МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

Навчальний посібник

Укладачі: $\boxed{\text{Благодир Ф. К.}}$, Благодир Л. А., Рудницький С. О.

Умань
Сочінський М. М.
2021

УДК 519.2(075.8)
Е50

Укладачі:

Благодир Ф. К., старший викладач кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

Благодир Л. А., канд. пед. наук, доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

Рудницький С. О., викладач кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Рецензенти:

Медведєва М. О., канд. пед. наук, доцент, завідувач кафедри інформатики та інформаційно-комунікаційних технологій Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

Решітник Ю. В., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету фізики, математики та інформатики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (*протокол № 7 від 28 січня 2021 року*).

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики : навч.
Е50 посіб. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.: Ф. К. Благодир, Л. А. Благодир, С. О. Рудницький. – Умань : Сочінський М. М., 2021. – 125 с.

У посібнику подаються основи теорії ймовірностей та математичної статистики. Навчальний матеріал подано доступно та лаконічно у вигляді XVI змістових модулів, відповідно до основних змістових ліній. Теоретичні відомості ілюструються прикладами, що розкривають зміст усіх означень, тверджень і висновків. Наведено детальні алгоритми розв’язування типових задач.

Для студентів математичних та нематематичних спеціальностей Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, студентів інших навчальних закладів усіх форм навчання, що мають схожу програму підготовки, а також для всіх зацікавлених осіб.

УДК 519.2(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальна дисципліна «Теорія ймовірностей і математична статистика» займає важливе місце у навчальному процесі, оскільки формує базові знання у сфері застосування ймовірнісно-статистичного апарату, вивчення закономірностей у масових випадкових явищах, визначення їх ймовірнісних характеристик з метою застосування до аналізу економічних явищ та прогнозування.

Сьогодні немає жодної практичної галузі науки, в якій би не застосовувалися ймовірнісні методи: ядерна фізика, економіка, радіотехніка, теорія зв'язку, кібернетика, обчислювальна техніка, теорія автоматизованих систем управління, біологія, фізіологія, медицина, соціологія, психологія, літературознавство і навіть естетика.

Метою навчального посібника є ознайомлення здобувачів вищої освіти (а також усіх зацікавлених фахівців) з основними поняттями комбінаторики, основ теорій ймовірностей, теорії оцінювання невідомих параметрів, перевірки статистичних гіпотез, елементів кореляційно-регресійного аналізу, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей та математичної статистики.

В основу даного посібника покладено багаторічний досвід викладання укладачами посібника дисципліни: «Теорія ймовірностей та математична статистика» здобувачам вищої освіти різних спеціальностей Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Коротко і доступно викладено основний теоретичний матеріал кожного модуля згідно з вимогами Болонської конвенції – без громіздких доведень. Теоретичні відомості ілюструються прикладами, що розкривають зміст усіх означень, тверджень і висновків. Наведено детальні алгоритми розв'язування типових задач.

Матеріал посібника буде цінним для студентів математичних та нематематичних спеціальностей Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, студентів інших навчальних закладів усіх форм навчання, що мають схожу програму підготовки, а також для всіх зацікавлених осіб.

Частина І. Випадкові події. Основні теореми теорії ймовірностей.

Змістовий модуль І. Основні поняття теорії ймовірностей.

1.1. Скінченні множини та операції над ними.

Всяка сукупність довільних елементів утворює множину. Множина визначена, якщо відомі всі її елементи. Множина, що має скінченну кількість елементів, називається скінченною.

Введемо основні позначення. Множини позначатимемо великими латинськими літерами: A, B, C, ..., а їх елементи – малими: a, b, c, ... Кількість елементів множини A позначатимемо через $N(A)$.

Означення 1. *Дві множини рівні між собою, якщо всі елементи першої є елементами другої і, навпаки, всі елементи другої є елементами першої.*

Означення 2. *Сумою або об'єднанням множин A і B називається множина* $C = A + B$ ($C = A \cup B$), *яка складається лише з тих елементів, що належать принаймні одній із множин A і B.*

Означення 3. *Множина C, якій належать ті і тільки ті елементи, що є спільними для множин A і B, називається добутком або перетином множин A і B і позначається* $C = AB$ ($C = A \cap B$).

Означення 4. *Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається* $\varnothing$.

Очевидно, якщо множини A і B не мають спільних елементів, то $AB = \varnothing$. Кількість елементів множини, що є сумою двох множин A і B, обчислюють за формулою:

$$N(A + B) = N(A) + N(B) - N(AB). \quad (1)$$

Для суми трьох множин формула ускладнюється:

$$N(A+B+C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(AB) - N(AC) - N(BC) + N(ABC). \quad (2)$$

1.2. Предмет комбінаторики. Основні правила комбінаторики.

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчають розташування та вибір об'єктів за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити.

Перші теоретичні дослідження проблем комбінаторики були зроблені у XVII ст. Б. Паскалем, П. Ферма, Г. Лейбніцем, а у XVIII ст. Я. Бернуллі, Л. Ейлером. Але лише у наш час у зв'язку з розвитком теорії обчислювальних машин, теорії інформації та дискретної математики комбінаторика по-справжньому стала математичною наукою. Зокрема, її методи відіграють важливу роль при розв'язуванні задач теорії ймовірностей.

Значне число формул і теорем комбінаторики ґрунтується на двох основних правилах.

Правило суми. Якщо елемент A_1 можна вибрати n_1 способами, елемент A_2 – іншими n_2 способами, A_3 – відмінними від попередніх n_3 способами і т.д., тоді вибір одного з елементів або A_1, або A_2, або A_3, або і т.д. можна здійснити $n_1 + n_2 + n_3$ ... способами.

Правило добутку. Якщо елемент A_1 можна вибрати n_1 способами*, і після кожного такого вибору елемент A_2 можна вибрати n_2 способами, і після кожного такого вибору пари попередніх елементів елемент A_3 можна вибрати n_3 способами і т.п., то вибір усіх елементів A_1, A_2, A_3, ... у вказаному порядку можна здійснити $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot$... способами.*

1.3. Упорядковані множини. Сполуки без повторень.

Означення 5. *Множина називається упорядкованою, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне* *число (номер елемента) так, що різним елементам відповідають різні числа.*

Упорядковані множини вважаються різними. якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

<u>Означення 6</u>. *Підмножини, складені з будь-яких елементів даної множини, які відрізняються елементами або порядком цих елементів, називаються сполуками.*

Сполуки бувають трьох видів: розміщення, перестановки, сполучення (комбінації).

<u>Означення 7</u>. *Розміщеннями з **n** елементів по **k** $(k \le n)$ називають такі упорядковані сполуки, які складаються з **k** елементів, взятих із даних **n** елементів і відрізняються одна від другої елементами або їх порядком.*

Число розміщень з n елементів по k позначається A_n^k і обчислюється за формулою

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{3}$$

<u>Зауваження</u>. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.\, 0! = 1.$

<u>Означення 8</u>. *Розміщення з n елементів по n називаються перестановками.*

Число перестановок із n елементів позначається через P_n і обчислюється за формулою

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{4}$$

<u>Зауваження</u>. Різні перестановки з n елементів відрізняються лише порядком елементів.

<u>Означення 9</u>. *Сполученнями (комбінаціями) із n елементів по k називаються сполуки, що містять k елементів, взятих із даних n елементів, і які відрізняються хоча б одним елементом (перестановки* *“однойменного” набору елементів виключаються). Число сполучень із n елементів по k позначається через C_n^k і обчислюється за формулою*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}. \tag{5}$$

<u>Зауваження</u>. Із означення сполучень випливає, що сполучення отримують із розміщень, вилучивши сполуки, які відрізняються лише порядком елементів, тобто перестановки.

<u>Зауваження</u>. Мають місце рівності:

а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; б) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$; в) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

<u>1.4. Сполуки з повтореннями</u>.

<u>Означення 10</u>. *Розміщенням з повтореннями із **n** елементів по **k** називається будь-яка упорядкована сполука, що містить **k** елементів, взятих із даних **n** елементів, серед яких є однакові.*

Число всіх розміщень із повтореннями з n елементів по k позначається через $\overline{A}_n^k$ і обчислюється за формулою

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{6}$$

<u>Означення 11</u>. *Перестановкою з повтореннями із **n** елементів називається будь-яке упорядкування множини з **n** елементів, серед яких є однакові.*

Якщо серед n елементів множини є n_1 елементів 1-го типу, n_2 елементів 2-го типу, ..., n_k елементів k-го типу ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), то число всіх перестановок такої множини позначається через P_n (n_1, n_2, ..., n_k) і обчислюється за формулою

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}. \tag{7}$$

<u>Означення 12</u>. *Сполученням з повтореннями із **n** елементів по **k** називається сполука, що містить **k** елементів взятих із даних **n** елементів, серед яких є однакові.*

Число всіх комбінацій із повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{C}_n^k$ і обчислюється за формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} \tag{8}$$

Розв'язування типових задач до змістового модуля І.

1. Знайдіть перетин та об'єднання двох множин $A = \{5; 7; 12; 15\}$ та $B = \{12; 15; 19\}$.

Розв'язання. Тоді $A + B = \{5; 7; 12; 15; 19\}$ – елементи, що належать принаймні одній з множин.

$A \cap B = \{12; 15\}$ – елементи, що є спільними для обох множин.

2. Зі 100 студентів 2-го курсу фізико-математичного факультету педагогічного університету 40 знають англійську мову, 35 – німецьку, 28 – французьку; англійську та німецьку знають 12 студентів; англійську та французьку – 7; німецьку і французьку – 6. Скільки студентів знають всі три мови?

Розв'язання.

Введемо позначення: A – множина студентів, що знають англійську мову, H – множина студентів, що знають німецьку мову, Φ – множина студентів, що знають французьку мову. Тоді $N(AH\Phi)$ – шукане число. Крім того, AH – множина студентів, що знають англійську та німецьку разом, $A\Phi$ – знають англійську та французьку, $H\Phi$ – німецьку та французьку. Всього студентів, що знають хоча б одну мову – $N(A + H + \Phi) = 100$. Отже,

$N(A + H + \Phi) = N(A) + N(H) + N(\Phi) - N(AH) - N(A\Phi) - N(H\Phi) + N(AH\Phi)$.

$N(AH\Phi) = N(A + H + \Phi) - N(A) - N(H) - N(\Phi) + N(AH) + N(A\Phi) + N(H\Phi) = 100 - 40 - 35 - 28 + 12 + 7 + 6 = 22$.

3. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 2, 4, 6, якщо кожну з них використовувати тільки один раз?

Розв'язання.

Першою цифрою числа може бути одна з цифр 2, 4, 6 (нулем число не може починатись), тобто існує 3 способи її вибору. Якщо перша вибрана, то друга цифра може бути вибрана – знову ж таки 3 способами, оскільки до вибору включається нуль і одна цифра з набору 2, 4, 6 вже вибрана. Відповідно третя цифра – обирається двома способами та четверта – одним. Отже, таких чисел можна утворити: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ чисел.

4. Скільки різних "слів" в тому числі беззмістовних можна утворити переставляючи літери у слові:

А) МАТЕМАТИКА;

Б) ЕКОНОМІКА.

Розв'язання.

Оскільки серед букв слова є такі, що повторюються, то для відповіді на питання задачі треба підрахувати кількість перестановок з повтореннями із:

а) 10 елементів (букв);

б) 9 елементів (букв).

Отже, шукана кількість способів становить:

а) $\overline{P}_{10}(2,3,2,1,1,1) = \dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200$;

б) $\overline{P}_{9}(1,2,2,1,1,1,1) = \dfrac{9!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 90720$.

5. Скількома способами можна вибрати з повної колоди карт (52 карти) 10 карт так, щоб серед них було рівно три тузи?

Розв'язання.

Набір з трьох тузів ми можемо обрати з усіх чотирьох тузів колоди: $C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ способами (порядок вибору неважливий, лише сам набір, отже застосовуємо формулу комбінацій) і після кожного такого вибору решту – 7 карт ми можемо обрати: C_{48}^7 способами. Отже, за правилом добутку, загальна кількість способів, якими можна обрати 10 карт, щоб серед них було рівно три тузи становить: $C_4^3 \cdot C_{48}^7 = 4 \cdot C_{48}^7$.

6. Скількома способами можна розподілити 6 різних папок по трьох ящиках письмового стола?

Розв'язання.

Оскільки порядок розташування папок у ящиках є суттєвим (папки різні), то для відповіді на питання задачі треба підрахувати кількість розміщень з повтореннями (в один ящик може потрапити декілька папок) із трьох елементів по шість у кожному:

$\overline{A}_3^6 = 3^6 = 729$ способів.

Змістовий модуль ІІ. Основні поняття та означення теорії ймовірностей.

2.1. Предмет теорії ймовірностей.

Теорія ймовірностей – це розділ математики, що вивчає математичні моделі випадкових явищ реального світу.

Вихідними поняттями теорії ймовірностей є поняття стохастичного випробування (або експерименту), випадкової події та ймовірності випадкової події.

Означення 1. *Стохастичними називають випробування, результати яких не можна наперед точно передбачити.*

Усі події, які відбуваються у навколишньому світі, можна поділити на достовірні, неможливі та випадкові.

Означення 2. *Достовірною подією називається подія Ω, яка при виконанні певного комплексу умов S обов'язково відбудеться.*

Наприклад, якщо при підкиданні монети вважати подією появу герба або цифри, то це достовірна подія. Умовою *S* тут вважають неможливість падіння монети на ребро.

Означення 3. *Неможливою подією називається подія $\varnothing$, яка при виконанні даного комплексу умов S не може відбутися.*

Наприклад, трьома пострілами не можна влучити у п'ять мішеней, які не розміщені одна за одною.

Означення 4. *Випадковою називається подія, яка при виконанні певного комплексу умов S може як відбутися, так і не відбутися.*

Наприклад, поява при підкиданні шестигранного грального кубика на верхній грані 6-и очок – це випадкова подія.

Зауваження 1. Віднесення певної події до тієї чи іншої групи істотно залежить від умов випробування.

Події позначають великими літерами латинської абетки *A*, *B*, *C*, *D*, …

Зрозуміло, що при одному випробуванні чи спостереженні ми ніяких закономірностей відносно появи певної події не помітимо. Отже, ми не зможемо передбачити, чи відбудеться ця подія наступного разу. Проте, якщо розглядати певну випадкову подію багато разів при виконанні даних умов *S*, то можна виявити певну закономірність її появи. Таку закономірність називають ймовірнісною закономірністю масових однорідних випадкових подій. Встановленням таких закономірностей і займається теорія ймовірностей.

Отже, предметом теорії ймовірностей є вивчення ймовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Знання закономірностей, яким підпорядковуються масові випадкові події, дозволяють передбачити, як ці події будуть відбуватися.

Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота появи герба буде мало відрізнятися від 1/2. Так, Р. Пірсон підкидав монету 24000 разів і при цьому герб випав 12012 разів; відношення 12012/24000 відрізняється від 1/2 лише на 0,0005.

Основні поняття, теореми, формули та методи теорії ймовірностей широко використовуються в науці, техніці, економіці; у теорії надійності та теорії масового обслуговування; у плануванні та організації виробництва.

2.2. Простір елементарних подій.

Простором елементарних подій, що відповідають певному випробуванню, є довільна множина, що задовольняє властивості: кожному результату випробування відповідає лише один елемент цієї множини, який називають елементарною подією.

Простір елементарних подій позначають буквою Ω, а його елементи, тобто елементарні події, буквами ω_i.

2.3. Основні види випадкових подій.

Означення 5. *Події A і B називаються несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому ж випробуванні.*

Означення 6. *Події A_1, A_2, ..., A_n називаються попарно несумісними, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися разом.*

Означення 7. *Події A і B називаються сумісними, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи іншої.*

Означення 8. *Події A_1, A_2, …, A_n називаються рівноможливими, якщо при виконанні певного комплексу умов S у кожної з них існує однакова можливість відбутися або не відбутися.*

Означення 9. *Події A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу подій, якщо вони попарно несумісні і їх сума збігається з усім простором* *елементарних подій* Ω.

Означення 10. *Подія* $\overline{A}$ *називається протилежною до події* A, *якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли подія* A *не відбувається.*

2.4. Алгебра подій.

Означення 11. *Подія* A *є наслідком події* B, *якщо множина* B *є підмножиною* A ($A \supset B$ *або* $B \subset A$). *Символ* $B \subset A$ *означає, що при настанні події* B *настає також подія* A.

Зауваження 2. Якщо $A \subset B$ *та* $B \subset A$, *то* $A = B$.

Означення 12. *Сумою (або об'єднанням) подій* A *і* B *називається подія* $C = A + B$ ($C = A \cup B$), *яка складається з елементарних подій, що входять до складу хоча б однієї з подій* ***A*** *або* ***B***.

Якщо події A і B несумісні, то подія $A + B$ означає появу події A або події B.

Означення 13. *Добутком (або перетином) подій* A *і* B *називається подія* $C = AB$ ($C = A \cap B$), *яка складається з елементарних подій, що входять в обидві події* ***A*** і ***B***.

Означення 11-13 дуже зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера-Венна (рис. 1). На цих діаграмах простір елементарних подій Ω зображено у вигляді квадрата, а події – у вигляді кругів.

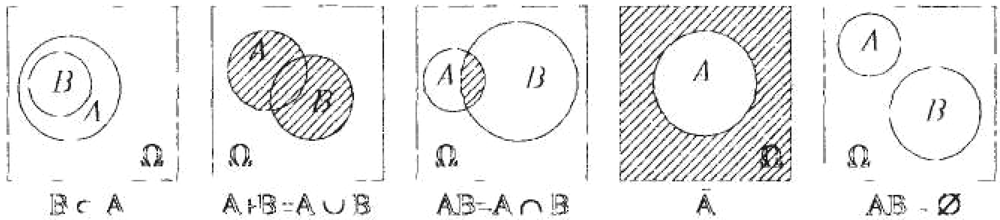


Рис. 1

Властивості операцій:

1°. $A + B = B + A$, $AB = BA$ (комутативний закон).

2°. $(A + B) + C = A + (B + C)$; $(AB)C = A(BC)$ (асоціативний закон).

3°. $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивний закон множення).

4°. $AB + C = (A + C)(B + C)$ (дистрибутивний закон додавання).

5°. $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ (закони де Моргана).

6°. $A + \overline{A} = \Omega$; $A + A = A$; $A \cdot \overline{A} = \varnothing$; $A \cdot A = A$; $A \cdot \Omega = A$.

7°. $\overline{\overline{A}} \cdot A = A$.

<u>Зауваження</u> 3. З наведених властивостей, очевидно, випливають співвідношення:

1. $A = A\overline{B} + AB$; 2. $B = B\overline{A} + AB$;

3. $A + B\overline{A} = B + A\overline{B}$.

<u>Означення 14.</u> *Сумою подій A_1, A_2,…, A_n називають таку подію $\sum_{k=1}^{n} A_k$, яка полягає у появі хоча б однієї з них.*

Якщо події попарно несумісні, то їх сума означає, що повинна з'явитись лише одна з подій A_i, $i = \overline{1,n}$.

Нескінченну суму випадкових подій позначають $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

<u>Означення 15.</u> *Добутком подій A_1, A_2, ..., A_n називають таку подію, яка полягає в одночасній появі усіх подій A_i, $i = \overline{1,n}$.*

<u>2.5. Означення ймовірності</u>.

Деякі події настають досить часто, інші – рідко. Для порівняння подій введемо числову характеристику ступеня об'єктивної можливості появи події. Такою числовою характеристикою є ймовірність події.

<u>Означення 16.</u> *Ймовірністю $P(A)$ даної події A називається відношення числа результатів m, які сприяють появі даної події, до загального числа n рівноможливих і єдино можливих результатів випробувань, що утворюють повну групу, тобто*

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Наведене означення називається класичним.

<u>Зауваження 4</u>. Класичне означення ймовірності застосовують, коли простір елементарних подій m і n скінченний, а результати випробувань рівноможливі. Якщо ж множина елементарних подій (результатів випробувань) нескінченна або не виконується умова рівноможливості подій, то користуються геометричним означенням ймовірності.

<u>Означення 17.</u> *Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню міри g до міри G, тобто* $P(A)=\dfrac{mes\ g}{mes\ G}$, (2)

де mes g і mes G – *міри (довжини, площі, об'єми) областей g та G.*

Наведене означення називають геометричним.

<u>Означення 18</u>. *Відносною частотою події A називається відношення числа m^* випродувань, в яких дана подія відбулася, до числа n^* усіх проведених випробувань, тобто*

$$W(A)=\frac{m^*}{n^*}. \tag{3}$$

<u>Зауваження 5.</u> Ймовірність $P(A)$ є теоретичною величиною, яка обчислюється до проведення випробування, а відносна частота $W(A)$ – величина емпірична, яка обчислюється за результатами випробувань. У дослідах відносна частота коливається навколо деякого сталого числа. Ця властивість відносної частоти називається властивістю стійкості.

<u>Означення 19.</u> *Статистичною ймовірністю події A називається* *число, навколо якого групуються відносні частоти цієї події або сама відносна частота*

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}W_n(A). \tag{4}$$

Наведена формула встановлена Р. Мізесом для випадкових подій.

2.6. Властивості ймовірності.

З класичного означення ймовірності випливають наступні властивості:

1°. Якщо подія $A = \Omega$ – достовірна, то $P(\Omega) = 1$ ($m = n$).

2°. Якщо подія $A = \varnothing$ – неможлива, то $P(\varnothing) = 0$ ($m = 0$).

3°. Якщо подія A – випадкова, то її ймовірність задовольняє нерівності $0 \le P(A) \le 1$ ($0 \le m \le n$).

Зауваження 6. В 30-х роках нашого століття О. Колмогоров запропонував систему аксіом, яка виявилася виключно плідною для розвитку теорії ймовірностей.

Означення 20. *Ймовірністю події A називається числова функція $P(A)$, визначена на просторі елементарних подій A, якщо вона задовольняє аксіоми:*

A1. $P(A) \ge 0$ *(невід'ємності);*

A2. $P(A) = 1$ *(нормування);*

A3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$*, якщо* $AB = \varnothing$ *(адитивності).*

Символи Ω і $\varnothing$ означають відповідно достовірну подію (універсальну множину) та неможливу подію (порожню множину).

Розв'язування типових задач до змістового модуля II.

1. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір

елементарних подій. Нехай A – подія, що означає випадання в сумі непарного числа очок; B – хоча б на одному кубику випало одне очко. Записати події AB та $A + B$.

