МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

Вища математика

Частина 1

Навчальний посібник

Укладачі: Т. В. Поліщук, Д. А. Возносименко

Умань

Візаві

2020

УДК 51(075.8)

В41

Укладачі:

Поліщук Т. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

Возносименко Д. А., доктор філософії, старший викладач кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Рецензенти:

Селеванов М. Ф., доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Інституту механіки імені С. П. Тимошенка НАН України;

Хорошун А. С., доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Інституту механіки імені С. П. Тимошенка НАН України.

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету фізики, математики та інформатики
Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини
(протокол № 4 від 29. 10. 2020 року)

В
41

Вища математика : навч. посіб. Ч. 1. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.: Т. В. Поліщук, Д. А. Возносименко. – Умань : Візаві, 2020. – 159 с.

Навчально-методичний посібник містить основні теоретичні відомості з таких розділів вищої математики, як лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія та диференціальне числення функції однієї змінної, детальні розвязки типових задач та набір завдань для поточного і модульного контролів. Посібник стане у нагоді здобувачам вищої освіти усіх форм навчання вищих педагогічних закладів освіти.

УДК 51(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Стрімкий розвиток науки вносить корективи у підготовку фахівців різних галузей та спеціальностей. Виникає необхідність підготовки спеціалістів, які володіють математичним апаратом, можуть єфективно його застосовувати для моделювання та розвязування теоретичних і прикладних задач. Знання з курсу «Вищої математики» допоможуть здобувачам вищої освіти набути достатніх теоретичних знань та практичних умінь побудови математичних моделей при розв'язуванні певних прикладних задач з хімії, біології та природничих наук вцілому.

Навчально-методичний посібник створено з метою єфекивної організації аудиторної та самостійної роботи студентів природничих спеціальностей закладів вищої освіти при навчанні за модульно-рейтинговою технологією. Він має на меті допомогти студентам у досягненні нормативного рівня, а також у розширенні та поглибленні їх наукового світогляду, у оволодінні ними умінь працювати самостійно, застосовувати набуті знання у подальшій професійній діяльності. Посібник створено у відповідності до робочої програми «Вища математика».

Структура посібника: короткі теоретичні відомості, які супроводжуються розглядом ряду прикладів та практичні індивідуальні завдання до кожної теми з прикладами розв'язування вправ, які полегшують розуміння теоретичного матеріалу і одночасно служать зразками на практичних заняттях. Наведено достатню кількість прикладних задач. У кінці наведено завдання для поточного, модульного та підсумкового (зразок тестів) контролів і список літератури.

За підсумками вивчення курсу студент повинен <u>знати</u> основні теоретичні положення (означення, поняття, теореми, правила), що стосуються нижченаведених тем, а також <u>вміти</u> розв'язувати передбачені програмою типові задачі з відповідних тем.

Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри

§1. Визначники

Квадратній матриці $A_{n\times n}$ можна поставити у відповідність *числову характеристику – визначник* (*детермінант*) n-го порядку. Визначник позначають так: $|A|$, $\Delta(A)$, Δ, Δ_n, $\det(A)$ і записують у вигляді

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.1)$$

Число, позначене символом $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і визначене рівністю

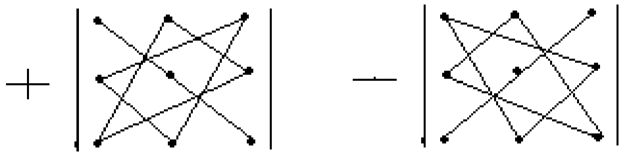
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (1.2)$$

називають визначником 2-го порядку.

Число, позначене символом $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ і визначене рівністю

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}- \\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11} \end{aligned} \qquad (1.3)$$

називають визначником 3-го порядку. Числа a_{11}, a_{12},…, a_{33}, що складають визначник, називаються елементами визначника. Для позначення елементів визначника використовуються подвійні індекси: a_{ij}. Перший індекс (i) визначає номер рядка, а 2-й (j) – номер стовпчика визначника. Права частина рівності (1.3) обчислюється за такими схемами:



тобто елементи добутків (1.3), взяті з відповідно вказаними знаками, або з'єднані відрізками (головна і другорядна діагональ), або утворюють трикутники.

Для обчислення визначника третього порядку можна використовувати і так зване „правило Саррюса”. Для обчислення визначника за цим правилом припишемо справа до визначника спочатку перший, а потім другий стовпчики:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|.$$

$$+\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| . - \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

Властивості визначників

1. При зміні місцями рядків і стовпців (транспонуванні) визначник не змінюється:

$$\Delta(A) = \Delta(A^T).$$

1. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють 0, то $\det(A) = 0$.

2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника помножити на число λ, то і визначник помножиться на це число.

Наслідок: спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

3. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.

4. Визначник, що має однакові рядки (стовпці), дорівнює 0.

5. Визначник, що має пропорційні рядки (стовпці), дорівнює 0.

6. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на
алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює 0:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

8. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку їх визначників: $C = A \cdot B \Rightarrow |C| = |A| \cdot |B|$.

9. Визначник діагональної чи трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

***Мінори та їх алгебраїчні доповнення*.**

Позначимо через a_{ij} (i, j=1,2,3) елемент визначника (1.1), який знаходиться на перетині його i–го рядка і j–го стовпчика. Якщо в (1.1) викреслити i –й рядок і j –й стовпчик, то одержимо визначник 2-го порядку, який називається доповнюючим мінором елемента a_{ij} і позначається M_{ij}.

Мінор M_{ij}, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$, називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} і позначається A_{ij}, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.4)$$

Приклад 1.1. Обчислити визначники другого порядку.

а) $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -5 \times 8 - (-6) \times 7 = -40 + 42 = 2$;

б) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$

Приклад 1.2. Обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 11$$

Приклад 1.3. Обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 15 - 3 \cdot 8 = 6.$

Винесемо за знак визначника спільні множники для елементів першого та другого рядків (2 і 3 відповідно) і обчислимо визначник:

$$\Delta = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6(1 \cdot 5 - 1 \cdot 4) = 6.$$

Приклад 1.4. Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 13, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = -13.$$

Приклад 1.5. Обчислимо визначник із пропорційними рядками:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Приклад 1.6. Обчислити визначники за правилом трикутника.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - \\ - (-2) \cdot 2 \cdot 2 = -6 + 6 - 2 - 9 + 1 + 8 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -33 - 3 = -36$$

Приклад 1.7. Обчислити визначник за правилом Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} \Bigg| =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) \cdot 2 - \\ - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -6 + 6 - 2 - 9 + 8 + 1 = -2.$$

Приклад 1.8. Обчислимо суму добутків елементів 1-го рядка визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ на алгебраїчні доповнення елементів 3-го рядка:

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (2 \cdot 5 - 4 \cdot 3) - 2(1 \cdot 5 - (-1) \cdot 3) + 3(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2) = -2 - 16 + 18 = 0.$$

Приклад 1.9. За правилом трикутника обчислимо визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot1+2\cdot5\cdot0+(-1)\cdot1\cdot3-(0\cdot4\cdot3+2\cdot(-1)\cdot1+1\cdot5\cdot1)=1-3=-2.$$

Додамо до елементів першого рядка відповідні елементи третього рядка, помножені на 2 і обчислимо цей визначник:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 4 & 5\\ -1 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot1+4\cdot5\cdot0+(-1)\cdot1\cdot5-(0\cdot4\cdot5+4\cdot(-1)\cdot1+1\cdot5\cdot1)=-1-1=-2.$$

Визначники співпадають: $\Delta=\Delta_1$.

Приклад 1.10. За формулою трикутника обчислимо визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot1+2\cdot5\cdot0+0\cdot0\cdot3-(0\cdot4\cdot3+2\cdot0\cdot1+0\cdot5\cdot1)=4.$$

За властивістю 10 маємо: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot1=4.$

Приклад 1.11. Обчислити визначник 3-го порядку: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 6\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}.$

Обчислимо визначник чотирма способами:

1) за формулою (1.5) (за правилом трикутника):

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 6\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot4+2\cdot6\cdot2+2\cdot0\cdot3-\left(3\cdot2\cdot2+2\cdot2\cdot4+6\cdot0\cdot1\right)=32-28=4;$$

1) розкладом за елементами 2-го стовпця, що містить 0:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 6\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 6\\ 2 & 4\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=-2(8-12)+2(4-6)=4;$$

2) розкладом за елементами 1-го стовпця з одержанням у ньому нулів:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&6\\2&0&4\end{vmatrix}=\begin{Bmatrix}e_2/2\\e_3/2\end{Bmatrix}=2\cdot2\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&3\\1&0&2\end{vmatrix}=\begin{Bmatrix}e_2-e_1\\e_3-e_1\end{Bmatrix}=4\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\0&-2&-1\end{vmatrix}=4\cdot1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&0\\-2&-1\end{vmatrix}=4(1-0)=4;$$

3) зведенням визначника до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&6\\2&0&4\end{vmatrix}=\{\text{див. спосіб 3}\}=4\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\0&-2&-1\end{vmatrix}=\{e_3-2e_2\}=4\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=4.$$

<u>Приклад 1.12.</u> Обчислити визначник 4-го порядку:

$$\begin{vmatrix}2&1&1&8\\1&-3&-6&9\\0&2&2&-5\\1&4&6&0\end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник трьома способами:

1) розкладом за елементами 1-го стовпця, що містить 0:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&1&8\\1&-3&-6&9\\0&2&2&-5\\1&4&6&0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3&-6&9\\2&2&-5\\4&6&0\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&1&8\\2&2&-5\\4&6&0\end{vmatrix}+0+$$

$$+1\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&1&8\\-3&-6&9\\2&2&-5\end{vmatrix}=2[0+120+108-(72+90-0)]-$$

$$-[0-20+96-(64-30+0)]-[30+18-48-(-96+18+15)]=27;$$

2) розкладом за елементами 1-го стовпця з одержанням у ньому нулів:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&1&8\\1&-3&-6&9\\0&2&2&-5\\1&4&6&0\end{vmatrix}=\{e_1\leftrightarrow e_2\}=-\begin{vmatrix}1&-3&-6&9\\2&1&1&8\\0&2&2&-5\\1&4&6&0\end{vmatrix}=\begin{Bmatrix}e_2-2e_1\\e_4-e_1\end{Bmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-3&-6&9\\0&7&13&-10\\0&2&2&-5\\0&7&12&-9\end{vmatrix}=-1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&13&-10\\2&2&-5\\7&12&-9\end{vmatrix}=-[-126-455-240-$$

$$-(-140-420-234)]=27;$$

3) зведенням визначника до трикутного вигляду:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&-3&-6&9\\0&7&13&-10\\0&2&2&-5\\0&7&12&-9\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}e_2-3e_3\\ \\ e_4-e_2\end{matrix}\right\}=-\begin{vmatrix}1&-3&-6&9\\0&1&7&5\\0&2&2&-5\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\\ \\ e_3-2e_2\\ e_4/(-1)\end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix}1&-3&-6&9\\0&1&7&5\\0&0&-12&-15\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=\{e_4\leftrightarrow(-e_3)\}=\begin{vmatrix}1&-3&-6&9\\0&1&7&5\\0&0&1&-1\\0&0&12&15\end{vmatrix}=$$

$$=\{e_4-12e_3\}=\begin{vmatrix}1&-3&-6&9\\0&1&7&5\\0&0&1&-1\\0&0&0&27\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1\cdot27=27.$$

Приклад 1.13. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів першого рядка визначника: $\begin{vmatrix}0&1&3\\5&6&7\\1&1&8\end{vmatrix}$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\times M_{11}=+\begin{vmatrix}6&7\\1&8\end{vmatrix}=48-7=41$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}5&7\\1&8\end{vmatrix}=-(40-7)=-33$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}5&6\\1&1\end{vmatrix}=-1$$

Теорема розкладу. Визначник Δ дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного рядка або стовпчика на їх алгебраїчні доповнення.

Для визначника Δ із (1.2) цей розклад за елементами 1-го рядка із врахуванням (1.3) буде виглядати так:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}= \qquad (1.5)$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

Приклад 1.14. Розкласти за елементами 1-го рядка і обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3+4) + 1\cdot(1+6) + 1\cdot(-2-9) = -2.$$

Приклад 1.15. Обчислити визначник скориставшись основними властивостями визначників.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

До елементів першого рядка додамо елементи третього помножені на (-4); до елементів другого рядка додамо елементи третього помножені (-2); отриманий визначник розкладемо за елементами першого стовпця. Отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -8 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0A_{11} + 0A_{21} + 1A_{31} + 0A_{41} = 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -6 & -6 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-3)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)(-1)2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

До елементів першого і третього рядка додамо елементи другого помножені на (-2) та розкладемо за елементами першого стовпця. Отримаємо:

$$\Delta = 6\begin{vmatrix} 0 & -7 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 6(-5)(-1)\begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 30(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -30(7-5) = -60$$

.

§2. Матриці

Матрицею **розміром** $\boldsymbol{m\times n}$ називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців.

Види матриць.

1. Матриця розміром $n\times n$ називається *квадратною* матрицею n-го порядку.
2. *Діагональною* називається квадратна матриця, в якій всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.
3. Діагональна матриця, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається *одиничною* матрицею і позначається літерою E.
4. Матриця будь-якого розміру називається *нульовою*, якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Позначають нульову матрицю літерою O.
5. Матриця, що складається з одного рядка, називається *матрицею* (*вектором*)*-рядком,* а з одного стовпця – *матрицею* (*вектором*)*-стовпцем.*
6. Квадратна матриця, в якій всі елементи під (над) головною діагоналлю дорівнюють нулю, називається *верхньою* (*нижньою*) *трикутною матрицею*.

Деякі властивості добутку матриць

1) $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються *комутативними*;

2) добуток діагональних матриць є діагональною матрицею;

3) $E_{m\times m}A_{m\times n} = A_{m\times n}$, $A_{m\times n}E_{n\times n} = A_{m\times n}$ (E – одинична матриця);

4) добуток *квадратних* матриць *асоціативний*: $(AB)C = A(BC)$;

5) $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;

6) $A_{m\times k}\cdot O_{k\times n} = O_{m\times n}$, $O_{m\times k}\cdot A_{k\times n} = O_{m\times n}$ ($O_{m\times n}$ – нульова матриця).

7. **Піднесення до цілого додатного степеня**: $A^m = \underbrace{A\cdot A\cdot \ldots \cdot A}_{m}$.

8. **Транспонування матриці** – перехід від матриці $A_{m\times n}$ до матриці $A^T{}_{n\times m}$, в якій рядки й стовпці помінялися місцями зі збереженням порядку їх слідування, наприклад, якщо

$$A=\begin{pmatrix}0 & -12 & 5\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix},\ \text{то } A^T=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -12 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Властивості транспонування матриці.

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

3) $(AB)^T = B^T A^T$;

4) $(A^T)^T = A$.

Квадратна матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E. \qquad (2.1)$$

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо $\det(A) = 0$, і *невиродженою*, якщо $\det(A) \neq 0$. Для невиродженої матриці A обернену матрицю можна обчислити за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix},\quad (\det(A)\neq 0), \qquad (2.2)$$

де A_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Зауваження. Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij}, розташованого в матриці A на перетині i-го рядка і j-го стовпця, в оберненій матриці розміщується на перетині j-го рядка й i-го стовпця.

Обчислення оберненої матриці методом елементарних перетворень

Елементарними називаються такі перетворення матриці:

1) транспонування матриці;
2) переставлення місцями двох рядків (стовпців);
3) множення рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;

4) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число;

5) викреслювання нульового рядка (стовпця).

Матриці *A* і *B*, одержані одна з одної у результаті елементарних перетворень, називають *еквівалентними* і позначають так: $A \sim B$.

Для обчислення оберненої матриці введемо допоміжну матрицю $\Gamma_A = (A|E)$ розміром $n\times 2n$, приписавши праворуч до матриці *A* одиничну матрицю *E*. Елементарними перетвореннями *рядків* матриці Γ_A зведемо її до вигляду $(E|B)$. Якщо *A* невироджена, то $B = A^{-1}$.

<u>Приклад 2.1.</u> Знайдіть матрицю $3A - 2B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -6 & -9\\ 3 & 12 & 15\\ 9 & 0 & -3\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}8 & -4 & 6\\ 0 & 8 & 2\\ -4 & 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-8 & -6-(-4) & -9-6\\ 3-0 & 12-8 & 15-2\\ 9-(-4) & 0-2 & -3-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -2 & -15\\ 3 & 4 & 13\\ 13 & -2 & -9\end{pmatrix}.$$

<u>Приклад 2.2.</u> Знайти *AB* і *BA*, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ -6\end{pmatrix}.$

$$A_{1\times 2}\cdot B_{3\times 1}=C_{1\times 1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 5\\ -6\end{pmatrix}=\big(2\cdot 3+(-1)\cdot 5+4\cdot(-6)\big)=(-23),$$

$$B_{3\times 1}\cdot A_{1\times 3}=D_{3\times 3}=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 4\\ 5\cdot 2 & 5\cdot(-1) & 5\cdot 4\\ -6\cdot 2 & -6\cdot(-1) & -6\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 12\\ 10 & -5 & 20\\ -12 & 6 & -24\end{pmatrix}.$$

Приклад 2.3. Знайти AB і BA, якщо $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&5&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\6&-3\\1&8\end{pmatrix}$.

$$A_{2\times3}\cdot B_{3\times2}=C_{2\times2}=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot6+2\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot(-3)+2\cdot8\\3\cdot2+5\cdot6+4\cdot1 & 3\cdot0+5\cdot(-3)+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&16\\40&17\end{pmatrix},$$

$$B_{3\times2}\cdot A_{2\times3}=D_{3\times3}=\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot3 & 2\cdot0+0\cdot5 & 2\cdot2+0\cdot4\\6\cdot1+(-3)\cdot3 & 6\cdot0+(-3)\cdot5 & 6\cdot2+(-3)\cdot4\\1\cdot1+8\cdot3 & 1\cdot0+8\cdot5 & 1\cdot2+8\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&4\\-3&-15&0\\25&40&34\end{pmatrix}.$$

Приклад 2.4. Знайти AB і BA, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&4\\5&2&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2&4\\-3&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

$$A_{3\times3}\cdot B_{3\times3}=C_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&4\\5&2&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&4\\-3&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot(-3)+3\cdot1 & 1\cdot2+0\cdot1+3\cdot(-1) & 1\cdot4+0\cdot2+3\cdot1\\2\cdot0+(-1)\cdot(-3)+4\cdot1 & 2\cdot2+(-1)\cdot1+4\cdot(-1) & 2\cdot4+(-1)\cdot2+4\cdot1\\5\cdot0+2\cdot(-3)+6\cdot1 & 5\cdot2+2\cdot1+6\cdot(-1) & 5\cdot4+2\cdot2+6\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&7\\7&-1&10\\0&6&30\end{pmatrix},$$

$$B_{3\times3}\cdot A_{3\times3}=D_{3\times3}=\begin{pmatrix}0&2&4\\-3&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&4\\5&2&6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot1+2\cdot2+4\cdot5 & 0\cdot0+2\cdot(-1)+4\cdot2 & 0\cdot3+2\cdot4+4\cdot6\\-3\cdot1+1\cdot2+2\cdot5 & -3\cdot0+1\cdot(-1)+2\cdot2 & -3\cdot3+1\cdot4+2\cdot6\\1\cdot1-1\cdot2+1\cdot5 & 1\cdot0-1\cdot(-1)+1\cdot2 & 1\cdot3-1\cdot4+1\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&6&32\\9&3&7\\4&3&5\end{pmatrix}.$$

Приклад 2.5. Знайти A^3, якщо $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot2+2\cdot3\\0\cdot1+3\cdot0 & 0\cdot2+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8\\0&9\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&8\\0&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+8\cdot0 & 1\cdot2+8\cdot3\\0\cdot1+9\cdot0 & 0\cdot2+9\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&26\\0&27\end{pmatrix}.$$

Приклад 2.6. Перевірити властивість $(AB)^T=B^TA^T$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&5&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&0\\6&-3\\1&8\end{pmatrix}.$$

Оскільки $A\cdot B=\begin{pmatrix}4&16\\40&17\end{pmatrix}$ (приклад 1.3), то $(A\cdot B)^T=\begin{pmatrix}4&40\\16&17\end{pmatrix}$.

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}2&6&1\\0&-3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&5\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+6\cdot0+1\cdot2&2\cdot3+6\cdot5+1\cdot4\\0\cdot1-3\cdot0+8\cdot2&0\cdot3-3\cdot5+8\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&40\\16&17\end{pmatrix}.$$

Рівність $(AB)^T = B^TA^T$ виконується.

<u>Приклад 2.7.</u> Обчислити матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&2&-3\\2&1&-1\end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник Δ і алгебраїчні доповнення A_{ik} елементів a_{ik}:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&2&-3\\2&1&-1\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-3)\cdot2+2\cdot1\cdot2-(2\cdot2\cdot2+1\cdot(-3)\cdot1+(-1)\cdot2\cdot(-1))=1.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-3\\1&-1\end{vmatrix}=-2+3=1,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}=1,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&2\\2&-3\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&-3\\2&-1\end{vmatrix}=-(-2+6)=-4,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&-3\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&2\\2&1\end{vmatrix}=2-4=-2,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&2\end{vmatrix}=4.$$

За формулою (1.7) знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-4&-5&7\\-2&-3&4\end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-4&-5&7\\-2&-3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&2&-3\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2-2&-1+2-1&2-3+1\\-4-10+14&4-10+7&-8+15-7\\-2-6+8&2-6+4&-4+9-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

<u>Приклад 2.8.</u> Методом елементарних перетворень обчислити матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&2&-3\\2&1&-1\end{pmatrix}.$$

Припишемо праворуч до матриці A одиничну матрицю E і перетворимо одержану матрицю $\Gamma_A=(A|E)$ до вигляду $(E|A^{-1})$:

$$\Gamma_A=(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\2&2&-3&0&1&0\\2&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2-2e_1\\\sim\\e_3-2e_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&4&-7&-2&1&0\\0&3&-5&-2&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\sim\\e_2-e_3\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&-2&0&1&-1\\0&3&-5&-2&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}e_1+e_2\\\sim\\e_3-3e_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&1&-2&0&1&-1\\0&0&1&-2&-3&4\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2+2e_3\\\sim\\\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&1&0&-4&-5&7\\0&0&1&-2&-3&4\end{array}\right)=\left(E\middle|A^{-1}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-4&-5&7\\-2&-3&4\end{pmatrix}.$$

<u>Приклад 2.9.</u> Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&1\\2&-1&4\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

1. Знаходимо визначник матриці $A:|A|=\begin{vmatrix}3&-1&0\\-2&1&1\\2&-1&4\end{vmatrix}=5$.

