет", 2009.
10. Очан Ю. С. Методы математической физики. М.: Высшая школа, 1965.
11. Очан Ю. С. Сборник задач по методам математической физики. Учебное пособие для студентов педагогических институтов. Москва: «Высшая школа». 1967.
12. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. К.:Либідь, 2014.
13. Перестюк М. О., Станжицький О. М., Капустян О. В., Ловейкін Ю. В. Варіаційне числення та методи оптимізації. К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. 2
14. Піх С. С. , Попель О. М. , Ровенчак А. А., Тальянський І. І. Методи математичної фізики. Л. : ЛНУ імені Івана Франка, 2011.
15. Піх С. С., Ровенчак А. А., Криницький Ю. С. 1001 задача з математичної фізики. Л.: ЛНУ імені Івана Франка, 2006.
16. Положій Г. М. Рівняння математичної фізики. К.: Рад.шк., 1959. 470 с.
17. Свідзінський А. Математичні методи теоретичної фізики. Луцьк: Ред.-вид. відділ "Вежа", 2001.
18. Штоколо И. З. Операционное исчисление. К. : Наукова думка, 1975. 300 с.

Для нотаток

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ФІЗИКИ

*Навчальний посібник
для студентів закладів вищої освіти
природничо-математичних спеціальностей*

Укладачі:

Дудик Михайло Володимирович
Решітник Юлія Володимирівна
Декарчук Сергій Олександрович