<u>*Розв'язання.*</u> Позначимо через ω_{ij} подію, яка означає, що при першому підкиданні кубика випало i очок, а при другому – j очок, i, $j = \overline{1,6}$. Простір елементарних подій Ω складається з 36 подій ω_{ij}, i, j = $\overline{1,6}$.

Подія AB означає, що при першому підкиданні кубика випало 1 очко, а при другому – парне число очок або навпаки, тобто:

$AB = \omega_{12} + \omega_{14} + \omega_{16} + \omega_{21} + \omega_{41} + \omega_{61}$.

Подія $A + B$ означає, що сума очок непарна, або хоча б при одному підкиданні випало одне очко. Ця подія не відбувається, коли відбувається одна з 13 подій: (ω_{22}, ω_{24}, ω_{26}, ω_{33}, ω_{35}, ω_{42}, $\omega_{46,}$ ω_{53}, $\omega_{55,}$ ω_{44}, $\omega_{62,}$ $\omega_{64,}$ ω_{66}). Отже, вона відбудеться при решті 36 – 13 = 23 подіях.

2. Стрілець двічі стріляє по мішені. A – влучення при першому пострілі, B – при другому. Описати простір елементарних подій. Записати події: а) C – стрілець влучив у мішень принаймні один раз; б) D – стрілець влучив у мішень рівно один раз; в) E – стрілець не влучив у мішень.

<u>*Розв'язання*</u>. Простір елементарних подій Ω складається з чотирьох подій: $\Omega = \left\{ AB, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{A}\overline{B} \right\}$.

а) Якщо стрілець влучив принаймні один раз, то це означає, що він влучив або при першому пострілі, або при другому, або при обох, тобто $C = A\overline{B} + \overline{A}B + AB = A + B$.

б) Рівно одне влучення може бути лише тоді, коли стрілець влучив при першому посірілі, а при другому – ні, або при першому не влучив, а при другому – влучив, тобто $D = A\overline{B} + \overline{A}B$.

в) Якщо стрілець не влучив у мішень, то це означає, що він не влучив при двох пострілах, тобто $E = \overline{A}\overline{B}$.

3. На 10 картках виписано натуральні числа від 1 до 10. Навмання обираються 2 з них. Знайти ймовірність того, що добуток чисел на вибраних картках буде непарним.

Розв'язання.

В задачі застосовується класичне означення ймовірності, оскільки простір подій m і n скінченний, а результати випробувань – рівноможливі. Число наслідків m, що сприяють появі події (добуток чисел буде непарним) встановимо за наступними міркуваннями: добуток обраних чисел буде непарним числом, коли обидва обрані числа будуть непарними, оскільки непарних чисел серед заданих (перелічимо їх – 1, 3, 5, 7, 9) – п'ять, то обрати два числа можна $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$ способами. Загальне число рівноможливих наслідків $n = A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 90$ способів. Отже, за класичним означенням ймовірності будемо мати: $P(A) = \frac{n}{m} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$.

4. Два студенти домовилися зустрітися біля університету з 13 до 14 години. За домовленістю той, хто прийде першим, чекає на іншого не більше 20 хв. Яка ймовірність того, що вони зустрінуться?

Розв'язання. Нехай X – час приходу першого, а Y – другого студента. Тоді mes G = 1 (площа квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці) (рис. 2). За умовою

$$|x-y| \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow x - \frac{1}{3} \le y \le x + \frac{1}{3}.$$

Знайдемо $mes\ g = 1 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

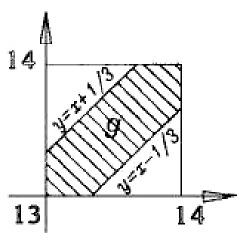


Рис. 2

Отже, $P(A)=\frac{5}{9}:1=\frac{5}{9}$.

Змістовий модуль ІІІ. Теореми додавання та множення ймовірностей.

3.1. Теореми додавання ймовірностей для несумісних подій.

Теорема 1. Якщо випадкові події A і B несумісні, то ймовірність появи однієї з них дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \tag{1}$$

Наслідок. Якщо випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює сумі ймовірностей цих подій

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \tag{2}$$

або $P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Це випливає з послідовного застосування формули (1).

Зауваження 1. У випадку нескінченної кількості несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ маємо:

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k). \tag{3}$$

Теорема 2. Сума ймовірностей попарно несумісних подій, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1 \text{ або } \sum_{k=1}^{n} P(A_k)=1 \tag{4}$$

Наслідок. Сума ймовірностей протилежних подій A і $\overline{A}$ дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (5)$$

Це випливає з того, що протилежні події A і $\overline{A}$ утворюють повну групу, а, отже, для них має місце рівність (4).

Зауваження 2. Якщо ймовірність появи події A позначити через p, а ймовірність появи протилежної події $\overline{A}$ – через q, то з формули (5) випливає рівність:

$$p + q = 1. \qquad (6)$$

Звідси знаходимо ймовірність p через ймовірність q протилежної події:

$$p = 1 - q. \qquad (7)$$

3.2. Залежні та незалежні випадкові події. Умовна ймовірність.

Означення 1. *Подія А називається незалежною від події В, якщо ймовірність появи події А не залежить від появи чи непояви події В.*

Означення 2. *Події А і В називаються залежними, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви іншої.*

Означення 3. *Умовною ймовірністю $P(B/A)$ або $P_A(B)$ називається ймовірність події В за умови, що подія А відбулася.*

Зауваження 3. Якщо події A і B незалежні, то умовна ймовірність дорівнює безумовній ймовірності, тобто $P_A(B) = P(B)$.

3.3. Теорема множення ймовірностей.

Теорема 3. Ймовірність сумісної появи двох випадкових подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої за умови, що перша подія відбулася

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) \ (P(A) > 0,\ P(B) > 0) \qquad (8)$$

Формулу (8) називають формулою множення ймовірностей для залежних подій.

<u>Наслідок.</u> Умовна ймовірність появи події B за умови, що подія A відбулася, визначається рівністю

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0) \tag{9}$$

<u>Теорема 4.</u> Ймовірність добутку незалежних подій A і B дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{10}$$

<u>Теорема 5.</u> Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – довільні випадкові події, то

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n). \tag{11}$$

<u>Означення 4.</u> *Події* A_1, A_2, ..., A_n *називаються незалежними у сукупності, якщо при будь-яких* $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n$ $(2 \le r \le n)$

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_r}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\ldots P\left(A_{i_r}\right) \tag{12}$$

Якщо рівність (12) виконується лише при $r = 2$, то події називаються попарно незалежними. Зокрема, для подій, незалежних у сукупності, має місце

<u>Наслідок.</u> Ймовірність сумісної появи подій A_1, A_2, ..., A_n, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{13}$$

<u>3.4. Ймовірність появи хоча б однієї випадкової події.</u>

Нехай у результаті випробування можуть з'явитися n подій, незалежних у сукупності.

<u>Теорема 6.</u> Ймовірність появи хоча б однієї з подій A_1, A_2, ..., A_n, незалежних у сукупності, дорівнює

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n}), \tag{14}$$

де $P(\overline{A_1}), P(\overline{A_2}), \ldots P(\overline{A_n})$ - ймовірності протилежних подій.

3.5. Теорема додавання для сумісних подій.

Теорема 7. Якщо випадкові події A і B сумісні, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB). \quad (15)$$

Зауваження 4. Якщо події A і B незалежні, то формула (15) має вигляд:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A)P(B). \quad (16)$$

Якщо події A і B залежні, то формулу (15) можна записати у вигляді

$$P(A + B)=P(A) + P(B) – P(A)P_A(B). \quad (17)$$

Розв'язування типових задач до змістового модуля III.

1. У ящику лежать 30 коробок цукерок, причому 12 з них першого сорту, а решта – другого сорту. Визначити ймовірність того, що із чотирьох навмання вийнятих коробок усі виявляться одного сорту.

Розв'язання. Нехай подія A – усі чотири вийняті коробки будуть першого сорту, подія B – вийняті чотири коробки будуть другого сорту. Із 30 коробок 4 можна вибрати C_{30}^4 способами, а з 12 коробок першого сорту чотири можна вибрати C_{12}^4 способами. Тому ймовірність того, що усі чотири коробки будуть першого сорту, дорівнює $P(A)=\frac{C_{12}^4}{C_{30}^4}=\frac{11}{609}$. Аналогічно, ймовірність того, що усі чотири коробки будуть другого сорту, дорівнює $P(B)=\frac{C_{18}^4}{C_{30}^4}=\frac{68}{609}$.

Нехай подія C – вийняті чотири коробки цукерок будуть одного сорту. Тоді $C = A + B$, і за теоремою додавання

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{11}{609} + \frac{68}{609} = \frac{79}{609} \approx 0,13.$$

2. На підприємстві встановлено три технологічні лінії по виробництву маргарину. Ймовірність відмови першої лінії протягом

місяця p_1 = 0,2, другої – p_2 = 0,1, третьої – p_3 = 0,3. Знайти ймовірність того, що протягом місяця відмовить хоча б одна лінія.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A_1 – безвідмовна робота 1-ї лінії, r – відмова в роботі 1-ї лінії, A_2 – безвідмовна робота 2-ї лінії, $\overline{A_2}$ – відмова в роботі 2-ї лінії, A_3 – безвідмовна робота 3-ї лінії, $\overline{A_3}$ – відмова в роботі 3-ї лінії, A – безвідмовна робота усіх трьох ліній, $\overline{A}$ – відмова хоча б однієї лінії (подія, протилежна до A).

Очевидно, $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Події A_1, A_2, A_3 взаємно незалежні, тому за теоремою множення

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = \left(1 - P(\overline{A_1})\right)\left(1 - P(\overline{A_2})\right)\left(1 - P(\overline{A_3})\right) =$$
$$= (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504.$$

Ймовірність того, що протягом місяця відмовить хоча б одна лінія

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,504 = 0,496.$

3. Хлібзавод випікає булочки, що мають такий розподіл за масою: менше 98 г – 5%, більше 102 г – 10%, решта 85% мають нормальну масу (від 98 до 102 г). З достатньо великої партії беруть навмання дві булочки. Яка ймовірність того, що:

1) обидві булочки мають нормальну масу (подія A_1),

2) обидві булочки не мають нормальної маси (подія A_2),

3) одна булочка має нормальну масу (подія A_3),

4) хоча б одна булочка має нормальну масу (подія A_4)?

Розв'язання. Введемо позначення подій: B – булочка має масу менше норми, C – булочка має нормальну масу, D – булочка має масу більше норми.

Відповідні ймовірності

$P(B) = 0,05$, $P(C) = 0,85$, $P(D) = 0,1$.

Застосовуючи теореми додавання і множення, маємо

1) $P(A_1) = P(C) \cdot P(C) = 0{,}85^2 = 0{,}7225$.
2) $P(A_2) = P(B) \cdot P(B) + P(D) \cdot P(D) + P(B) \cdot P(D) + P(D) \cdot P(B) = 0{,}05^2 + 0{,}1^2 + + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}0225$.
3) $P(A_3) = P(B) \cdot P(C) + P(C) \cdot P(B) + P(D) \cdot P(C) + P(C) \cdot P(D) = 2(0{,}05 \cdot 0{,}85 +$
$+ 0{,}1 \cdot 0{,}85) = 0{,}85 \cdot 0{,}3 = 0{,}255$.
4) $P(A_4)= P(B) \cdot P(C) + P(C) \cdot P(B) + P(D) \cdot P(C) + P(C) \cdot P(D) + P(C) \cdot P(\mathrm{C}) = = 0{,}85 \cdot 0{,}3 + 0{,}85^2 = 0{,}9775$.

Змістовий модуль IV. Повна ймовірність. Формули Байєса.

4.1. Формула повної ймовірності.

Нехай подія A може мати місце тільки разом із однією з подій H_1, H_2, H_3, …, H_n, які є несумісними і утворюють повну групу. Нехай відомі ймовірності $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(H_3)$, …, $P(H_n)$. $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$, тому що події H_i утворюють повну групу. Також відомі й умовні ймовірності події A: $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, …, $P(A/H_i)$, …, $P(A/H_n)$. Оскільки наперед невідомо, з якою із подій H_i відбудеться подія A, то події H_i називають *гіпотезами*. Ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної із подій H_1, H_2, H_3, …, H_n на відповідні умовні ймовірності події A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i) \qquad (1)$$

Цю ймовірність називають *повною ймовірністю*, а формулу називають *формулою повної ймовірності*.

4.2. Формула Байєса.

Часто ми розпочинаємо аналіз ймовірностей, маючи попередні, *апріорні* значення ймовірностей події, які нас цікавлять. Потім із джерел інформації, таких як вибірка, звіт, досвід і т.і., ми отримуємо додаткову інформацію про події, які нас цікавлять. Маючи нову інформацію, ми можемо уточнити, перерахувати значення апріорних імовірностей. Нові значення імовірностей для тих самих події, які нас цікавлять, будуть уже апостеріорними (післядослідними) ймовірностями. *Формула Байєса* дає нам можливість переоцінити ймовірності гіпотез після того, як подія A відбулася:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)} \qquad (2)$$

<u>4.3. Розвязуючи задачі з цієї теми, потрібно:</u>

1) З'ясувати, в чому полягає випробування;

2) Подію, ймовірність якої потрібно знайти, позначити, наприклад, літерою A;

3) Розглянути множину попарно несумісних гіпотез H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), разом з якими може відбутись подія A;

4) Обчислити ймовірності гіпотез і умовні ймовірності події A: $P(H_i)$ та $P(A/H_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$);

5) За формулою повної ймовірності знайти ймовірність події A. Якщо ж відомо, що подія A вже відбулася, то за формулою Байєса визначити $P(A/H_i)$.

Розв'язування типових задач до змістового модуля IV.

1. В урну, що містить 2 кулі, опущено білу кулю, після чого з неї навмання вилучено одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою, якщо рівноможливі усі можливі припущення про початковий склад куль (за кольором).

Розв'язання. Позначимо через A подію – вийнято білу кулю. Можливі наступні гіпотези про початковий склад куль: H_1 – білих куль немає, H_2 – одна біла куля, H_3 – дві білі кулі.

Оскільки усього маємо три гіпотези, причому за умовою вони рівноймовірні, і сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці (оскільки вони утворюють повну групу подій), то ймовірність кожної з гіпотез дорівнює $\frac{1}{3}$: $P(H_1) = P(H_2) = = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Умовна ймовірність того, що буде вилучено білу кулю, за умови, що спочатку в урні не було білих куль, $P_{H_1}(A) = \frac{1}{3}$.

Умовна ймовірність того, що буде вилучено білу кулю, за умови, що спочатку в урні була одна біла куля, $P_{H_2}(A) = \frac{2}{3}$.

Умовна ймовірність того, що буде вилучено білу кулю, за умови, що спочатку в урні було дві білі кулі, $P_{H_3}(A) = \frac{3}{3} = 1$.

Шукану ймовірність того, що буде вилучено білу кулю, знаходимо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

2. В групі з десяти студентів 3 відмінники, 4 хорошисти, два трієчники та 1 двієчник. На іспит винесено 20 питань. Відмінник може відповісти на всі 20 питань, хорошися – на 16, трієчник – на 10, двієчник – на 5. Викликаний навмання студент відповів на три питання. Знайти ймовірність того, що це: а) відмінник; б) двієчник.

Розв'язання.

Уведемо означення подій:

A – “викликаний навмання студент відповів на три питання”. Можливі гіпотези, які утворюють повну групу і є попарно несумісними:

H_1 – “викликаний студент – відмінник”;

H_2 – “викликаний студент – хорошист”;

H_3 – “викликаний студент – трієчник”;

H_4 – “викликаний студент – двієчник”.

За умовою ймовірності гіпотез рівні:

$$P(H_1)=\frac{3}{10},\ P(H_2)=\frac{4}{10},\ P(H_3)=\frac{2}{10},\ P(H_4)=\frac{1}{10}.$$

Умовні ймовірності події A:

$$P(A/H_1)=1,\quad P(A/H_2)=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx 0{,}4912,\quad P(A/H_3)=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}\approx 0{,}1053,$$

$$P(A/H_4)=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\approx 0{,}0088.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)+P(H_4)\cdot P(A/H_4)=$$
$$=0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}4912+0{,}2\cdot 0{,}1053+0{,}1\cdot 0{,}0088\approx 0{,}5184.$$

А) Нехай викликаний навмання студент дав правильні відповіді на три запитання. Перерахуємо ймовірності першої та четвертої гіпотез за формулою Байєса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}5184}\approx 0{,}579\,.$$

Б) $P(H_4/A)=\dfrac{P(H_4)\cdot P(A/H_4)}{P(A)}=\dfrac{0{,}1\cdot 0{,}0088}{0{,}5184}\approx 0{,}0017\,.$

Змістовий модуль V. Повторні випробування.

<u>5.1. Формула Бернуллі.</u>

Нехай проводиться серія із n незалежних у сукупності експериментів, кожне з яких має тільки два наслідки: подія A відбулася (успіх) або не відбулася (поразка), причому ймовірність успіху при одному експерименті $P(A) = p$ є сталою і не залежить від номера експерименту (схема Бернуллі). Числа n і p називають параметрами схеми Бернуллі. Простір елементарних подій для одного експерименту містить дві елементарні події, а для n експериментів за схемою Бернуллі – 2^n елементарні події.

У рамках цієї схеми для заданого цілого числа m ($0 \le m \le n$) знаходиться ймовірність $P_n\,(m)$ того, що подія A у даній серії n випробувань відбудеться точно m разів, тобто має місце *формула Бернуллі*:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{1}$$

де $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Ймовірності $P_n\,(m)$ ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$) називають *біноміальними*, тому що права частина останньої формули є загальними членом розкладу бінома Ньютона $(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, а тому сума всіх біноміальних ймовірностей рівна 1.

Нехай $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ означає ймовірність того, що в n випробуваннях схеми Бернуллі *успіх має місце не менше, ніж m_1 раз і не більше, ніж m_2 рази* $(0 \le m_1 \le m_2 \le n)$. Тоді

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m). \tag{2}$$

Імовірність $P_n(1 \le m \le n)$ того, що в результаті n випробувань *успіх має місце хоча б один раз*, визначається формулою:

$$P_n(1 \le m \le m) = 1 - q^n. \tag{3}$$

Відмітимо, що ймовірності $P_n\,(m)$ при фіксованому n спочатку ростуть при збільшенні числа m від 0 до деякого значення m_0, а потім зменшуються при зміні числа m від m_0 до n.

Число успіхів m_0, якому при заданому n відповідає максимальна біноміальна ймовірність P_n (m_0), називається найбільш імовірним числом успіхів, яке визначають із системи нерівностей

$$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p, \qquad (4)$$

що має один або два цілих розв'язки.

Для застосування схеми Бернуллі до розв'язування задач необхідно, щоб:

а) випробування були незалежними;

б) у кожного випробування має бути тільки два можливих наслідки;

в) ймовірність появи події, яка цікавить, у кожному випробуванні має бути однаковою.

5.2. Формула Пуассона.

Нехай маємо серію випробувань за схемою Бернуллі з параметрами n та p. Ймовірність $p = const$ і мала, а число випробувань n велике ($p < 0{,}1; n \cdot p \cdot q \le 10$). Тоді справедливе співвідношення

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = P_m(\lambda), \text{ де } \lambda = n \cdot p. \qquad (5)$$

У *таблиці 6* додатків наведені значення функції Пуассона $P_m(\lambda)$.

При тих самих припущеннях і невеликій кількості доданків у сумі $\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$ можна використовувати формулу:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!}. \qquad (6)$$

5.3. Локальна теорема Муавра-Лапласа.

Нехай маємо серію випробувань за схемою Бернуллі з параметрами n та p. Імовірність $p \in (0;1)$ успіху в кожному випробуванні не мала, а число випробувань *n* велике ($n \cdot p \cdot q > 10$). Тоді справедливе співвідношення:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \text{ де} \tag{7}$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$ та $x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$.

Основні властивості функції Гаусса $\varphi(x)$:

а) $\varphi(x)$ – функція парна;

б) $\varphi(x)$ – спадає при x > 0;

в) $\varphi(x)$ = 0,0001… при x > 4.

Функція $\varphi(x)$ табульована (див. *таблицю 1* додатків).

5.4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.

Нехай мажмо серію випробувань за схемою Бернуллі з параметрами *n* та *p*. Ймовірність $p \in (0;1)$ успіху у кожному випробуванні не мала, а число випробувань *n* велике ($n \cdot p \cdot q > 10$). Тоді ймовірність того, що число випробувань *m*, у яких подія *A* мала місце, знаходиться у межах від m_1 до m_2 рівна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ де} \tag{8}$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа;

$x_1 = \frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$.

Перерахуємо властивості функції Лапласа:

а) $\Phi(x)$ – непарна функція;

б) $\Phi(x)$ зростає на *R*;

в) $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = -0{,}5, \quad \lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = +0{,}5$;

г) $\Phi(x)$ = 0,4999… при $x \ge 4$.

Функція $\Phi(x)$ протабульована (див. *таблицю 2* додатків).

Розв'язування типових задач до змістового модуля V.

1. Автопарк підприємства налічує 12 автомашин. Ймовірність виходу на лінію кожної з них дорівнює p = 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку, якщо для цього необхідно на лінії мати не менше 8 автомашин.

Розв'язання. Робота автопарку вважатиметься нормальною, якщо на лінії буде 8, 9, 10, 11 або 12 машин. Знайдемо ймовірність нормальної роботи для кожного окремого випадку:

$$P_{12}(8) = C_{12}^{8}(0,8)^{8}(0,2)^{4} \approx 0,1331,$$
$$P_{12}(9) = C_{12}^{9}(0,8)^{9}(0,2)^{3} \approx 0,2358,$$
$$P_{12}(10) = C_{12}^{10}(0,8)^{10}(0,2)^{2} \approx 0,2825,$$
$$P_{12}(11) = C_{12}^{11}(0,8)^{11}(0,2)^{1} \approx 0,2062,$$
$$P_{12}(12) = C_{12}^{12}(0,8)^{12}(0,2)^{4} \approx 0,0687.$$

Події – на лінії 8, 9, 10, 11, 12 автомашин – несумісні, тому ймовірність нормальної роботи автопарку за теоремою додавання дорівнює сумі ймовірностей цих подій

$P(k \geq 8) = P_{12}(8) + P_{12}(9) + P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12)$ = 0,1331 + 0,2358 + + 0,2825 + 0,2062 + 0,0687 = 0,9263.

2. Ймовірність того, що навмання взятий виріб у партії буде першого сорту, дорівнює $^2/_3$. Скільки одиниць цього виробу слід узяти, щоб найвірогідніше число виробів першого сорту дорівнювало б 270?