Оскільки $\Delta\neq0$, то обернена матриця існує.

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$A_{11}=+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4+1=5$, $\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-(-4)=4$,

$A_{12}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-(-8-2)=10$, $\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12$,

$A_{13}=+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1-0=-1$, $\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-(-3+2)=1$,

$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$, $\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3$,

$A_{33}=+\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1$.

Складаємо матрицю з алгебраїчних доповнень: $\overline{A}=\begin{pmatrix}5 & 10 & -1\\ 4 & 12 & 1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Транспонуємо матрицю $\overline{A}$ і знаходимо: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Множимо транспоновану матрицю на число $\dfrac{1}{\Delta}$.

Отже, обернена матриця $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -3/5\\ -1/5 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -3/5\\ -1/5 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}$.

<u>Приклад 2.10.</u> Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & 1\\ 1 & -2 & -4\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

1. Обчислимо визначник матриці: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$.

Оскільки |A|=0, то матриця А вироджена, тобто оберненої для неї не існує.

Приклад 2.11. Розглянемо екосистему з n конкуруючих видів. Визначимо матрицю споживання $A = (a_{ij})$ розміру $(n \times n)$ в якій елемент a_{ij} виявляє середню кількість особин j-го виду, яку зїдає в день середня особина i-го виду. Зрозуміло, що $a_{ij} = 0$. Припустимо, що споживання i-го виду приносить хижакові енергетичний дохід у r_i калорій. Визначимо $\vec{r}$ -вектор-стовпець, у якого i-та компонентна дорівнює r_i. Тоді компоненти вектора Ar свідчимуть про середнє добове отримання калорій особиною i-го виду.

Приклад 2.12. Нехай маємо матрицю $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ для руху між двома популяціями, які містять 54 та 108 особин, тобто $n = \binom{54}{108}$. Після міграції, нову чисельність популяцій можна представити елементами матриці, яка є добутким матриць

К= М× n = $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \binom{54}{108} = \binom{72}{90}$.

Повторення міграції приведе до Д= М ×К=$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \binom{72}{90} = \binom{78}{84}$ і далі $\binom{80}{82}$ зрештою $\binom{81}{81}$. Отже, $\binom{81}{81}$ – власний вектор матриці М, що відповідає власному значенню 1. Звідси випливає, що будь яка симетрична картина міграції, що представлена елементами матриці М, не змінює чисельності популяцій, як тільки остані стають рівними.

Ранг матриці.

Виділимо в матриці $A_{m\times n}$ k довільно обраних рядків і k стовпців. Визначник k-го порядку, складений з елементів, розташованих на перетині виділених рядків і стовпців, називають *мінором* k-го *порядку* і позначають M_k.

Рангом матриці A називається *найбільший порядок* відмінного від нуля мінора матриці. Ранг матриці A позначається $rang(A)$, $rg(A)$, $r(A)$.

Якщо $r(A) = r$, то знайдеться хоча б один мінор $M_r \neq 0$, а *всі* мінори порядку, більшого ніж r, дорівнюють нулю.

Зауваження 1. Ранг матриці визначається *кількістю рядків* ненульового мінора, а не його значенням.

Зауваження 2. Ранги еквівалентних матриць співпадають.

<u>Приклад 2.13.</u> Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 22 & 3 \\ 2 & 8 & 14 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Оскільки третій рядок пропорційний першому ($e_3 = 2e_1$), то будь-який мінор 3-го порядку $M_3 = 0$ (за властивістю 6 визначників).

Мінор 2-го порядку:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Нехай ранг матриці A дорівнює r. Тоді будь-який, *відмінний від нуля*, *мінор порядку* r називають *базисним*. Рядки й стовпці матриці A, на перетині яких розташовані елементи базисного мінора, називають *базисними*. Матриця може мати кілька базисних мінорів.

Обчислення рангу матриць методом елементарних перетворень.

Елементарними перетвореннями можна звести матрицю A до еквівалентної трапецієподібної матриці:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}, \text{ де } a_{ii} \neq 0 \ (i = 1, 2, \dots, r).$$

Ранг такої матриці дорівнює *кількості ненульових рядків*, а оскільки ранги еквівалентних матриць співпадають, то $r(A) = r$.

Приклад 2.14. Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ e_2 - 2e_1 \\ e_3 - 5e_1 \\ e_4 - 7e_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ e_3 - 2e_2 \\ e_4 - 2e_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \{\text{викреслюємо } e_3,\, e_4\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2.$$

§3. Системи лінійних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

де a_{ij} – задані коефіцієнти при невідомих;

b_i – вільні члени системи.

Система (3.1) називається однорідною, якщо $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ і неоднорідною, якщо хоча б одне з чисел b_i не дорівнює нулю.

Систему (3.1) можна записати у матричній формі:

$$A \cdot X = B, \tag{3.2}$$

де A – матриця коефіцієнтів при невідомих;

X – матриця-стовпець невідомих;

B – матриця-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Розв'язком системи (3.1) називається така сукупність чисел x_1, x_2, …, x_n, яка перетворює у тотожність кожне рівняння системи.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

Повну інформацію про систему містить її *розширена матриця* $\overline{A}$:

$$\overline{A}=(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (3.4)$$

Теорема Кронекера-Капеллі: для того, щоб система (3.1) була сумісною, необхідно й достатньо, щоб ранг матриці A дорівнював рангу розширеної матриці $\overline{A}$, тобто r(A) = r($\overline{A}$).

Схема дослідження систем.

1) якщо $r(A) \neq r(\overline{A})$ – система несумісна;
2) якщо $r(A) = r(\overline{A}) = r$ – система сумісна, причому:
   - при $r = n$ (ранг дорівнює кількості невідомих) система має *єдиний* розв'язок;
   - при $r < n$ система має безліч розв'язків. Базисні невідомі, коефіцієнти при яких увійшли в базисний мінор, виражаються лінійно через інші (*вільні*) невідомі.

Частинним розв'язком системи рівнянь називається розв'язок, в якому всім вільним невідомим задані конкретні числові значення.

Базисним розв'язком системи рівнянь називається розв'язок, в якому всі вільні невідомі дорівнюють нулю.

Фундаментальним розв'язком системи рівнянь називається розв'язок, в якому одна вільна невідома дорівнює одиниці, а всі інші вільні невідомі дорівнюють нулю.

Розв'язування систем методом Крамера

Нехай Δ – визначник матриці A системи (2.10), Δ_j – визначник, отриманий з визначника Δ заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів. Тоді:

- при $\Delta \neq 0$ система має єдиний розв'язок, що визначається формулами Крамера:

$$x_j = \Delta_j / \Delta \quad (j = 1, 2, \ldots, n); \qquad (3.5)$$

- якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна;
- при $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$ система або несумісна, або має безліч розв'язків.

Приклад 3.1. Розв'язати методом Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ – система має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами Крамера (3.5).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Приклад 3.2. Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ – система несумісна.

Приклад 3.3. Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 8. \end{cases}$$

Третє рівняння системи дорівнює сумі першого та другого рівнянь, отже, усі визначники третього порядку дорівнюють нулю: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Однак перше рівняння несумісне з другим. Система несумісна.

Приклад 3.4. Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Третє рівняння системи дорівнює сумі першого та другого рівнянь, отже, усі визначники третього порядку дорівнюють нулю: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Оскільки мінор другого порядку, складений із коефіцієнтів при x_1, x_2 першого та другого рівнянь системи, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$ то ранг системи дорівнює 2, система має лише два лінійно незалежні рівняння і три невідомі. Така система має безліч розв'язків. Базисні змінні x_1, x_2 можна виразити через вільну змінну x_3. Залишимо в системі два перші лінійно незалежні рівняння та запишемо її у вигляді: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - x_3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 + 4x_3. \end{cases}$

Знайдемо розв'язок за формулами Крамера (3.5):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 - x_3 & 1 \\ 2 + 4x_3 & 3 \end{vmatrix} = 7 - 7x_3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 - x_3 \\ 2 & 2 + 4x_3 \end{vmatrix} = 6x_3 - 4,$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 7 - 7x_3, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 6x_3 - 4, \end{cases} \textbf{ або } \begin{cases} x_1 = 7 - 7c, \\ x_2 = 6c - 4, \\ x_3 = c, \end{cases}$$ **де c – довільна стала.**

Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих)

Припустимо що $a_{11} \neq 0$ (якщо це не так, то переставимо рівняння системи так, щоб $a_{11} \neq 0$). З першого рівняння системи виразимо змінну x_1 через інші змінні і підставимо у 2, 3,…, m-те рівняння. У результаті змінна x_1 виключиться з усіх рівнянь, крім першого.

Потім із другого рівняння виразимо змінну x_2 через x_3, x_4, …, x_n і підставимо у 3, 4,…, m-те рівняння. У результаті змінна x_2 виключиться з усіх рівнянь, крім першого та другого.

Аналогічно виключимо змінну x_3 із 4, 5, …, m-го рівнянь та ін.

У процесі виключення змінних можуть з’явитися рівняння вигляду:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0. \tag{3.6}$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_k, \quad (b_k \neq 0). \tag{3.7}$$

Рівняння (3.6) слід відкинути, тому що його задовольняє будь-який набір невідомих. Рівняння (3.7) свідчить про несумісність системи, тому що жоден набір невідомих не задовольняє таке рівняння.

Якщо в процесі виключення невідомих не зустрінеться рівняння вигляду (3.7), то система сумісна. При цьому отримаємо еквівалентну систему трикутного (3.8) чи трапецієподібного (3.9) вигляду.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1r}x_r + & a_{1r+1}x_{r+1} + & \ldots & + a_{1n}x_n & = b_1, \\ & x_2 + & \ldots & + a_{2r}x_r + & a_{2r+1}x_{r+1} + & \ldots & + a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & x_r + & a_{rr+1}x_{r+1} + & \ldots & + a_{rn}x_n & = b_r. \end{cases} \tag{3.9}$$

Система (3.8) має єдиний розв’язок, а (3.9) – безліч розв’язків

Приклад 3.5. Методом Гаусса розв’язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Перетворюємо розширену матрицю системи:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&5\\2&2&-3&-3\\2&1&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2-2e_1\\ \sim\\ e_3-2e_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&5\\0&4&-7&-13\\0&3&-5&-9\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2-e_3\\ \sim\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&5\\0&1&-2&-4\\0&3&-5&-9\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ e_3-3e_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&5\\0&1&-2&-4\\0&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{c}e_1-2e_3\\ \sim\\ e_2+2e_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{c}e_1+e_2\\ \sim\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=2.\\x_3=3\end{cases}$$

Приклад 3.6. Методом Гаусса розв’язати систему: $\begin{cases}x_1+3x_2=7,\\2x_1+x_2=4,\\4x_1+7x_2=18.\end{cases}$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c}1&3&7\\2&1&4\\4&7&18\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2-2e_1\\ \sim\\ e_3-4e_1\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&7\\0&-5&-10\\0&-5&-10\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2/(-5)\\ \sim\\ e_3/(-5)\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&7\\0&1&2\\0&1&2\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ e_3-e_2\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&7\\0&1&2\\0&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&3&7\\0&1&2\end{array}\right)\begin{array}{c}e_1-3e_2\\ \sim\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&2\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=1,\\x_2=2.\end{cases}$$

Приклад 3.7. Методом Гаусса розв’язати систему: $\begin{cases}x_1-3x_2+4x_3=4,\\-2x_1+6x_2-8x_3=5.\end{cases}$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&4&4\\-2&6&-8&5\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\ e_2+2e_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&4&4\\0&0&0&13\end{array}\right)\text{ – система несумісна.}$$

Приклад 3.8. Методом Гаусса розв’язати систему:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-x_4-3x_5=5,\\2x_1+5x_2+3x_3+\qquad x_5=3,\\3x_1+7x_2+7x_3-x_4-2x_5=8.\end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&4&-1&-3&5\\2&5&3&0&1&3\\3&7&7&-1&-2&8\end{array}\right)\begin{array}{c}e_2-2e_1\\ \sim\\ e_3-3e_1\end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&4&-1&-3&5\\0&1&-5&2&7&-7\\0&1&-5&2&7&-7\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ e_3-e_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&4&-1&-3&5\\0&1&-5&2&7&-7\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}e_1-2e_2\\ \sim\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&14&-5&-17&19\\0&1&-5&2&7&-7\end{array}\right).$$

Оскільки $r(A)=r(\overline{A})=2<n=5$, то система має безліч розв’язків. Змінні x_1, x_2 – базисні, x_3, x_4, x_5 – вільні. Запишемо систему рівнянь, що відповідає останній матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 0\cdot x_2 + 14x_3 - 5x_4 - 17x_5 = 19, \\ 0\cdot x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 19 - 14x_3 + 5x_4 + 17x_5, \\ x_2 = -7 + 5x_3 - 2x_4 - 7x_5. \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи можна записати у вигляді: $x_1 = 19 - 14c_3 + 5c_4 + 17c_5$, $x_2 = -7 + 5c_3 - 2c_4 - 7c_5$, $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$, де c_3, c_4, c_5 – довільні сталі.

При $c_3 = c_4 = c_5 = 1$ отримаємо один із *частинних* розв'язків:

$x_1 = 27,\ \ x_2 = -11,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = 1,\ \ x_5 = 1.$

При $c_3 = c_4 = c_5 = 0$ отримаємо *базисний розв'язок*:

$x_1 = -19,\ \ x_2 = -7,\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = 0,\ \ x_5 = 0.$

Якщо в загальному розв'язку почергово одну зі сталих c_3, c_4, c_5 прирівняти одиниці, а інші – нулю, то отримаємо *фундаментальну систему розв'язків*:

$X_1^T = (-33\ \ -2\ \ 1\ \ 0\ \ 0),\quad X_2^T = (-14\ \ -9\ \ 0\ \ 1\ \ 0),\quad X_3^T = (-2\ \ -14\ \ 0\ \ 0\ \ 1).$

Системи *n* лінійних рівнянь із *n* невідомими

Розглянемо методи, придатні лише для розв'язання систем n-го порядку (n рівнянь із n невідомими):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.10}$$

Систему (3.10) запишемо також у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B, \tag{3.11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матричний метод розв'язування систем (метод оберненої матриці)

Якщо матриця A системи (3.10) невироджена ($\det A \neq 0$), то її розв'язок може бути поданий у вигляді:

$$X = A^{-1}B. \tag{3.11}$$

<u>Приклад 3.9.</u> Методом оберненої матриці розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$ Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник Δ і алгебраїчні доповнення A_{ik} елементів a_{ik}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-1) + (-1)\cdot(-3)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 2 - (2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot(-3)\cdot 1 + (-1)\cdot 2\cdot(-1)) = 1.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+3 = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+6) = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-4 = -2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок системи:

$$X = A^{-1}B, \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 1\cdot(-3) - 1\cdot 1 \\ -4\cdot 5 - 5\cdot(-3) + 7\cdot 1 \\ -2\cdot 5 - 3\cdot(-3) + 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2. \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Зауваження. Метод оберненої матриці зручно застосовувати для багаторазового розв'язування систем з однією і тією ж матрицею A і різними матрицями вільних членів B.

Змістовий модуль 2. Елементи векторної алгебри

§ 1. Вектори в системі координат

Вектор $\overrightarrow{AB}$ – це напрямлений відрізок із початком у точці A і кінцем у точці B. Вектори позначаються як двома великими літерами, так і однією малою зі стрілкою, наприклад, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ (рис. 1).

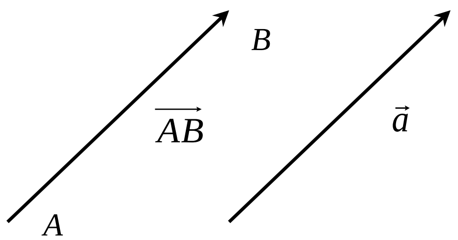


Рис. 1. Зображення й позначення векторів.

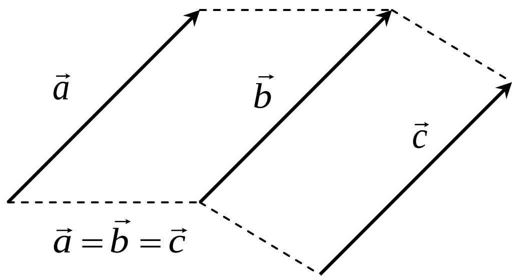


Рис. 2. Рівні вектори.

Довжину (*модуль*) вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають $|\overrightarrow{AB}|$.

Якщо $|\vec{a}|=0,$ то вектор називають *нульовим* і позначають $\vec{0}$.

Якщо $|\vec{a}|=1,$ то вектор $\vec{a}$ називають *одиничним*, або *ортом.*

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Колінеарність позначають символом $\|$: $\vec{a}\,\|\,\vec{b}$.

Вектори, які паралельні одній площині, називаються *компланарними*.

Вектори називають *рівними*, якщо вони мають однакові довжини та однаково напрямлені (рис. 2).

Операції над векторами.

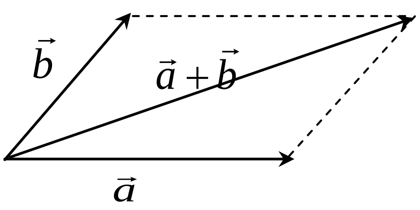


Рис. 3. Правило паралелограма

Додавання векторів. Щоб побудувати суму даних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки та побудувати на них паралелограм. Сумою векторів буде діагональ, що виходить з початку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рис. 3.). Цей спосіб побудови називається правилом паралелограма.

Суму двох векторів можно побудувати ще й за правилом трикутника.

Відкласти вектор $\bar{b}$ від кінця вектора $\bar{a}$. Сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ буде вектор, що з’єднує початок $\bar{a}$ з кінцем $\bar{b}$ (рис. 4).

Щоб побудувати суму n даних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, треба від довільної точки відкласти $\bar{a}_1$, потім від його кінця відкласти $\bar{a}_2$ і т.д., нарешті від кінця $\bar{a}_{n-1}$ відкласти $\bar{a}_n$. Сумою векторів буде вектор, напрямлений від початку $\bar{a}_1$ до кінця $\bar{a}_n$ (рис. 5).

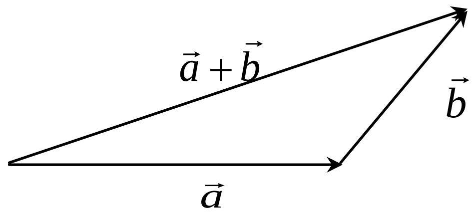


Рис. 4 Правило трикутника.

Віднімання векоторів. Щоб побудувати різницю векторів $\bar{a}-\bar{b}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, з’єднати їх кінці та вибрати на цьому відрізку напрямок від кінця $\bar{b}$ до кінця $\bar{a}$ (рис. 6).

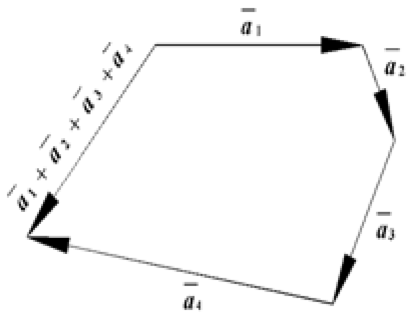


Рис. 5.

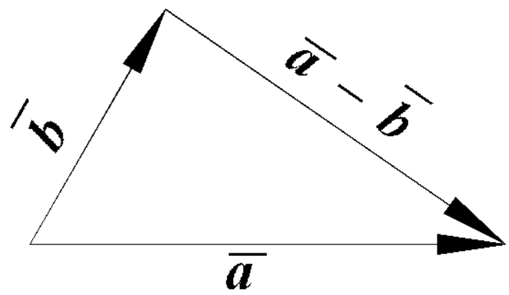


Рис. 6.

Множення вектора на число

Добутком ненульового вектора $\bar{a}$ на число k називається вектор, який має напрям вектора $\bar{a}$, якщо $k>0$, і протинапрям, якщо $k<0$ (при $k=0$, $0\cdot\bar{a}=\bar{0}$).

Ці три операції називаються лінійними операціями з векторами. Якщо векторів більше двох, то їх суму можна знайти за правилом трикутника (правило багатокутника). Даний метод корисний при визначенні швидкості корабля, політу птаха, переміщення плавця чи рибини. Так, наприклад, у прикладі про птаха чи рибину, результуюча швидкість дорівнюватиме сумі двох векторів. Нехай птах чи рибина рухається у повітрі чи то у воді зі швидкістю $\vec{V}_n, \vec{V}_m$ - швидкість повіртя (течії). Як наслідок вектор результуючої швидкості $\vec{v}$ буде дорівнювати сумі векторів $\vec{V}_n + \vec{V}_m$, яка визанчеється за правилом трикутника (рис. 7).

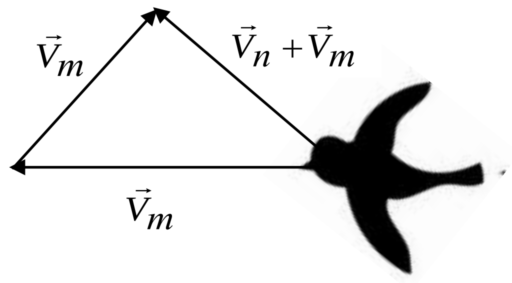


Рис. 7.