Розв'язання. За умовою k_0 = 270, p= $^2/_3$, q=$^1/_3$. Застосовуючи формулу для знаходження найвірогіднішого числа «успіхів», одержуємо $n \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \leq 270 \leq n \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$, що рівносильно системі нерівностей

$$\begin{cases} n\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\le 270 \\ n\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\ge 270 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \frac{2}{3}n\le 270\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}n\ge 269\frac{1}{3} \end{cases} \text{ звідки } 404\le n\le 404{,}5.$$

Таким чином, для того, щоб найвірогідніше число виробів першого сорту дорівнювало 270, необхідно взяти 404 або 405 виробів.

3. Молокозавод відправив у магазин 500 пакетів молока. Ймовірність пошкодження пакета при транспортуванні дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено пакетів 1) рівно 3; 2) менше трьох; 3) більше трьох; 4) хоча б один.

Розв'язання. Число n = 500 велике, ймовірність p = 0,002 мала, і події (пошкодження пакетів) незалежні, тому мас місце теорема Пуассона $P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$.

1) $\lambda=n\cdot p$ = 500 0,002 = 1. Ймовірність того, що буде пошкоджено рівно 3 (m = 3) пакети $P_{500}(3)=\frac{1^3}{3!}\cdot e^{-1}=\frac{0{,}36788}{6}=0{,}0613$.

2) Ймовірність того, що буде пошкоджено менше трьох пакетів:

$$P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)=e^{-1}+e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{5}{2}e^{-1}=2{,}5\cdot 0{,}36788=0{,}9197.$$

3) Події "пошкоджено більше трьох пакетів" та "пошкоджено не більше трьох пакетів" (позначимо ймовірність цієї події Q) – протилежні, тому $P + Q = 1$. Звідси

$$P=1-Q=1-\left(P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)+P_{500}(3)\right).$$

Використовуючи здобуті вище результати, дістанемо

$$P=1-(0{,}9197+0{,}0613)=0{,}019.$$

4) Події "пошкоджено хоча б один пакет" (її ймовірність позначимо P_1) та "жоден з пакетів не пошкоджено" (її ймовірність позначимо Q_1) – протилежні, отже $P_1 + Q_1 = 1$. Звідси шукана ймовірність того,

що буде пошкоджено хоча б один пакет, дорівнює

$$P_1 = 1 - Q_1 = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}36788 = 0{,}632 .$$

4. У селі Новоселівка із кожних 100 сімей 80 мають автомобілі. Знайти ймовірність того, що з 400 навмання відібраних сімей 300 мають автомобілі.

<u>*Розв'язання.*</u> Ймовірність того, що сім'я має автомобіль, рівна, за класичним визначенням, $p = \frac{80}{100} = 0{,}8$. Оскільки n = 400 досить велике (умову $n \cdot p \cdot q = 400 \cdot 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}8) = 64 > 10$ виконано), то застосуємо локальну формулу Муавра-Лапласа.

Спочатку знайдемо $x = \frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}50$. Тоді

$$P_{400}(300) \approx \frac{\varphi(-2{,}50)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{\varphi(2{,}50)}{\sqrt{64}} = \frac{0{,}0175}{8} \approx 0{,}0022 .$$

5. Ймовірність того, що відвідувачу в їдальні знадобиться перша страва, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 відвідувачів першу страву замовлять: 1) не менше 75 і не більше 90 відвідувачів; 2) не менше 75 відвідувачів; 3) не більше 74 відвідувачів.

<u>*Розв'язання*</u>. Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа.

1) Подія A – відвідувач замовив першу страву. За умовою n = 100; $P(A) = p$ = = 0,8; q = 0,2; k_1 = 75; k_2 = 90 . Обчислимо x' та x'':

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25 ;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5 .$$

Враховуючи непарність функції Лапласа, дістанемо

P_{100} (75; 90) = Ф(2,5) – Ф(– 1,25) = Ф(2,5) + Ф(1,25).

За таблицею (додаток 2) знайдемо Ф(2,5) = 0,4938, Ф(1,25) = 0,3944.

Шукана ймовірність $P_{100}(75; 90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$.

2) Вимога, щоб першу страву замовили не менше 75 відвідувачів, означає, що першу страву замовили або 75, або 76, ..., або 100 відвідувачів. Таким чином, у цьому випадку слід прийняти $k_1 = 75$, $k_2 = 100$. Тоді

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5.$$

За таблицею (додаток 2) знайдемо Ф (1,25) = 0,3944, Ф(5) = 0,5.

Шукана ймовірність $P_{100}(75;100) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = = 0,5 + 0,3944 = 0,8944$.

3) Події – "першу страву замовило не менше 75 відвідувачів" та "першу страву замовило не більше 74 відвідувачів" протилежні, тому сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці. Шукана ймовірність

$$P_{100}(0; 74) = 1 - P_{100}(75; 100) = 1 - 0,8944 = 0,1056.$$

Частина ІІ. Випадкові величини. Випадкові величини та їх функції розподілу.

Змістовий модуль VI. Випадкові величини.

6.1. Види випадкових величин.

Одним із основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини, з яким пов’язане уявлення про стохастичний експеримент, що полягає у вимірюванні певної числової величини X.

Прикладами випадкових величин можуть бути кількість очок, що випадають на грані гральної кості, кількість влучень у ціль при n пострілах, час безвідмовної роботи приладу, дальність польоту ракети тощо.

Означення 1. *Випадковою величиною (ВВ) називається величина, яка в результаті експерименту може набути лише одного можливого числового значення, заздалегідь невідомого і обумовленого випадковими причинами.*

Випадкова величина є число, яке ставиться у відповідність кожному можливому наслідку експерименту. Отже, випадкові величини – це функції на просторі елементарних подій. Це дозволяє застосовувати в теорії ймовірностей методи математичного аналізу.

Випадкові величини позначають великими літерами X, Y, Z тощо, а їх можливі значення x_i, y_i, z_i, $i = \overline{1,n}$. Далі x_i, y_i, z_i, як правило, цілі числа.

Випадкові величини поділяються на дискретні та неперервні випадкові величини.

Означення 2. *Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називається така випадкова величина, яка набуває скінченної або зліченної кількості числових значень з певними ймовірностями.*

Очевидно, значення ДВВ можна зобразити точками на числовій осі (рис. 1).

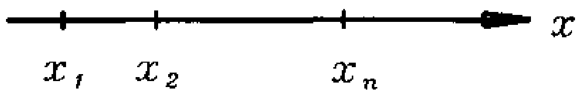


Рис. 1

Зауваження 1. Випадкова подія – це окремий випадок дискретної випадкової величини, яка набуває значень $x_1 = 1$ (подія A) і $x_2 = 0$ (подія $\overline{A}$).

Означення 3. *Неперервною випадковою величиною (НВВ) називається випадкова величина, яка може набувати будь-якого значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу.*

Відзначимо, що кількість можливих значень неперервної випадкової величини є нескінченною і незліченною (тобто перенумерувати всі значення неперервної випадкової величини за допомогою натурального ряду чисел неможливо). Значення неперервної випадкової величини заповнюють цілий проміжок (рис. 2).

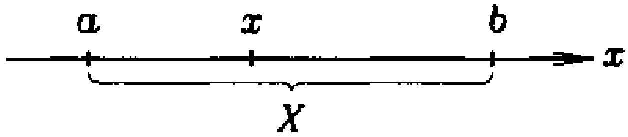


Рис. 2

6.2. Дискретні випадкові величини та їх закони розподілу.

З теоретико-ймовірнісної точки зору переліку значень дискретної випадкової величини не досить для її характеристики. Потрібно ще вказати, з якою ймовірністю випадкова величина набуває того чи іншого значення.

Позначимо ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення x через $P(X = x)$. Так, наприклад, у експерименті з шестигранним гральним кубиком $P(X = i) = {}^1/_6\,(i = \overline{1,6})$.

Таким чином, для повної характеристики випадкової величини треба крім переліку її можливих значень ще задати закон, за яким знаходять ймовірності цих значень.

Нехай X – випадкова величина, а x_1, x_2, ..., x_n – її значення. Сукупність усіх елементарних подій, на яких X набуває фіксованого значення x_k, утворює подію $X = = x_k$, а її ймовірність позначається через

$$p_k = P(X = x_k) \tag{1}$$

<u>Означення 4.</u> *Законом розподілу випадкової величини називається закон, за яким кожному її значенню відповідає певна ймовірність цього значення.*

Закони розподілу можна задати: 1) таблицею, 2) графічно, 3) аналітично.

1) Табличний спосіб.

Таблицею розподілу ймовірностей найчастіше задається дискретна випадкова величина. Вона має вигляд

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_1	...	p_n

де $p_k = P(X = x_k) \geq 0$, $k = \overline{1,n}$.

У першому рядку стоять усі можливі значення випадкової величини X, а в другому – відповідні ймовірності цих значень.

Враховуючи, що в одному випробуванні випадкова величина набуває лише одного можливого значення, зробимо висновок, що події $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ утворюють повну групу, тому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{2}$$

За допомогою формули (2) контролюють виконання розрахунків ймовірностей у таблиці.

<u>*Зауваження 2*</u>. Якщо множина можливих значень випадкової величини X нескінченна (але злічення), то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ збіжний до 1, тобто $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

2) Графічний спосіб.

Для наочності закон розподілу зображується графічно у вигляді многокутника розподілу. Для цього вибираємо систему координат. На осі абсцис відкладаємо можливі значення ДВВ, а на осі ординат – відповідні значення ймовірностей P. При цьому знаходимо точки з координатами $(x_1; p_1)$, $(x_2; p_2)$, ..., $(x_n; p_n)$.

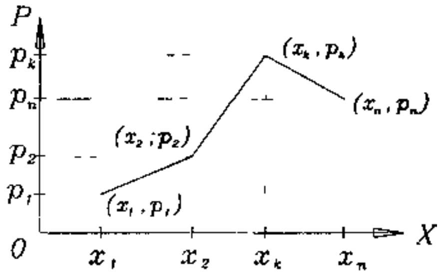


Рис. 3

З'єднуючи ці точки відрізками прямих, дістанемо графік (рис. 3) у вигляді многокутника розподілу ДВВ.

Означення 5. *Значення випадкової величини, ймовірність якого найбільша, називається модою.*

Модою є x_k на рис. 3.

3) Аналітичний спосіб.

При аналітичному способі задання закону розподілу дискретної випадкової величини задається функція

$$p_k = P(X = x_k) = f(x_k)\ (k = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

яка називається розподілом ймовірностей випадкової величини X. Ця функція визначена на множині значень x_k випадкової величини X.

Зрозуміло, що

$$f(x_k) \geq 0, \quad \sum_k f(x_k) = 1 \tag{4}$$

Найчастіше у цьому випадку використовуються біномний, геометричний, гіпергеометричний закони розподілу та розподіл Пуассона.

6.3. Біномний закон розподілу ДВВ.

Розглянемо n незалежних випробувань Бернуллі, у кожному з яких подія A настає з ймовірністю p, $0 < p < 1$, і не настає з ймовірністю q=1 –

p.

Нехай X – дискретна випадкова величина – означає кількість появи події A у n випробуваннях. Тоді її можна задати законом розподілу:

X	0	1	2	...	k	...	n
p	$P_n(0$	$P_n(1$	$P_n(2)$	...	$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$P_n(n$

Тут формула Бернуллі

$$P\left(X=k\right)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=\overline{0,n}\,, \tag{5}$$

є аналітичним способом задання шуканого закону розподілу, який називається біномним; $P_n(k)$ – ймовірність появи k разів події A у n випробуваннях.

Зауваження 3. Закон називається "біномним" тому, що праву частину рівності (5) можна розглядати як загальний член бінома Ньютона

$$1=\left(p+q\right)^n=C_n^n p^n+C_n^{n-1}p^{n-1}q+...+C_n^k p^k q^{n-k}+...+C_n^0 q^n\,.$$

6.4. Розподіл Пуассона.

Означення 6. *Дискретна випадкова величина X має розподіл Пуассона з параметром λ (λ = np > 0), якщо вона набуває значення* $x_1 = 0$, $x_2 = 1$,..., $x_n = n - 1$, ... *з ймовірностями*

$$P\left(X=k\right)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=1\right) \tag{6}$$

Формула (6) застосовується для розрахунку ймовірностей масових явищ (n – велике) і малоймовірних ($p < 0{,}01$ – мале) подій, а також в теорії надійності. Існують таблиці для $P_n(k)$ по k і λ.

6.5. Геометричний розподіл ДВВ.

Розглянемо незалежні випробування Бернуллі, у кожному з яких подія A настає з ймовірністю p , $0 < p < 1$, і не настає з ймовірністю $q =$

$1 - p$. Нехай випробування ведуться до появи події A, тобто, це означає: якщо подія A з'явилася у k-му випробуванні, то у попередніх $k - 1$ її не було.

Позначимо через X випадкову величину, що означає кількість випробувань, які треба провести до першої появи події A, тобто X: 1, 2, ..., $k - 1$, …

Тоді ймовірність складеної події за теоремою множення незалежних подій дорівнює $P(X = k) = q^{k-1}p$, а закон розподілу ДВВ X називається геометричним і його можна подати таблицею:

X	1	2	3	...	k	...
P	p	qp	q^2	...	q^{k-}	...

Контроль: $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1 \quad |q| < 1$.

6.6. Гіпергеометричний розподіл ДВВ.

Нехай маємо множину N елементів, з яких M елементів володіють ознакою A. Вилучається випадково, без повернення n елементів. Потрібно знайти ймовірність того, що з них m елементів володіють ознакою A. Шукана ймовірність, яка залежить від натуральних чисел N, M, n, m, визначається за формулою (за класичним визначенням ймовірності події):

$$P(N;m) = \frac{C_n^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (7)$$

Отриманий за формулою (7) ряд розподілу називається гіпергеометричним рядом розподілу.

Розв'язування типових задач до змістового модуля VI.

1. Дві гральні кості одночасно підкидають 2 рази. Написати біномний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа випадань парного числа очок на двох гральних костях.

Розв'язання. ДВВ X (число випадань парного числа очок на двох гральних костях) має наступні можливі значення: $x_1 = 0$ (на жодній з костей не випало парне число очок), $x_2 = 1$ (на одній кості випало парне число очок), $x_3 = 2$ (на обох костях випало парне число очок).

Підкидання двох костей одночасно можна розглядати як одне незалежне випробування. Ймовірність випадання парного числа очок на одній кості при одному підкиданні дорівнює 1/2, а на двох, за теоремою множення, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$; отже ймовірність випадання парного числа очок в одному незалежному випробуванні $p=\frac{1}{4}, q=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. За умовою кількість незалежних випробувань $n = 2$. Скористаємось формулою Бернуллі.

$$p_1 = P_2(0) = C_2^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad p_3 = P_2(2) = C_2^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

$$p_2 = P_2(1) = C_2^1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = 2\cdot\frac{3}{16} = \frac{6}{16}.$$

Запишемо шуканим біномний закон розподілу ДВВ X :

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

Контроль:

$$\frac{9}{16}+\frac{6}{16}+\frac{1}{16}=1$$

2. Екзаменатор задає студенту додаткові запитання. Ймовірність того, що студент відповість на будь-яке задане питання, дорівнює 0,9. Викладач припиняє екзамен, як тільки студент не відповідає на запитання. Необхідно скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа додаткових питань, які викладач задасть студенту.

Розв'язання. 1) ДВВ X – число заданих додаткових питань – має наступні можливі значення: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, ..., $x_k = k$, ... Знайдемо ймовірності цих значень.

X = 1 (екзаменатор задасть тільки одне питання), якщо студент не відповість на перше питання. Ймовірність $P(X = 1) = 1 – 0,9 = 0,1$.

X = 2 (екзаменатор задасть тільки 2 питання), якщо студент відповість на перше питання (ймовірність цієї події 0,9) і не відповість на друге питання (ймовірність цієї події 0,1). Отже $P(X = 2) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$.

Аналогічно знаходимо

$P(X = 3) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,9^2 \cdot 0,1 = 0,081, \ldots,$

$P(X = k) = 0,9^{k-1} \cdot 0,1, \ldots$

Запишемо шуканий закон розподілу

X	1	2	3	…	k	…
P	0,1	0,09	0,081	…	$0,9^{k-1}\cdot$	...

3. У партії з 10 деталей є 8 стандартних. Навмання відібрано 2 деталі. Скласти закон розподілу числа стандартних деталей серед відібраних.

Розв'язання. ДВВ X – число стандартних деталей серед відібраних деталей – має наступні можливі значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. X розподілена за гіпергеометричним законом, відповідні ймовірності обчислюються за формулою (7) $P(X=r)=\frac{C_n^k C_{N-n}^{k-r}}{C_N^k}$ (N – число деталей у партії, n – число стандартних деталей у партії, k – число відібраних деталей, r – число стандартних деталей серед відібраних). За умовою $N = 10$, $n = 8$, $k = 2$; $r =0, 1, 2$,

звідси $P(X=0)=\frac{C_8^0 C_2^8}{C_{10}^2}=\frac{1}{\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}}=\frac{1}{45}$;

$$P(X=1)=\frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8\cdot 2}{45}=\frac{16}{45};\quad P(X=2)=\frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}}{45}=\frac{28}{45}.$$

Складемо шуканий закон розподілу:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Контроль:

$$\frac{1}{45}+\frac{16}{45}+\frac{28}{45}=1.$$

Змістовий модуль VII. Числові характерики дискретних випадкових величин.

Закон розподілу повністю характеризує дискретну випадкову величину, але нерідко він невідомий, тому обмежуються так званими числовими характеристиками.

До таких, перш за все. належать такі числові характеристики: 1) математичне сподівання; 2) дисперсія; 3) середнє квадратичне відхилення.

<u>7.1. Математичне сподівання ДВВ.</u>

<u>Означення 1.</u> *Математичним сподіванням ДВВ X називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності і позначається M(X):*

$$M\left(X\right)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k \tag{1}$$

Тут X – ДВВ, що набуває значення x_k з ймовірностями p_k, $k=\overline{1,n}$.

Математичне сподівання ДВВ – це числова характеристика, яка виражає середнє зважене значення випадкової величини (тим точніше, чим більшою є кількість спостережень).

<u>Зауваження 1</u>. Якщо ДВВ X набуває зліченної множини

можливих значень, то $M\left(X\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k p_k$, (2)

за умови, що даний ряд абсолютно збіжний.

Зауваження 2. З означення випливає, що $M(X)$ не випадкова, а стала величина (на відміну від випадкової величини X).

Зауваження 3. Математичне сподівання числа появи події A в одному випробуванні дорівнює ймовірності цієї події. Дійсно, $M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

Зауваження 4. Математичне сподівання наближено дорівнює (тим точніше, чим більше число випробувань n) середньому арифметичному значень випадкової величини, що спостерігається. У цьому полягає ймовірнісний зміст $M(X)$.

Зауваження 5. Очевидно, $M(X)$ більше найменшого і менше найбільшого з можливих значень ДВВ X:

$min\,(x_1, x_2, ..., x_n) < M(X) < max\,(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Отже, $M(X)$ характеризує розміщення значень випадкової величини X.

Зауваження 6. (Механічний зміст формули (1)). Запишемо формулу (1) у вигляді

$$M\left(X\right)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k p_k}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k}=x_c, \qquad \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1\right) \qquad (3)$$

Нехай $p_к$ – маси матеріальних точок, розміщених на числовій осі, а x_k – координати цих точок. Тоді формулу (3) можна розглядати як формулу центра ваги системи матеріальних точок (рис. 1).

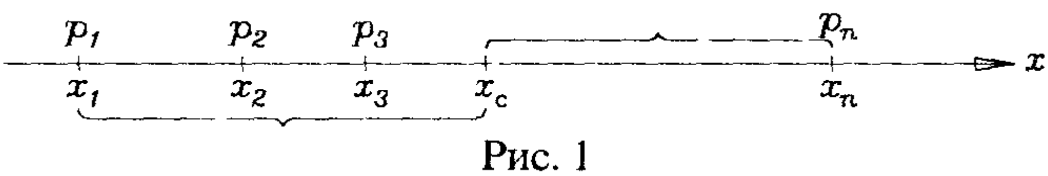


Рис. 1

Тому математичне сподівання називають центром розподілу випадкової величини.

7.2. Властивості математичного сподівання ДВВ.

М1°. *Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій*

$$M(C) = C. \tag{4}$$

М2°. *Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання*

$$M(CX) = CM(X). \tag{5}$$

Наведені властивості випливають із означення математичного сподівання.

М3°. *Математичне сподівання добутку двох незалежних дискретних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань*

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y). \tag{6}$$

Означення 2. *Дві випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набуває інша випадкова величина. У противному разі випадкові величини залежні.*

Означення 3. *Добутком незалежних випадкових величин X і Y називається випадкова величина XY, можливі значення якої дорівнюють добуткам кожного можливого значення X на кожне можливе значення Y. Ймовірності добутків цих значень дорівнюють добуткам ймовірностей співмножників.*

Наслідок. *Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних ДВВ дорівнює добутку їх математичних сподівань.*

Наприклад, у випадку трьох ДВВ запишемо:

$$M(XYZ) = M(X) \cdot M(Y) \cdot M(Z). \tag{7}$$

М4°. *Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків*:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y). \tag{8}$$

<u>Означення 4.</u> *Сумою випадкових величин X і Y називається випадкова величина X + Y, можливі значення якої дорівнюють сумі кожного можливого значення випадкової величини X і кожного можливого значенням Y. При цьому ймовірності можливих значень випадкової величини X + Y для незалежних випадкових величин X і Y дорівнюють добуткам ймовірностей доданків; для залежних – добуткам ймовірностей одного доданка на умовну ймовірність іншого.*

<u>Наслідок.</u> *Математичне сподівання суми декількох незалежних випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків.*

Наприклад, для трьох ДВВ справедлива рівність

$$M(X + Y + Z) = M(X + Y) + M(Z) = M(X) + M(Y) + M(Z). \tag{9}$$

<u>7.3. Приклади обчислення математичного сподівання ДВВ.</u>

<u>1. Біномний розподіл ДВВ</u>.

<u>Теорема 1.</u> *Математичне сподівання M(X) числа появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань n на ймовірність p (0 < p < 1) появи події A в кожному випробуванні*:

$$M(X) = np.. \tag{10}$$

<u>2. Геометричний розподіл ДВВ.</u>

<u>Теорема 2.</u> *Якщо ДВВ X має геометричний розподіл, то її математичне сподівання* $M(X) = {}^{1}/_{p}$, *де p (0 < p < 1) – ймовірність появи події в одному випробуванні.*

<u>3. Розподіл Пуассона</u>.

<u>Теорема 3.</u> *Якщо ДВВ X має розподіл Пуассона з параметром* λ, *то її математичне сподівання* $M(X) = \lambda$.

7.4. Відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Математичне сподівання не дає повної характеристики випадкової величини, наприклад, не показує ні які значення вона приймає, ні як вона розміщена навколо свого середнього значення.

Введемо нову величину, що характеризує відхилення випадкової величини X від $M(X)$.

Означення 5. *Відхилення випадкової величини X називається різниця між випадковою величиною та її математичним сподіванням, тобто $X - M(X)$.*

Теорема 4. *Математичне сподівання відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання дорівнює нулю:*

$M(X - M(X)) = 0.$

Дійсно, згідно з властивостями $M(X)$ маємо:

$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$

Отже, введена величина теж недостатньо характеризує розміщення значень ДВВ. Тому в теорії ймовірностей розглядається квадрат відхилення ДВВ.

Розв'язування типових задач до змістового модуля VII.

1. Незалежні дискретні випадкові величини X та Y задано законами розподілу

X	1	2
P	0.4	0.6

Y	3	4
P	0.2	0.8

Скласти закон розподілу величин 1) $Z = X + Y$; 2) $V = X \cdot Y$; 3) знайти математичне сподівання $M(Z)$, $M(V)$.

Розв'язання. 1) Величина $Z = X + Y$ має можливі значення: $z_1 = 1 + 3 = 4$; $z_2 = 1 + 4 = 5$; $z_3 = 2 + 3 = 5$; $z_4 = 2 + 4 = 6$.

Знайдемо ймовірності можливих значень Для того, щоб $Z = 4$, достатньо, щоб величина X набула значення $x_1 = 1$ і величина Y – значення $y_1 = 3$. Ймовірності цих можливих значень відповідно дорівнюють 0,4 і 0,2. Оскільки величини X та Y незалежні, то події $X = 1$ та $Y = 3$ незалежні, отже ймовірність того, що вони настануть одночасно (тобто ймовірність події Z = 4) за теоремою множення дорівнює $0,4 \cdot 0,2 = 0,08$. Аналогічно знайдемо

$P(Z = 1 + 4 = 5) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32$, $P(Z = 2 + 3 = 5) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12$,

$P(Z = 2 + 4 = 6) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$. Серед можливих значень величини Z є два однакових значення $Z = 5$. Це значення одержується в результаті настання або події ($X = 1$, $Y = 4$), або події ($X = 2$, $Y = 3$). Ці події несумісні. Тому згідно з теоремою додавання ймовірність значення $Z = 5$ є сумою ймовірностей цих подій:

$P(Z = 5) = 0,32 + 0,12 = 0,44$.

Запишемо шуканий закон розподілу ДВВ $Z = X + Y$:

Z	4	5	6
P	0.08	0.44	0.48

Контроль:

$0,08 + 0,44 + 0,48 = 1$.

2) ДВВ $V = X \cdot Y$ має наступні можливі значення:

$v_1 = 1 \cdot 3 = 3$, $v_2 = 1 \cdot 4 = 4$, $v_3 = 2 \cdot 3 = 6$, $v_4 = 2 \cdot 4 = 8$.

Всі ці значення різні. Їх імовірності, як і в 1), дорівнюють добуткам імовірностей значень X та Y, що перемножаються. Вони обчислені в 1). Таким чином, закон розподілу ДВВ $V = X \cdot Y$ має вигляд:

V	3	4	6	8
P	0,08	0,32	0,12	0,48

Контроль:

$0,08 + 0,32 + 0,12 + 0,48 = 1$.

2. Незалежні дискретні випадкові величини X та Y мають математичні сподівання $M(X) = 2$ і $M(Y) = 5$. Знайти математичне сподівання величини $Z = = 4X – 3Y$.

Розв’язання. Використовуючи властивості математичного сподівання, запишемо

$M(Z) = M(4X - 3Y) = M(4X) - M(3Y) = 4\,M(X) - 3\,M(Y) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 8 - 15 = -7.$

3. Дискретна випадкова величина X набуває трьох можливих значень: $x_1 = 4$ з імовірністю $p_1 = 0{,}5$; $x_2 = 6$ з імовірністю $p_2 = 0{,}3$ та x_3 з імовірністю p_3. Знайти x_3 і p_3, знаючи, що $M(X) = 8$.

<u>*Розв'язання*</u>. Для знаходження двох невідомих x_3 і p_3 маємо два рівняння:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M(X) \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} p_3 = 1 - p_1 - p_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{p_3}\left(M(X) - x_1 p_1 - x_2 p_2\right). \end{cases}$$

Після підстановки в ці рівняння даних умови задачі дістанемо:

$p_3 = 1 - 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$; $x_3 = \dfrac{1}{0{,}2}(8 - 2 - 1{,}8) = \dfrac{4{,}2}{0{,}2} = 21.$

Змістовий модуль VIII. Числові характеристики дискретних випадкових величин (продовження).

<u>8.1. Дисперсія ДВВ та її властивості.</u>

Дисперсія – міра розсіювання можливих значень випадкової величини відносно центру розподілу.

<u>***Означення 1.***</u> *Дисперсією дискретної випадкової величини X називається число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрату відхилення X від її математичного сподівання і позначається D(X):*

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]. \tag{1}$$

<u>**Теорема 1.**</u> (Формула обчислення дисперсії). *Дисперсія дискретної випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадратом її математичного сподівання:*

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \tag{2}$$

Дійсно, згідно з властивостями $M(X)$, знаходимо

$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M(X^2) - 2M(X)M(X) + + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Розглянемо властивості дисперсії ДВВ X.

Д1°. *Дисперсія ДВВ X невід'ємна, тобто* $D(X) \geq 0$.

Д2°. *Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю, тобто* $D(C) = 0$.

Д3°. *Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його спочатку до квадрату:* $D(CX) = C^2D(X)$.

Д4°. *Дисперсія алгебраїчної суми двох незалежних ДВВ X та Y дорівнює сумі їх дисперсій, тобто*

$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Наслідок 1. *Дисперсія суми декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.*

$D(X + Y + Z) = D(X + Y) + D(Z) = D(X) + D(Y) + D(Z)$.

Наслідок 2. *Дисперсія суми сталої величини C і випадкової величини X дорівнює дисперсії випадкової величини X.*

Дійсно, $D(X + C) = D(X) + D(C) = D(X) + 0 = D(X)$.

8.2. Приклади обчислення дисперсій ДВВ.

1. *Біномний розподіл.*

Дисперсія біномного розподілу ДВВ X з параметрами n і p дорівнює npq, тобто $D(X) = npq$.

2. *Розподіл Пуассона.*

Теорема 3. *Дисперсія розподілу Пуассона з параметром λ ДВВ X дорівнює λ, тобто* $D(X) = \lambda$.

3. *Геометричний розподіл.*

Теорема 4. *Дисперсія геометричного розподілу ДВВ X дорівнює*

$\frac{q}{p^2}$, *де p (0 < p < 1) і q (0 < q < 1) – ймовірності появи і непояви події А у кожному випробуванні.*

8.3. Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Для оцінки розсіювання можливих значень випадкової величини X навколо її середнього значення $M(X)$ можна ввести числову характеристику, яка матиме ту ж розмірність, що і сама величина (на відміну від дисперсії, яка вимірюється в квадратних одиницях). Останнє зауваження приводить до необхідності введення середнього квадратичного відхилення, зміст якого такий же, як у дисперсії, а розмірність – як у випадкової величини.

Означення 2. *Середнім квадратичним відхиленням ДВВ X називається число $\sigma(X)$, що визначається рівністю:*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{3}$$

Теорема 5. *Середнє квадратичне відхилення суми скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює квадратному кореню з суми квадратів їх середніх квадратичних відхилень, тобто:*

$$\sigma\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k)} \tag{4}$$

8.4. Незалежні випадкові величини, що мають однаковий розподіл.

Випадкові величини, що мають однаковий розподіл, мають і однакові числові характеристики.

Розглянемо взаємно незалежні випадкові величини X_1, X_2, …, X_n, що мають однаковий розподіл (позначимо їх середнє арифметичне через $\overline{X}$, тобто $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$) і для яких $M(X_k) = a$, $D(X_k) = D$, $\sigma(X_k) = \sigma$ ($k = \overline{1,n}$). Тоді мають місце наступні теореми.

Теорема 6. *Математичне сподівання середнього арифметичного однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин дорівнює математичному сподіванню кожної з них:* $M(\overline{X}) = a$.

Теорема 7. *Дисперсія середнього арифметичного n однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин у n разів менша за дисперсію кожної з них:*

$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{D}{n}.$$

Теорема 8. *Середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного n однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин у* $\sqrt{n}$ *разів менше за середнє квадратичне відхилення кожної з них:*

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Зауваження 2. Аналізуючи наведені теореми, зробимо висновок, що середнє арифметичне досить великої кількості взаємно незалежних випадкових величин має значно менше розсіювання, ніж кожна окрема випадкова величина. Про це слід пам’ятати при вимірюваннях різних фізичних величин.

Розв’язування типових задач до змістового модуля VIII.

1. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення ДВВ X, заданої законом розподілу:

X	4	2	1	0	3	5
P	0,01	0,02	0,25	0,40	0,10	0,22

Розв’язання. Для обчислення дисперсії скористаємось формулою

$D(X) = M(X^2) – (M(X))^2$. Обчислюємо:

1) $M(X) = 4 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}40 + 3 \cdot 0{,}10 + 5 \cdot 0{,}22 = 1{,}73$;

2) $M^2(X) = 1{,}73^2 = 2{,}99$;

3) $M(X^2) = 16 \cdot 0{,}01 + 4 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}40 + 9 \cdot 0{,}10 + 25 \cdot 0{,}22 =$ 6,89;

4) $D(X) = 6{,}89 – 2{,}99 = 3{,}90$; 5) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}90} = 1{,}97$.

2. Проводиться 100 незалежних повторних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи деякої події дорівнює 0,6. Визначити математичне сподівання та дисперсію числа появи події в цих випробуваннях.

<u>*Розв'язання.*</u> ДВВ X – число появи деякої події в 100 незалежних випробуваннях – розподілена за біноміним законом. За умовою

$n = 100$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$. $M(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}6 = 60$;

$D(X) = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 24$.

3. Дискретні величини X та Y незалежні і мають дисперсії $D(X) = 5$, $D(Y) = 10$. Обчислити дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $Z = 2X + 3Y + 7$.

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки величини X та Y незалежні, то незалежні також і величини $2X$ і $3Y$. Використовуючи властивості дисперсії, одержимо:

$D(Z) = D(2X + 3Y + 7) = D(2X) + D(3Y) + D(7) = 2^2 D(X) + 3^2 D(Y) + D(7) = 4 \cdot 5 + + 9 \cdot 10 + 0 = 110$; $\sigma(Z) = \sqrt{110} \approx 10{,}488$.

4. ДВВ X має тільки два можливих значення: x_1 та x_2, причому $x_2 > x_1$. Ймовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу ДВВ X, якщо математичне сподівання та дисперсія відомі: $M(X) = 1{,}4$; $D(X) = = 0{,}24$.

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки $p_1 + p_2 = 1$, ймовірність того, що X набуде

значення x_2, дорівнює 1 – 0,6 = 0,4.

За умовою $M(X)$ = 1,4; $D(X)$ = 0,24. Маємо систему двох рівнянь для знаходження невідомих значень x_1 та x_2:

$$\begin{cases} 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4 \\ 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 - 1{,}4^2 = 0{,}24 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4 \\ 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 = 2{,}2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо два розв'язки: x_1 = 1; x_2 = 2 та x_1 = 1,8; x_2 = = 0,8. За умовою $x_2 > x_1$, тому задачу задовольняє лише перший розв'язок: x_1 = 1; x_2 = 2. Шуканий закон розподілу має вигляд:

X	1	2
P	0,6	0,4

Змістовий модуль IX. Неперервні випадкові величини (НВВ). Функція та щільність розподілу ймовірностей.

9.1. Функція розподілу випадкової величини та її властивості.

Дискретна випадкова величина може бути задана законом розподілу, тобто переліком її значень і відповідних ймовірностей. Неперервні випадкові величини задати таблицею неможливо, бо їх значення заповнюють цілий проміжок. Тому треба задати не ймовірності окремих значень, а ймовірність того, що значення випадкової величини попаде в певний інтервал.

Означення 1. *Інтегральною функцією F(x) розподілу або функцією розподілу ймовірностей випадкової величини називається ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, меншого за значення x, де x – довільне дійсне число:*

$$F(x) = P(X < x \tag{1}$$

Зауваження 1. З урахуванням (1) можна дати означення неперервної випадкової величини.

<u>Означення 2.</u> *Випадкова величина X називається неперервною, якщо її функція розподілу F(x) є неперервною кусково-диференційовною функцією.*

Якщо задано дискретну випадкову величину X: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тоді її функцію розподілу згідно з (1) можна задати рівністю:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k,\ p_k > 0,\ \sum_k p_k = 1, \tag{2}$$

де $p_k = P(x_k)$ – ймовірність значення x_k. Звідси виходить, що коли $x_k < x < x_{k+1}$, то значення $F(x)$ не змінюється, тобто в точках $\{x_k\}$ функція $F(x)$ має розрив першого роду.

<u>Зауваження 2</u>. Графік функції розподілу дискретної випадкової величини розривний (рис. 1).

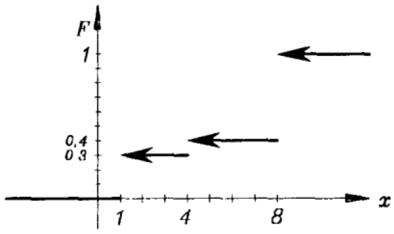


Рис. 1

Розглянемо властивості функції розподілу $F(x)$.

F1°. $0 \le F(x) \le 1$.

Це випливає з означення функції $F(x)$.

F2°. Функція F(x) – неспадна, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

<u>Наслідок 1.</u> *Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу (a, b) дорівнює приросту функції розподілу F(x) на цьому інтервалі, тобто*

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{3}$$

<u>Наслідок 2.</u> *Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде одного певного значення дорівнює нулю.*

F3°. *Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать інтервалу (a, b), то:*

1) $F(x) = 0$ при $x \le a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

F4°. *Функція розподілу неперервна зліва.*

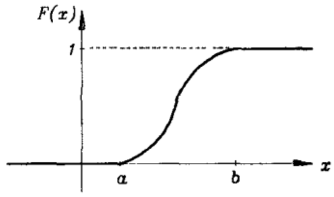


Рис. 2

Графік функції розподілу

неперервної
випадкової величини, що набуває значень з
(a, b), має вигляд (рис. 2):

9.2. Щільність розподілу ймовірностей та її властивості.

Означення 3. *Диференціальною функцією розподілу* $f(x)$ *(або щільністю розподілу ймовірностей) неперервної випадкової величини називається перша похідна від її інтегральної функції* $F(x)$*, тобто*:

$$F(x) = F'(x),\ x \in (-\infty; +\infty). \qquad (4)$$

З означення 3 випливає, що $F(x)$ є первісною для $f(x)$. Крива $y = f(x)$ називається кривою розподілу ймовірностей або кривою розподілу (рис. 3).

Теорема 1. *Ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значення з інтервалу (a, b) дорівнює визначеному інтегралу від щільності розподілу в межах від a до b:*

$$P(a \le x < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (5)$$

Геометричний зміст рівності (5) полягає в тому, що ймовірність $P(a < X < b)$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox, кривою розподілу $f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 3).

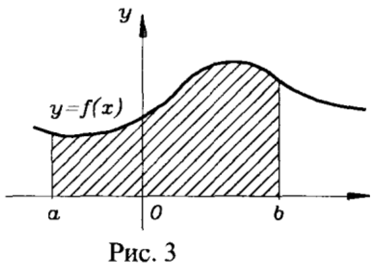


Рис. 3

Зауваження 3. Якшо $f(x)$ – парна, то

$$P(-a < X < a) = P(|X| < a) = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Наслідок. *Функція F(x) розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини виражається через щільність розподілу f(x) за* *допомогою рівності:*

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \qquad (6)$$

Зауваження 4. Для дискретної випадкової величини поняття щільності розподілу не розглядається.

Розглянемо властивості щільності розподілу $f(x)$:

f1°. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини є невід'ємною функцією, тобто f(x) ≥ 0.

f2°. Невласний інтеграл від щільності розподілу ймовірностей випадкової величини у нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

f3°. Якщо випадкова величина X набуває значення з інтервалу (a, b), то f(x) = 0 при x < a та при x > b, тому що F(x) = 0 при x < a і F(x) = 1 при x > b.

f4°. Щільність розподілу f(x) є границею відношення ймовірності того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу (x, x + Δx), до довжини інтервалу Δx, коли Δx → 0.

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

9.3. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

У випадку неперервних випадкових величин, як і у випадку дискретних, використовуються визначені раніше числові характеристики, але обчислюються вони за іншими формулами.

1. *Математичне сподівання неперервної випадкової величини.*

Нехай неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)$. Припустимо, що всі можливі значення неперервної випадкової величини X заповнюють відрізок $[a, b]$. Розіб'ємо $[a, b]$ на

n частин довжиною $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. У кожній частині цього розбиття візьмемо довільну точку $\xi_k,\ k = \overline{1,n}$ Тоді щільність ймовірності у точці ξ_k буде дорівнювати $f(\xi_k)$. Складемо суму добутків можливих значень ξ_k, $k = \overline{1,n}$, на ймовірності попадання їх в інтервал довжиною Δx:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k) \Delta x.$$

Ця сума буде наближати математичне сподівання $M(X)$ тим точніше, чим менше Δx, і буде йому дорівнювати, якщо перейти до границі при $\Delta x \to 0$. З іншого боку, границя цієї суми при $\Delta x \to 0$ дорівнює

$$\int_a^b xf(x)\,dx.$$

Теорема 2. *Якщо неперервна випадкова величина набуває можливих значень з відрізку [a, b], має щільність f(x), то її математичне сподівання знаходиться за формулою*

$$M(X) = \int_a^b xf(x)\,dx. \tag{7}$$

Зауваження 5. Якщо можливі значення X належать $\boldsymbol{R}$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx. \tag{8}$$

за умови, що невласний інтеграл у рівності (8) абсолютно збіжний.

2. *Дисперсія неперервної випадкової величини.*

Дисперсія неперервної випадкової величини визначається таким же чином, як і у випадку дискретної величини, а саме:

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right). \tag{9}$$

Теорема 3. *Якщо неперервна випадкова величина X набуває* *можливих значень з відрізка [a, b], то* $D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx.$

Зауваження 6. Якщо можливі значення X належать $\boldsymbol{R}$, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx. \qquad (10)$$

Як і у випадку дискретних випадкових величин, дисперсію неперервної величини X доцільно знаходити за формулою

$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X),$ або

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X). \qquad (11)$$

3. *Середнє квадратичне відхилення.*

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається та обчислюється за формулою

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}. \qquad (12)$$

Зауваження 7. Усі числові характеристики неперервної випадкової величини мають властивості, аналогічні властивостям відповідних числових характеристик дискретних випадкових величин.

Розв'язування типових задач до змістового модуля IX.

1. Баскетболіст кидає м'яч у корзину 4 рази. Закон розподілу числа влучень у корзину має вигляд

X	0	1	2	3	4
p	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

Розв'язання 1) Якщо $x \le 0$, то $F(x) = P(X < 0) = 0$. Дійсно, число влучень не може бути від'ємним, і ДВВ X не набуває значень, менших 0.

2) Якщо $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}0081$. Дійсно, якщо

число влучень менше одиниці, то це означає, що влучень не було зовсім.

3. Якщо $1 < x \le 2$, то

$$F(x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}0837.$$

Дійсно, якщо число влучень менше двох, то воно дорівнює або нулю, або одиниці.

4) Нехай $2 < x \le 3$, тоді

$F(x) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}0837 + 0{,}2646 = = 0{,}3483$. Дійсно, якщо число влучень менше трьох, це означає, що їх було або нуль, або одне, або два.

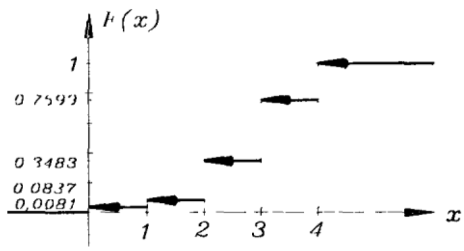
5) Якщо $3 < x \le 4$, то

$F(x) = P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}3483 + + 0{,}4116 = 0{,}7599$.

6) Якщо $x > 4$, то $F(x) = 1$. Дійсно, подія $X \le 4$ достовірна і її ймовірність дорівнює одиниці (число влучень при чотирьох кидках завжди менше або дорівнює чотирьом).

Таким чином, шукана функція розподілу та її графік мають вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0 \\ 0{,}0081 \quad при \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}0837 \quad при \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}3483 \quad при \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}7599 \quad при \quad 3 < x \le 4, \\ 1 \quad при \quad x > 4. \end{cases}$$



2. НВВ X задана щільністю розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\cos x \quad при \quad -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \quad при \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Визначити ймовірність того, що в результаті випробування НВВ *X* набуде значення з інтервалу $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Скористаємось формулою:

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$. За умовою $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$. Шукана ймовірність

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. Знайти числові характеристики випадкової величини *X*, яка задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \frac{x^2}{9} & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо диференціальну функцію розподілу:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \frac{2x}{9} & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання за формулою $M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$

$$M(X) = \int_0^3 x\frac{2x}{9}dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 2.$$

Дисперсію знайдемо за формулою $D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X),$ тому:

$$D(X) = \int_0^3 x^2\frac{2x}{9}dx - 2^2 = \frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^3 - 4 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}.$$

Середнє квадратичне відхилення обчислюємо за формулою $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}.$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0,705.$$

Змістовий модуль X. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Враховуючи, що між інтегральною та диференціальною функціями розподілу існує досить простий зв'язок ($f(x) = F'(x)$ і $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$), закон розподілу неперервної випадкової величини можна задати, вказуючи лише щільність розподілу $f(x)$.

Основними законами розподілу неперервних випадкових величин є рівномірний, показниковий і нормальний. Розглянемо їх.