Лінійна незалежність векторів

Вираз виду $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n$, де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – числа, називається *лінійною комбінацією векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нулю тільки тоді, коли $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$:

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0. \tag{1.1}$$

Якщо хоча б одне із чисел $c_k \neq 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, оскільки принаймні один із векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації інших, наприклад, при $c_1 \neq 0$:

$$\vec{a}_1 = \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n, \quad \lambda_i = -c_i/c_1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{1.2}$$

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів простору називається *розмірністю простору*.

Істинні такі твердження:

Будь-які два колінеарні вектори лінійно залежні (рис. 8).

Будь-які три компланарні вектори лінійно залежні (рис. 9).

Будь-які чотири вектори у тривимірному просторі лінійно залежні.

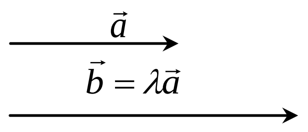


Рис. 8.

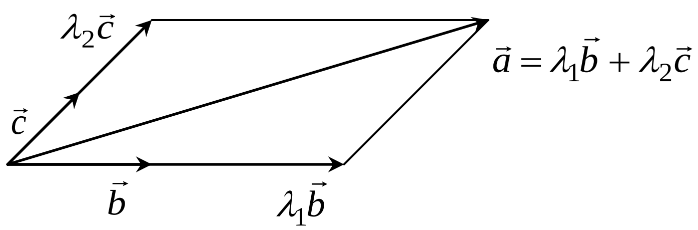


Рис. 9.

Базис. Розкладання вектора за базисом

Упорядкована сукупність n лінійно незалежних векторів n-вимірного простору R^n називається *базисом*.

Базисом на прямій (у R^1) називається будь-який ненульовий вектор.

Базисом на площині (у R^2) називаються два упорядковані *неколінеарні* вектори.

Базисом у тривимірному просторі (R^3) називаються три упорядковані *некомпланарні* вектори.

Якщо базисні вектори взаємно перпендикулярні (ортогональні), базис називають *ортогональним*. *Ортонормованим* називають ортогональний базис, утворений *одиничними* векторами.

Якщо вектор $\vec{a}$ поданий у вигляді лінійної комбінації базисних векторів:

$$\vec{a} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3, \tag{1.3}$$

то кажуть, що він розкладений за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Вектори $c_1\vec{e}_1,\ c_2\vec{e}_2,\ c_3\vec{e}_3$ називають *складовими* (*компонентами*) вектора $\vec{a}$, а числа c_1, c_2, c_3 – його *координатами* в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Зазвичай пишуть так: $\vec{a} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$.

На рис. 10 наведено приклад розкладу вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$. Координатами вектора $\vec{a}$ є числа (3, 2), а складовими – вектори $3\vec{e}_1$ і $2\vec{e}_2$.

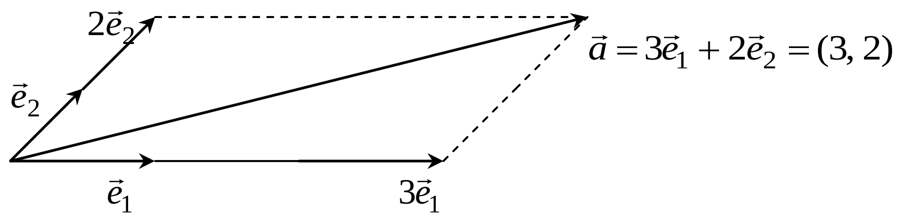


Рис. 10. Розклад вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Лінійні операції над векторами в координатній формі

Нехай у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дані вектори:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 = (b_1, b_2, b_3).$$

Тоді лінійні операції визначаються так:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1)\vec{e}_1 + (a_2 \pm b_2)\vec{e}_2 + (a_3 \pm b_3)\vec{e}_3 = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3),$$
$$\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 + \lambda a_3\vec{e}_3 = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3). \qquad (1.4)$$

Проекція вектора на вісь

Розрізняють геометричну та алгебраїчну проекцію вектора на вісь.

Проекцією точки A на вісь L називається основа перпендикуляра (точка A_1), опущеного з точки A на дану вісь (рис. 11).

Алгебраїчною проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L (рис. 12):

$$Пр_L \overrightarrow{AB} = x_B - x_A = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi. \qquad (1.5)$$

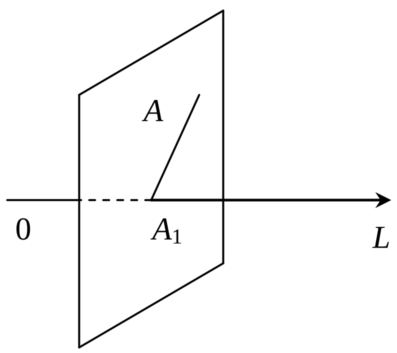


Рис. 11. Точка A_1 – проекція точки A на вісь L.

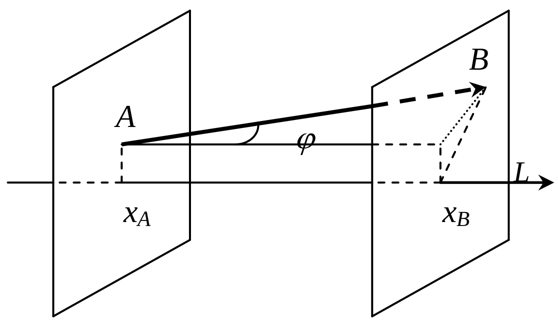


Рис. 12. Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L.

Геометричною проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L називається вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, де A_1, B_1 – проекції точок A і B на вісь L.

Вектори в ортонормованому базисі.

Декартова прямокутна система координат

Афінна система координат, що пов'язана з ортонормованим базисом, називається *декартовою прямокутною системою координат*. Її базисні вектори, що пов'язані з осями Ox, Oy, Oz, позначають $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Якщо a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z). \quad (1.6)$$

Якщо в базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ задані координати початку й кінця вектора $\overrightarrow{AB}$: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 13), то

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (1.7)$$

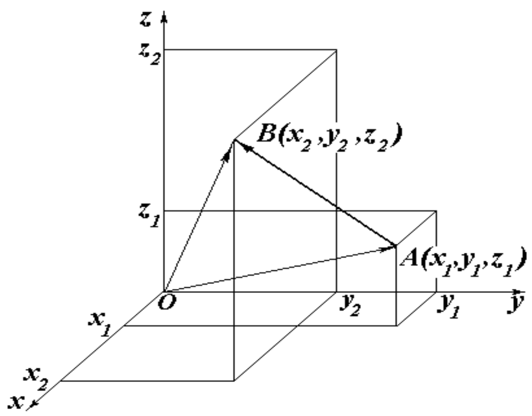


Рис. 13. Розкладання вектора $\overrightarrow{AB}$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Лінійні операції над векторами в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Лінійні операції над векторами $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$ визначаються так:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z), \quad (1.8)$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z). \quad (1.9)$$

Полярна система координат

Крім декартової системи координат на площині існують інші системи, зокрема *полярна система координат*.

Зафіксуємо на площині довільну точку *O*, яку назвемо *полюсом* та промінь *OA*, який назвемо *полярною віссю*. Задамо масштабну одиницю для вимірюванняя довжини відрізків. Домовимося, поворот навколо точки *O* проти ходу годинникової стрілки вважати додатніми. Величини кутів будемо виражати в радиальній мірі.

Нехай *M* – довільна точка площини. Позначимо через ρ відстань від точки *M* до полюса *O* та буквою φ – величину кута, на який потрібно повернути полярну вісь *OA*, щоб сумістити її з променем *OM* (рис. 14).

Рис. 14.

Величини ρ *і* φ називаются *полярними координатами* точки *M*, ρ – *полярним радіусом*, – *полярним кутом*. Кожній точці площини відповідає певне значення ρ *і* φ. Значення для точок відмінних від полюса, визначається з точністю до сталої $2\pi k$, где k – довільне ціле число. Для полюса $\rho=0$ і значення φ не визначено.

Співвідношення (1.10) встановлює зв'язок між полярними (ρ, φ) та декартовими (x, y) координатами точки *M*:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Напрямні косинуси вектора

Напрямними косинусами вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ називаються косинуси кутів α, β, γ, які утворює вектор з координатними осями (рис. 15):

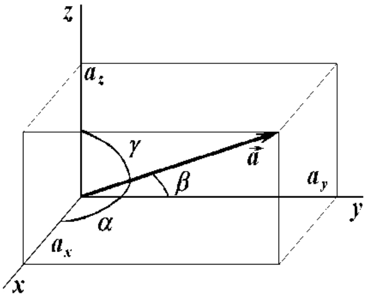


Рис. 15.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \qquad (1.11)$$

Напрямні косинуси задовольняють умову:

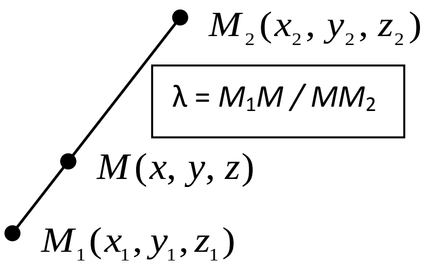
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (1.12)$$

Координати орта вектора є його напрямними косинусами:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \qquad (1.13)$$

Поділ відрізка в заданому відношенні

Координати точки $M(x, y, z)$, яка поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = M_1M / MM_2$ (рис. 16), визначаються через координати точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ за формулами:



$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (1.14)$$

При λ=1 отримаємо *координати середини відрізка* M_1M_2:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (1.15)$$

Рис. 16.

<u>Приклад 1.1.</u> Визначити, чи є лінійно залежними вектори:

$\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 5, 6)$, $\vec{c} = (5, 1, -4)$.

Вектори лінійно залежні, якщо існують такі, одночасно не рівні нулю числа c_1, c_2, c_3, що $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0}$. Маємо:

$c_1(2, 3, 1) + c_2(-1, 5, 6) + c_3(5, 1, -4) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2c_1 - c_2 + 5c_3, 3c_1 + 5c_2 + c_3, c_1 + 6c_2 - 4c_3) = (0, 0, 0)$.

Звідси отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 + 5c_3 = 0, \\ 3c_1 + 5c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 + 6c_2 - 4c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -40 - 1 + 90 - (25 + 12 + 12) = 0.$$

Однорідна система має ненульові розв’язки, якщо її визначник дорівнює нулю. Отже, вектори лінійно залежні.

<u>Приклад 1.2.</u> Показати, що вектори $\vec{a}$= (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (1, 3, 1), $\vec{c}$ = (1, 2, 1) утворюють базис у R^3 і знайти координати вектора $\vec{d}$ =(3, 7, 5) у цьому базисі.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні, тобто якщо рівність $c_1\vec{a}+c_2\vec{b}+c_3\vec{c}=\vec{0}$ можлива лише при c_1=c_2=c_3=0. Отримаємо однорідну систему:

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=3, \\ 2c_1+3c_2+2c_3=7, \\ 3c_1+c_2+c_3=5, \end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Визначник $\Delta\neq 0$ – система має лише нульовий розв’язок, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні й утворюють базис у просторі R^3.

Розкладемо вектор $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=7, \\ 3x_1+x_2+x_3=5. \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim e_2-2e_1 \sim \\ e_3-3e_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim e_3/(-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1-e_2 \\ \sim \qquad \sim \\ e_3-e_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1-e_3 \\ \sim \qquad \sim \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=1, \Rightarrow \vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}. \\ x_3=1 \end{cases}$$

<u>Приклад 1.3.</u> Дано вектори $\vec{a}=(1,-2,4),\ b=(3,5,6).$

Знайти $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b},\ 2\vec{a}-3\vec{b}.$

$\vec{a}+\vec{b}=(1,-2,4)+(3,5,6)=(1+3,-2+5,4+6)=(4,3,10),$

$\vec{a}-\vec{b}=(1,-2,4)-(3,5,6)=(1-3,-2-5,4-6)=(-2,-7,-2),$

$2\vec{a}-3\vec{b}=2(1,-2,4)-3(3,5,6)=(2,-4,8)-(9,15,18)=(-7,-19,-10).$

<u>Приклад 1.4</u>. Чи може вектор складати з координатними осями кути: $\alpha=45^\circ$, $\beta=135^\circ$, $\gamma=60^\circ$? Обчислимо косинуси кутів:

$\cos\alpha=\cos\ 45^\circ=\sqrt{2}/2,\quad \cos\beta=\cos\ 135^\circ=-\sqrt{2}/2,\quad \cos\gamma=\cos\ 60^\circ=1/2.$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1/2+1/2+1/4=5/4\neq 1.$

Вектор не може складати з координатними осями задані кути.

Приклад 1.5. Знайти координати точки перетину медіан трикутника з вершинами $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B,\ y_B, z_B)$, $C(x_C,\ y_C,\ z_C)$.

Знайдемо координати точки D – середини відрізка BC:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}, \quad z_D = \frac{z_B + z_C}{2}.$$

Медіани трикутника перетинаються в точці M, яка поділяє відрізок AD у відношенні $\lambda = AM/MD = 2/1$. Координати точки M:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{x_A + 2x_D}{1+2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3},$$

$$z_M = \frac{z_A + \lambda z_D}{1+\lambda} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Приклад 1.6. Знайти координати кінців відрізка AB, який поділений на 3 рівні частини точками $P(1, 0, 3)$ і $Q(-1, 2, 6)$.

Точка P є серединою відрізка AQ, тому її координати:

$$x_P = \frac{x_A + x_Q}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_Q}{2}, \quad z_P = \frac{z_A + z_Q}{2}.$$

Звідси знаходимо координати точки A:

$$x_A = 2x_P - x_Q = 2\cdot 1 - (-1) = 3, \quad y_A = 2y_P - y_Q = 2\cdot 0 - 2 = -2,$$

$$z_A = 2z_P - z_Q = 2\cdot 3 - 6 = 0 \Rightarrow A(3, -2, 0).$$

Аналогічно знаходимо координати точки B:

$$x_B = 2x_Q - x_P = 2\cdot(-1) - 1 = -3, \quad y_B = 2y_Q - y_P = 2\cdot 2 - 0 = 4,$$

$$z_B = 2z_Q - z_P = 2\cdot 6 - 3 = 9 \Rightarrow B(-3, 4, 9).$$

§2. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le \pi). \qquad (2.1)$$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$;

3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

4) $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \ge 0$.

Геометричні властивості скалярного добутку

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ – умова перпендикулярності векторів;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0 \Leftrightarrow \varphi$ –гострий кут;

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0 \Leftrightarrow \varphi$ –тупий кут.

Скалярний добуток в ортонормованому базисі

У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ скалярний добуток векторів

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}=(b_x, b_y, b_z)$$

дорівнює сумі добутків їх відповідних координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (2.2)$$

Деякі важливі формули

☑ довжина вектора $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}; \qquad (2.3)$$

☑ відстань між двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}; \qquad (2.4)$$

☑ косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}; \qquad (2.5)$$

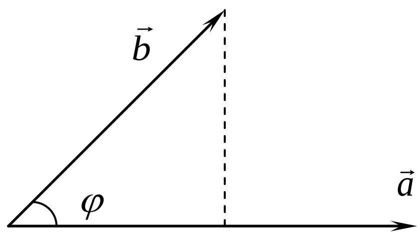
☑ необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}; \qquad (2.6)$$

☑ проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ (рис. 17):

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\vec{b}\cdot\vec{a}_0=$$

$$=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \quad \vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$



$Пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi$

Рис. 17.

<u>Приклад 2.1.</u> Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\pi/3$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$.

Знайти: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 4) $Пр_{\vec{a}}\vec{b}$.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=2\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=6\cdot\frac{1}{2}=3$;

2) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 2^2 = 4;$

3) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + |\vec{b}|^2 =$

$$= 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + 3^2 = 19;$$

4) $Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\cos\varphi = 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$

<u>Приклад 2.2.</u> Дано вершини трикутника $A(1, -3, 0)$; $B(0, -1, -2)$; $C(-1,-2,2)$. Визначити його внутрішній кут φ при вершині B.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{BA} = (1, -2, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 4)$ та їх довжини:
$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}$.

Обчислимо косинус кута φ між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{1\cdot(-1) + (-2)\cdot(-1) + 2\cdot 4}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \varphi = 45^\circ.$$

<u>Приклад 2.3.</u> Дано три вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$, $\vec{c} = (8, -7, 2)$. Знайти $Пр_{2\vec{b}-\vec{c}}(\vec{a}+\vec{c})$.

Введемо вектори:

$\vec{d} = 2\vec{b} - \vec{c} = 2(3, -4, 2) - (8, -7, 2) = (-2, -1, 2),$

$\vec{g} = \vec{a} + \vec{c} = (1, 2, 3) + (8, -7, 2) = (9, -5, 5).$

Обчислимо довжину й орт вектора $\vec{d}$:

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3,\quad \vec{d}_0 = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

За формулою (6.19) знайдемо проекцію вектора $\vec{g} = \vec{a} + \vec{c}$ на вектор $\vec{d} = 2\vec{b} - \vec{c}$:

$$Пр_{2\vec{b}-\vec{c}}(\vec{a}+\vec{c}) = Пр_{\vec{d}}\vec{g} = \vec{g}\cdot\vec{d}_0 = 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

<u>Приклад 2.4.</u> При якому m вектори $\vec{a} = (m, 3, -4)$, $\vec{b} = (-2, m, 1)$ взаємноперпендикулярні?

Необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = -2m + 3m - 4 = m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4.$$

Приклад 2.5. Знайти довільний вектор $\vec{d}$, напрямлений уздовж бісектриси кута між векторами $\vec{a} = (0, 3, 4)$ і $\vec{b} = (4, 7, 4)$.

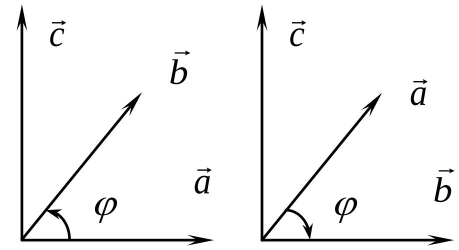
Сума двох векторів, що мають однакові довжини, напрямлена уздовж бісектриси кута між векторами. Знайдемо орти векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(0, 3, 4)}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(4, 7, 4)}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \left(\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9}\right).$$

Сума цих векторів напрямлена уздовж бісектриси кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a}_0 + \vec{b}_0 = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9}\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{62}{45}, \frac{56}{45}\right)$, $\Rightarrow$ $\vec{d} = \lambda(\vec{a}_0 + \vec{b}_0) = \lambda\left(\frac{4}{9}, \frac{62}{45}, \frac{56}{45}\right)$.

§ 3. Векторний добуток векторів

Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *правою* (*лівою*), якщо після зведення до спільного початку найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$, здійснюється проти обертання стрілки (за стрілкою) годинника (рис. 18).



Права трійка   *Ліва трійка*

Рис. 18.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається *вектор* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, що задовольняє умови (рис. 19):

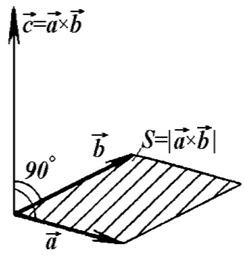


Рис. 19.

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними ($|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$);

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний кожному із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку.

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Геометричні властивості векторного добутку.

1. Необхідною й достатньою умовою колінеарності двох ненульових векторів є рівність нулю їхнього векторного добутку:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}. \qquad (3.1)$$

2. *Площа паралелограма*, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \qquad (3.2)$$

3. *Площа трикутника*, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \qquad (3.3)$$

Векторний добуток в ортонормованому базисі.

У базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторний добуток векторів

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x, b_y, b_z),$$

обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}. \qquad (3.4)$$

Наслідок. Вектори $\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$ і $\vec{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}. \qquad (3.5)$$

У біології векторний добуток використовується при вивчення молекул, які відіграють основну роль у підтримці життя, наприклад, ДНК та таких більків як міоглобін. При їх вивчені біофізики використовують класичні поняття фізики та вимірюють величини, що розраховуються як векторний добутов. Наприклад – дипольний момент – електромагнітну силу, що діє на частинку в магнітному полі.

<u>Приклад 3.1.</u> Знайти площу трикутника з вершинами $A(-1, -3, 0)$, $B(7, -13, 0)$, $C(-1, 1, -3)$ та довжину висоти h, опущеної з вершини B на сторону AC. Площа трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку векторів
$\overrightarrow{AB} = (8, \ -10, \ 0)$ і $\overrightarrow{AC} = (0, \ 4, -3)$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -10 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 30\vec{i} + 24\vec{j} + 32\vec{k},$ то

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{30^2 + 24^2 + 32^2} = \frac{\sqrt{2\,500}}{2} = 25 \text{ (од.}^2\text{)}.$$

З іншого боку, площу трикутника можна обчислити за формулою $S_\Delta = \left|\overrightarrow{AC}\right| h/2,$ звідки знаходимо висоту трикутника:

$$h = \frac{2S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{50}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2}} = 10.$$

<u>Приклад 3.2</u>. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4, -2, -3)$ і $\vec{b} = (0, 1, 3)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, якщо $|\vec{x}| = 26$.

Вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тому:

$$\vec{x} = \lambda\vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \lambda[-3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}].$$

Довжина вектора $\vec{x}$:

$$|\vec{x}| = |\lambda|\sqrt{(-3)^2 + (-12)^2 + 4^2} = 13|\lambda| = 26 \Rightarrow |\lambda| = 2.$$

Оскільки вектор $\vec{x}$ утворює з віссю Oy тупий кут, то його проекція на вісь Oy повинна бути від’ємною, тому обираємо $\lambda = 2$.

$$\vec{x} = 2[-3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}] = -6\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}.$$

§ 4. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів називається *число*, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a}\times\vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Основна алгебраїчна властивість мішаного добутку

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=-\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}. \qquad (4.1)$$

Геометричні властивості мішаного добутку

☑ Об’єм паралелепіпеда побудованого на трьох векторах:

$$V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

(4.2)

Мішаний добуток некомпланарних векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком плюс, якщо трійка векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ права, і зі знаком мінус, якщо трійка ліва (рис. 20): $\vec{a}\times\vec{b}=\pm V$.

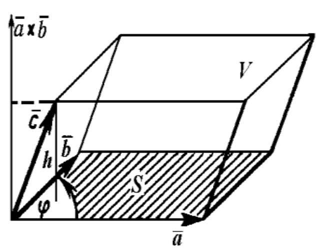
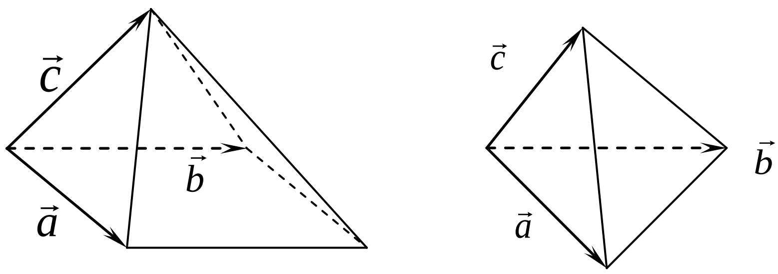


Рис. 20.



а) б)

Рис. 21.

☑ Об’єм чотирикутної піраміди (рис. 21 а):

$$V=\frac{1}{3}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \qquad (4.3)$$

☑ Об’єм трикутної піраміди (рис. 21 б):

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \qquad (4.4)$$

Необхідна й достатня умова компланарності трьох векторів:

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\ =0 \Leftrightarrow$ вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарні. (4.5)

1. Якщо $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} > 0$ – трійка векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ права; (4.6)

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} < 0$ – трійка векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ліва.

Мішаний добуток в ортонормованому базисі.

У базисі $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ мішаний добуток векторів $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$ дорівнює визначнику:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Необхідна й достатня умова компланарності трьох векторів:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

<u>Приклад 4.1.</u> Чи є компланарними вектори $\vec{a}=(1,-1,4)$, $\vec{b}=(-2,3,2)$, $\vec{c}=(3,-4,2)$?

Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} \\ e_2+2e_1 \\ e_3-3e_1 \end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -10 \end{vmatrix}=0$$

– вектори компланарні.

<u>Приклад 4.2.</u> З'ясувати, праву чи ліву трійку утворюють вектори $\vec{a}$=(2, 1, 4), $\vec{b}$= (4, –1, 2), $\vec{c}$= (3, –1, 4) і знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} \\ e_2+e_1 \\ e_3+e_1 \end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}=-18.$$

Оскільки мішаний добуток від'ємний – трійка векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ліва.

$$V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=|-18|=18\ (\text{од.}^3).$$

Приклад 4.3. Дано вершини піраміди $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 1)$, $C(2, 5, 24)$,
$D(3, 0, -2)$. Знайти довжину висоти, опущеної з вершини D.

Введемо вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1,\ -3,\ -2),\quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1,\ 3, -1),\quad \vec{c} = \overrightarrow{AD} = (2,\ -2, -5).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix} e_1 + e_2 \\ \\ e_3 - 2e_2 \end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 24.$$

Обчислимо об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| = \frac{1}{6}|\,24\,| = 4 \ (\text{од.}^3).$$

Знайдемо площу основи піраміди – трикутника ABC, яка дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + (-3)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \ (\text{од.}^2).$$

Об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3\cdot 4}{3\sqrt{10}/2} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Змістовий модуль 3. Елементи аналітичної геометрії
§ 1. Пряма лінія на площині

Декартова прямокутна система координат задається двома взаємно перпендикулярними координатними осями: *Ox* (вісь абсцис) і *Oy* (вісь ординат), які перетинаються у точці *O* (початку координат).

Відстань між точками $M_1(x_1;\ y_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2)$ обчислюється за формулою:

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.1)$$

Найпростішою лінією на площині є пряма.

1. *Загальним рівнянням* прямої на площині називається рівняння 1-го степеня відносно *x* та *y* вигляду

$Ax + By + C = 0$, де $A^2 + B^2 \neq 0$,

де $\vec{n} = (A; B)$ — вектор нормалі прямої (нормальний вектор прямої).

Розглянемо неповні рівняння прямої.

Неповним називається рівняння прямої, в якому принаймні один з коефіцієнтів *A*, *B* або *C* дорівнює нулю.

- ✓ при $A = 0$ пряма паралельна осі абсцис;
- ✓ при $B = 0$ пряма паралельна осі ординат;
- ✓ при $C = 0$ пряма проходить через початок координат

В прямокутній системі координат рівняння прямої на площині задається одним із наступних видів.

2. Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \qquad (1.2)$$

де $M(x_0; y_0)$ — деяка фіксована точка прямої, вектор $\vec{s} = (m; n)$ — напрямний вектор (вектор, паралельний цій прямій). Будь-який ненульовий вектор, який паралельний до даної прямої, називається напрямним вектором цієї прямої.

3. *Параметричні рівняння прямої*:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \end{cases} \qquad (1.3)$$

де $M(x_0; y_0)$ — деяка фіксована точка прямої, $\vec{s} = (m; n)$ — вектор напрямку прямої.

4. *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (1.4)$$

де $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ — деякі фіксовані точки прямої.

5. *Рівняння прямої "у відрізках на осях":*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (1.5)$$

де $A(a;0)$ — точка перетину прямої з віссю абсцис; $B(0;b)$ — точка перетину прямої з віссю ординат.

6. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:* $y = kx + b$, (1.6)

де $k = tg\alpha$ — кутовий коефіцієнт, α — кут, що утворює пряма з додатним напрямом осі абсцис, $B(0;b)$ — точка перетину прямої з віссю ординат.

Зауваження 1. Вертикальна пряма не має кутового коефіцієнта.

Зауваження 2. $y = kx$ – рівняння прямої, що проходить через початок координат,

$y = a$ (a=const) – рівняння прямої, паралельної осі OX,

$x = b$ (b=const) – рівняння прямої, паралельної осі OY.

7. *Рівняння прямої, яка проходить через задану точку, з відомим кутовим коефіцієнтом:*

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (1.7)$$

де $M(x_0; y_0)$ — деяка фіксована точка прямої, $k = tg\alpha$ — кутовий коефіцієнт, α — кут, що утворює пряма з додатним напрямом осі абсцис.

8. *Рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно заданому вектору* (в прямокутній декартовій системі координат):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \qquad (1.8)$$

де $M(x_0;y_0)$ — деяка фіксована точка прямої, $\vec{n}=(A;B)$ — вектор нормалі прямої (вектор, перпендикулярний прямій).

9. *Нормальне рівняння прямої* (в прямокутній декартовій системі координат):

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (1.9)$$

де p — довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, α — кут між цим перпендикуляром і додатним напрямом осі абсцис.

10. *Пучок прямих* — сукупність всіх прямих, що проходять через задану точку, яка називається *центром пучка.*

Рівняння пучка прямих: $y-y_0=k(x-x_0)$, $x=x_0$, де $O(x_0;y_0)$ — центр пучка, $k\in R$.

Рівняння пучка, заданого двома своїми прямими:

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (1.10)$$

Кут між двома прямими. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

1. Прямі задані загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} &A_1x+B_1y+D_1=0, \Rightarrow \vec{n}_1=(A_1,B_1);\\ &A_2x+B_2y+D_2=0, \Rightarrow \vec{n}_2=(A_2,B_2). \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Косинус *гострого* кута α між прямими (рис. 22):

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}; \qquad (1.12)$$

2. Прямі задані рівняннями:

$$y=k_1x+b_1, \qquad y=k_2x+b_2. \qquad (1.13)$$

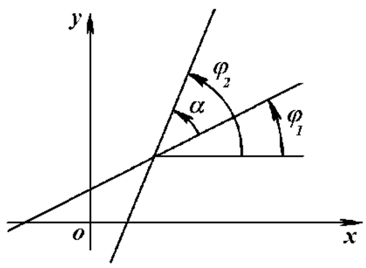


Рис. 22.

Тангенс кута α між прямими:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (1.14)$$

Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих.

1. Умови паралельності прямих, що задані рівняннями (1.11), (1.13):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \qquad k_1 = k_2. \qquad (1.15)$$

2. Умови перпендикулярності двох прямих:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0, \qquad k_2 = -1/k_1. \qquad (1.16)$$

3. *Відстань* від точки $K(x_1, y_1)$ до прямої дорівнює модулю відхилення й обчислюється за такими формулами:

- пряма задана нормальним рівнянням

$$|d| = |x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p|; \qquad (1.17)$$

- пряма задана загальним рівнянням (1.16)

$$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (1.18)$$

<u>Приклад 1.1.</u> Знайти відстань між точками $M_1(1; 2)$ і $M_2(5; -1)$.

За формулою (1.1) дістанемо:

$$d = \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

<u>Приклад 1.2.</u> Рівняння прямої $6x + 8y - 15 = 0$ подати у вигляді:

а) з кутовим коефіцієнтом;

б) у відрізках на осях.

а) Для того, щоб записати рівняння прямої $6x + 8y - 15 = 0$ у вигляді з кутовим коефіцієнтом, потрібно розв’язати дане рівняння відносно у: $y = kx + b$.

$$8y = 15 - 6x \Rightarrow y = -\frac{6x}{8} + \frac{15}{8} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{8}.$$

Відповідь: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{8}$, $k = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{15}{8}$.

б) Щоб записати рівняння прямої $6x+8y-15=0$ у відрізках на осях, потрібно перенести вільний член за знак дорівнює і поділити обидві частини рівняння на нього $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$$6x+8y=15$$

$$\frac{6}{15}x+\frac{8}{15}y=1$$

Отже, $a=\frac{6}{15}$, $b=\frac{8}{15}$.

Відповідь: $\frac{6}{15}x+\frac{8}{15}y=1$.

<u>Приклад 1.3.</u> Обчислити кут між прямими $2x-3y+6=0$ і $3x-4y+8=0$.

Для обчислення кута між двома прямими використаємо формулу $\cos\theta=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$,

$$\cos\theta=\pm\frac{2\cdot3+(-3)(-4)}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{6+12}{\sqrt{13}\cdot5}=\pm\frac{18}{5\sqrt{13}}.$$

$$\theta=\arccos\left(\pm\frac{18}{5\sqrt{13}}\right).$$

Відповідь: $\theta=\arccos\left(\pm\frac{18}{5\sqrt{13}}\right)$.

<u>Приклад 1.4.</u> Пряма, паралельна осі *Ox*, проходить через точку (–2; 3). Скласти рівняння цієї прямої.

Оскільки пряма паралельна *Ox*, то її рівняння: *By+C=0*. Ордината точки дорівнює 3, тому *y=3* або *y-3*=0 - шукане рівняння.

Відповідь: *y-3*=0 .

<u>Приклад 1.5.</u> Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з додатнім напрямком осі *Ox* кут 30°.

Рівняння прямої, яка проходить через початок координат, має вигляд: $y=kx$; $k=tg30°$, $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Отже, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ – шукане рівняння.

Відповідь: $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x3.$

Приклад 1.6. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки А (–5;4) і В (–3;–2).

Використаємо рівняння $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}.$

$$\frac{x+5}{3+5}=\frac{y-4_1}{-2-4},\ \frac{x+5_1}{8}=\frac{y-4}{-6}\Bigg|\ \cdot(-24),$$

$$-3(x+5)=4(y-4),\ -3x-4y-7=0.$$

Отже, $3x+4y+7=0$ – шукане рівняння.

Відповідь: $3x+4y+7=0$.

Приклад 1.7. Написати рівняння висоти *AD* трикутника, заданого точками *A*(–5;3), B(3;1), C(4;–1).

Пряма, що містить висоту *AD*, проходить через вершину *A*(-5;3) і має нормальний вектор $\bar{\mathrm{n}}=\overline{BC}$ =(1;-8). Рівняння висоти *AD* матиме вигляд:

$$1\cdot(x-(-5))-8\cdot(y-3)=0,\ x-8y+29=0.$$

Відповідь: $x-8y+29=0$.

Приклад 1.8. Знайти відхилення і відстань від точки M_0(1, –2) до прямої 4*x*–3*y*–15=0.

Зведемо рівняння прямої до нормального вигляду. Для цього поділимо рівняння на $\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$:

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-3=0.$$

Підставляючи в це рівняння координати точки M_0(1, –2), знайдемо відхилення точки від прямої:

$$d=\frac{4}{5}1-\frac{3}{5}(-2)-3=-1.$$

Оскільки *d*<0, точка M_0(1, –2) і початок координат знаходяться з одного боку від прямої. Відстань від точки M_0 до прямої $|d|=1.$

Приклад 1.9. Знайти відстань між паралельними прямими $3x-4y-10=0,\ \ 6x-8y-15=0.$

1-й спосіб. Знайдемо точку M_0 на першій прямій і обчислимо відстань від цієї точки до другої прямої. Задамо одну з координат точки M_0, наприклад, $x_0 = 2$, а другу координату знайдемо із рівняння прямої:

$$3x_0 - 4y_0 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -1 \quad \Rightarrow M_0(2, -1).$$

$$|d| = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 \cdot 2 - 8 \cdot (-1) - 15|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

2-й спосіб. Зведемо рівняння до нормального вигляду. Для цього поділимо перше рівняння на $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, а друге рівняння – на $\sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0, \quad \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{3}{2} = 0.$$

Модуль вільного члена в нормальному рівнянні дорівнює відстані від початку координат до прямої, тому різниця модулів вільних членів отриманих рівнянь дорівнює відстані між прямими:

$$|d| = 2 - 3/2 = 1/2.$$

<u>Приклад 1.10.</u> Скласти рівняння прямих, відстань кожної з яких до даної прямої $4x + 3y - 20 = 0$ дорівнює 2.

Зведемо рівняння даної прямої до нормального вигляду. Для цього поділимо його на $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$:

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_0 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad p = 4.$$

Відстань від початку координат до прямої дорівнює модулю вільного члена: p=4. Шукані паралельні прямі мають той же вектор нормалі $\vec{n}_0$, а відстані від початку координат відрізняються від відстані p=4 на ± 2, тому їх нормальні рівняння мають вигляд:

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 6 = 0, \quad \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0.$$

<u>Приклад 1.11.</u> Скласти рівняння прямої, що проходить через точки
$M_1(1, –3)$ і $M_2(3, 5)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \frac{x-1}{3-1}=\frac{y+3}{5+3} \Rightarrow 8(x-1)=2(y+3) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x - y - 7 = 0$ – *загальне рівняння прямої*. Вектор нормалі $\vec{n}=(4, -1)$.

Запишемо рівняння у двох інших формах:

$\frac{x}{7/4}+\frac{y}{-7}=1$ – *рівняння прямої у відрізках на осях* (a=7/4, b=–7);

$y=4x-7$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* (k=4, b=–7).

Приклад 1.12. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1,-2)$ перпендикулярно до прямої $2x-3y+4=0$.

1-й спосіб. Шукана пряма проходить через точку $M_0(1,-2)$ паралельно вектору нормалі до даної прямої $\vec{n}=(2,-3)=\vec{a}=(l, m)$, її рівняння має вигляд: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$, $\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}$, $\quad 3x+2y+1=0$.

2-й спосіб. Дану пряму подамо у вигляді: $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ ($k_1=2/3$). З умови перпендикулярності прямих: $k_1k_2=-1 \Rightarrow k_2=-3/2$. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1,-2)$ з кутовим коефіцієнтом k_2: $y+2=k_2(x-1) \Rightarrow y + 2 = (-3/2)(x - 1) \Rightarrow 3x + 2y + 1 = 0$.

Приклад 1.13. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1,-2)$ паралельно прямій $2x-y+5=0$.

1-й спосіб. Шукана пряма проходить через точку $M_0(1,-2)$ перпендикулярно до вектора нормалі даної прямої $\vec{n}=(2,-1)$, її рівняння має вигляд: $2(x-1)-(y+2)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-y-4=0$.

2-й спосіб. Дану пряму подамо у вигляді: $y=2x+5$. З умови паралельності прямих маємо: $k_1=k_2=2$. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1,-2)$ і має кутовий коефіцієнт k_2:

$y+2=k_2(x-1) \Rightarrow y=2x-4$.

Приклад 1.14. Знайти проекцію точки $P(-2, 4)$ на пряму $3x+y-15=0$ і точку Q, симетричну точці P відносно даної прямої.

Проекцією точки $P(-2,\ 4)$ на пряму є основа перпендикуляра (точка N), опущеного з точки P на дану пряму. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $P(-2, 4)$ перпендикулярно до даної прямої (паралельно вектору нормалі $\vec{n}=(3,1)$):

$$PN:\ \frac{x-(-2)}{3}=\frac{y-1}{1} \quad \Rightarrow \quad x-3y+5=0.$$

Точка N є точкою перетину прямої PN і даної прямої, тому її координати знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x-3y=-5, \\ 3x+y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y-5, \\ 10y=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow N(4;\,3).$$

Точка N є серединою відрізка PQ, тому її координати:

$$x_N=\frac{x_P+x_Q}{2}, \quad y_N=\frac{y_P+y_Q}{2}.$$

Звідси знаходимо координати точки Q:

$$x_Q=2x_N-x_P=8+2=10,$$

$$y_Q=2y_N-y_P=6-4=2 \quad \Rightarrow \quad Q(10,\ 2).$$

<u>Приклад 1.15</u>. Скласти рівняння прямої, що відтинає на осях Ox, Oy відрізки a=3, b=–2.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1, \text{ або } 2x-3y-6=0.$$

<u>Приклад 1.16.</u> Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1,-2)$ та відтинає на осях Ox, Oy відрізки однакової довжини.

Якщо a – відрізок, що пряма відтинає на осі, то:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1 \quad \Rightarrow \quad x+y=a.$$

Точка $M_0(1,-2)$ належить прямій, тому її координати задовольняють рівняння прямої: $x_0+y_0=a \quad \Rightarrow \quad 1-2=a \quad a=-1.$

Шукане рівняння: $x+y+1=0.$

§ 2. Площина в просторі

Будь-яке рівняння першого степеня з трьома змінними визначає площину. І навпаки, будь-яка площина визначається рівнянням першого степеня відносно змінних координат, які задають довільну точку площини.

Загальне рівняння площини в просторі має вигляд:

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{………………..(2.1)}$$

де числа A, B, C координати нормального вектора $\overline{n} = (A, B, C)$ - вектор перпендикулярний площині.

Розглянемо неповні рівняння площини

Таблиця 2.1

Рівняння площини	Зауваження
$Ax+By+Cz=0$	Площина проходить через початок координат
$By+Cz+D=0$ $Ax+Cz+D=0$ $Ax+By+D=0$	Площина паралельна осі *Ox* Площина паралельна осі *Oy* Площина паралельна осі *Oz*
$By+Cz=0$ $Ax+Cz=0$ $Ax+By=0$	Площина проходить через вісь *Ox* Площина проходить через вісь *Oy* Площина проходить через вісь *Oz*
$By+D=0$ $Ax+D=0$ $Cz+D=0$	Площина паралельна площині *Oxz* Площина паралельна площині *Oyz* Площина паралельна площині *Oxy*
$X=0$ $Y=0$ $Z=0$	Координатна площина *Oyz* Координатна площина *Oxz* Координатна площина *Oxy*

Різні види рівнянь площини в просторі.

1. *Рівняння площини, що проходить через задану точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно до заданого вектора* $\overline{n} = (A, B, C)$, має такий вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2.2)$$

2. *Рівняння площини, що проходить через три точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що не лежать на одній прямій:

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.3)$$

3. *Рівняння площини, яка проходить через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *і паралельна векторам* $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ *і* $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$*:*

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

4. *Рівняння площини у відрізках на осях*:

5. $$\pi: \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{2.5}$$

де a, b, c — відрізки, які площина відтинає від осей координат.

5. *Нормальне рівняння площини* має вигляд:

$$\pi: \ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{2.6}$$

де $\vec{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ — вектор нормалі.

6. *Параметричне рівняння* площини:

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + t_1 m_1 + t_2 m_2, \\ y = y_0 + t_1 n_1 + t_2 n_2, \\ z = z_0 + t_1 p_1 + t_2 p_2; \end{cases} \tag{2.7}$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1) \parallel \pi \parallel \vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$.

Відстань та відхилення від точки до площини.

Відстань d між точкою $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та площиною $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.8}$$

Відхилення точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини

$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0 \ \Leftrightarrow \ \pi: \ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

$$\delta(M_0, \pi) = \begin{cases} \rho(M_0, \pi), \text{ якщо } M_0 \text{ і } O \text{ в одному підпросторі з межею } \pi, \\ -\rho(M_0, \pi), \text{якщо } M_0 \text{ і } O \text{ в різних підпросторах з межею } \pi. \end{cases}$$

$$\delta(M_0, \pi) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p =$$
$$= \pm\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак вибирається протилежним до знаку числа D.

Взаємне розміщення двох площин. Нехай дві площини задано загальними рівняннями, тоді $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – вектори нормалей до площин.

1. *Кут між площинами* визначається кутом Q між векторами $\bar{n}$ і $\bar{m}$:

$$\cos Q = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{2.9}$$

2. *Умова перпендикулярності площин* $\bar{n} \perp \bar{m}$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{2.10}$$

3. *Умова паралельності площин* $\bar{n} \parallel \bar{m}$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{2.11}$$

Приклад 2.1. Знайти кут між площинами $x + \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ і $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0.$

За формулою (2.9) знайдемо косинус гострого кута між площинами:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (-1)\right|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Приклад 2.2. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1, 3, -2)$ паралельно площині $2x + 5y + 3z + 1 = 0$.