<u>10.1. Рівномірний закон розподілу.</u>

<u>Означення 1.</u> *Неперервна випадкова величина X називається рівномірно розподіленою на відрізку* $[a, b]$, *якщо щільність розподілу її стала на цьому відрізку і має вигляд*

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le a;\\ \dfrac{1}{b-a} & при \quad a<x\le b;\\ 0 & при \quad x>b.\end{cases} \qquad (1)$$

Крива розподілу $y = f(x)$ має вигляд (рис. 1):

Раніше ми знайшли функцію розподілу $F(x)$:

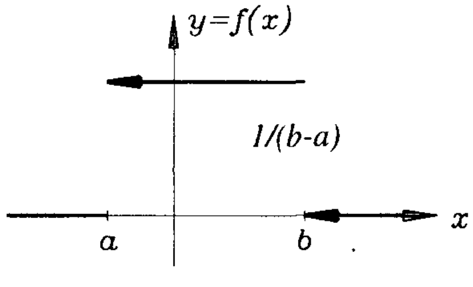


Рис.1

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x \le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & при \quad a < x \le b;\\ 1 & при \quad x > b.\end{cases} \qquad (2)$$

Її графік має вигляд (рис. 2):

Знайдемо числові характеристики рівномірно розподіленої неперервної величини.

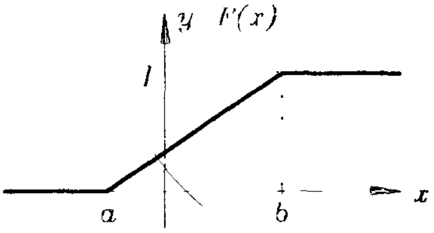


Рис. 2

<u>Теорема 1.</u> *Якщо неперервна випадкова величина X розподілена рівномірно на відрізку [a, b], то її числовими характеристиками є:*

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};\quad \sigma(X)=\frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}. \qquad (3)$$

<u>10.2. Показниковий закон розподілу.</u>

<u>Означення 2.</u> *Неперервна випадкова величина називається розподіленою за показниковим законом з параметром* $\lambda > 0$, *якщо її щільність розподілу ймовірності має вигляд:*

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0.\end{cases} \qquad (4)$$

Крива щільності розподілу зображена на рис. 3.

Функцію розподілу $F(x)$ знайдемо за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt = \left.\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right|_0^x = 1-e^{-\lambda x}.$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0.\end{cases} \qquad (5)$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 4.

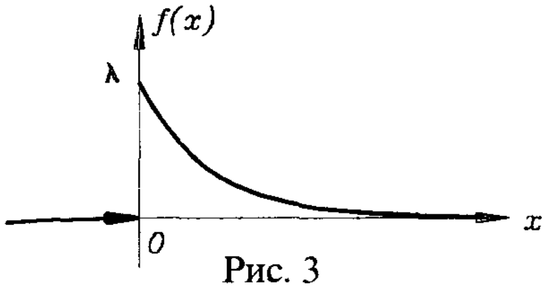


Рис. 3

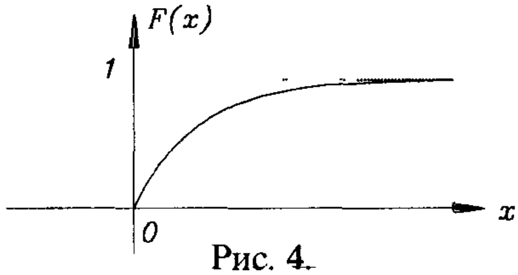


Рис. 4.

Зауваження 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} F\left(1-e^{-\lambda x}\right) = 1.$

Теорема 2. *Якщо неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом з параметром λ, то її числовими характеристиками є:*

$$1)\ M(X) = \frac{1}{\lambda};\quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \tag{6}$$

Зауваження 2. Ймовірність того, що випадкова величина X, яка розподілена за законом Пуассона, набуде значення з інтервалу (a, b), дорівнює:

$$P(a \le x < b) = \int_a^b f(x)dx \ = \lambda\int_a^b e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Зауваження 3. Функція надійності $R(t)$ визначає ймовірність безвідмовної роботи пристрою за час t і визначається формулою $R(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, λ – інтенсивність відмов.

Нехай T – тривалість безвідмовної роботи пристрою. Тоді функція розподілу випадкової величини T виражає ймовірність відмови за час t :

$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Очевидно, протилежною їй буде функція надійності $R(t) = 1 - F(t) = P(t < T) = e^{-\lambda t}$.

Зауважимо, що для показникового розподілу ймовірність безвідмовної роботи за час t залежить лише від тривалості t процесу, який ми спостерігаємо.

Таку властивість мають радіоапаратура, засоби автоматики тощо, тобто пристрої, для яких процес старіння і поступової втрати якості не відіграє істотної ролі.

10.3. Нормальний закон розподілу.

Означення 3. *Випадкова величина X називається розподіленою нормально з параметрами a, σ, якщо щільність її ймовірності має вигляд:*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in(-\infty,+\infty), \;\; a\in R, \;\; \sigma>0 \qquad (7)$$

а її інтеграл

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz\,. \qquad (8)$$

називається нормальною функцією розподілу.

Нормальний закон розподілу з параметрами a і σ позначають $N(a, \sigma)$.

Розкриємо зміст параметрів a і σ нормального розподілу.

Теорема 3. *Якщо неперервна випадкова величина X розподілена нормально, то її математичне сподівання дорівнює параметру a, а середнє квадратичне відхилення дорівнює σ.*

Зауваження 4. Функція щільності ймовірностей $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ називається ще функцією Гаусса, а розподіл, заданий нею – гауссівським розподілом.

Означення 4. *Графік нормального розподілу називається нормальною кривою або кривою Гаусса.*

Повне дослідження функції щільності ймовірностей $f(x)$ методами диференціального числення дає її графік, зображений на рис. 5.

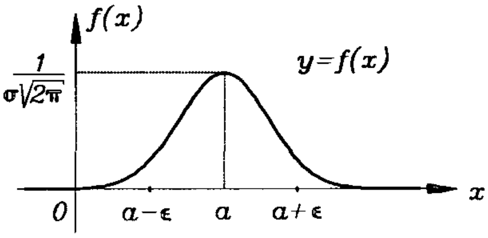


Рис. 5

Тут вісь Ox ($y = 0$) є горизонтальною асимптотою, а пряма $x = a$ – вісь симетрії.

Досліджуючи $f(x)$, знаходимо максимум функції $f(a) = \max\limits_{-\infty<x<\infty} f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$,

тому точка $x = a$ є модою випадкової величини (за означенням).

Властивості функції дозволяють дослідити вплив параметрів нормального розподілу на форму кривої Гаусса.

Так, зміна параметра a (математичного сподівання) не змінює форми кривої, а лише зсуває її вздовж осі Ox вправо або вліво в залежності від значення параметра a (рис. 6). Зміна ж параметра σ змінює форму кривої Гаусса.

Якщо σ збільшується, то $f_{max} = f(a)$ зменшується, тобто крива стискується. Якщо ж σ спадає, то крива Гаусса розтягується у додатному напрямі осі Oy. Отже, зі збільшенням дисперсії σ^2 ймовірності значень, віддалених від центра розподілу, зменшуються (рис. 6).

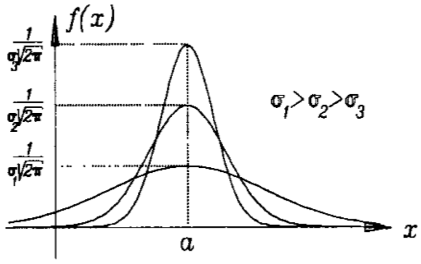


Рис. 6

Зауваження 5. Якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$, тобто $N(0, 1)$, то такий розподіл називається нормованим нормальним або стандартним розподілом. Функцією щільності у цьому випадку буде функція Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, графік якої симетричний відносно осі Oy, а інтеграл – функція Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (9)$$

Нагадаємо, що даний інтервал не виражається в елементарних функціях, тому значення функції Лапласа знаходяться з таблиць.

Встановимо зв'язок між функцією розподілу $F(x)$ і функцією Лапласа $\Phi(x)$. Згідно з рівністю (8) запишемо:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz=$$

$$=\left|\begin{matrix} t=\dfrac{z-a}{\sigma}, \qquad dz=\sigma dt, \\ z\to-\infty\Rightarrow t\to-\infty,\ \ z=x\Rightarrow t=\dfrac{x-a}{\sigma}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt+\int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2}+\int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt.$$

Отже,

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \tag{10}$$

де $\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)=\Phi(z)$ – функція Лапласа.

Графіки цих функцій зображені на рис. 7 і рис. 8.

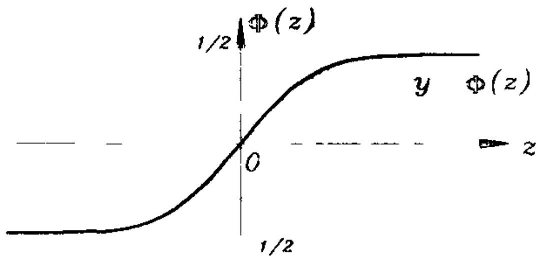


Рис. 7

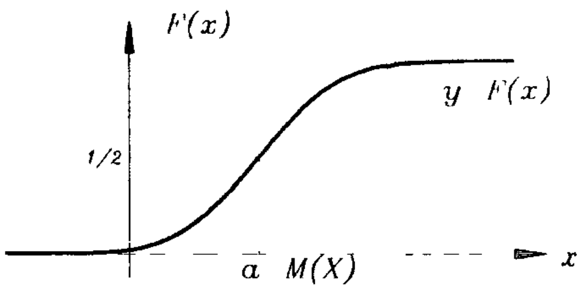


Рис. 8

($z=\frac{x-a}{\sigma}$, a – математичне сподівання X, σ – середнє квадратичне відхилення X).

<u>Означення 5.</u> *Число M_e називається медіаною, якщо виконується* *рівність* $\int\limits_{-\infty}^{M_e} f(x)dx = \int\limits_{M_e}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$ àáî $P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}$

Якщо X розподілена нормально, то медіана M_e дорівнює a.

<u>10.4. Ймовірність попадання випадкової величини</u> *X* <u>в інтервал</u> (α, β). <u>Правило трьох сигм.</u>

Використовуючи формулу $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$, а також рівність (9), одержимо формулу ймовірності того, що нормально розподілена випадкова величина X належатиме інтервалу (α, β):

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (11)$$

Обчислимо ймовірність відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання. Згідно з рівністю (11) і непарністю функції Лапласа $\Phi(x)$, знаходимо:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \qquad (12)$$

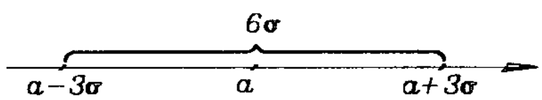
Покладемо $\varepsilon = 3\sigma$. Тоді

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0,49865 = 0,9971 \approx 1.$$

Отже:

Якщо випадкова величина X має нормальний розподіл, то ймовірність її відхилення від математичного сподівання, яке більше трьох середньоквадратичних відхилень, близька до нуля.

З цього випливає “<u>Правило 3σ</u>”. З ймовірністю, близької до одиниці, значення нормально розподіленої випадкової величини лежать в інтервалі довжиною 6σ і центром a.



Зокрема, якщо неперервна випадкова величина розподілена за стандартним законом $N(0, 1)$, то рівність (13) можна записати так:

$$P\left(|X| < 3\sigma\right) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 1 \qquad (13)$$

Отримане правило означає що результатами вимірювань з відхиленнями від математичного сподівання більше, ніж на три сигми, нехтуємо як грубими помилками. Така процедура дає змогу істотно підвищувати надійність емпіричних даних.

На практиці це правило використовують ще й так: якщо закон розподілу випадкової величини X невідомий, але $|X - a| < 3\sigma$, то можна припустити, що X розподілена нормально.

Розв'язування типових задач до змістового модуля Х.

1. Випадкова величина X має щільність розподілу $f(x)$, графік якої зображено на рис. 10.

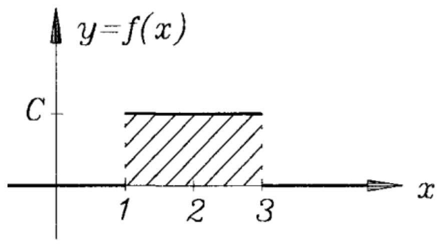


Рис. 10

Обчислити значення C. 2) Записати аналітичний вираз для $f(x)$; як називається такий закон розподілу? 3) Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік. 4) Знайти числові характеристики X. 5) Визначити ймовірність попадання випадкової величини X в інтервалі (0; 2).

<u>*Розв'язання.*</u> 1) З графіка функції $f(x)$ видно, що всі значення випадкової величини X знаходяться в інтервалі (1; 3). За властивістю щільності розподілу маємо $\int_1^3 Cdx = 1;\ Cx\Big|_1^3 = 1;\ C = \frac{1}{2}$ Зауважимо, що значення сталої C можна знайти з геометричних міркувань. Площа заштрихованого прямокутника з основою (1; 3) дорівнює одиниці, тому

$2C = 1;\ C = \dfrac{1}{2}$.

2) Аналітичний вираз для функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1; \\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad 1 < x \le 3; \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Отже, випадкова величина X розподілена рівномірно.

3) Функція розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини X задається формулою (2). У нашому випадку $a = 1$, $b = 3$, тому

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b; \\ 1 & \text{при} \quad x > b. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1; \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{при} \quad 1 < x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

4) Знайдемо математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}; \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5) Визначимо ймовірність попадання X в інтервал (0; 2):

$$P(0 < X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 0 \cdot dx + \int_1^2 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

2. НВВ X розподілена за законом, заданим щільністю ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ 0{,}04 \cdot e^{-0{,}04x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Знайти: 1) функцію показникового розподілу; 2) числові характеристики НВВ X; 3) ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу (1; 2).

Розв'язання. 1) Функція показникового розподілу знаходиться за формулою (5), в якій $\lambda = 0{,}04$:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0;\\ 1-e^{-0,04x} & при \quad x\ge 0.\end{cases}$$

2) Математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення X обчислимо, скориставшись формулами (6):

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,04}=25;\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=625;\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}=25.$$

3) Для обчислення ймовірності попадання X в інтервал (1, 2) застосуємо формулу $P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$. За умовою задачі a = 1, b = 2. Отже, шукана ймовірність $P(1<X<2)=e^{-0,04}-e^{-0,08}\approx 0,038$.

3. Середній відсоток виконання плану деякою групою підприємств складає 106%, середнє квадратичне відхилення σ = 9%. Вважаючи, що відсоток виконання плану цією групою підприємств підпорядкований нормальному закону, визначити відсоток підприємств:

1) які не виконують план; 2) які виконують план від 110% до 150%.

<u>*Розв'язання*</u>. Нехай НВВ X – відсоток виконання плану даною групою підприємств. X розподілена за нормальним законом з параметрами a = 106%,

σ = 9%. 1) Щоб визначити відсоток підприємств, які не виконують план, слід визначити ймовірність того, що виконання плану навмання вибраним підприємством виявиться в межах від 0% до 99,99%, тобто, що НВВ X набуде значення з інтервалу (0%; 99,99%). Ця ймовірність дорівнює

$$P(0<X<99{,}99)=\Phi\left(\frac{99{,}99-106}{9}\right)-\Phi\left(\frac{0-106}{9}\right)=\Phi\left(\frac{106}{9}\right)-\Phi(0{,}66)=0{,}5-0{,}2485=0{,}2515.$$

Таким чином, 25,15% підприємств даної групи не виконують план. 2) Щоб визначити відсоток підприємств, які виконують план від 110% до 150%, знайдемо ймовірність того, що НВВ X набуває значень з інтервалу (110; 150):

$$P(110 < X < 150) = \Phi\left(\frac{105-106}{9}\right) - \Phi\left(\frac{110-106}{9}\right) = \Phi(4{,}9) - \Phi(0{,}44) = 0{,}5 - 0{,}17 = 0{,}33.$$

Отже, 33% підприємств даної групи виконують план від 110% до 150%.

Змістовий модуль XI. Закони великих чисел.

11.1. Нерівність Чебишова.

Випадкова величина у результаті випробування може набути будь-якого зі своїх можливих значень, якого саме наперед передбачити неможливо. Здається, що оскільки ми знаємо дуже мало про кожну з випадкових величин, неможливо встановити властивості їх суми. Насправді це не так. Виявляється, що за деяких порівняно загальних умов сумарна поведінка досить великої кількості випадкових величин майже втрачає випадковість і набуває закономірності.

Умови, за яких здійснюється тенденція народження закономірностей з великої кількості випадковостей, розглядаються у так званих граничних теоремах, які об'єднуються загальною назвою “закону великих чисел”. Цей закон відіграє важливу роль у дослідженнях різних процесів, пов'язаних з масовим виробництвом.

Граничні теореми, що встановлюють граничні закони розподілу випадкових величин, об'єднують загальною назвою – центральна гранична теорема.

При доведенні граничних теорем, а також при розв'язуванні багатьох практичних задач, використовується нерівність Чебишова, до розгляду якої ми і перейдемо.

Теорема 1. *(Нерівність Чебишова) Якщо випадкова величина X* *має скінченну дисперсію D(X), то для будь-якого* $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ *виконується нерівність*

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (1)$$

Розглянемо дискретну випадкову величину X, задану таблицею розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	P_1	P_2	...	P_n

Події $|X - M(X)| < \varepsilon$ і $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ протилежні, тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці, тобто

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) + P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = 1. \qquad (2)$$

Зауважимо, що випадкова величина $(X - M(X))^2 \geq 0$ для всіх значень X. Враховуючи сказане і означення дисперсії $D(X)$, знаходимо:

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k\left(x_k - M(X)\right)^2 =$$

$$= \sum_{k:|x_k - M(X)| < \varepsilon} p_k\left(x_k - M(X)\right)^2 + \sum_{k:|x_k - M(X)| \geq \varepsilon} p_k\left(x_k - M(X)\right)^2 \geq$$

$$\geq \sum_{k:|x_k - M(X)| \geq \varepsilon} p_k\left(x_k - M(X)\right)^2 \geq \sum_{k:|x_k - M(X)| \geq \varepsilon} p_k\varepsilon^2 = \varepsilon^2 \sum_{k:|x_k - M(X)| \geq \varepsilon} p_k =$$

$$= \varepsilon^2 P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right)$$

Звідси випливає нерівність (1), а з урахуванням рівності (2), запишемо нерівність Чебишова в іншій формі:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

Нерівність Чебишова дозволяє оцінити ймовірності відхилень значень випадкової величини від свого математичного сподівання. Застосування нерівності Чебишова розглянемо на прикладі оцінки похибки наближення вимірюваної фізичної величини.

Нехай проводиться n незалежних вимірів деякої невідомої величини a. Похибки вимірювань δ_1, δ_2, ... , δ_n будемо вважати випадковими величинами. Припустимо, що $M(\delta_k) = 0$, $k = \overline{1,n}$, тобто вважаємо, що відсутня систематична (одного знаку) похибка приладу. Нехай $D(\delta_k) = b^2$, $k = \overline{1,n}$, тобто прилад забезпечує певну точність вимірів.

За значення невідомої величини a приймають, як правило, середнє арифметичне результатів вимірів. Тоді похибка при визначенні числа буде дорівнювати $\Delta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k$, тоді $D(\Delta_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(\delta_k) = \frac{nb^2}{n^2} = \frac{b^2}{n}$, а $M(\Delta_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(\delta_k) = 0.$

Будемо вимагати, щоб похибка Δ_n не перевищувала деякого $\varepsilon > 0$ з досить великою ймовірністю, наприклад,

$$P(|\Delta_n| < \varepsilon) \geq 0{,}99. \quad (4)$$

Тоді згідно з нерівністю Чебишова (3) запишемо:

$$P(|\Delta_n| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\Delta_n)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{b^2}{n\varepsilon^2}.$$

Отже, нерівність (4) буде виконуватися за умови

$$1 - \frac{b^2}{n\varepsilon^2} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \frac{b^2}{n\varepsilon^2} \leq 0{,}01, \text{ або } n \geq \frac{100b^2}{\varepsilon^2}.$$

Таким чином, ми отримали оцінку числа вимірювань, необхідних для досягнення заданої точності.

Нерівність Чебишова дає досить грубу оцінку. Її можна покращити або, застосувавши для виміру прилад підвищеної точності, або, збільшивши кількість вимірів n, урахувавши, що величина Δ_n має майже нормальний розподіл. Якщо ж про випадкову величину X нічого невідомо, крім $M(X)$ і $D(X)$, то оцінку, яку дає нерівність Чебишова, покращити неможливо. Теоретичне ж значення нерівності Чебишова досить значне.

11.2. Закон великих чисел і його наслідки.

Теорема 1. *(Закон великих чисел). Якщо випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n, попарно незалежні, мають скінченні математичні сподівання і дисперсії, і*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\left(X_k\right)=0, \tag{5}$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ виконується рівність:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\left(X_k\right)\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{6}$$

Зауваження 1. Якщо для випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n, ... виконані умови теореми 1, то говорять, що до них застосовний закон великих чисел.

Теорема 2. *(теорема Чебишова) Якщо випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n, ... попарно незалежні, мають скінченні математичні сподівання, і дисперсії, обмежені в сукупності*

$$D(X_k) \le C,\ k = \overline{1,\infty}, \tag{7}$$

де C – стала величина, то для довільного $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\left(X_k\right)\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{8}$$

Рівність (8) означає, що середнє арифметичне значень випадкових величин, коли кількість доданків нескінченно зростає, збіжна за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Зауваження 2. Для використання у практичній діяльності теореми Чебишова її можна сформулювати таким чином: якщо дисперсії незалежних випадкових величин обмежені, то з будь-якою точністю для досить великих n ймовірність наближеної рівності

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\left(X_k\right) \text{ близька до одиниці.} \qquad (9)$$

Наслідок. *Якщо випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n, ... однаково розподілені, попарно незалежні і мають скінченні дисперсії, то для довільного $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ справедлива рівність*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - a\right| < \varepsilon\right) = 1 \text{ , де } a = M(X_k),\ k = \overline{1,\infty}. \qquad (10)$$

Доведення випливає з теореми 2. Дійсно, якщо дисперсії $D(X_k)$, $k = \overline{1,\infty}$, скінченні і рівні між собою, то тим самим виконується нерівність (7).

Зауваження 4. Наслідок з теореми Чебишова служить обґрунтуванням середнього арифметичного в теорії обробки результатів вимірів.