Оскільки площини паралельні, то їхні вектори нормалей колінеарні, тому як вектор нормалі до площини можна взяти довільний вектор, що пропорційний вектору нормалі до даної площини $\vec{n} = (2, 5, 3)$, зокрема і сам вектор $\vec{n}$. За формулою (2.2):

$$2(x-1) + 5(y-3) + 3(z+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 5y + 3z - 11 = 0.$$

Приклад 2.3. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1, 3, -2)$ перпендикулярно до двох непаралельних площин $x + 2y + z - 3 = 0,\ \ 2x - y - 4z + 1 = 0.$

Шукана площина перпендикулярна до двох непаралельних площин, тому її вектор нормалі перпендикулярний одночасно до двох векторів нормалей даних площин і може бути взятий у вигляді:

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-7\vec{i}+6\vec{j}-5\vec{k}.$$

За формулою (2.2) знаходимо рівняння шуканої площини:

$$-7(x-1)+6(y-3)-5(z+2)=0 \quad\Rightarrow\quad -7x+6y-5z-21=0.$$

Приклад 2.4. Знайти рівняння площини, що проходить через дві точки $M_1(1,\ 2,\ 3)$ і $M_2(2,\ 3,\ –2)$ перпендикулярно до площини $x+2y+z-3=0.$

Вектор нормалі площини, який перпендикулярний одночасно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,1,-5)$ і вектора нормалі даної площини $\vec{n}_1=(1,\ 2,\ 1)$, може бути взятий у вигляді:

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=11\vec{i}-6\vec{j}+\vec{k}.$$

За формулою (2.2) знаходимо рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1,\ 2,\ 3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(11,-6,1)$:

$$11(x-1)-6(y-2)+(z-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 11x-6y+z-2=0.$$

Приклад 2.5. Записати рівняння площини, яка проходить через точки (1;1;1), (2;3;4), (4;3;1).

Рівняння площини, яка проходить через дані точки знайдемо за формулою:

$$\pi:\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 2-1 & 3-1 & 4-1\\ 4-1 & 3-1 & 1-1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Розкривши визначник, дістанемо $2(z-1)+9(y-1)-6(z-1)-6(x-1)=0.$

Отже, $-6x+9y-4z+1=0$ – шукане рівняння площини.

Відповідь: $-6x+9y-4z+1=0$.

Приклад 2.6. Знайти довжину висоти AH піраміди, заданої координатами своїх вершин: $A(-1;2;-1), B(1;0;2), C(0;1;-1), D(2;0;-1)$.

Висоту AH знайдемо як відстань від точки $A(-1;2;-1)$ до площини BCD.

Знайдемо рівняння площини BCD:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, маємо $3x+6y+z-5=0.$

Знайдемо довжину висоти AH за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$d = \frac{|3\cdot(-1)+6\cdot 2+1\cdot(-1)-5|}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}} = \frac{|-3+12-1-5|}{\sqrt{9+36+1}} = \frac{3}{\sqrt{46}}.$$

Відповідь: $AH = \dfrac{3}{\sqrt{46}}$.

Приклад 2.7. Скласти рівняння площини, яке проходить через точку A(5;4;3) і відтинає рівні відрізки на осях координат.

Використовуємо рівняння у відрізках на осях, в якому $a=b=c$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

Замість x, y, z в останню рівність підставляємо координати точки A, отримаємо:

$$\frac{5}{a}+\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1 \Rightarrow a=12.$$

Підставляючи 12 замість параметра a у рівність $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$, отримаємо рівняння площини, яка відтинає рівні відрізки на осях координат:

$$x+y+z-12=0.$$

Відповідь: $x+y+z-12=0.$

Приклад 2.8. Знайти рівняння площини,що проходить через точки $M_1(3;0;4)$ і $M_2(5;2;6)$ перпендикулярно до площини $2x+4y+6z-7=0$.

Нехай точка $M(x,y,z)$ - довільна точка шуканої площини. Тоді вектори
$\overline{M_1M}=\left(x-3;y-0;z-4\right)$ і $\overline{M_1M_2}=\left(2;2;2\right)$ належать цій площині.

Вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$ компланарні з нормальним вектором $\overline{n}=(2;4;6)$ заданої площини $2x+4y+6z-7=0$. Отже, мішаний добуток цих трьох векторів дорівнює нулю:

$\left(\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{n}\right)=0$,

або

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-0 & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

Розв’язавши визначник, одержимо шукане рівняння площини:

$x-2y+z-7=0$.

Відповідь: $x-2y+z-7=0$.

Приклад 2.9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку перетину трьох площин $2x-y-z-1=0, x+2z-4=0, x-y=0$, через початок координат і через точку $P(7;1;2)$.

Знайдемо точку перетину трьох заданих площин. Для цього розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x-y-z-1=0, \\ x+2z-4=0, \\ x-y=0 \end{cases}$$

Знайдемо визначник системи:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1-2+4=3.$$

Знайдемо визначник Δ_x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6.$$

Таким чином $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{6}{3} = 2; x = 2.$

Із третього рівняння системи знайдемо, що $y = x, y = 2.$

Із другого рівняння системи знаходимо z:

$$z = \frac{4-x}{2} = \frac{4-2}{2} = 1,\ z = 1.$$

Точка перетину трьох заданих площин $M(2;2;1)$.

Для знаходження рівняння шуканої площини використаємо формулу рівняння площини, що проходить через три задані точки, одержимо:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2-0 & 2-0 & 1-0 \\ 7-0 & 1-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0.$$

Спростивши, маємо:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, одержимо рівняння шуканої площини:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4x + 2z + 7y - 14z - x - 4y = 3x + 3y - 12z = 0.$$

або $x + y - 4z = 0.$

Відповідь: $x + y - 4z = 0.$

<u>Приклад 2.10.</u> Задано координати чотирьох точок: $A(1;0;4), B(-1;1;-4), C(0;5;7), D(2;4;3)$. Знайти: висоту піраміди $ABCD$ проведену з вершини A; кут нахилу грані ABC до площини основи BCD.

Знайдемо рівняння площин BCD і ABC за формулою:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Отже, $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+4 \\ 1 & 4 & 11 \\ 3_1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$, звідки $5x-26y+9z+67=0.$

Аналогічно знаходимо рівняння площини ABC: $43x+11y-9z-7=0.$

Висоту піраміди знаходимо за формулою відстані від точки A до площини BCD: $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$h = \frac{|5\cdot 1-26\cdot 0+9\cdot 4+67|}{\sqrt{5^2+26^2+9^2}} \approx 3{,}86 .$$

Кут нахилу грані ABC до площини основи BCD знаходимо за формулою:

$$\cos Q = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} .$$

$$\cos Q = \frac{2\cdot 43-26\cdot 14+9\cdot(-9)}{\sqrt{5^2+(-26)^2+9^2}\sqrt{43^2+14^2+(9)^2}} \approx -0{,}1784 .$$

Відповідь: $h \approx 3{,}86$, $\cos Q = \approx -0{,}1784.$

<u>Приклад 2.11.</u> Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярної до площини $3x+2y-z+4=0$ і $x+y+z-3=0$.

Запишемо рівняння площини, що проходить через точку M:

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-1)=0 .$$

Використаємо умову перпендикулярності площин: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Записавши умову перпендикулярності з обома площинами, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3A+2B-C=0 \\ A+B+C=0 \end{cases} .$$

Розв’язавши систему виразимо два невідомі через третє: $B=-\frac{4}{3}A,\ C=\frac{1}{3}A.$

Знайдені значення B і C підставимо в рівняння площини:

$$A(x-2)-\frac{4}{3}A(y+1)+\frac{1}{3}A(z-1)=0.$$

Скоротивши рівняння на $\frac{1}{3}A$ будемо мати:

$3(x-2)-4(y+1)+(z-1)=0$ або $3x-4y+z-11=0$.

Відповідь: $3x-4y+z-11=0$.

§ 3. Пряма у просторі

Пряма лінія в просторі визначається як лінія перетину двох площин.

Різні види рівнянь прямої у просторі.

1. *Канонічне рівняння прямої* (рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, паралельно до заданого вектора $\overline{S}$ = *(l,m,n)*):

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{3.1}$$

2. *Рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ має такий вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{3.2}$$

.

3. *Загальне рівняння прямої.* Будь-яка пряма лінія у просторі подається системою двох рівнянь, які задають дві різні площини, що проходять через цю пряму.

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – загальне рівняння прямої. (3.3)

4. *Параметричне рівняння прямої:*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \quad t \in R. \qquad (3.4)$$

5. *Перехід від загального рівняння прямої до канонічного.*

Щоб від загальних рівнянь прямої перейти до канонічних рівнянь, потрібно знайти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямій і її напрямний вектор $\vec{s} = (l; m; n)$. Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад, $x = x_0$ беруть довільною, а дві інші визначають із системи:

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z = -D_1 - A_1 x_0 \\ B_2 y + C_2 z = -D_2 - A_2 x_0 \end{cases}.$$

Ця система матиме розв'язок за умови, що $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Якщо ця умова порушується, то в системі загального рівняння довільне значення надають змінній y або змінній z.

Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ врахуємо, що нормальні вектори n_1 і n_2 даних площин перпендикулярні до прямої. Тому за вектор $\vec{s}$ можна взяти їхній векторний добуток:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Отже, $l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$, $n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі . Нехай дві прямі у просторі визначаються рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ і } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Тоді $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ та $\bar{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ - напрямні вектори даних прямих.

1) *Прямі паралельні,* якщо напрямні вектори прямих паралельні, тобто

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \tag{3.5}$$

2) *Прямі взаємноперпендикулярні*, якщо напрямні вектори прямих перпендикулярні, тобто

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \tag{3.6}$$

3) *Кут між прямими* визначається кутом Q між їх напрямними векторами:

$$\cos Q=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{3.7}$$

Взаємне розміщення прямої і площини у просторі. Нехай площина задається рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, а пряма $-\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$. Тоді $\bar{n}(A,B,C)$ – вектор нормалі площини, а $\vec{s}=(l;m;n)$– напрямний вектор прямої.

1) *Кут між прямою і площиною* визначається за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{3.8}$$

2) *Умова паралельності* площини і прямої ($\bar{n}\perp\bar{s}$):

$$\bar{n}\cdot\bar{s}=0 \quad Al+Bm+Cn=0. \tag{3.9}$$

3) *Умова перпендикулярності* прямої і площини ($\bar{n}\parallel\bar{s}$):

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}. \tag{3.10}$$

4) *Точка перетину* прямої і площини.

Для визначення точки перетину прямої $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0$ необхідно розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \end{cases} \tag{3.11}$$

Рівняння прямої записуємо в параметричному вигляді: $x = x_1 + lt,\ \ y = y_1 + mt,\ \ z = z_1 + nt.$

Ці значення x, y, z підставляємо в рівняння площини та знаходимо значення t:

$$t = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Підставляючи знайдене значення t в параметричні рівняння $x = x_1 + lt,\ \ y = y_1 + mt,\ \ z = z_1 + nt$, знаходимо координати точки перетину прямої і площини.

5) *Умова належності прямої площині.*

Умова, при якій пряма $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ лежить в площині $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається наступним рівняннями:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases} \qquad (3.12)$$

6) *Умова належності двох прямих одній площині.*

Умова, при якій дві прямі $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ і $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ лежать в одній площині, є рівність:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.13)$$

Приклад 3.1. Пряма задана рівняннями

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ -x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Потрібно записати її канонічні та параметричні рівняння.

Із системи рівнянь при z_0=0 знаходимо x_0=–1, y_0=0. Знайдемо напрямний вектор прямої і запишемо її канонічні рівняння:

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=5\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k},\quad \frac{x+1}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z}{3}.$$

Позначимо через t величину частки в канонічних рівняннях і виразимо через t координати x, y, z довільної точки прямої. У результаті отримаємо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z}{3}=t \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=5t-1,\\ y=t, \qquad (-\infty<t<+\infty).\\ z=t \end{cases}$$

<u>Приклад 3.2.</u> Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$ з площиною $2x+3y+4z-7=0.$

Перетворимо канонічні рівняння прямої у параметричні $x=5t+1,\ \ y=2t-1,\ \ z=3t+2$ і підставимо їх у рівняння площини:

$$2(5t+1)+3(2t-1)+4(3t+2)-7=0 \quad\Rightarrow\quad t=0.$$

Координати точки перетину прямої з площиною:

$x=5t+1=5\cdot 0+1=1,\ \ y=2t-1=2\cdot 0-1=-1,$

$z=3t+2=3\cdot 0+2=2.$

<u>Приклад 3.3.</u> У просторі задані чотири точки $A_1(-1, 2, 3)$, $A_2(2, 0, 2)$, $A_3(3, -2, 4)$, $A_4(5, 1, -1)$.

Необхідно:

1. скласти канонічні рівняння прямих A_1A_2 і A_1A_3;
2. знайти кут між цими прямими;
3. скласти рівняння площин $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$;
4. визначити кут між цими площинами;
5. знайти рівняння прямої, що проходить через точку A_4 паралельно прямій A_1A_2;
6. знайти кут між прямою A_1A_3 і площиною $A_1A_2A_4$;

1.знайдемо рівняння прямих A_1A_2 і A_1A_3:

A_1A_2: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},\ \ \frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-3}{2-3},\ \ \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-1};$

$$A_1A_3:\ \frac{x-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z-z_1}{z_3-z_1},\ \frac{x+1}{3+1}=\frac{y-2}{-2-2}=\frac{z-3}{4-3},\ \frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{1}.$$

2. Знаходимо кут між двома прямими (кут між направляючими векторами $\vec{a}_1=(3,-2,-1),\ \vec{a}_2=(4,-4,1)$):

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{3\cdot4-2\cdot(-4)-1\cdot1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{4^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{19}{\sqrt{462}}\approx0{,}884.$$

3. Рівняння площин $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$ складаємо як рівняння площин, що проходять через три задані точки:

$$A_1A_2A_3:\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & -4 & 1\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ 6x+7y+4z-20=0.$$

$$A_1A_2A_4:\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3\\ 3 & -2 & -1\\ 6 & -1 & -4\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ 7x+6y+9z-32=0.$$

2. Кут між площинами $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$ визначаємо як кут між нормалями до них $\vec{n}_1=(6,7,4),\ \vec{n}_2=(7,6,9)$:

$$\cos\psi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|6\cdot7+7\cdot6+4\cdot9|}{\sqrt{6^2+7^2+4^2}\sqrt{7^2+6^2+9^2}}=\frac{120}{\sqrt{16766}}\approx0{,}927.$$

3. Рівняння прямої, що проходить через точку A_4 паралельно прямій A_1A_2 (паралельно вектору $\vec{a}_1=\overrightarrow{A_1A_2}=(3,-2,-1)$):

$$\frac{x-x_4}{l}=\frac{y-y_4}{m}=\frac{z-z_4}{n},\quad \frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}.$$

4. Кут між прямою A_1A_3 і площиною $A_1A_2A_4$

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{a}_2\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{a}_2|\cdot|\vec{n}_2|}=\left\{\begin{matrix}\vec{a}_2=(4,-4,\ 1)\\ \vec{n}_2=(7,6,9)\end{matrix}\right\}=\frac{|4\cdot7-4\cdot6+1\cdot9|}{\sqrt{33}\sqrt{166}}=\frac{13}{\sqrt{5478}}\approx0{,}176..$$

$$h=\frac{\sqrt{6^2+7^2+4^2}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{101}{14}}\approx2{,}686.$$

Приклад 3.4. Знайти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(1;-2;3)$ перпендикулярно до площини $2x+3y-z+8=0$.

Оскільки пряма l перпендикулярна до площини, то за напрямний вектор цієї прямої можна взяти нормальний вектор площини: $\bar{s}=\bar{n}=(2,1,-1)$

Тепер одержуємо рівняння прямої l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Відповідь: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Приклад 3.5. Звести рівняння прямої $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x-y+3z+5=0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Знайдемо яку-небудь точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на даній прямій. Для цього покладемо в обох рівняннях $x=0$ і розв'яжемо систему $\begin{cases} y-z-1=0 \\ y+3z+5=0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y=z+1 \\ -z-1+3z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z+1 \\ 2z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Отже, точка $M_0(0;-1;-2)$ належить даній прямій. Напрямний вектор $\bar{s}$ знаходимо за формулою: $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

Канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z+2}{n-3}$.

Відповідь: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z+2}{n-3}$.

Приклад 3.6. Знайти відстань між двома прямими:
$l_1:\ \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$ і $l_2:\ \dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+7}{3}$.

Вектори напрямку даних прямих $\vec{s}_{l_1}=(4;-3;2)$ і $\vec{s}_{l_2}=(8;-3;3)$ неколінеарні. Розглянемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(-3;6;3)\in l_1$, $M_2(4;-1;-7)\in l_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(7;-7;-10)$ і обчислимо

$$\vec{s}_{l_1}\vec{s}_{l_2}\,\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 3 \\ 7 & -7 & -10 \end{vmatrix}=120-112-63+42+84-240=-169\neq 0.$$

Отже, прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

Шукана відстань є відстанню від прямої l_1 (а отже, точки M_1) до площини π, яка проходить через пряму l_2 і паралельна прямій l_1. Рівняння цієї площини:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z+7 \\ 8 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-6(x-4)+12(y+1)-24(z+7)+12(z+7)+9(x-4)-16(y+1)=0,$$

$$3(x-4)-4(y+1)-12(z+7)=0,$$

$$\pi: \ 3x-4y-12z-100=0.$$

Обчислимо відстань від точки M_1 до площини π:

$$d(M_1,\pi)=\frac{|3\cdot(-3)-4\cdot 6-12\cdot 3-100|}{\sqrt{9+16+144}}=\frac{169}{13}=13.$$

Відповідь: 13.

<u>Приклад 3.7.</u> Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3;-5;2)$ та $M_2(1;-1;-4)$.

Канонічне рівняння прямої знаходимо за формулою:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

$$\frac{x-3}{1-3}=\frac{y+5}{-1+5}=\frac{z-2}{-4-2} \Rightarrow \frac{x-3}{-2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-2}{-6}$$

або

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{3}.$$

Для знаходження параметричного рівняння використаємо формулу:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

тоді одержимо:

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=-5-2t. \\ z=2+3t \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{3}$, $\begin{cases} x=3+t \\ y=-5-2t \\ z=2+3t \end{cases}$.

Приклад 3.8. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2;-3;4)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+4}{2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{3}$ і $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$.

Рівняння шуканої прямої має вигляд: $\frac{x-2}{l}=\frac{y+3}{m}=\frac{z-4}{n}$.

Напрямними векторами заданих прямих є: $\bar{s}_1(1;-1;1)$ і $\bar{s}_2(2;1;3)$.

Оскільки, шукана пряма перпендикулярна до заданих прямих, то за її напрямний вектор можна прийняти вектор (векторний добуток) $\bar{s}_1\times\bar{s}_2$:

$$\bar{s}_1\times\bar{s}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-4\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k},$$

або $\bar{s}=(l;m;n)=(-4;-1;2)$.

Отже, рівняння шуканої прямої має вигляд:

$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$.

Відповідь: $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$.

Приклад 3.9. Знайти координати точки перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$ та площини $3x-y+2z+5=0$.

Представимо рівняння прямої в параметричній формі. Прирівняємо кожне з співвідношень, які входять в рівняння прямої, до параметра t:

$$\frac{x-1}{2}=t;\ \frac{y+2}{1}=t;\ \frac{z-2}{1}=t;$$
$$x=2t+1;\ y=t-2;\ z=t+2.$$

Підставимо ці значення x, y, z в рівняння даної площини:

$$3(2t+1)-(t-2)+(t+2)+5=0,$$
$$6t+3-t+2+2t+4+5=0,$$
$$7t+14=0,$$
$$t=-2.$$

Одержане значення t є значенням параметру в точці перетину прямої з площиною. Підставляємо ці значення в параметричні рівняння прямої, одержуємо:

$$x=2(-2)+1;\ y=-2-2;\ z=-2+2.$$

Отже, точка перетину прямої з площиною $M(-3;-4;0)$.

Відповідь: $M(-3;-4;0)$.

Приклад 3.10. Знайти проекцію точки $M(2;-1;3)$ на площину $x+3y-4z-13=0$.

а) Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;-1;3)$ перпендикулярно до площини $x+3y-4z-13=0$. Спочатку напишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;-1;3)$:

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-3}{n}.$$

На основі умови перпендикулярності прямої і площини $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ числа l, m, n пропорційні числам A, B, C із рівняння площини. Через це, змінивши в останньому рівнянні l, m, n числами $1, 3, -4$, одержимо рівняння прямої у вигляді: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$.

б) Щоб знайти проекцію точки на площину, необхідно знайти координати основи перпендикуляра, проведеного із точки $M(2;-1;3)$ на площину, тобто точку перетину прямої із площиною.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}; \\ x+3y-4z-13=0. \end{cases}$$

Рівняння прямої $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$ представляємо в параметричній формі. Одержимо: $\begin{cases} x=t+2, \\ y=3t-1, \\ z=-4t+3. \end{cases}$. Одержані значення x, y, z підставляємо в рівняння площини:

$$t+2+3(3t-1)-4(-4t+3)-13=0,$$
$$t+2+9t-3+16t-12-13=0,$$
$$26t-26=0,\ t=1.$$

Значення параметра $t=1$ підставляємо в параметричне рівняння прямої: $x=1+2=3,\ y=3\cdot 1-1=2,\ z=-4\cdot 1+3=-1$

Отже, проекція точки на площину є точка $M'(3;2;-1)$.

Відповідь: $M'(3;2;-1)$.

§4. Криві другого порядку

Коло – множина точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (*центра* кола).

Рівняння кола радіуса R з центром у початку координат (рис. 1 а) дано формулою (4.1), а з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 1 б) – формулою (4.2).

$$x^2+y^2=R^2. \quad (4.1) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \quad (4.2)$$

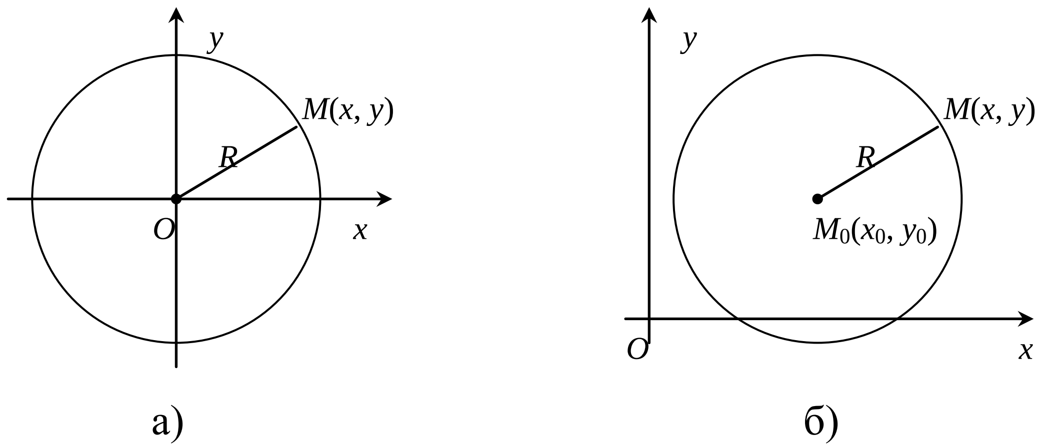


Рис. 1. Коло.

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є сталою величиною, більшою за відстань між фокусами.

Нехай фокуси еліпса розташовані на осі Ox у точках $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-c,\ 0)$, $M(x,\ y)$ – довільна точка еліпса. Тоді за означенням еліпса

$$F_1M + F_2M = 2a. \qquad (4.3)$$

Відстані $r_1 = F_1M$ і $r_2 = F_2M$ від довільної точки $M(x,\ y)$ еліпса до фокусів називаються *фокальними радіусами* точки M.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4.4)$$

Осі координат є осями симетрії еліпса. Параметр $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Точки перетину еліпса з осями координат $(\pm a,\ 0)$, $(0,\ \pm b)$ називаються *вершинами еліпса*, a, b – його півосями.

Форма еліпса характеризується ексцентриситетом $\varepsilon = c/a (0 \le \varepsilon < 1)$. При $\varepsilon \to 1$ еліпс вироджується у відрізок $[-a,\ a]$.

Прямі $x = \pm a/\varepsilon$ називаються *директрисами* еліпса.

Гіпербола

Гіперболою називається множина точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок (фокусів) є величиною сталою, меншою за відстань між фокусами.

Нехай $M(x,\ y)$ – довільна точка гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Ox у точках $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-c,\ 0)$. Тоді за означенням гіперболи

$$|F_1M - F_2M| = 2a \Leftrightarrow F_1M - F_2M = \pm 2a. \qquad (4.5)$$

Відстані $r_1 = F_1M$ і $r_2 = F_2M$ від довільної точки $M(x,\ y)$ гіперболи до фокусів називаються *фокальними радіусами* точки M (рис. 2).

Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \ (c^2 = a^2 + b^2). \qquad (4.6)$$

Гіпербола симетрична відносно осей координат.

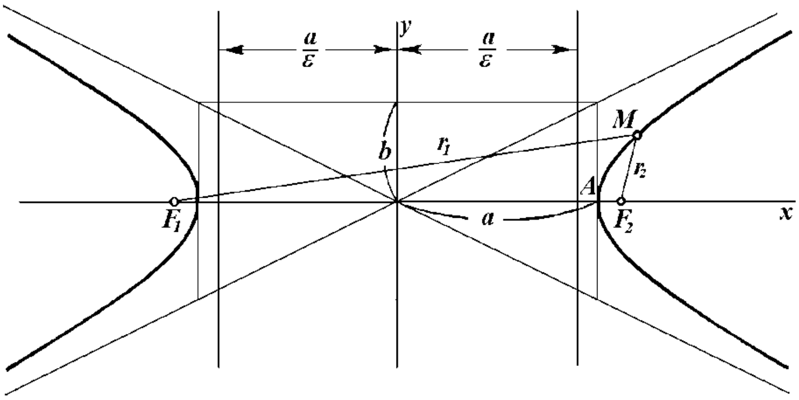


Рис. 2. Гіпербола.

Точки перетину гіперболи з віссю Ox $(-a, 0)$ і $(a, 0)$ називаються *вершинами гіперболи*. Гіпербола не перетинає вісь Oy. Параметр a називається дійсною піввіссю, а b – уявною піввіссю гіперболи.

Прямі $y=\pm(b/a)x$, що проходять через діагоналі прямокутника розміром $2a\times2b$, називаються *асимптотами* гіперболи.

Величина $\varepsilon=c/a$ ($c=\sqrt{a^2+b^2}$) називається *ексцентриситетом* гіперболи ($\varepsilon>1$), а прямі $x=\pm a/\varepsilon$ – її *директрисами*.

Парабола

Параболою називається множина точок площини, кожна з яких рівновіддалена від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи, фокус якої міститься в точці $F(p/2, 0)$, а директриса перпендикулярна до осі Ox і має рівняння $x=-p/2$. Відрізок FM називається *фокальним радіусом* точки M, а відстань p від фокуса до директриси – *параметром параболи.*

Проведемо відрізок KM перпендикулярно до директриси (рис. 3). За означенням параболи: $FM = KM$.

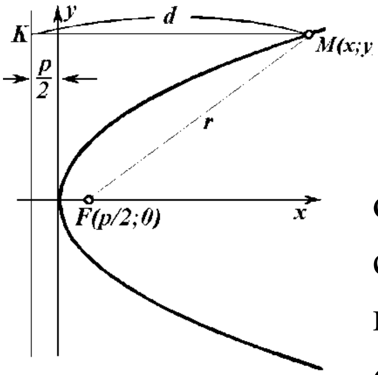


Рис. 3.

Канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px, \quad (p>0). \tag{4.7}$$

Парабола симетрична відносно осі Ox. При $p>0$ парабола розташована справа від осі Oy. Точка O (0, 0) перетину параболи з віссю симетрії називається її *вершиною*.

Зауваження 1. Рівняння $y^2=-2px$, $x^2=\pm 2py$ ($p>0$) також визначають параболи (рис. 4).

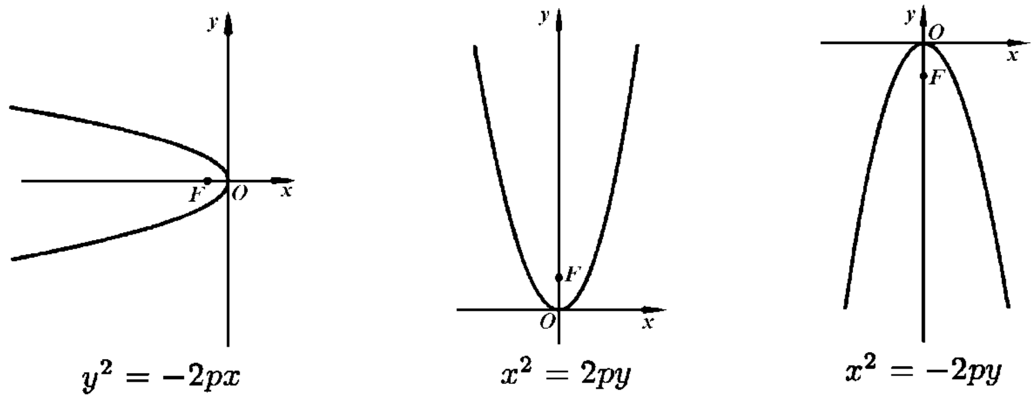


Рис. 4.

Зауваження 2. Рівняння параболи з вершиною у точці $M_0(x_0, y_0)$ і віссю симетрії, що паралельна координатній осі, має вигляд:

$$(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0) \text{ або } (x-x_0)^2 = \pm 2p(y-y_0). \qquad (4.8)$$

<u>Приклад 4.1.</u> Звести до канонічного вигляду рівняння $4x^2+y^2-16x-6y+21=0$. Визначити тип кривої.

Виділимо в рівнянні повні квадрати:

$$4(x^2-4x+4)-16+(y^2-6y+9)-9+21=0,\ 4(x-2)^2+(y-3)^2=4,$$

$$\frac{x'^2}{1^2}+\frac{y'^2}{2^2}=1, \text{ де } \begin{cases} x'=x-2, \\ y'=y-3. \end{cases}$$

У системі координат $x'O'y'$ отримане канонічне рівняння еліпса з центром у точці $O'(2, 3)$. Півосі еліпса $a = 1$, $b = 2$, параметр $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{3}$, фокуси розташовані на осі Oy в точках $F_1(0, \sqrt{3})$, $F_2(0, -\sqrt{3})$, ексцентриситет $\varepsilon=c/b=\sqrt{3}/2$.

<u>Приклад 4.2.</u> Звести до канонічного вигляду рівняння:

$3x^2-2y^2+8y-6x-11=0.$

Виділимо в рівнянні повні квадрати:

$$3(x^2-2x+1)-3-2(y^2-4y+4)+8-11=0,$$

$$3(x-1)^2-2(y-2)^2=6,\ \frac{x'^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y'^2}{(\sqrt{3})^2}=1, \text{ де } \begin{cases} x'=x-1, \\ y'=y-2. \end{cases}$$

У системі координат $O'x'y'$ отримане канонічне рівняння гіперболи. Центр гіперболи – точка $O'(1, 2)$. Півосі гіперболи $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$.

Приклад 4.3. Звести до канонічного вигляду рівняння параболи

$$x^2-4x-8y-20=0.$$

Запишемо рівняння параболи у вигляді: $(x-2)^2=8(y+3)$,

$$(x')^2=8y', \text{ де } x'=x-2,\ y'=y+3.$$

Вершина параболи – точка $O'(2, -3)$. Канонічна система координат $x'O'y'$. Параметр $p = 4$.

Приклад 4.4. Знайти геометричне місце точок площини xOy, для яких відношення відстаней до точки $F(1, 0)$ і прямої $x = 5$ є сталою величиною, рівною ε. Розглянути випадки: 1) ε=1/3; 2) ε=1; 3) ε=3.

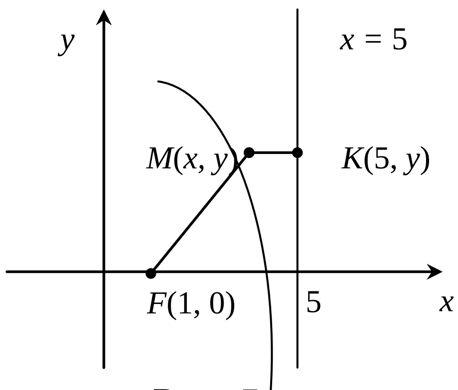


Рис. 5.

Покажемо, що при будь-якому значенні ε шукане геометричне місце точок є кривою другого порядку, тип якої істотно залежить від величини ε ($\varepsilon < 1$ – еліпс, $\varepsilon = 1$ – парабола, $\varepsilon>1$ – гіпербола).

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка шуканої множини (рис. 5), тоді:

$$FM = \sqrt{(x-1)^2 + y^2},\quad MK = |5 - x|,$$

$$FM / MK = \varepsilon \Rightarrow FM^2 = \varepsilon^2 MK^2, \Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = \varepsilon^2 (5-x)^2,$$

$$(x^2 - 2x + 1) - \varepsilon^2 (25 - 10x + x^2) + y^2 = 0,$$

$$(1-\varepsilon^2)x^2 - 2(1-5\varepsilon^2)x + (1-25\varepsilon^2) + y^2 = 0. \tag{4.9}$$

Випадок 1: ε=1/3.

$$8x^2 - 8x + 9y^2 = 16 \Rightarrow 8\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - 2 + 9y^2 = 16,$$

$$8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 9y^2 = 18, \quad \frac{(x-1/2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Зробимо заміну змінних $x'=x-1/2$, $y'=y$ і введемо нову систему координат $x'O'y'$ із центром $O'(1/2; 0)$, що виходить із xOy

паралельним переносом. У системі координат $x'O'y'$ отримаємо канонічне рівняння еліпса з півосями a=3/2, b=$\sqrt{2}$:

$$\frac{x'^2}{(3/2)^2}+\frac{y'^2}{(\sqrt{2})^2}=1. \tag{4.10}$$

Випадок 2: ε=1.

$8x+y^2=24,\quad y^2=-8(x-3).$

Зробимо заміну змінних x'=x–3, y'=y. У системі координат $x'O'y'$ отримаємо параболу з параметром p=–4:

$$y'^2=-8x'. \tag{4.11}$$

Випадок 3: ε=3. Одержуємо:

$$-8x^2+88x-224+y^2=0,\quad -8\left(x^2-2\cdot\frac{11}{2}x+\frac{121}{4}\right)+242-224+y^2=0,$$

$$8\left(x-\frac{11}{2}\right)^2-y^2=18,\quad \frac{(x-11/2)^2}{9/4}-\frac{y^2}{18}=1\ \Rightarrow\ \frac{x'^2}{(3/2)^2}-\frac{y'^2}{(3\sqrt{2})^2}=1.$$

У системі координат $x'O'y'$, де x'=x–11/2, y'=y, отримали гіперболу з півосями a=3/2, b=$3\sqrt{2}$.

Змістовий модуль 4.
Диференціальне числення функції однієї змінної

§1. Множини та функції

Точного строгого означення множини – неіснує. *Множину розуміють як сукупність деяких об'єктів, об'єднаних за деякою ознакою чи властивістю.* Об'єкти, з яких складеться множина називають її елементами.

Множина вважається заданою, якщо відома спільна для усії її елементів властивість, за якою про кожний елемент можна сказати, належить він цій множині чи ні.

Множина, яка містить скінчену кількість елементів, називається скінченою. $A=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ - множина скінчена і містить n елементів. $x=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n;...\}$ - множина нескінченна, містить нескінченну кількість елементів.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається символом $\varnothing$.

Наприклад, до 1969 року множина людей, які побували на Місяці була порожньою $\varnothing$.

Якщо кожен елемент множини *A* є елементом множини *B*, то множину *A* називають **підмножиною** множини *B* і пишуть $A\subseteq B$ ($B\supseteq A$).

Операції над числовими множинами.

- Множина *C*, яка містить елементи, кожен з яких належить множині *A або B*, є об'єднанням (сумою) множин *A і B*:

$$C=A\cup B.$$

- Множина *C*, яка містить елементи, кожен з яких одночасно належить множинам *A і B*, є перерізом (добутком) множин *A і B*:

$$C=A\cap B.$$

- Множина *C*, яка містить елементи, кожен з яких належить множині *A* і не належить множині *B*, є різницею множин *A і B*:

$$C=A\backslash B.$$

У курсі вищої математики використовують множини, елементами яких є числа. Такі множини називають **числовими**. Серед числових множин насамперед виділимо такі:

- множина натуральних чисел $N = \{1,2,3,4,..., n,...\}$
- множина цілих чисел $Z = \{0,\pm1,\pm2,...,\pm n,...\}$
- множина раціональних чисел $Q = \left\{\frac{p}{q}\right\}$, де *p*- ціле число ($p \in Z$),*q*-натуральне ($q \in N$). Раціональними числами також називають числа, які можна записати у вигляді нескінченого періодичного десяткового дробу.
- множина дійсних чисел.

Між цими множинами існує такий зв'язок: $N \subset Z \subset Q.$.

Функції.

Нехай *A і B* - деякі множини. Якщо існує закон f, що символічно записується так: *y*=*f*(*x*), *y*=*F*(*x*), *y*=*φ*(*x*), *y*=*y*(*x*),за яким кожному елементу $x \in A$ можна поставити у відповідність один і тільки один елемент $y = B$, то кажуть, що задано **функцію** (відображення), визначену на множині *A* із значеннями у множині B. При цьому змінна величина *x* називається **незалежною** змінною, або **аргументом**.

Символи *f* (*x*), *F* (*x*), *φ* (*x*), *y*(*x*) умовно позначають *закон* відповідності змінних величин *x* і *y*. Закон відповідності може позначати послідовність дій над аргументом *x* для одержання відповідного значення *y*.

Приклади функцій: $y = 3x^4 + 5x - 1$; $y = x\sqrt{x}\sin x$.

Множину A при цьому називають *областю визначення функції* (множина значень, які може набувати аргумент *x*). Позначається $D(f)$.

Множина значень, які набуває змінна y (залежна змінна) називається *областю значень функції.* Позначається $E(f)$.

При цьому якщо кожному значенню *x* з області визначення функції відповідає одне значення *y*, то функція називається однозначною. У протилежному випадку – багатозначною.

Функції задаються аналітично у вигляді формул, таблично, графічно або словесно.

Графіком функції називається геометричне місце точок площини *Oxy*, координати яких (*x, y*) задовольняють умові $y = f(x)$.

Складною функцією від змінної величини *x* (або суперпозицією функцій) називається залежність змінної величини *y* від змінної величини *U* (від *проміжного аргументу*), яка (*U*) сама є функцією від аргументу *x* (від *кінцевого аргументу*). Позначається складна функція: $y= f(\varphi(x))$, або $y = f(U)$, де $U = \varphi(x)$.

Якщо *аргументом* функції *є* деякий *вираз*, який *включає* незалежну змінну *x*, то цей вираз і є внутрішньою функцією $U=\varphi(x)$.

Приклади складних функцій:

$y = e^{kx}$, $U = \varphi(x) = kx$, $y = e^{U}$;

$y = \sin(3x+2)$, $U = \varphi(x) = (3x+2)$, $y = \sin U$;

$y = \mathrm{tg}(\ln x)$, $U = \varphi(x) = (\ln x)$, $y = \mathrm{tg}\,U$.

За співвідношенням напрямку зміни аргументу (*x*) і функції (*y*) розрізняють такі функції (рис. 1, пп. 1–5 відповідно):

1) *монотонні*

зростаючі, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто при $x_2 > x_1$ маємо $f(x_2) > f(x_1)$ (наприклад $y = x$);

спадні, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто при $x_2 > x_1$ маємо $f(x_2) < f(x_1)$ (наприклад $y = -x$);

2) *періодичні.* Періодом періодичної функції, як правило, називають найменший додатне число *T*, що задовольняє рівняння $y(x+T) - y(x)=0$. ;

3) *парні*, для яких виконується умова $y(x) = y(-x)$;

4) *непарні*, для яких виконується умова $y(x) = -y(-x)$.

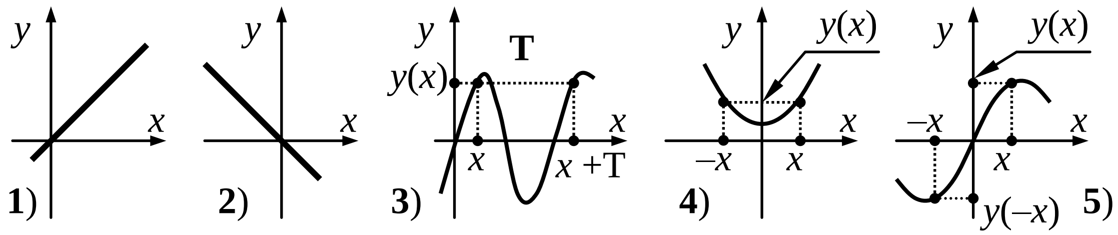


Рис. 1. Види функцій.

Відзначимо, що властивості парності і непарності функцій мають широке практичне застосування в теорії ймовірностей і математичній статистиці, зокрема, при побудові таблиць нормального розподілу випадкових величин.

Неявна функція. Нехай задано рівняння $F(x,y)=0$. Можливо, існують різні пари $(x;y)$, що задовольняють дане рівняння. Тоді на рівняння можна дивитись як на спосіб задання функції $y=f(x)$, а саме: за допомогою рівняння кожному значенню x з деякої множини ставиться у відповідність одне або декілька значень змінної y (таких, що для них $F(x,y)\equiv 0$). Функція від x, що визначається рівнянням $F(x,y)=0$, називається неявно заданою цим рівнянням.

Оберненою до функції $y = f(x)$ називають функцію $x = \varphi(y)$, для якої за відомим значеннем функції (y) знаходять (рис. 2.) значення аргументу (x). Обернена функція часто позначається так: $x = f^{-1}(y)$.

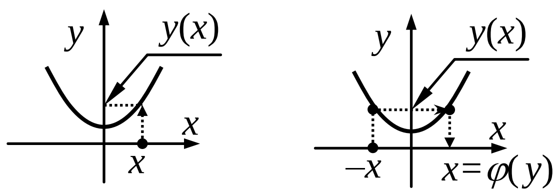


Рис. 2. Обернена функція.

Основними елементарними функціями називаються функції:

1) степенева $y = x^a$, де a – дійсне число (аргумент x *має* степінь *a)*;

2) показникова $y = a^x$, де a – додатне, відмінне від одиниці число (аргумент x знаходиться в *показнику* степеня числа *a)*;

3) логарифмічна $y = \log_a x$, де a – додатне, відмінне від одиниці число;

4) тригонометричні функції $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $y = \mathrm{tg}(x)$, $y = \mathrm{ctg}(x)$;

5) обернені тригонометричні функції $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$, $y = \mathrm{arctg}(x)$, $y = \mathrm{arcctg}(x)$.

Нагадаємо, що логарифмом числа x на основі a називається таке число y, в яке варто піднести число a, щоб одержати число x, тобто:

$x = a^y$; тоді $y = \log_a x$.

Функція $y = f(x)$ називається елементарною, якщо вона задана єдиним аналітичним виразом, складним з основних елементарних функцій і сталих величин за допомогою скінченого числа дій додавання, віднімання, множення, ділення і суперпозиції (операції утворення складеної функції).

Логарифмуванням рівності по основі a називається перехід від першої (показової) форми запису до другої логарифмічної форми.

Потенціюванням рівності називається перехід від логарифмічної (другої) форми запису до показової (до першої).

Приклад 1.1. Розглянемо множину C усіх студентів, які присутні на лекційному занятті. Нехай A - множина тих, які молодші 20 років, а B - множина тих студентів, зріст яких більше 165 см (A *і* B є підмножинами множини C).