Теорема 3. *(теорема Бернуллі) Нехай k – кількість успіхів у n випробуваннях Бернуллі, а p ($0 < p < 1$) – ймовірність успіху у кожному випробуванні. Тоді для довільного $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (11)$$

Теорема Бернуллі є класичним варіантом закону великих чисел, її доведення проведено раніше для дискретних випадкових величин.

Зауваження 5. Схема Бернуллі є математичною моделлю серії випробувань, що повторюються за однакових умов. У кожному випробуванні може настати подія A, яку ми назвали успіхом. Згідно теореми Бернуллі частота $^k/_n$ настання події A наближається до її ймовірності p.

Розв'язування типових задач до змістового модуля XI.

1. Ймовірність порушення герметичності банки при виробництві консервів дорівнює 0,3. На перевірку надійшло 600 банок консервів.

Оцінити ймовірність того, що число банок з порушенням герметичності буде 1) меншим 40; 2) не меншим 40.

Розв'язання. 1) Нехай дискретна випадкова величина X – число банок з порушенням герметичності. X розподілена за біномним законом. Тому $M(X) = n \cdot p = 600 \cdot 0{,}3 = 180$; $D(X) = n \cdot p \cdot q = 600 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 126$.

Скористаємось нерівністю Чебишова $P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Підставивши сюди $M(X) = 180$, $D(X) = 126$, $\varepsilon = 40$, оцінимо шукану ймовірність $P\left(\left|X - 180\right| < 40\right) \geq 1 - \frac{126}{1600} \approx 1 - 0{,}079 = 0{,}921$.

2) Події $|X - 180| < 40$ та $|X - 180| \geq 40$ протилежні, тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці.

Отже, $P(|X - 180| \geq 40) \leq 1 - 0{,}921 = 0{,}079$.

2. Дисперсія кожної з незалежних випадкових величин не перевищує 4. Визначити з ймовірністю, не меншою ніж 0,95, число таких величин, при якому відхилення їх середнього арифметичного від середнього арифметичного їх математичних сподівань буде меншим числа 0,5.

Розв'язання. За умовою задачі $C = 4$; $\varepsilon = 0{,}5$; $P = 0{,}95$.

Застосовуючи теорему Чебишова, знаходимо $1 - \frac{4}{n \cdot 0{,}25} \geq 0{,}95$. Звідси $0{,}05 \geq \frac{4}{n \cdot 0{,}25}$ або $n \geq \frac{4}{0{,}05 \cdot 0{,}25} = 320$. Таким чином, при $n \geq 320$ відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань буде меншим числа 0,5 з імовірністю, не меншою ніж 0,95.

Змістовий модуль XII. Системи випадкових величин. Закони розподілу та числові характеристики двовимірних випадкових величин.

12.1. Двовимірні випадкові величини.

Крім одновимірних випадкових величин вивчають випадкові величини, можливі значення яких визначені двома, трьома, ..., *n* числами. Такі випадкові величини називаються відповідно двовимірними, тривимірними, ..., *n*-вимірними випадковими величинами.

Означення 1. *Сукупність випадкових величин* (*X, Y*)*, які розглядаються одночасно, називається системою двох випадкових величин.*

Аналогічно можна означити систему *n* випадкових величин.

Геометрично двовимірну випадкову величину можна зобразити як випадкову точку *M*(*X*; *Y*) на площині *Oxy*, або як випадковий вектор $\overrightarrow{OM}(X;Y)$ (рис. 1).

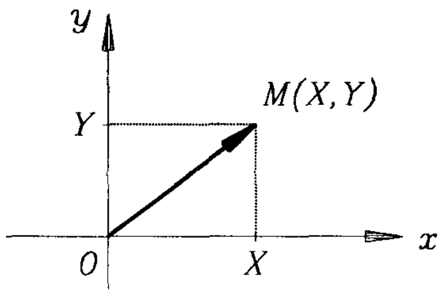


Рис. 1

Двовимірні величини, як і одновимірні, бувають дискретними і неперервними.

Означення 2. *Двовимірна випадкова величина* (*X*; *Y*) *називається дискретною, якщо її компоненти X та Y є дискретними випадковими величинами.*

Означення 3. *Двовимірна випадкова величина* (*X*, *Y*) *називається неперервною, якщо її компоненти X та Y є неперервними випадковими величинами.*

12.2. Закон розподілу ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини.

Означення 4. *Законом розподілу ймовірностей двовимірної дискретної величини* (*X*, *Y*) *називається перелік її можливих значень і* *відповідних їм ймовірностей.*

Закон розподілу двовимірної випадкової величини задають, як правило, у вигляді таблиці з двома входами:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
y_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

(x_i, y_j) $(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m})$ – значення двовимірної випадкової величини, p_{ji} = $= P(x_i, y_j)$ – відповідні їм ймовірності. У першому рядку таблиці записані усі можливі значення компоненти X, у першому стовпчику – компоненти Y. Усі події в таблиці несумісні і утворюють повну групу, тому справедлива рівність:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ji} = 1. \tag{1}$$

Закон розподілу двовимірної випадкової величини дозволяє знайти закони розподілу кожної з компонент. Дійсно, події (x_i, y_1), (x_i, y_2), ..., (x_i, y_m) несумісні, тому ймовірність $P(x_i)$ того, що випадкова величина X набуде значення x_i, за теоремою додавання ймовірностей буде дорівнювати

$$P(x_i) = P(X = x_i) = P(x_i, y_1) + P(x_i, y_2) + \ldots + P(x_i, y_m) = \sum_{j=1}^{m} p_{ji},\ i = \overline{1,n},$$

тобто сумі ймовірностей, розміщених в i-му стовпчику.

Аналогічно (за теоремою додавання ймовірностей) можна записати закон розподілу для компоненти Y: $P(y_i) = P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ji},\ j = \overline{1,m}$,

тобто сумі ймовірностей j-го рядка таблиці.

Обернене твердження в загальному випадку не має місця, оскільки при підсумовуванні інформація про окремі доданки зникає.

12.3. Функція розподілу двовимірної випадкової величини та її властивості.

Означення 5. *Інтегральною функцією розподілу двовимірної випадкової величини* (X, Y) *називається функція* $F(x, y)$, *яка визначає для кожної пари чисел* (x, y) *ймовірність виконання нерівностей* $X < x$, $Y < y$, *тобто*

$$F(x, y)= P(X < x, Y < y), x \in (-\infty; \infty), y \in (-\infty; \infty). \quad (2)$$

Геометрично рівність (2) означає: $F(x, y)$ є ймовірність того, що випадкова точка $M(X; Y)$ попаде у нескінченний сектор з вершиною (x, y) і розміщений нижче та лівіше цієї вершини (рис. 2).

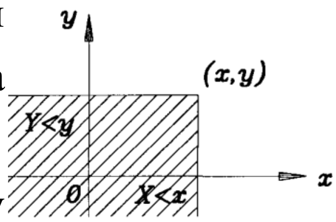


Рис. 2

Властивості інтегральної функції розподілу $F(x, y)$ двовимірної величини аналогічні властивостям функції розподілу одновимірної випадкової величини X.

Fl°. $0 \le F(x, y) \le 1$ (за означенням).

F2°. $F(x, y)$ – неспадна функція за кожним з аргументів.

F3°. Для функції $F(x, y)$ мають місце граничні співвідношення:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$ (ймовірності неможливих подій);

б) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$ (ймовірність достовірної події).

F4°. Знаходження одновимірних характеристик за двовимірними:

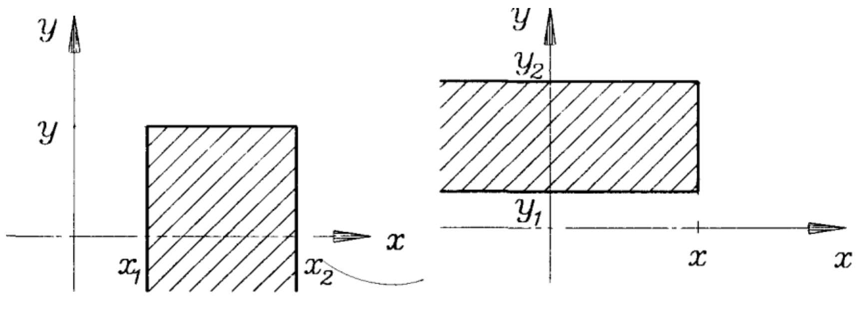
а) $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = F_1(x)$ – функція розподілу компоненти X;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(y)$ – функція розподілу компоненти Y.

F5°. Ймовірність попадання випадкової точки в півсмугу знаходиться за формулами (рис. 3а, 3б):

а) $P(x_1 < X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$;

b) $P(X < x, y_1 < Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1)$.



а) б)

Рис. 3

F6°. Ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у прямокутник: $(x_1 \le X \le x_2; y_1 \le Y \le y_2)$ знаходиться за формулою (рис. 4):

$$P(x_1 \le X \le x_2; y_1 \le Y \le y_2) =$$
$$= (F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)) - (F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1))$$

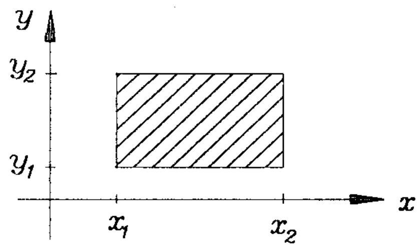


Рис. 4

F6°. Функція розподілу неперервна зліва по кожному зі своїх аргументів.

12.4. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини та її властивості.

Означення 6. *Диференціальною функцією розподілу неперервної двовимірної випадкової величини або щільністю* (X, Y) *називається друга мішана частинна похідна від інтегральної функції розподілу* $F(x, y)$:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \begin{matrix} x \in (-\infty, \infty); \\ y \in (-\infty, \infty). \end{matrix} \qquad (3)$$

Геометрично щільність $f(x, y)$ можна трактувати як деяку поверхню розподілу.

Основними властивостями щільності є:

*f*1°. $f(x, y) \geq 0$.

*f*2°. $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$

*f*3°. а) $f_1^{(x)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ *щільність розподілу компоненти X;*

б) $f_2^{(y)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ *щільність розподілу компоненти Y.*

*f*4°. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$.

*f*5°. *Ймовірність попадання випадкової точки в довільну двовимірну область D знаходиться за формулою*

$$P(X,Y)=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy\,.$$

12.5. Залежні та незалежні двовимірні випадкові величини. Умовний розподіл.

За означенням дві випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набуде інша.

Теорема 1. *Для того, щоб випадкові величини X та Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб інтегральна функція розподілу F(x, y) дорівнювала добутку функцій розподілу компонент, тобто:*

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \tag{4}$$

Наслідок. *Для того, щоб неперервні випадкові величини X та Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб диференціальна функція розподілу f(x, y) дорівнювала добутку диференціальних функцій компонент, тобто:*

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{5}$$

Зауваження. Рівності (4) та (5) можна вважати означенням незалежності компонент X та Y двовимірної випадкової величини (X, Y).

Далі розглянемо двовимірну випадкову величину (X, Y), компоненти X та Y якої залежні. Як відомо, для залежних випадкових подій A і B справедлива рівність

$$P_A(B)=P(AB) / P(A).$$

Аналогічна рівність має місце і для двовимірних випадкових величин.

Розглянемо дискретну двовимірну випадкову величину (X, Y). Нехай можливі значення компонент такі: $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_m$.

Позначимо умовну ймовірність того, що X набуде значення x_i за умови, що $Y = y_j$, через $P(x_i / y_j)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Означення 7. *Для випадкової двовимірної величини* (X, Y) *умовним розподілом ймовірностей компоненти X за умови, що подія $Y = y_j$ настала, називається множина умовних ймовірностей* $P(x_i / y_j)$, $i = \overline{1,n}$ *, причому*

$$P(x_i / y_j) = P(x_i, y_j) / P(y_j), \; i = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

Аналогічно визначається умовний розподіл ймовірностей компоненти Y.

Теорема 2. *Сума ймовірностей умовного розподілу дорівнює одиниці.*

Цю властивість умовних розподілів використовують для контролю обчислень.

Нехай тепер (X, Y) – неперервна двовимірна випадкова величина.

Означення 8. *Умовною щільністю* $\varphi(x/y)$ *розподілу компоненти X за умови $Y = y$ називається відношення щільності розподілу* $f(x, y)$ *двовимірної випадкової величини* (X, Y) *до щільності розподілу* $f_2(y)$ *компоненти Y:*

$\varphi(x/y) = f(x,y) / f_2(y)$, $f_2(y) \neq 0$.

Аналогічно визначається умовна щільність компоненти Y за умови $X = x$ рівністю $\psi(y/x) = f(x, y) / f_1(x)$, $f_1(x) \neq 0$.

Звісно, що $\varphi(x/y) \geq 0$, $\psi(y/x) \geq 0$, а також $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x/y)dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y/x)dy = 1$.

12.6. Числові характеристики двовимірної випадкової величини.

Крім уже відомих числових характеристик $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ та інших, які характеризують кожну компоненту окремо, для двовимірної випадкової величини (X, Y) вводять кореляційний момент μ_{xy} і коефіцієнт кореляції r_{xy}, які характеризують зв'язок між X та Y.

Означення 9. *Кореляційним моментом (коваріацією) випадкових величин X та Y називається величина*

$\mu_{xy} = M((X - M(X))(Y - M(Y)))$ *або*

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y). \tag{7}$$

З означення кореляційного моменту випливають його властивості.

μ1⁰. Якщо X і Y незалежні, то $\mu_{xy} = 0$.

Дійсно, $M(XY) = M(X)M(Y)$,тому $\mu_{xy} = 0$.

Зауваження. Якщо $\mu_{xy} = 0$, то звідси не завжди випливає незалежність X і Y.

μ2⁰. $|\mu_{xy}| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$, *де* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ та $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$ – середньоквадратичні відхилення компонент.

Означення 10. *Коефіцієнтом кореляції випадкових величин X та Y називається величина*

$$r_{xy} = \mu_{xy} / \sigma_x\sigma_y. \tag{8}$$

Безпосередньо із означення випливає, що r_{xy} – безрозмірна величина, така, що $|r_{xy}| \leq 1$.

Зауваження. Якщо $r_{xy} \neq 0$, то випадкові величини X та Y корельовані, а якщо $r_{xy} = 0$, то некорельовані. Незалежні величини завжди некорельовані ($\mu_{xy} = r_{xy} = 0$).

Зауваження. Математичні сподівання двовимірної випадкової величини (X, Y) характеризують її координати центру розподілу:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy; \quad m_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy.$$

Дисперсії $D(X)$ та $D(Y)$ характеризують розсіювання випадкової точки (X, Y) вздовж координатних осей Ox та Oy, відповідно, і знаходяться за формулами:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy - m_x^2; \quad D_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)dxdy - m_y^2.$$

Означення 11. *Умовним математичним сподіванням компоненти Y, обчисленої за умови, що компонента X набула значення x, називається величина* $M(Y/X = x) = \sum_{i=1}^{m} y_i P(y_i/x)$.

Аналогічно, $M(X/Y = y) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i/y)$.

Розв'язування типових задач до змістового модуля XII.

1. Знайти закони розподілу складових двовимірної випадкової величини (X, Y), закон розподілу якої задано таблицею:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,2	0,3
y_2	0,2	0,05	0,15

Розв'язання. Враховуючи викладене вище, запишемо закони розподілу компонент X і Y:

Y	y_1	y_2
P	0,6	0,4

X	x_1	x_2	x_3
P	0,3	0,25	0,45

Контроль: 0,3 + 0,25 + 0,45 = 1; 0,6 + 0,4 = 1.

Розрахунки ймовірностей такі: $P(x_1) = 0,1 + 0,2 = 0,3$;
$P(x_2) = 0,2 + 0,05 = 0,25$; $P(x_3) = 0,3 + 0,15 = 0,45$;

$P(y_1) = 0,1 + 0,2 + 0,3 = 0,6$; $P(y_2) = 0,2 + 0,05 + 0,15 = 0,4$.

2. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y} & при \quad x\ge 0,\, y\ge 0;\\ 0 & при \quad x<0 \text{ або } y<0.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу системи.

<u>*Розв'язання.*</u> Скористаємося формулою (3) $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\ln 3\cdot\left(3^{-x}-3^{-x-y}\right);\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}.$$

Шукана щільність розподілу має вигляд:

$$f(x,y)=\begin{cases}\ln^2 3\cdot 3^{-x-y} & при \quad x\ge 0,\, y\ge 0;\\ 0 & при \quad x<0 \text{ або } y<0.\end{cases}$$

3. Задано щільність розподілу системи випадкових величин (X, Y) $f(x,y)=\dfrac{12}{\pi^2\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)}$. Знайти функцію розподілу системи.

<u>*Розв'язання.*</u> Скористаємось властивістю ***f*2°** щільності розподілу $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta$. Підставивши у неї заданий в умові вираз для щільності розподілу, знайдемо шукану функцію розподілу системи:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{12}{\pi^2\left(9+\xi^2\right)\left(16+\eta^2\right)}d\xi d\eta=\frac{12}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{d\xi}{9+\xi^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{d\eta}{16+\eta^2}=$$

$$=\frac{12}{\pi^2}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{x}\frac{d\xi}{9+\xi^2}\lim_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{y}\frac{d\eta}{16+\eta^2}=\frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty} arctg\frac{\xi}{3}\Bigg|_a^x\cdot\lim_{b\to-\infty} arctg\frac{\eta}{4}\Bigg|_b^y=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(arctg\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\left(arctg\frac{y}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{4}+\frac{1}{2}\right).$$

Отже, $F(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{2}\right)$.

4. У крузі $x^2 + y^2 \le R^2$ двовимірна щільність ймовірності $f(x,y)=C\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)$, а зовні круга $f(x, y) = 0$.

Знайти: а) сталу C; б) ймовірність попадання випадкової точки

(X, Y) у круг з радіусом $r = 1$ і центром у початку координат, якщо $R = 2$.

Розв'язання. а) За властивістю ***f*4°** двовимірної щільності ймовірності запишемо:

$$\iint_D C\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = 1.$$

Звідси знаходимо C:

$$C = \frac{1}{\iint_D \left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy}.$$

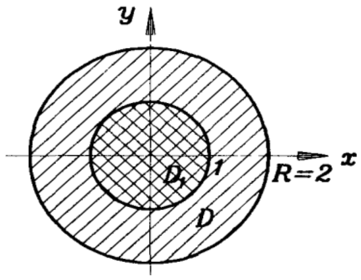


Рис. 5

Застосувавши полярні координати $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, обчислюємо:

$$C = \frac{1}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R-\rho)\rho d\rho} = \frac{1}{2\pi\left(R\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^R} = \frac{3}{\pi R^3}.$$

б) За умовою $R = 2$, тому $C = 3/8\pi$, а щільність

$$f(x,y) = \frac{3}{8\pi\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)}.$$

Ймовірність попадання випадкової величини (X, Y) в круг з радіусом $r = 1$ і центром у початку координат (область D_1) знаходимо за властивістю ***f*5°** (рис. 5):

$P((X,Y)\in D_1) = \frac{3}{8\pi}\iint_{D_1}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, або у полярних координатах

$$P(X,Y) = \frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2-\rho)\rho d\rho = \frac{3}{8\pi}2\pi\left(2\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Змістовий модуль XIII. Функції випадкового аргументу.

13.1. Функція випадкового аргументу та її розподіл.

Означення 1. *Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y,* *то Y називається функцією випадкового аргументу X і позначається* $Y=\varphi(X)$.

Розглянемо два випадки розподілу функції за відомим розподілом аргумента.

1. Аргумент X – дискретна випадкова величина.

А) Якщо різним можливим значенням аргумента *X* відповідають різні можливі значення функції *Y*, то ймовірності відповідних значень *X* та *Y* рівні між собою, тобто $P(x_k)=P(y_k),\ k=\overline{1,n}$.

Б) Якщо різним можливим значенням *X* відповідають значення *Y*, серед яких є рівні між собою, то потрібно додати ймовірності тих значень *X*, які повторюються.

2. Аргумент X – неперервна випадкова величина, задана щільністю розподілу $f(X)$.

<u>Теорема 1.</u> *Якщо щільність розподілу* $y=f(x)$ *– диференційовна строго монотонна функція, оберненою до якої є функція* $x=\psi(y)$, *то щільність розподілу* $g(y)$ *випадкової величини Y знаходиться за допомогою рівності*

$$g(y)=f(\psi(y))|\psi'(y)|. \tag{1}$$

<u>Теорема 2.</u> *Якщо випадкові величини X_1 та X_2 незалежні, то незалежними є також випадкові величини* $Y_1=\varphi_1(X_1)$, $Y_2=\varphi_2(X_2)$.

<u>13.2. Математичне сподівання функції однієї випадкової величини.</u>

Нехай задано закон розподілу випадкової величини *X*. Потрібно знайти математичне сподівання функції $Y=\varphi(X)$.

Розглянемо два випадки.

1. Аргумент *X* – дискретна випадкова величина з можливими значеннями x_1, x_2, …, x_n, ймовірності яких відповідно дорівнюють p_1,

p_2, …, p_n. Очевидно, Y – теж дискретна випадкова величина з можливими значеннями $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, …, $y_n = \varphi(x_n)$. З події – "випадкова величина X набула значення x_i" випливає подія – "випадкова величина Y набула значення $\varphi(x_i)$", тому ймовірності можливих значень Y відповідно дорівнюють p_1, p_2, …, p_n.

Тоді за означенням математичного сподівання дискретної випадкової величини знаходимо:

$$M(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \,. \tag{2}$$

2. Нехай аргумент X неперервна випадкова величина, яка задана щільністю розподілу $f(X)$. Тоді математичне сподівання функції $\varphi(X)$ знаходимо за формулою

$$M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \,. \tag{3}$$

Зокрема, якщо всі можливі значення X належать інтервалу $(a; b)$, то

$$M(\varphi(X)) = \int_{a}^{b} \varphi(x) f(x) dx \,. \tag{4}$$

Зауваження 1. Для відшукання математичного сподівання функції $Y = \varphi(X)$ спочатку можна знайти щільність розподілу $g(Y)$ випадкової величини Y, а потім застосувати формулу: $M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot g(y) dy$.

13.3. Дисперсія функції однієї випадкової величини.

За означенням дисперсія знаходиться за формулою $D(Y) = M(Y - M(Y))^2$. Для обчислення дисперсії доцільно користуватися рівністю $D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y)$. Якщо в цю рівність замість випадкової величини Y підставити $Y = \varphi(X)$, то одержимо формулу для обчислення дисперсії функції $\varphi(X)$:

$$D(\varphi(X)) = M(\varphi^2(X)) - M^2(\varphi(X)). \tag{5}$$

Для дискретних випадкових величин X рівність (5) має вигляд:

$$D(\varphi(X)) = \sum_{k=1}^{n} p_k \varphi^2(x_k) - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \varphi(x_k)\right)^2. \qquad (6)$$

Якщо випадкова величина X, можливі значення якої розподілені на всій числовій осі, неперервна, то

$$D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx\right)^2, \qquad (7)$$

де $f(x)$ – щільність розподілу величини X.

Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини X знаходяться в інтервалі $(a; b)$, то рівність (7) матиме вигляд

$$D(\varphi(X)) = \int_{a}^{b} \varphi^2(x) f(x) dx - \left(\int_{a}^{b} \varphi(x) f(x) dx\right)^2. \qquad (8)$$

Зауваження 2. Якщо відома щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y, всі можливі значення якої належать інтервалу (c, d), то

$$D(Y) = \int_{c}^{d} y^2 g(y) dy - (M(Y))^2. \qquad (9)$$

13.4. Функція двох випадкових аргументів. Розподіл суми незалежних випадкових величин.

Означення 2. *Якщо кожній парі випадкових величин X та Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z, то Z називається функцією двох випадкових аргументів X та Y:* $Z = \varphi(X, Y)$.

Розглянемо два випадки.

1. Нехай X та Y – дискретні незалежні випадкові величини. Для того, щоб скласти закон розподілу функції $Z = X + Y$, потрібно знайти всі можливі значення Z та їх ймовірності.

2. Нехай X та Y – неперервні випадкові величини. Якщо X та Y незалежні випадкові величини, то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z = X + Y$ (за умови, що щільність хоча б одного із аргументів задана на

інтервалі $(-\infty,+\infty)$ однією формулою) може бути знайдена за допомогою рівності

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx \qquad (10)$$

або $$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy, \qquad (11)$$

де f_1, f_2 – щільності розподілу аргументів.

<u>Зауваження.</u> Якщо можливі значення аргументів невід'ємні, то $g(z)$ знаходять за формулами $g(z)=\int_0^z f_1(x)f_2(z-x)dx$ або $g(z)=\int_0^z f_1(z-y)f_2(y)dy$.

Щільність розподілу суми незалежних випадкових величин називається згорткою.

<u>Означення 3.</u> *Закон розподілу ймовірностей називається стійким, якщо згортка таких законів є той же закон.*

<u>Теорема 3.</u> *Якщо випадкові величини X та Y незалежні і розподілені відповідно за нормальними законами $N_1(a_1,\sigma_1)$ і $N_2(a_2,\sigma_2)$, то випадкова величина Z = X + Y буде розподілена теж за нормальним законом $N\left(a_1+a_2,\sqrt{\sigma_1+\sigma_2}\right)$.*

<u>Зауваження.</u> Закон Пуассона також має властивість стійкості відносно суми.

Розв'язування типових задач до змістового модуля XIII.

1. Випадкова величина X розподілена за законом Коші $f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=X^3+2$.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки функція $Y=X^3+2$ диференційована та строго зростаюча, можна застосувати формулу

$$g(y)=f(\psi(y))\left|\psi'(y)\right|, \qquad (*)$$

де $\psi(y)$ – функція, обернена до функції $y = x^3 + 2$.

Знайдемо $\psi(y)$: $\psi(y) = x = (y-2)^{1/3}$.

Знайдемо $f(\psi(y))$: $f(\psi(y)) = \dfrac{1}{\pi\left(1+(y-2)^{\frac{2}{3}}\right)}$. (**)

Знайдемо похідну $\psi'(y):\psi'(y) = \left((y-2)^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}(y-2)^{-\frac{2}{3}}$.

Очевидно, що $|\psi'(y)| = \dfrac{1}{3(y-2)^{\frac{2}{3}}}$. (***)

Після підстановки (**) і (***) у (*) знайдемо шукану щільність розподілу:

$$g(y) = \frac{1}{\pi\left(1+(y-2)^{\frac{2}{3}}\right)} \cdot \frac{1}{3(y-2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\pi\left((y-2)^{\frac{2}{3}} + (y-2)^{\frac{4}{3}}\right)}.$$

2. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $(0;2\pi)$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \cos X$.

<u>*Розв'язання.*</u> Щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X в інтервалі $(0;2\pi)$ задається формулою $f(x) = \dfrac{1}{2\pi - 0} = \dfrac{1}{2\pi}$; зовні цього інтервалу $f(x) = 0$.

З рівняння $y = \cos x$ знайдемо обернену функцію $x = \psi(y)$. Оскільки в інтервалі $(0;2\pi)$ функція $y = \cos x$ не монотонна, розіб'ємо цей інтервал на інтервали $(0;\pi)$ та $(\pi;2\pi)$, в яких ця функція монотонна. В інтервалі $(0;\pi)$ обернена функція $\psi_1(y) = \arccos y$; в інтервалі $(\pi;2\pi)$ обернена функція $\psi_2(y) = \arccos y$. Шукану функцію розподілу знайдемо з рівності

$$g(y) = f(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| + f(\psi_2(y)) \cdot |\psi_2'(y)|. \quad (*)$$

Знайдемо похідні обернених функцій:

$\psi_1'(y) = (\arccos y)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$; $\psi_2'(y) = (-\arccos y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Знайдемо модулі похідних:

$$\left|\psi_1'(y)\right| = \left|\psi_2'(y)\right| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad (**)$$

Враховуючи, що $f(x) = \frac{1}{2\pi}$, дістанемо:

$$f\left(\psi_1(y)\right) = f\left(\psi_2(y)\right) = \frac{1}{2\pi}. \qquad (***)$$

Після підстановки (**), (***) у (*) будемо мати

$$g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Оскільки $y = \cos x$, причому $0 < x < 2\pi$, то $-1 < y < 1$. Таким чином, в інтервалі
(– 1; 1) шукана щільність розподілу $g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, зовні цього інтервалу $g(y) = 0$.

3. Неперервну випадкову величину задано щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 1, \\ x - 1/2 & \textit{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0 & \textit{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію функції $y = \varphi(X) = \sqrt{X}$.

<u>*Розв'язання.*</u> 1) Для обчислення математичного сподівання функції $\varphi(X)$ скористаємось формулою (4): $M\left(\varphi(X)\right) = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx$.

Підставляючи $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x - \frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 2$, дістанемо:

$$M\left(\sqrt{X}\right) = \int_1^2 \sqrt{x}\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \int_1^2 \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^2 = 1{,}253.$$

2) Для знаходження дисперсії функції $\varphi(X)$ скористаємося формулою (8):

$D(\varphi(X))=\int\limits_a^b \varphi^2(x)\,f(x)\,dx-\left(M(\varphi(X))\right)^2$. Після підстановки в неї $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{2}$, $a=1$, $b=2$, $M(\varphi(X))=1,253$ дістанемо:

$$D\left(\sqrt{X}\right)=\int\limits_1^2 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx-(1,253)^2=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2-1,571=0,013.$$

Частина III. Елементи математичної статистики.

Змістовий модуль XIV. Варіаційні ряди та їхні характеристики.

Теорія ймовірностей вивчає ймовірнісні характеристики випадкових явищ. До таких характеристик відносяться ймовірності випадкових подій, функції розподілу випадкових величин, математичне сподівання, дисперсія та ін. На практиці значення ймовірнісних характеристик звичайно невідомі і їх потрібно визначити згідно зі спостереженнями (як правило, це спостереження випадкових величин). Такого роду задачі й становлять предмет математичної статистики.

Нехай випадкова величина ξ пов'язана з певним експериментом і має функцію розподілу $F(x)$. Розглянемо n незалежних повторень цього експерименту й позначимо через $x_1, x_2, ..., x_n$ по порядку одержання сукупність значень випадкової величини ξ. Набір значень $x_1, x_2, ..., x_n$ називається *вибіркою об'єму* n, або *простою вибіркою об'єму* n, взятою із генеральної сукупності випадкової величини ξ з функцією розподілу $F(x)$.

Впорядкована за величиною послідовність вибіркових значень $x_1^{(n)} \le x_2^{(n)} \le ... \le x_n^{(n)}$ називається *варіаційним рядом*. Рівні між собою члени вибірки нумеруються у довільному порядку. Ця дія називається *ранжуванням статистичних даних*.

Варіаційний ряд – це початкова форма дослідження даних.

Різні значення x_i у вибірці називаються *варіантами*, n_i – число появ варіанти x_i у вибірці – *частотою варіанти*, а відношення до об'єму вибірки $\frac{n_i}{n} = w_i$ – *відносною частотою*. Очевидно, що $\sum_i n_i = n$, $\sum_i w_i = 1$.

Нехай вибірка має лише r варіант $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ з відносними частотами $w_1, w_2, \ldots, w_r$. Таблиця називається *статистичним розподілом вибірки*.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_r
w_i	w_1	w_2	$\ldots$	w_r

Вона є законом розподілу дискретної випадкової величини, яку позначимо через ξ^*, де $w_i = P(\xi^* = x_i)$. Функція розподілу $F_n(x)$ випадкової величини ξ^* називається *емпіричною функцією розподілу вибірки*. Легко бачити, що $F_n(x) = \mu / n$, де n – об'єм вибірки, μ – число членів вибірки, які менші x, тобто $F_n(x)$ є відносною частотою появ події $A = \{\xi < x\}$ у серії із n незалежних випробувань, де $p = P(A) = P(\xi < x) = F(x)$ – ймовірність появи події A у кожному випробуванні. За теоремою Бернуллі для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Таким чином, емпірична функція розподілу вибірки є статистичним наближенням функції розподілу генеральної сукупності $F(x)$, при цьому похибка тим менша, чим більший об'єм вибірки n.

Розв'язування типових задач до змістового модуля XIV.

1. У цеху працює 100 робітників. Для вивчення продуктивності праці навмання вибрали 10 робітників і підрахували кількість деталей, які виготовляє кожний із них за зміну. Одержали вибірку 18, 22, 22, 24, 20, 22, 18, 22, 22, 22. Знайти варіаційний ряд; статистичний розподіл вибірки; емпіричну функцію розподілу.

Позначимо через ξ – кількість деталей, які виробляє один робітник цеху за зміну. Це випадкова величина, яка кожному робітникові ставить у відповідність кількість деталей, які він виробляє за зміну. Таким чином, маємо вибірку об’єму 10 із сукупності значень випадкової величини ξ (генеральна сукупність об’єму 100). Проведемо ранжування вибірки й одержимо варіаційний ряд 18, 18, 20, 22, 22, 22, 22, 22, 22, 24. Легко бачити, що варіантами вибірки є числа 18, 20, 22, 24 відповідно з частотами 2, 1, 6, 1 і відносними частотами $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{1}{10}$.

Отже, одержали статистичний розподіл вибірки:

x_i	18	20	22	24
w_i	0,2	0,1	0,6	0,1

Емпірична функція розподілу вибірки $F_n(x)$ (як функція розподілу випадкової дискретної величини ξ^*) є ступеневою, яка здійснює стрибки лише у точках значень варіант x_i на величину w_i, при цьому $F_n(x)$ = 0, якщо x не більше найменшого варіанта; $F_n(x)$ = 1, якщо x більше найбільшого варіанта. Тому $F_n(x)$ дорівнює 0 при $x \le 18$; 0,2 при $18 < x \le 20$; 0,3 при $20 < x \le 22$; 0,9 при $22 < x \le 24$; 1 при $x > 24$.

Для неперервної випадкової величини ξ зі щільністю розподілу $f(x)$ варіанти вибірки можуть відрізнятися на як завгодно малу величину. На практиці часто в таких випадках перегруповують вибірки. Для цього інтервал, який містить вибірку об’єму n, розбивають інтервалами довжиною h, при цьому індивідуальні вибіркові значення не приводяться, а даються лише частоти $n_i \left(\sum_i n_i = n \right)$, де n_i – число тих вибіркових значень, які потрапили в *i*-й інтервал розбиття. Ці дані подаються таблицями частот вибірки.

2. У цеху працює 2000 робітників. Для вивчення інтенсивності праці вибрали 500 робітників і підрахували час, який витрачає кожен із

них на обробку однієї деталі (див. табл.).

Час, витрачений на обробку однієї деталі (межі	Число робітників,	Час, витрачений на обробку однієї деталі (межі	Число робітників, n
2-4	42	8-10	205
4-6	73	10-12	26
6-8	154		

У таблиці п’ять інтервалів довжиною h = 2, n_1 = 42, n_2 = 73, n_3 = 154, n_4= = 205, n_5 = 26, n = $\sum_{i=1}^{5} n_i$ = 500.

При наявності таблиці частот вибірки доцільно побудувати гістограму, яка є статистичним наближенням щільності розподілу $f(x)$. Для цього у прямокутній системі координат на осі абсцис відкладають інтервали розбиття і на кожному з них будують прямокутник з висотою відповідно n_i / nh. Ламана лінія, яка обмежує згори побудовану фігуру, називається *гістограмою вибірки* (рис. 1).

Нехай $M\xi = m$, $D\xi = M(\xi - m)^2 = M\xi^2 - m^2$, $\sigma = \sqrt{D\xi}$ – математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності. Відповідні характеристики вибірки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ об’єму n – вибіркове середнє $\bar{x}$, вибіркова дисперсія s^2, вибіркове середнє квадратичне відхилення s визначаються рівностями

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2, \quad s = \sqrt{s^2}.$$

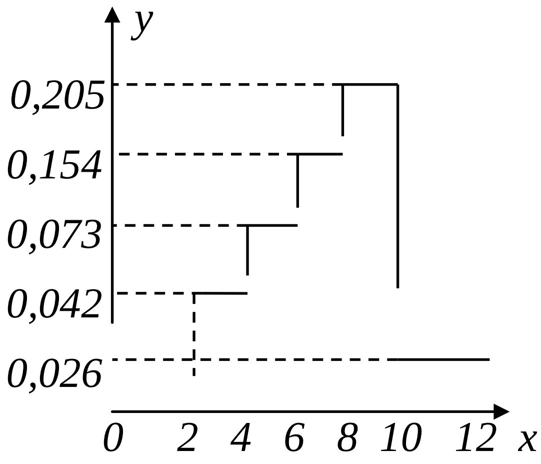


Рис. 1

Якщо за вибіркою побудувати її статистичний розподіл, то $\bar{x}=\sum_{i=1}^{r} x_i w_i$, $s^2=\sum_{i=1}^{r}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 w_i=\sum_{i=1}^{r} x_i^2 w_i-\left(\bar{x}\right)^2$, де $(x_1, x_2, ..., x_r)$ – усі можливі варіанти вибірки; w_i – відповідно їх відносні частоти (тобто $\bar{x}=M\xi^*,\ s^*=D\xi^*$, де ξ^* – дискретна випадкова величина, закон розподілу якої збігається з статистичним розподілом вибірки).

Якщо вибірка подана таблицею частот, то

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i n_i\,,\quad s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 n_i=\sum_{i=1}^{r} x_i^2 n_i-\left(\bar{x}\right)^2,$$

де x_i – середина *i*-го інтервалу, n_i – число вибіркових значень, які потрапили в *i*-й інтервал, r – число інтервалів, $n=\sum_{i=1}^{r} n_i$.

Зауваження. У випадку, коли крайні інтервали не замкнені, спочатку визначають межі крайніх інтервалів. Наприклад, доцільно вважати, що довжина першого інтервалу дорівнює довжині другого, а довжина останнього – довжині передостаннього.

3. В умовах першого прикладу знайти вибіркове середнє та вибіркову дисперсію продуктивності праці робітників цеху.

Використовуючи знайдений статистичний розподіл вибірки, за формулами одержимо

$$\overline{x}=\sum_{i=1}^{r}x_i w_i=18\cdot 0{,}2+20\cdot 0{,}1+22\cdot 0{,}6+24\cdot 0{,}1=21{,}2;$$

$$s^2=\sum_{i=1}^{r}x_i^2 w_i-\left(\overline{x}\right)^2=18^2\cdot 0{,}2+20^2\cdot 0{,}1+22^2\cdot 0{,}6+24^2\cdot 0{,}1-(21{,}2)^2=3{,}36.$$

4. В умовах другого прикладу знайти вибіркове середнє та вибіркове середнє квадратичне відхилення інтенсивності праці робітників цеху.

Знаходимо середини інтервалів: x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7, x_4 = 9, x_5 = 11. За формулами дістанемо

$$\overline{x}=\frac{1}{500}\left[3\cdot 42+5\cdot 73+7\cdot 154+9\cdot 205+11\cdot 26\right]=7{,}4;$$

$$s^2=\frac{1}{500}\left[3^2\cdot 42+5^2\cdot 73+7^2\cdot 154+9^2\cdot 205+11^2\cdot 26\right]-(7{,}4)^2=4{,}24.$$

Отже, вибіркове середнє $\overline{x}=7{,}4$, вибіркове середнє квадратичне відхилення $s=\sqrt{4{,}24}\approx 2{,}059$ хв.

5. При вимірюванні зросту (в сантиметрах) навмання вибраних 100 студентів одержали таблицю частот

Зріст	менше 158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	>178
Число студентів	10	14	26	28	12	8	2

Знайти вибіркове середнє зросту відібраних студентів.

У таблиці крайні інтервали не замкнені. Встановимо межі крайніх інтервалів. Останньому інтервалу передує інтервал від 174 до 178 см. Його інтервальна різниця дорівнює 4 см. Тому умовно будемо враховувати праву границю останнього інтервалу, що дорівнює 178 + 4 =182. Міркуючи аналогічно, одержимо, що початок першого інтервалу дорівнює 154. Далі знайдемо середини інтервалів x_1 = 156, x_2

$= 160$, $x_3 = 164$, $x_4 = 168$, $x_5 = 172$, $x_6 = 176$, $x_7 = 180$, n = = 100. Частоти відомі: $n_1 = 10$, $n_2 = 14$, $n_3 = 26$, $n_4 = 28$, $n_5 = 12$, $n_6 = 8$, $n_7 = 2$. Вибіркове середнє знаходимо за формулою

$$\bar{x} = \frac{156\cdot 10 + 160\cdot 14 + 164\cdot 26 + 168\cdot 28 + 172\cdot 12 + 176\cdot 8 + 180\cdot 2}{100} =$$
$$= \frac{1560 + 2240 + 4264 + 4704 + 2064 + 1408 + 360}{100} = 166\ см.$$

Змістовий модуль XV. <u>Статистичні оцінки параметрів розподілу.</u>

Емпірична функція розподілу та вибіркові середнє й дисперсія можуть бути оцінками відповідно функції розподілу генеральної сукупності ξ та її числових характеристик (якщо існують) $M\xi$ і $D\xi$. Розглянемо деякі загальні питання теорії оцінок.

У математичній статистиці відносно поняття вибірки припускається подвійне тлумачення: як сукупності незалежних однаково розподілених величин ξ_1, ξ_2, …, ξ_n (незалежних спостережень однієї випадкової величини ξ) і як сукупність реальних числових даних x_1, x_2, …, x_n, які одержані в конкретних незалежних повтореннях експерименту (тобто вектор (x_1, x_2, …, x_n) можна розглядати як одну конкретну реалізацію випадкового вектора (ξ_1, ξ_2, …, ξ_n)).

Нехай ξ_1, ξ_2, …, ξ_n – вибірка об'єму n із генеральної сукупності ξ з функцією розподілу $F(x,\theta)$, яка залежить від невідомого числового параметра θ.

Задача оцінки полягає у побудові за вибіркою наближеного значення невідомого параметра θ.

Оцінкою параметра θ називається довільна функція

$\theta^* = h_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ від вибірки ξ_1, ξ_2, …, ξ_n.

Зрозуміло, що можна розглядати різні оцінки одного й того ж параметра. Тому серед них шукають ті оцінки, які мають інтуїтивно бажані властивості: незміщеність, спроможність, ефективність.

Оцінка θ^* параметра θ називається *незміщеною*, якщо $M\theta^* = \theta$ (умова відсутності односторонніх систематичних похибок), *спроможною*, якщо для довільного $\varepsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} P\{|\theta^* - \theta| > \varepsilon\} = 0$ ("точність" оцінки збільшується при збільшенні об'єму вибірки) і *ефективною*, якщо вона має найменшу дисперсію серед усіх незміщених оцінок параметра θ (оцінка з найменшим середнім квадратичним відхиленням).

Зауважимо, що при обчисленні оцінки θ^* параметра θ за результатами конкретної вибірки замість випадкових величин ξ_1, ξ_2, …, ξ_n підставляють їх конкретні значення: $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, …, $\xi_n = x_n$ і одержують число $h_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, яке й беруть замість справжнього значення параметра θ.

Виявляється, що вибіркове середнє $\bar{x}$ і вибіркова дисперсія s^2 вибірки ξ_1, ξ_2, …, ξ_n із генеральної сукупності ξ, для якої існують математичне сподівання $M\xi$ і дисперсія $D\xi$, є спроможними оцінками відповідно $M\xi$ і $D\xi$, при цьому вибіркове середнє – незміщена оцінка, а вибіркова дисперсія – зміщена. Якщо "підправити" вибіркову дисперсію і взяти оцінку $s_1^2 = \dfrac{n}{n-1}s^2$, то вона буде теж спроможною, але вже незміщеною оцінкою дисперсії $D\xi$. Більше того, якщо генеральна сукупність ξ має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$, то вибіркове середнє буде ще й ефективною оцінкою, а незміщеною, спроможною, ефективною оцінкою дисперсії σ^2 $(\theta = \sigma^2)$ буде оцінка $\theta^* = h_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, де $h_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$, для обчислення якої необхідно знати $M\xi = a$.

Одним із методів одержання “хороших” оцінок є метод найбільшої правдоподібності. Нехай ξ_1, ξ_2, …, ξ_n – вибірка із генеральної сукупності ξ, яка має щільність розподілу $f(x,\theta)$. Функцією правдоподібності називається функція

$$L(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\theta)=f(\xi_1,\theta)\cdot f(\xi_2,\theta)\cdot...\cdot f(\xi_n,\theta).$$

Оцінкою найбільшої правдоподібності θ^* називається те значення параметра θ, при якому функція правдоподібності досягає максимуму при даних ξ_1, ξ_2, …, ξ_n.

Для дискретної випадкової величини функція правдоподібності визначається рівністю

$$L(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\theta)=p(\xi_1,\theta)\cdot p(\xi_2,\theta)\cdot...\cdot p(\xi_n,\theta),$$

де $p(x_i,\theta)=P(\xi=x_i)$.