$A \cup B$ - множина усіх студентів віком меньше 20 років і зростом вище 165 см одночасно.

$A \cap B$ - множина студентів, які молодші 20 років і зріст яких більше 165 см.

$A \setminus B$ - множина студентів віком менше 20 років, зріст яких не більше 165 см.

$B \setminus A$ - множина студентів, зріст яких більше 165 см та віком не менше 20 років.

Приклад 1.2. На деякому ареалі живуть 100 видів тварин. Визначимо множину A, як множину усіх видів, що харчуються день, а множину B - множину усіх видів, які харчуються вночі. Описати множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Якщо 80 видів харчується вдень, а 30 видів харчується вночі, то скільки тоді видів харчується тільки в день? Скільки видів харчується і в день і вночі?

$A \cup B$, - множина видів, які харчуються або вдень або вночі. Це множина усіх 100 видів тварин.

$A \cap B$, - множина видів, які харчуються і вдень і вночі або вночі одночасно.

$A \setminus B$, - множина видів, які харчуються тільки вдень.

$B \setminus A$. - множина видів, які харчуються тільки вночі.

Види, які харчуються тільки вдень – це види, які не харчуються вночі. Отже, 100-30=70 видів, які харчуються тільки вдень. Оскільки 80 видів харчується вдень, а 70 видів харчується тільки вдень, то 80-70=10 видів, які харчуються і вдень і вночі.

<u>Приклад 1.3.</u> Побудувати графік функції $y = x^3$ при $x \in [-3, 3]$.

Розв'язання. Задаємося одиничним кроком зміни аргументу x і розраховуємо таблицю значень $y = x^3$.

Таблиця 2.1

Значення функції $y = x^3$

x	–3	2	–1	0	1	2	3
$y = x^3$	–27	8	–1	0	1	8	27

Координати отриманих точок (x, y) відкладаємо на площині ***Oxy*** і з'єднуємо плавною кривою лінією. Одержимо криву лінію (рис. 4).

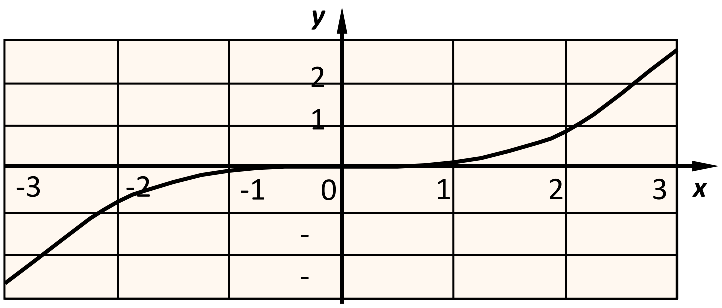


Рис. 3 Графік функції $y = x^3$.

Приклад 1.4. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

.

Розв'язання. Розрахунок значень цієї функції потребує обчислення значень кореня квадратного $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$, що можливо в тому випадку, коли підкореневий вираз невід'ємний, тобто коли (x^2 – $3x + 2) \geq 0$. Крім того, знаменник дробу не повинен дорівнювати нулю. Отже, область визначення функції буде задаватися умовою: $(x^2 - 3x + 2) > 0$.

Корені рівняння $(x^2 - 3x + 2) = 0$ відповідно дорівнюють ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$), тому нерівність $(x^2 - 3x + 2) > 0$ буде виконуватися при ($x < 1$) або при ($x > 2$).

Отже, областю визначення функції є об'єднання двох інтервалів: $(-\infty, 1)$ і $(2, +\infty)$, тобто $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Приклад 1.5. Дослідити на парність (непарність) функцію $f(x) = x^3 + 2x$.

Розв'язання:

$D(f): R,\ f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -f(x).$

Отже, функція $f(x) = x^3 + 2x$ є непарною.

Відповідь: функція $f(x) = x^3 + 2x$ непарна.

Приклад 1.6. Знайти основний період функції $y = |\cos x|$.

Розв'язання. За властивістю модуля $(\sqrt{x^2} = |x|)$ маємо $|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$. Для функцій $y = \sin(\omega x + \varphi)$ і $y = \cos(\omega x + \varphi)$, де $\omega > 0$ і φ - сталі, основним періодом є число $T = 2\pi/\omega$, бо функції синус і косинус мають період 2π. Тоді дістаємо $T = 2\pi/2 = \pi$.

Відповідь: $T = \pi$.

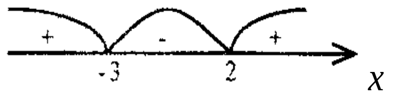
Приклад 1.7. Знайти основний період функції $y = \cos(2x + 3)$.

Розв'язання: Найменший період функції $y=\cos x$ дорівнює $T_0=2\pi$. Період функції $y=\cos(2x+3)$ знайдемо за формулою $T=\dfrac{T_0}{|k|}$. Отже, $T=\dfrac{2\pi}{|2|}=\pi$.

Відповідь: $T=\pi$.

<u>Приклад 1.8.</u> Знайти область визначення функцій: а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-6}}$, б) $y=\lg\sin(x-2)$, в) $y=\sqrt{4-x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1}}+\lg(x-2)$

Розв'язання:



а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-6}}$.

$D(f)$: $x^2+2x-6>0$, $(x+3)(x-2)>0$

$x\in(-\infty;-3)(2;+\infty)$.

б)

$y=\lg\sin(x-2)\Rightarrow D(f)=\{x\,|\,\sin(x-2)>0\}=\{x\,|\,2(\pi n+1)<x<\pi(2n+1)+2\}$;

в) $y=\sqrt{4-x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1}}+\lg(x-2)$,

$D(f)=\{x\,|\,4-x\geq 0\}\cap\{x\,|\,x\neq 1\}\cap\{x\,|\,x-2>0\}=(2;4]$.

<u>Приклад 1.9.</u> Знайти функцію обернену до даної функції $y=\dfrac{2x+3}{x-5}$.

Розв'язання: Область визначення заданої функції $X=(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$. Розв'язавши рівняння $y=\dfrac{2x+3}{x-5}$ відносно x, одержимо $x=\dfrac{5y+3}{y-2}$. Отже, оберненою до функції $y=\dfrac{2x+3}{x-5}$, $x\in X$, є функція $x=\dfrac{5y+3}{y-2}$, $y\in Y=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

§2. Числова послідовність. Границя

Якщо за деяким законом (правилом) кожному натуральному числу n поставлено у відповідність деяке дійсне число a_n, то кажуть, що задана *числова послідовність* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Числа a_i - члени послідовності, i - номер члена послідовності.

Позначають числову послідовність так: $(a_n), (x_n), \{a_n\}, \{x_n\}$.

Приклади числових послідовностей:

1) $a_n = \frac{1}{n}$, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$ 2) $a_n = n!$, 1, 2, 6, 24.

3) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

Число a називається *границею числової послідовності* a_n при $n \to \infty$ позначається $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$, що починаючи з номера $n > n_0$ буде виконуватись нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$. (2.1)

Послідовність, що має скінчену границю, називається *збіжною*, в іншому випадку - *розбіжною*.

Зміст означення границі числової послідовності полягає в тому, що коли a - границя послідовності, то в довільний, як завгодно малий ε-окіл точки a потрапляють усі члени послідовності, за винятком скінченного їхнього числа.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою,* якщо її границя дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = 0$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \infty$.

Якщо $\{x_n\}$ - нескінченно велика послідовність, то $y_n = \frac{1}{x_n}$ - нескінченно мала послідовність. Якщо $\{x_n\}$ - нескінченно мала послідовність і $x \neq 0$, то послідовність $y_n = \frac{1}{x_n}$ є нескінченно великою.

Основні теореми про границі

Теорема 3.1 Якщо послідовність має границю, то така границя єдина.

Теорема 3.2 Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ збігаються, а також $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то послідовності $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{const(a_n)\}, \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} (b \neq 0)$ також збігаються і виконуються рівності:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b;$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(const \cdot a_n) = const \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = const \cdot a;$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}, \ \ b \neq 0.$

Границя функції.

Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого, як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх x, що задовольняють умові: $|x - x_0| < \delta$, тобто $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(x) > 0, \ |f(x) - A| < \varepsilon, |x - x_0 < \delta|$.

Зауважимо, що $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ називають δ - окілом точки x_0 (рис. 4).

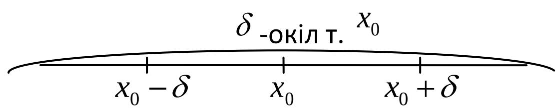


Рис. 4. Окіл точки x_0.

Функція $y = f(x)$ називається *нескінченно малою* в точці x_0 якщо $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Функція $y = f(x)$ називається *нескінченно великою* в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Односторонні границі. Якщо шукається $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ при умові, що x приймає значення менші за x_0 $(x < x_0)$, то ця границя, якщо вона існує, називається лівосторонньою і позначається $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ якщо x приймає значення більші за x_0 $(x > x_0)$, то границя називається правосторонньою і позначається $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$.

Основні теореми про границі функції. Важливі границі.

1) Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) границь цих функцій, якщо границі доданків існують, тобто

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm g(x).$$

2) Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій, якщо границі співмножників існують, тобто

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x).$$

3) Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границі чисельника і знаменника існують, а границя знаменника не дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

4) Сталий множник можна винести за знак границі, тобто

$$\lim_{x\to a}\left(C\cdot f(x)\right)=C\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

5) Границя цілого додатного степеня функції дорівнює тому ж степеню границі функції, тобто $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)\right)^n$.

Перша важлива границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\sin x}{x}=k,$ $k\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x}=k,$ $k\neq 0$

Друга важлива границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, де $e = 2{,}718281...$

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$;

Прийоми обчислення границь функції $\lim\limits_{x\to a} f(x)$**.**

1. Безпосередньо. Підставляємо значення $x = a$ у функцію $f(x)$.

2. Розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: чисельник і знаменник почленно ділимо на змінну у найвищому степені.

3. Розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$:

а) розкласти чисельник і знаменник на множники;

б) якщо до чисельника або знаменника входять квадратні чи кубічні корені, то потрібно домножити чисельник і знаменник на відповідні спряжені вирази, щоб позбутися коренів;

в) якщо під знаком границі стоять тригонометричні або обернені тригонометричні функції, то такі границі зводяться до першої визначної границі або її варіацій (наслідків).

4. Невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$ розкривається за допомогою другої важливої границі.

Неперервність функції.

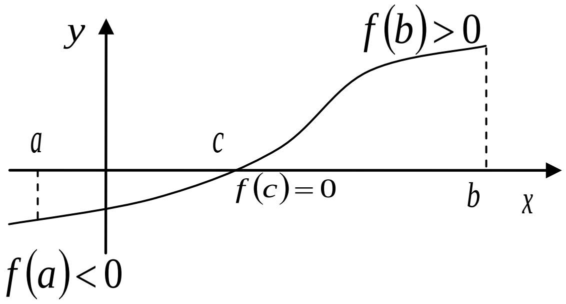
Означення. Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці інтервалу $(a;b)$, то кажуть, що вона неперервна на інтервалі $(a;b)$.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ означена у кінцевих точках відрізка $[a;b]$ і якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, то кажуть, що функція неперервна в точці a справа. Якщо $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$, то кажуть що функція $f(x)$ неперервна зліва.

Означення. Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;b)$, а також неперервна в точці a справа і в точці b зліва, то кажуть, що функція неперервна на відрізку $[a;b]$.

Розглянемо деякі важливі властивості функцій, що неперервні на відрізку. Їх вивченням і строгим обґрунтуванням займалися видатні математики Больцано (1817) (чешський математик) і Коші (1821) (французький математик). Їм і належить теореми, які приводяться.

Перша теорема Больцано-Коші. Нехай функція $f(x)$ означена і еперервна на відрізку $[a;b]$ і у кінцях цього відрізку набуває значення різних знаків. Тоді між a і b обов'язково знайдеться точка c, в якій функція дорівнює нулю: $f(c)=0$.



Теорема має простий геометричний зміст: якщо неперервна крива переходить з одного боку осі x на інший, то вона перетинає цю вісь.

Рис. 5.

Друга теорема Больцано-Коші. Нехай функція $f(x)$ означена і неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізку набуває значень, що не дорівнюють одне одному. $f(a)=A,\ f(b)=B$ $(A \neq B)$. Тоді, яке б не було число C, що лежить між A і B, знайдеться така точка c між a і b, що $f(c)=C$.

Зміст цієї теореми полягає в тому, що переходячи від одного свого значення до іншого, функція хоча б раз проходить через кожне проміжне значення.

Дослідження неперервності функцій належить також видатному німецькому математику Карлу Веєрштрассу.

Перша теорема Веєрштрасса. Якщо функція $f(x)$ означена і неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена і знизу і зверху, тобто існують такі сталі і скінченні числа m і M, що $m \le f(x) \le M$ при $a \le x \le b$.

Друга теорема Веєрштрасса. Якщо функція означена і неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень.

Іншими словами знайдуться точки $x_1 \in [a;b]$, $x_2 \in [a;b]$ такі, що $f(x_1) = \min\limits_{[a;b]} f(x)$, $f(x_2) = \max\limits_{[a;b]} f(x)$.

$$f(a) = \min_{[a;b]} f(x) \quad f(b) = \max_{[a;b]} f(x)$$

$$f(x_0) = \min_{[a;b]} f(x) \quad f(b) = \max_{[a;b]} f(x).$$

Класифікація точок розриву функції.

Якщо в деякій точці порушується хоча б одне з умов означення неперервності, то цю точку називають точкою розриву.

В точці розриву функція може бути означеною, чи неозначеною, але для такої точки відіграє важливу роль не її значення, а однобічні границі $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

Означення. Точка x_0 називається точкою розриву I роду, якщо в цій точці існують обидві однобічні границі і можливі випадки:

а) x_0 – не належить області визначення.

б) $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ – не виконується.

Означення. Якщо хоча б одна з однобічних границь в точці розриву не існує чи дорівнює нескінченності, то це точка розриву II роду.

Приклад 2.1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. В точці $x = 0$ – функція неозначена, а це означає, що точка $x = 0$ – точка розриву.

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Отже точка $x=0$ – точка розриву І роду (рис. 6).

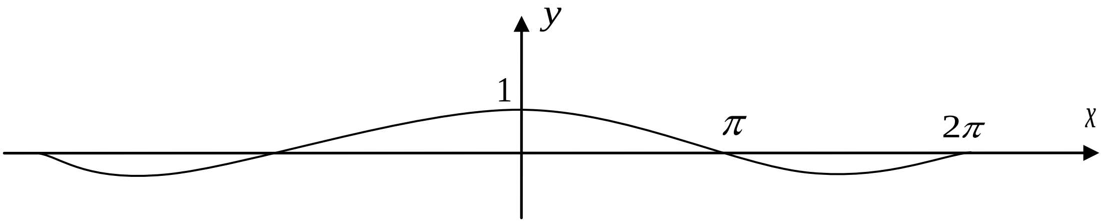


Рис. 6.

<u>Приклад 2.2.</u> $y=tgx$. В точці $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n>0,\pm1,\pm2...$ ця функція неозначена $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)_{+0}} tgx=-\infty$ та $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)_{-0}} tgx=+\infty$. Отже, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ – точки розриву ІІ роду (рис. 7).

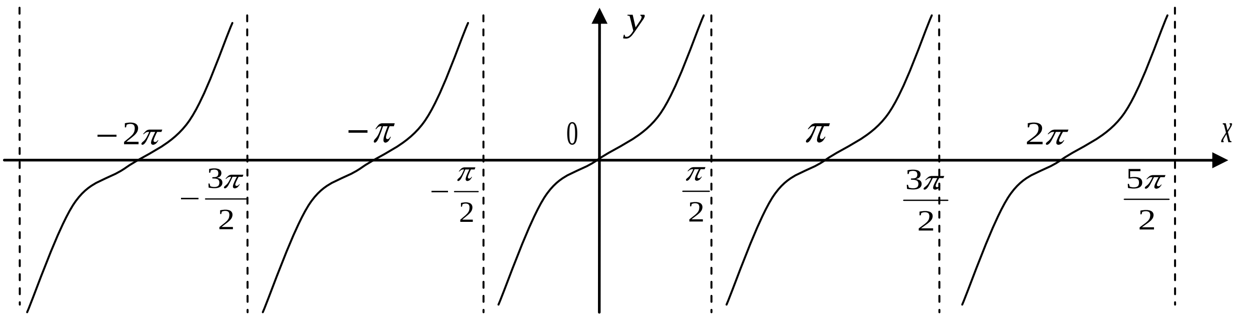
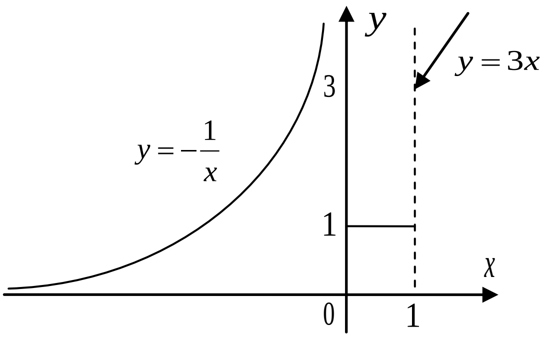


Рис. 7.

<u>Приклад 2.3.</u> Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3},\ x<0\\ 1,\ \ 0\le x\le 1\\ 3x,\ \ x>1\end{cases}.$$



Тут потрібно досліджувати на неперервність точки границі різних аналітичних виразів.

Рис. 8.

В інших точках функція неперервна.

1) $x=0$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty\\&\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim 1=1\end{aligned}\right\} x=0$$ - точка розриву II роду.

2) $x=1$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim 1=1\\&\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1} 3x=3\end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1-0} f(x)\neq \lim_{x\to 1+0} f(x);\ x=1$$ - точка розриву I роду.

Відмітимо, що різницю $\lim\limits_{x\to x_{0+0}} f(x)-\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x_0)$ називають стрибком функції. В точці $x=1$ стрибок функції дорівнює 3-1=2. Буває, що в точці розриву однобічні границі скінченні і дорівнюють одна одній ($\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)=\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)$), але в самій точці x_0 функція чи неозначена, чи її значення не дорівнює однобічним границям. Такий розрив називають усувним. Це пов'язано з тим, що якщо доозначити функцію таким чином: $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)=\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)$, то ми отримаємо неперервну функцію (рис. 8).

<u>Приклад 2.4.</u> Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2+5x-2}{5x^2+14x+8}$, якщо 1) $a=-2$; 2) $a=1$; 3) $a=\infty$.

Розв'язання:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{5x^2+14x+8}=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{5(x+2)\left(x+\frac{4}{5}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{5\left(x+\frac{4}{5}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{(3x-1)}{(5x+4)}=$$

$$=\frac{3\cdot(-2)-1}{5\cdot(-2)+4}=\frac{-7}{-6}=1\frac{1}{6};$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-2}{5x^2+14x+8}=\frac{3\cdot 1^2+5\cdot 1-2}{5\cdot 1^2+14\cdot 1+8}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9};$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-2}{5x^2+14x+8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{14x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{14}{x}+\frac{8}{x^2}}=\frac{3+0-0}{5+0-0}=\frac{3}{5}.$$

<u>Приклад 2.5</u>. Обчислити наступні границі послідовностей

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{n^2-3n+2}{-3n^2}=-\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{-3n^2}=-\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\right)=-\frac{1}{3}(1-0+0)=-\frac{1}{3}.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt[3]{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)}=\frac{0}{1-0}=0.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2-2n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-2n}-n^2\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-2n^2\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n\left(\sqrt{\left(1+\frac{3}{n}\right)}+1\right)}=\frac{-2}{\sqrt{1+0}+1}=-1.$$

<u>Приклад 2.6.</u> Знайти границі функцій:

Переконавшись, що маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, розкладаємо чисельник і знаменник дробу на множники, як квадратний тричлен, потім скорочуємо дріб на спільний множник чисельника і знаменника.

1)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\\x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\end{matrix}\right|=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x-3}=\frac{1}{2}$$

.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+3x-4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+4}=\dfrac{1+1+1}{1+4}=\dfrac{3}{5}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x+5}{x^2-2}=\dfrac{2^3+2+5}{2^2-2}=\dfrac{15}{2}=7{,}5$.

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+3}{x^2-4}=\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x+3}=0$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

З'ясуємо спочатку, що при вказаному значенні аргументу задана функція перетворюється у відношення двох нескінченно малих величин (невизначеність $\left(\dfrac{0}{0}\right)$), перетворимо дріб таким чином, щоб скоротити його на множник, який прямує до нуля. Позбудемося ірраціональності в чисельнику шляхом помноження чисельника і знаменника на $\left(\sqrt{x+1}+1\right)$, а потім скоротимо дріб на x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

7) $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)}{1}\lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x}+2)=8\cdot 4=32.$$

<u>Приклад 2.7.</u> Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cos 2x}{7x}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3n+6}{3n-5}\right)^{-3n+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-23x)^{\frac{5}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg33x}{x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x}\right)^{2x}$.