Якщо функція правдоподібності $L(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\theta)$ має похідну по θ, то для знаходження оцінок правдоподібності потрібно розв’язати рівняння $\frac{\partial \ln L(\xi_1,...,\xi_n,\theta)}{\partial\theta}=0$, яке називається *рівнянням правдоподібності*. При досить широких умовах оцінки найбільшої правдоподібності будуть спроможними, а якщо існує ефективна оцінка, то вона буде єдиним розв’язком рівняння правдоподібності.

Розв’язування типових задач до змістового модуля XV.

1. Нехай ξ_1, ξ_2, …, ξ_n – вибірка із генеральної сукупності ξ, яка має нормальний розподіл $N(\theta,1)$. Знайти оцінку найбільшої правдоподібності θ^*.

Оскільки випадкова величина ξ неперервна з щільністю розподілу $f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$, то функція найбільшої правдоподібності має вигляд

$$L(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\xi_1-\theta)^2}{2}}\cdot...\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\xi_n-\theta)^2}{2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\theta)^2}.$$

Візьмемо $\ln L$, а потім похідну по θ і одержимо рівняння правдоподібності

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\theta)=0,\quad \left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\theta)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i-n\theta\right).$$

Єдиним розв'язком θ^* цього рівняння є величина $\theta^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$.

Оцінки θ^* називають ще *точковими оцінками*. Використовуються вони в тих випадках, коли потрібно назвати певне число, яке використовується замість невідомого справжнього значення параметра θ. Точне визначення θ за даною вибіркою неможливе. При малому об'ємі вибірки похибка може бути досить грубою. Уявлення про точність оцінок дають надійні інтервали.

Досить поширена побудова надійних інтервалів з допомогою заданої точкової оцінки, яка полягає у тому, що за заданою ймовірністю γ, яку беруть близькою до одиниці по вибірці ξ_1, ξ_2, …, ξ_n об'єму n і точковій оцінці θ^* параметра θ потрібно знайти $\delta>0$, щоб

$$P(|\theta^*-\theta|<\delta)=\gamma \quad (P(\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta)=\gamma).$$

Це співвідношення означає, що випадковий інтервал $(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta)$ покриває невідомий параметр θ з ймовірністю γ. У цьому випадку інтервал $(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta)$ називається *довірливим*, число γ – *надійністю* (або надійним рівнем), δ – *точністю оцінки*, значення $(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta)$ – *нижньою та верхньою надійними межами* (ці поняття вживаються при теоретичній вибірці ξ_1, ξ_2, …, ξ_n і конкретній x_1, x_2, …, x_n).

2. Нехай ξ_1, ξ_2, …, ξ_n – вибірка об'єму n із генеральної сукупності ξ, яка має нормальний розподіл $N(\theta,\sigma^2)$, де математичне

сподівання $\theta = M\xi$ невідоме, а відома дисперсія $\sigma^2 = D\xi$. Оцінити математичне сподівання $M\xi$ з допомогою γ – надійного інтервалу.

Зрозуміло, що за оцінку θ^* невідомого параметра θ потрібно брати "хорошу" оцінку. Такою оцінкою для математичного сподівання у даному випадку є вибіркове середнє $\theta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Ця оцінка незміщена, спроможна й ефективна. Оскільки лінійні функції від нормально розподілених величин теж мають нормальний розподіл, то оцінка θ^* має нормальний розподіл з параметрами $M\theta^* = \theta$, $D\theta^* = \frac{\sigma^2}{n}$. Тому

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{u^2 n}{2\sigma^2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

і для знаходження надійного інтервалу рівня γ потрібно розв'язати рівняння $\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{\gamma}{2}$.

За таблицею значень функції $\Phi(x)$ (додаток 2) знаходимо величину $c_\gamma\left(\Phi\left(c_\gamma\right) = \gamma/2\right)$. Таким чином, маємо співвідношення між трьома величинами $(\gamma, n, \delta)\ \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = c_\gamma$ (при відомих двох із них можна знайти третю). Звідси знаходимо $\delta = c_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Отже, γ-надійним інтервалом для математичного сподівання $M\xi$, за вибірковим середнім є інтервал

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - c_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i + c_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Якщо у прикладі замість теоретичної вибірки ξ_1, ξ_2, …, ξ_n подана конкретна вибірка x_1, x_2, …, x_n, то γ-надійним інтервалом математичного сподівання $M\xi$ за вибірковим середнім є інтервал

$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Інтервал цей вже не випадковий і надійність його γ вказує лише на те, що при достатньо великій кількості вибірок із них $\gamma \cdot 100\%$ визначають такі надійні інтервали, які дійсно містять значення $M\xi$.

У прикладі при знаходженні довірливого інтервалу істотну роль відігравав явний вигляд розподілу оцінки θ^*. У більш загальному випадку користуються асимптотичними розподілами.

Нехай x_1, x_2, …, x_n – вибірка об’єму *n* із генеральної сукупності ξ, для якої існують математичне сподівання $a = M\xi$ та дисперсія $\sigma^2 = D\xi$. Теоретично обґрунтовані надійні інтервали для a, за вибірковим середнім $\bar{x}$ і для σ за вибірковим середнім квадратичним відхиленням s подані в таблиці.

Параметри розподілу генеральної сукупності ξ $a = M\xi, \sigma = \sqrt{D\xi}$	Тип розподілу генеральної сукупності ξ	γ-надійні інтервали
$\theta = a, \sigma$ – відомо σ – не відомо, $\theta = a$	Нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$ Довільний розподіл $(n \geq 30)$ Нормальний	$\left(\bar{x} - c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, c_γ – розв’язок рівняння $\Phi(c_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ (знаходиться за додатком 2)

	розподіл $N(a,\sigma^2)$	$\left(\bar{x}-t_\gamma \frac{s_1}{\sqrt{n}}, \bar{x}+t_\gamma \frac{s_1}{\sqrt{n}}\right)$, $t_\gamma = t(\gamma, n)$ (знаходиться за додатком 3)
	Довільний розподіл $(n \geq 30)$	$\left(\bar{x}-c_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+c_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$, c_γ – розв'язок рівняння $\Phi(c_\gamma)=\frac{\gamma}{2}$
$\theta=\sigma$	Нормальний розподіл $N(a,\sigma^2)$	$(s_1(1-q), s_1(1+q))$, для $q<1$, $(0, s_1(1+q))$ для $q \geq 1$, де $q=q(\gamma, n)$ (знаходиться за додатком 4)

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2},\ s_1=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}.$$

Змістовий модуль XVI. Перевірка статистичних гіпотез. Критерій χ^2.

Статистичною гіпотезою (або просто гіпотезою) називається довільне припущення про тип або властивості розподілу випадкових величин, які спостерігаються в експериментах. Наприклад, статистичними гіпотезами будуть такі припущення: 1) генеральна сукупність ξ, розподілена за законом Пуассона; 2) $\lambda=5$ у розподілі генеральної сукупності, яка розподілена за законом Пуассона з невідомим параметром λ; 3) дві генеральні сукупності незалежні.

Гіпотеза, яка полягає тільки в однозначному припущенні, називається *простою гіпотезою*. У противному разі гіпотеза називається *складною*. Попередні приклади гіпотез усі прості, а гіпотеза про те, що $\lambda > 5$ у розподілі Пуассона – складна, оскільки тут параметр λ може бути будь-яким числом, яке більше 5, тобто ця гіпотеза складається із нескінченного числа простих гіпотез.

Задача перевірки гіпотези полягає у побудові такої величини (статистики), яка дозволяла б за результатами експерименту прийняти або відхилити гіпотезу. Довільна така величина називається *статистичним критерієм* (або просто критерієм) *гіпотези*.

Розглянемо загальну ідею побудови критерію. Нехай ξ_1, ξ_2, …, ξ_n – вибірка із генеральної сукупності ξ і нехай висунута деяка статистична гіпотеза H_0 (її називають *основною* або *нульовою гіпотезою*). Для перевірки гіпотези H_0 будується такий критерій K (як правило, це невід'ємна величина), який характеризує міру відхилення вибіркового розподілу від гіпотетичного , при цьому його розподіл, якщо справедлива гіпотеза H_0, відомий (точно або наближено). За заданою достатньо малою величиною α і відомим розподілом K знаходиться таке число c_α, що $P(K > c_\alpha) = \alpha$. Число α називається *рівнем значності критерію* K, c_α – *критичною точкою*, область $S = \{ (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) : K > c_\alpha \}$ – *критичною областю критерію* K. Оскільки α мале (найчастіше беруть $\alpha = 0{,}05$ або $0{,}01$), то подія з ймовірністю, що не перевищує α, в одиничному експерименті практично не відбувається. Нехай K – обчислене за контрольною вибіркою x_1, x_2, …, x_n значення критерію K. Якщо $K > c_\alpha$, то при справедливості гіпотези H_0 відбувається "практично неможлива" подія. У цьому випадку гіпотеза

H_0 відхиляється. У протилежному випадку вважається, що спостереження x_1, x_2, …, x_n узгоджені з гіпотезою H_0.

Для статистичної перевірки простої гіпотези H_0 щодо типу розподілу генеральної сукупності найбільш широко використовується критерій χ^2 (хі-квадрат) Пірсона.

Нехай гіпотеза H_0 полягає у тому, що вибірка ξ_1, ξ_2, …, ξ_n об'єму n із генеральної сукупності ξ з функцією розподілу $F_0(x)$. Для побудови критерію χ^2 розбивають область значень випадкової величини на кінцеве число r множин $\Delta_i, i=1,2,...,r,$ які не перетинаються. Відповідно вибірку розбивають на r груп. Позначимо через ν_i число елементів вибірки, які потрапили у множину Δ_i і покладемо $p_i = P(\xi \in \Delta_i)$ $i=1,2,...,r,$ множини Δ_i вибрані таким чином, що всі $p_i > 0$. Ймовірності p_i обчислюються за відомою функцією розподілу $F_0(x)$. Оскільки, множини Δ_i – це розбиття всієї множини значень ξ, то $\sum_i p_i = 1, \sum_i \nu_i = n$. За міру відхилення розподілу вибірки від гіпотетичного розподілу $F_0(x)$ береться величина $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i^2}{np_i} - n$. Як доведено Пірсоном, у випадку справедливості гіпотези H_0 розподіл випадкової величини χ_n^2 при $n \to \infty$ збігається до розподілу χ^2 з $r-1$ ступенем вільності. Використовуючи граничний розподіл, за критичну точку можна взяти $c_\alpha = \chi^2_{\alpha,r-1}$, де $P(\chi_n^2 > \chi^2_{\alpha,r-1}) \approx \alpha$. Далі за конкретною вибіркою x_1, x_2, …, x_n потрібно знайти значення χ_n^2 і перевірити нерівність $\chi_n^2 > \chi^2_{\alpha,r-1}$. Якщо ця нерівність має місце, то за критерієм χ^2 гіпотеза H_0 відхиляється з рівнем значущості α; у противному разі вибірка x_1, x_2, …, x_n узгоджена з гіпотезою H_0.

На практиці множину $\Delta_i, i=1,2,...,r$ вибирають таким чином, щоб число елементів вибірки у кожному з них було дуже малим, наприклад $np_i \ge 8$. Якщо деякі $np_i < 8$, то доцільно перед застосуванням критерію об'єднувати малі сусідні групи. Якщо спостережень мало і цього зробити неможливо, то користуватись критерієм χ^2 недоцільно

Якщо гіпотетична функція розподілу $F_0(x)$ залежить від невідомих параметрів, то при обчисленні ймовірностей $p_i = P(\xi \in \Delta_i)$ їх замінюють оцінками найбільшої правдоподібності. У цьому випадку $r-1$ повинно бути зменшено на число невідомих параметрів.

Розв'язування типових задач до змістового модуля XVI.

1. При n = 12 000 підкиданнях монети Пірсон одержав 6 019 появ герба. Чи узгоджується це при рівні значущості 0,05 з гіпотезою H_0 про те, що монета була симетрична?

Дані задачі можна розглядати як вибірку об'єму n = 12 000 із генеральної сукупності ξ, де випадкова величина ξ приймає два значення 1 або 0 в залежності від появи герба при одному підкиданні. Область значень ξ складається із двох точкових множин $\Delta_1 = \{0\}$, $\Delta_2 = \{1\}$, а елементи x_i вибірки x_1, x_2, …, x_n дорівнюють або 1, або 0. У даному випадку число ν_2 елементів вибірки, які потрапили у множину Δ_2, дорівнює 6 019. Отже, $\nu_1 = 5981,\ r = 2$. За гіпотезою $H_0 : p_2 = P \times (\xi \in \Delta_2) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2},\ p_1 = P(\xi \in \Delta_1) = P(\xi = 0) = \frac{1}{2}$. Оскільки,

$$\chi_n^2 = \frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(\nu_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{(5981 - 6000)^2}{6000} + \frac{(6019 - 6000)^2}{6000} \approx 0{,}12,$$

а за таблицею (додаток 5) $\chi^2_{\alpha, r-1}(\alpha = 0{,}05; r = 2)$ дорівнює 3,8, то в силу нерівності $0{,}12 < 3{,}8$ дані задачі узгоджені з гіпотезою H_0.

2. Годинники, які встановлені у вітринах годинникових майстерень, показують випадковий час. Спостерігались показники

часу 500 годинників і після згрупування спостережень одержано такі дані:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ν_i	36	47	41	47	49	45	32	37	40	41	37	48,

де i – номер проміжку від i-ої години до $(i+1)$-ї, а ν_i – число годинників, показник часу яких належав i-му проміжку. Чи узгоджені ці дані при значущості 0,05 з гіпотезою H_0 про те, що розподіл положення стрілки на циферблаті рівномірний?

Дані задачі можна розглядати як вибірку об'єму n = 500 із генеральної сукупності ξ, де випадкова величина ξ може приймати довільні значення в області (0, 12). У даному випадку візьмемо $\Delta_i = [i, i+1), i = 0,1,\ldots,11$ області значень ξ. Числа ν_i елементів вибірки відомі: $r = 12$. Припустимо, що гіпотеза H_0 має місце, тобто випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на інтервалі $[0,12)$. Тому гіпотетичні ймовірності $p_i = P(\xi \in \Delta_i) = 1/12, i = 0,1,\ldots,11$. Обчислимо величину

$$\chi_n^2 = \sum_{i=0}^{11} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = 8,032.$$

За таблицею (додаток 5) $\chi^2_{\alpha,r-1}\,(\alpha = 0,01; r = 12)$ дорівнює 24,7. Оскільки виконується нерівність $8,032 < 24,7$, то дані задачі узгоджені з гіпотезою H_0.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Математика для економістів. Київ: НАУ, 1997. 424с.
2. Булига К. Б., Барановська Л. В. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. Київ: Європ. ун-т (фінанси, інформ. системи, менеджм. і бізнес), 2003. 173 с.
3. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища школа, 1988. 438 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математичной статистике. Москва: Высшая школа, 1977. 479 с.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Москва: Наука, 1987. 400 с.
6. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Михалін Г. О. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник [для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів]. Вид. 2, перероб. і доп. Полтава: "Довкілля-К", 2009. 500 с.
7. Жлуктенко Ю. О. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посіб. у 2 ч. Київ: КНЕУ, 2000. 734с.
8. Іванюта І. Д., Рибалка В. І., Рудоміно-Дусятська І. А. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Київ: Слово, 2006. 272 с.
9. Медведєв М. Г., Пащенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ: Ліра – К, 2008. 536 с.
10. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики / Р. К. Чорней та ін. Київ: МАУП, 2003. 228с.
11. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей – 2-ге вид., перероб. і допов. Київ: Вища школа, 1994. 192 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ГАУССА $\varphi\ (x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0068	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	2058	0,0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0005	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\Phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)	*X*	*Φ*(*x*)
0,00	0,0000	0,26	0,1026	0,52	0,1985	0,78	0,2823
0,01	0,0040	0,27	0,1064	0,53	0,2019	0,79	0,2852
0,02	0,0080	0,28	0,1103	0,54	0,2054	0,80	0,2881
0,03	0,0120	0,29	0,1141	0,55	0,2088	0,81	0,2910
0,04	0,0160	0,30	0,1179	0,56	0,2123	0,820	0,2939
0,05	0,0199	0,31	0,1217	0,57	0,2157	0,83	0,2967
0,06	0,0239	0,32	0,1255	0,58	0,2190	0,84	0,2995
0,07	0,0279	0,33	0,1293	0,59	0,2224	0,85	0,3023
0,08	0,0319	0,34	0,1331	0,60	0,2257	0,86	0,3051
0,09	0,0359	0,35	0,1368	0,61	0,2291	0,87	0,3078
0,10	0,0398	0,36	0,1406	0,62	0,2324	0,88	0,3106
0,11	0,0438	0,37	0,1443	0,63	0,2357	0,89	0,3133
0,12	0,0478	0,38	0,1480	0,64	0,2389	0,90	0,3159
0,13	0,0517	0,39	0,1617	0,65	0,2422	0,91	0,3186
0,14	0,8557	0,40	0,1564	0,66	0,2454	0,92	0,3212
0,15	0,0596	0,41	0,1691	0,67	0,2486	0,93	0,3238
0,16	0,0636	0,42	0,1628	0,68	0,2517	0,94	0,3264
0,17	0,0675	0,43	0,1664	0,69	0,2549	0,95	0,3289
0,18	0,0714	0,44	0,1700	0,70	0,2580	0,96	0,3315
0,19	0,0753	0,45	0,1736	0,71	0,2611	0,97	0,3340
0,20	0,0793	0,46	0,1772	0,72	0,2642	0,98	0,3365
0,21	0,0832	0,47	0,1808	0,73	0,2673	0,99	0,3389
0,22	0,0871	0,48	0,1844	0,74	0,2703	1,00	0,3413
0,23	0,0910	0,49	0,1879	0,75	0,2734	1,01	0,3438
0,24	0,0948	0,50	0,1915	0,76	0,2764	1,02	0,3461
0,25	0,0987	0,51	0,1950	0,77	0,2794	1,03	0,3485

x	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)	*X*	*Φ*(*x*)
1,04	0,3508	1,33	0,4082	1,62	0,4474	1,91	0,4719
1,05	0,3531	1,34	0,4099	1,63	0,4484	1,92	0,4726
1,06	0,3554	1,35	0,4115	1,64	0,4495	1,93	0,4732
1,07	0,3577	1,36	0,4131	1,65	0,4505	1,94	0,4738
1,08	0,3599	1,37	0,4147	1,66	0,4515-	1,95	0,4744
1,09	0,3621	1,38	0,4162	1,67	0,4525	1,96	0,4750
1,10	0,3643	1,39	0,4177	1,68	0,4535	1,97	0,4756
1,11	0,3665	1,40	0,4192	1,69	0,4545	1,98	0,4761
1,12	0,3686	1,41	0,4207	1,70	0,4554	1,99	0,4767
1,13	0,3708	1,42	0,4222	1,71	0,4564	2,00	0,4772
1,14	0,3729	1,43	0,4236	1,72	0,4573	2,02	0,4783
1,15	0,3749	1,44	0,4251	1,73	0,4582	2,04	0,4793
1,16	0,3770	1,45	0,4265	1,74	0,4591	2,06	0,4803
1,17	0,3790	1,46	0,4279	1,75	0,4599	2,08	0,4812
1,18	0,3810	1,47	0,4292	1,76	0,4608	2,10	0,4821
1,19	0,3830	1,48	0,4306	1,77	0,4616	2,12	0,4830
1,20	0,3849	1,49	0,4319	1,78	0,4625	2,14	0,4838
1,21	0,3869	1,50	0,4332	1,79	0,4633	2,16	0,4846
1,22	0,3883	1,51	0,4345	1,80	0,4641	2,18	0,4854
1,23	0,3907	1,52	0,4357	1,81	0,4649	2,20	0,4861
1,24	0,3925	1,53	0,4370	1,82	0,4656	2,22	0,4868
1,25	0,3944	1,54	0,4382	1,83	0,4664	2,24	0,4875
1,26	0,3962	1,55	0,4394	1,84	0,4671	2,26	0,4881
1,27	0,3980	1,56	0,4406	1,85	0,4678	2,28	0,4887
1,28	0,3997	1,57	0,4418	1,86	0,4686	2,30	0,4893
1,29	0,4015	1,58	0,4429	1,87	0,4693	2,32	0,4898
1,30	0,4032	1,59	0,4441	1,88	0,4699	2,34	0,4904
1,31	0,4049	1,60	0,4452	1,89	0,4706	2,36	0,4909
1,32	0,4066	1,61	0,4463	1,90	0,4713	2,38	0,4913

Закінчення додатка 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,40	0,4918	2,60	0,4953	2,80	0,4974	3,20	0,49931
2,42	0,4922	2,62	0,4956	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,44	0,4927	2,64	0,4959	2,84	0,4977	3,60	0,49984
2,46	0,4931	2,66	0,4961	2,86	0,4979	3,80	0,499928
2,48	0,4934	2,68	0,4963	2,90	0,4981	4,00	0,499968
2,50	0,4938	2,70	0,4965	2,92	0,4982	5,00	0,499997
2,52	0,4941	2,72	0,4967	2,94	0,4984		
2,54	0,4945	2,74	0,4969	2,96	0,49846		
2,56	0,4948	2,76	0,4971	2,98	0,49856		
2,58	0,4951	2,78	0,4973	3,00	0,49865	$x > 5$	0,5

Додаток 3

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $t_\gamma = t(\gamma,\ n)$

n	γ			*n*	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток 5

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ χ^2

Число ступенів свободи, k	Рівень значущості, α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,999
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38.9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	60,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток 6

ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ $P_m(a_n) = \frac{a_n^m e^{-a_n}}{m!}$

m \ a_n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0, 904837	0, 818731	0, 740818	0, 670320	0, 606531	0, 548812
1	904084	163746	222245	268128	303265	329287
2	004524	016375	033337	053626	075816	098786
3	000151	001091	003334	007150	012636	019757
4	000004	000055	000250	000715	001580	002964
5		000002	000015	000057	000158	000356
6			000001	000004	000013	000035
7					000001	000003

m \ a_n	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0, 496585	0, 449329	0, 406570	0, 367879	0, 135335	0, 049787
1	347610	359463	365913	367879	270671	149361
2	121663	143785	164661	183940	270671	224042
3	028388	038343	049398	061313	180447	224042
4	004968	007669	011115	015328	090224	168031
5	000695	001227	002001	003066	036089	100819
6	000081	000164	000300	000511	012030	050409
7	000008	000019	000039	000073	003437	021604
8		000002	000004	000009	000859	008101
9				000001	000191	002701
10					000038	000810
11					000007	000221
12					000001	000055
13						000013
14						000002
15						000001