Розв'язання:

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{7\sin 7x}{7x}=7\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{x}=7\cdot1=7;$$

$$2)\ \lim_{x\to0}\frac{tg3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x\cdot\cos 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos 3x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot1=3\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot1=3;$$

$$3)\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x\cos 2x}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}5x\cos 2x}{7x}=\frac{5}{7}\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim_{x\to0}\cos 2x=\frac{5}{7}\cos 0=\frac{5}{7}$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n-5}\right)^{-3n+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3n-5+5+6}{3n-5}\right)^{-3n+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{11}{3n-5}\right)^{-3n+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n-5}{11}}\right)^{-3n+1}\right)^{-11}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{3n-5}{11}}\right)^{-4}=e^{-11}\cdot1^{-4}=e^{-11}=\frac{1}{e^{11}};$$

$$5)\ \lim_{x\to0}(1-23x)^{\frac{5}{x}}=\left|\begin{array}{l}t=-23x,\\ x=-\dfrac{t}{23},\\ t\to0\end{array}\right|=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{115}{t}}=\lim_{t\to0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-115}=e^{-115}=\frac{1}{e^{115}};$$

$$6)\ \lim_{x\to0}\frac{arctg33x}{x}=\left|\begin{array}{l}t=arctg33x,\\ 33x=tgt,\\ x=\dfrac{tgt}{33},\ t\to0\end{array}\right|=\lim_{t\to0}\frac{33t}{tgt}=\lim_{t\to0}\frac{33t\cos t}{\sin t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{33\cos t}{1}=1\cdot33=33.$$

$$7)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x}{3}}\right)^{\frac{4x}{3}\cdot\frac{3}{4x}\cdot2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{4x}}=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}.$$

<u>Приклад 2.8.</u> Довести неперервність функції $y=\dfrac{x^2+9}{x^2-x}$ у точці $x=3$.

Розв 'язання: $f(3)=\dfrac{3^2+9}{3^2-3}=3,$ - функція визначенна в точці x=3.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+9}{x^2-x}=\dfrac{9+9}{9-3}=3.$ Оскільки $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$ то задана функція неперервна в точці x=3, що і треба було довести.

<u>Приклад 2.9.</u> Багато хімічних реакцій і процесів проходять так, що в кожний момент часу і швидкість утворення деякої речовини пропорційна кількості цієї речовини в заданий момент часу. Знайдемо закон, за яким відбувається утворення речовини.

Нехай m_0 - кількість речовини в момент часу $t=0$ (тобто початкова кількість речовини). Проміжок часу $(0;t)$розіб'ємо на *n* дрібних проміжків:

$$\left(0;\frac{t}{n}\right),\left(\frac{t}{n};\frac{2t}{n}\right),\left(\frac{2t}{n};\frac{3t}{n}\right),\dots,\left(\frac{(n-1)t}{n};t\right)$$

Якщо вважати, що протягом кожного з цих малих проміжків часу швидкість реакції стала, то кількості речовини в моменти часу $\frac{t}{n},\frac{2t}{n},\frac{3t}{n},\dots,t$

відповідно дорівнюватимуть

$m_1=m_0+km_0\frac{t}{n}=m_0(1+\frac{kt}{n});$

$m_2=m_1+km_1\frac{t}{n}=m_0(1+\frac{kt}{n})^2;$

$m_3=m_2+km_2\frac{t}{n}=m_0(1+\frac{kt}{n})^3;$

…………………………………………...

$m_n=m_{n-1}+km_{n-1}\frac{t}{n}=m_0(1+\frac{kt}{n})^n;$

де k - заданий коефіцієнт пропорційності. Але за умовою задачі процес утворення речовини відбувається неперервно. Тому, щоб знайти точну формулу, треба припустити, що число дрібних проміжків необмежено зростає, а їхня тривалість прямує до нуля. Звідси для кількості речовини t в довільний момент часу t дістаємо формулу$m=\lim_{n\to\infty} m_0(1+\frac{kt}{n})^n=m_0\,e^{kt}$.

Це і є закон, за яким відбувається утворення речовини. Він зустрічається при дослідженні таких процесів, як розклад радію, розмноження бактерій тощо.

Відповідь. $m = m_0 e^{kt}$.

Приклад 2.10. Коли вливают глюкозу, її вміст у крові хворого (виражений у відповідних одницях) через $t(t \geq 0)$ годин становить $C(t) = 12 - 9e^{-t}$. Знайти рівноважний вміст глюкози в крові. Задача зводиться до знаходження наступної границі:

$$\underset{t\to\infty}{Lim}\, C(t) = \underset{t\to\infty}{Lim}(12 - 9e^{-t}) = 12 - 9\,\underset{t\to\infty}{Lim}\frac{1}{e^t} = 12.$$

Приклад 2.11. Нехай популяція росте від початкового розміру 700 особин до розміру $p(t) = 700 + 300(1 - 2^{-t})$ в момент часу $t(t \geq 0)$. Знайти рівновагу популяції. Задача зводиться до знаходження наступної границі:

$$\underset{t\to\infty}{Lim}\, p(t) = \underset{t\to\infty}{Lim}(700 - 300(1 - 2^{-t})) = 700 + 300(1 - \underset{t\to\infty}{Lim}\frac{1}{2^t}) = 700 + 300 = 1000$$

§3. Похідна функції однієї змінної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку *X*. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо аргументу довільного прирісту $\Delta x \neq 0$ такий, що $x = x_0 + \Delta x \in X$.

При цьому функція набуде приросту $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, де $\Delta x = x - x_0$ - приріст аргументу, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приріст функції.

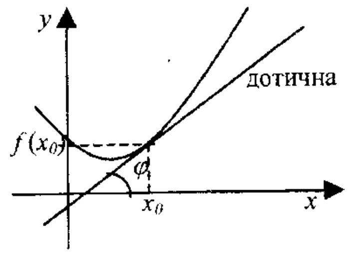
Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, тобто $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$,

де $y'; f'(x); y'_x$ - позначення похідної, запропоноване Ньютоном; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df}{dx}$ - позначення Лейбніца похідної функції $y = f(x)$.

Операція знаходження похідної називається диференціюванням. Функція $y = f(x)$ називається диференційованою в точці x_0, якщо в цій точці існує похідна $y' = f'(x_0)$, тобто якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ існує і має одне і теж значення, якщо

$\Delta x \to 0$ будь-яким способом. При цьому функція буде і неперервною в цій точці.

Геометричний зміст похідної: значення похідної в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці x_0 і дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до додатного напряму осі ОХ:



$f'(x_0) = tg\varphi = k$, де k - ***кутовий коефіцієнт дотичної*** до графіка функції;

Для отримання рівняння дотичної можна скористатись рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b,\ k = tg\alpha$. Оскільки дотична проходить через точку з координатами $(x_0, f(x_0))$ і $f'(x_0) = tg\varphi = k$, тоді ***рівняння дотичної*** має вигляд: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Нормаллю до кривої в даній точці називають пряму, яка проходить через цю точку і перпендикулярна дотичній.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$ має вигляд:

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Фізичний зміст похідної: похідна функції в точці визначає миттєву швидкість зміни значення функції в цій точці.

Це маже бути швидкість реакції (хімічний зміст), швидкість росту популяції (біологічний зміст). Нехай $Q(t)$– концентрація речовини, яка отримується у ході хімічної реакції в момент часу t. Тоді $C'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q(t_0)}{\Delta t}$ – швидкість реакції в моментt_0.

Похідні основних елементарних функцій

1. $(C)' = 0$, С – стала;
2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$;

   $x' = 1$, $\left(x^2\right)' = 2x$;
3. $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

9. $(\cos x)' = -\sin x$; $(\cos kx)' = -k \sin kx$;
10. $(\sin x)' = \cos x$; $(\sin kx)' = k \cos kx$;
11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(tgkx)' = \frac{k}{\cos^2 kx}$;
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; $(ctgkx)' = -\frac{k}{\sin^2 kx}$;

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

6. $(a^x)' = a^x \ln a$,

$(a > 0, a \neq 1)$;

7. $(e^x)' = e^x$; $(e^{kx})' = ke^{kx}$;

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

$(a > 0, a \neq 1)$;

13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arcsin kx)' = \frac{k}{\sqrt{1-(kx)^2}}$;

14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos kx)' = -\frac{k}{\sqrt{1-(kx)^2}}$;

15. $(arctgx)' = \frac{1}{x^2+1}$; $(arctgkx)' = \frac{1}{(kx)^2+1}$;

16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{x^2+1}$; $(arcctgkx)' = -\frac{k}{(kx)^2+1}$.

Основні правила знаходження похідної.

Якщо c – стала величина і функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ мають похідні, то $c' = 0$;

1. ***Сталий множник*** можна винести за знак похідної: $(cu)' = cu'$;

2. ***Похідна алгебраїчної суми*** двох диференційованих функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі похідних цих функцій: $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

4. ***Похідна добутку*** двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і першої функції на похідну другої функції: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;

5. ***Похідна частки*** двох диференційованих функцій дорівнює дробу, знаменником якого є квадрат знаменника цього дробу, а чисельником - різниця між добутком похідної чисельника на знаменник і добутком чисельника на похідну знаменника: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

7. Похідна складної функції дорівнює добутку похідної функції $y = f(u)$ за проміжним аргументом u на похідну проміжного аргументу за x. Якщо $y = f(u(x))$, то $y' = f'_u \cdot u'_x$.

8. Похідна оберненої функції. Дифференційовна функція $y = f(x)$ $(a < x < b)$ з похідною $f'(x) \neq 0$ має однозначну неперервну обернену функцію $x = f^{-1}(y)$, причому обернена функція також диференційовна і має місце наступна формула $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

9. Похідна від параметрично заданої функції.

Функція може бути задана ***параметрично*** у вигляді

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, де $t \in [\alpha; \beta]$.

Нехай функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ диференційовані в деякому околі точки t_0 і $x'(t) \neq 0$ для всіх t із цього околу. Тоді $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

10. Похідна від неявно заданої функції. Для знаходження похідної функції, що неявно задана рівнянням $F(x,y)=0$ потрібно продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як складену функцію від x, а потім отримне рівняння розв'язати відносно похідної y'.

11. Похідні вищих порядків від функції $y = f(x)$.

Похідною другого порядку функції $y = f(x)$ в точці x називається похідна від функції $f'(x)$ (похідна від похідної першого порядку цієї функції), тобто

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Позначається похідна другого порядку так: $y''; f''(x); \dfrac{d^2y}{dx^2}; \dfrac{d^2f}{dx^2}$.

Похідною n-го порядку функцій $y = f(x)$ називається похідна функції $f^{(n-1)}(x)$ (похідна від похідної $(n$-1)-го порядку),

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)'.$$

Позначається похідна n-го порядку: $y^{(n)}; f^{(n)}(x); \dfrac{d^n y}{dy^n}; \dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Диференціал функції

Якщо приріст функції $y = f(x)$ від незалежної змінної x може бути представлений у вигляді $\Delta y = \underbrace{f'(x)dx}_{dy} + o(\Delta x),$ при $dx = \Delta x$, то головну лінійну частину цього приросту називають ***диференціалом функції*** $y = f(x)$: $dy = f'(x)dx.$ Для існування диференціала функції $y = f(x)$ необхідно і достатньо щоб існувала скінчена похідна $y' = f'(x)$, причому: $dy = f'(x)dx.$

Остання формула зберігає свою силу і в тому випадку, коли змінна x є функцією від нової незалежної змінної (*властивість інваріантності першого диференціала*).

Правила знаходження диференціала

1. Диференціал суми двох диференційовних функцій u і v дорівнює сумі диференціалів цих функцій: $d(u+v) = du + dv$.

2. Диференціал добутку двох диференційовних функцій u і v визначається за формулою $d(uv) = vdu + udv$.

3. Диференціал частки двох диференційовних функцій u і v визначається за формулою $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

4. Диференціал складеної функції. Нехай $y = f(u), u = \varphi$, тобто $y = f(\varphi(x))$.

Тоді $dy = f'(u) \cdot \varphi'(x)dx$.

Для наближених обчислень функції $f(x)$ використовують формулу $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, або $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Відносна похибка: $\delta = \dfrac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}$.

Диференціалом 2-го порядку функції $y = f(x)$ в точці x називається вираз $d(dy) = d^2 y$ (диференціал від диференціала 1-го порядку функції в цій точці). $d^2 y = f''(x)dx^2$.

Диференціалом n-го порядку функції $y = f(x)$ в точці x називається вираз $d\left(d^{n-1}y\right) = d^n y$ (диференціал від диференціала *(n*-l*)*-го порядку функції в цій точці) $d^n y = f^n(x)dx^n$.

<u>Приклад 3.1</u>. Знайти похідні функцій:

1) $y = 5x^4, \quad y' = 5(x^4)' = 5 \cdot 4x^{4-1} = 20 \cdot x^3$

2) $y = \dfrac{7}{x}, \quad y' = 7\left(\dfrac{1}{x}\right)' = 7\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{7}{x^2}.$

3) $y = 10\sqrt[3]{x}, \quad y' = 10\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = 10 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{10}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$

4) $y = \dfrac{8}{x^4}, \quad y' = 8\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' = 8(x^{-4})' = 8 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} = -\dfrac{32}{x^5}.$

5) $y = \dfrac{9}{\sqrt{x^7}}, \quad y' = 9\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)' = 9\left(-\dfrac{7}{2}\right) \cdot x^{-\frac{7}{2}-1} = -\dfrac{63}{2\sqrt{x^9}}.$

6) $y = 4 + 5x^2 + \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{4\sqrt{x}}{3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}};$

$$y' = (4)' + (5x^2)' + \left(\frac{8}{x^2}\right)' - \left(\frac{4\sqrt{x}}{3}\right)' - \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 5 \cdot 2x + 8 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} -$$

$$-\frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 2\sqrt{x}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = 10x - \frac{16}{x^3} - \frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}};$$

7) $y = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt[5]{x}} - 5$

$$y' = 2\left(x^{1+\frac{1}{2}}\right) + \left(x^{1-\frac{1}{5}}\right)' - (5)' = 2\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5} \cdot x^{-\frac{1}{5}} = 3\sqrt{x} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$$

8) $y = x^4 \sin x$

$$y' = \left(x^4\right)' \sin x + x^4 \cdot (\sin x)' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x.$$

9) $y=\sqrt{x}\,e^{x}\,\dfrac{7^{x}+7x}{2\cos x}$

$$y'=\left(\sqrt{x}\right)'\cdot e^{x}+\sqrt{x}\cdot\left(e^{x}\right)'-\frac{\left(7^{x}+7x\right)'\cdot 2\cos x-\left(7^{x}+7x\right)\left(2\cos x\right)'}{4\cos^{2}x}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x}+\sqrt{x e^{x}}-\frac{\left(7^{x}\ln 7+7\right)\cdot 2\cos x+\left(7^{x}+7x\right)\cdot 2\sin x}{4\cos^{2}x}.$$

<u>Приклад 3.2.</u> Знайти похідну від складних функцій:

1) $y=e^{3tg\frac{1}{x}}+\cos^{3}x$

$$y'=\left(e^{3tg\frac{1}{x}}\right)+\left(\cos^{3}x\right)'=e^{3tg\frac{1}{x}}\left(3tg\,\frac{1}{x}\right)'+3\cos^{2}x\left(\cos x\right)'=e^{3tg\frac{1}{x}}\cdot 3\cdot\frac{1}{\cos^{2}\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+$$

$$=3\cos^{2}x\left(-\sin x\right)=e^{3tg\frac{1}{x}}\cdot\frac{3}{\cos^{2}\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)-3\cos^{2}x\sin x$$

2) $y=\left(4x^{2}+1\right)^{2}\cdot 5^{\sqrt{x^{3}-1}}$

$$y'=\left(\left(4x^{2}+1\right)^{2}\right)'\cdot 5^{\sqrt{x^{3}-1}}-\left(4x^{2}+1\right)^{2}\cdot\left(5^{\sqrt{x^{3}-1}}\right)'=$$

$$=2\cdot\left(4x^{2}+1\right)\left(4x^{2}+1\right)'\cdot 5^{\sqrt{x^{3}-1}}+\left(4x^{2}+1\right)^{2}\cdot 5^{\sqrt{x^{3}-1}}\cdot\ln 5\cdot\left(\sqrt{x^{3}-1}\right)'=$$

$$=2\cdot\left(4x^{2}+1\right)^{2}\cdot 8x\cdot 5^{\sqrt{x^{3}-1}}+\left(4x^{2}+1\right)^{2}\cdot 5^{\sqrt{x^{3}-1}}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^{3}-1}}\cdot 3x^{2}$$

<u>Приклад 3.3.</u> Обчислити значення похідної функції $f(x)=\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ у точці $x=2a$

$$f(x)=\frac{1}{\frac{a-x}{a+x}}\cdot\frac{(a-x)'(a+x)-(a-x)(a+x)'}{(a+x)^{2}}=$$

$$=\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{-1\cdot(a+x)-(a-x)\cdot 1}{(a+x)^{2}}=\frac{-a-x-a+x}{(a-x)(a+x)}=-\frac{2a}{a^{2}-x^{2}};$$

$$f'(2a)=-\frac{2a}{a^{2}-(2a)^{2}}=-\frac{2a}{a^{2}-4a^{2}}=-\frac{2a}{-3a^{2}}=\frac{2a}{3a}.$$

Приклад 3.4. Знайти похідну параметрично заданої функції: $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$.

Знайдемо

$$y_t' = e^t \cdot \cos t + e^t \cdot (-\sin t) = e^t (\cos t - \sin t);$$

$$x_t' = e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t = e^t (\sin t + \cos t);$$

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{e^t (\cos t - \sin t)}{e^t (\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$$

Приклад 3.5. Знайти похідну неявно заданої функції:

$$x^2 + 4y^3 + 2xy = 0$$

Диференціюємо по змінній ***x*** ліву і праву частину рівняння, враховуючи, що ***y*** – це функція від ***x***:

$$2x + 12y^2 \cdot y_x' + 2y + 2x \cdot y_x' = 0.$$

Розв'язуємо рівняння відносно y_x'.

$$y_x' (12y^2 + 2x) = -2x - 2y;$$

$$y_x' = \frac{-2x - 2y}{12y^2 + 2x} = -\frac{x + y}{6y^2 + x}.$$

Приклад 3.6. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x \ln x$ у точці з абсцисою $x_0 = e$;

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до кривої:

$$y'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad y'(x_0) = y'(e) = \ln e + 1 = 2,$$

а також $y(x_0) = y(e) = e \ln e = e$.

Підставимо в рівняння дотичної:

$$y - e = 2 \cdot (x - e);$$

$$y = 2x - 2e + e;$$

$$y = 2x - e.$$

Приклад 3.7. Знайти похідну другого порядку функції: $y = \arcsin 3x$.

Знайдемо

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} = 3\cdot\left(1-9x^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = (y')' = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-9x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-18x) = \frac{27x}{\sqrt{(1-9x^2)^3}}.$$

Приклад 3.8. Знайти диференціали першого, другого, третього та четвертого порядків функції $y = (2x-3)^3$.

Розв'язання:

$dy = 3(2x-3)^2 \cdot 2dx = 6(2x-3)^2\, dx,$

$d^2 y = 12(2x-3)\cdot 2dx^2 = 24(2x-3)dx^2,$

$d^3 y = 24\cdot 2dx^3 = 48dx^3,$

$d^4 y = 0\cdot dx^4 = 0.$

Приклад 3.9. Знайти диференціал 3-го порядку функції $y = x^3 + e^{-2x}$.

Розв'язання: Диференціал 3-го порядку функції знайдемо за формулою $d^3 y = y^{(3)} dx^3$.

$$y' = \left(x^3 + e^{-2x}\right)' = 3x^2 + e^{-2x}(-2x)' = 3x^2 - 2e^{-2x},$$

$$y'' = \left(3x^2 - 2e^{-2x}\right)' = 6x + 4e^{-2x},$$

$$y''' = \left(6x + 4e^{-2x}\right)' = 6 - 8e^{-2x}.$$

Отже, $d^3 y = \left(6 - 8e^{-2x}\right)dx^3$.

Відповідь: $d^3 y = \left(6 - 8e^{-2x}\right)dx^3$.

Приклад 3.10. Нехай функція $f(x) = 70x^{0,74}$ визначає залежність між кількістю кисню, який поглинає тварина за одиницю часу та вагою тварини (константи взяті для ссавців). Дослідити приріст функції, знайти абсолютну та відносні похибки при умові $x = 60$ кг, а $\Delta x = 1$кг.

Розв'язання. Знайдемо приріст кількості кисню, який поглинає тварина за одиницю часу при зміні ваги тварини на 1 кг, тобто знайдемо приріст функції:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = 70((60+1)^{0,74} - 60^{0,74}) = 70(61^{0,74} - 60^{0,74}) = 17{,}5.$$

Далі, знайдемо диференціал $df(x) = f'(x)\Delta x = 70 \cdot 0{,}74 \cdot 60^{0{,}74-1} = 0{,}3$. Отже, абсолютна похибка дорівнює 0,3, а відносна похибка $\frac{0{,}3}{17{,}5} = 0{,}017$

<u>Приклад 3.11.</u> Нехай функція $f(x) = 1000 + 50x^2$ визначає розмір деякої популяції в момент часу x (год.). Дослідити середню швидкість росту популяції.

Розв'язання. Обчислимо приріст кількості особин популяції за проміжок часу Δx:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+\Delta x) - f(x) = 1000 + 50(x+\Delta x)^2 - 1000 - 50x^2 = \\ &= 50x^2 + 100x\Delta x + 50(\Delta x)^2 - 50x^2 = \Delta x(100x + 50\Delta x)\end{aligned}.$$

Середня швидкість росту популяції за проміжок часу Δx:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(100x + 50\Delta x)}{\Delta x} = 100x + 50\Delta x.$$

Миттєва швидкість росту популяції за проміжок часу Δx:

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta x(100x + 50\Delta x)}{\Delta x} = 100x.$$

Як бачимо знак похідної додатній тому робимо ввисновок, що швидкість росту цієї популяції збілшується з часом.

§4. Обчислення границь та дослідження функції за допомогою похідних

Правило Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$:

1) диференційовні в деякому околі точки a і в цьому околі $g'(x) \neq 0$;

2) одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими в точці a;

3) існує границя відношення похідних цих функцій $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує границя відношення цих функцій $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\ \ \text{або}\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Дане правило дає можливість розкривати невизначеності типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ та $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Для невизначеностей типу $[0\cdot\infty]$ та $[\infty-\infty]$ знаходження границі функції зводиться до випадку $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ шляхом перетворення функції до виду дробу, а потім застосуємо правило Лопіталя, тобто:

1) якщо $f(x)\to 0$, а $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$, або $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$;

2) якщо $f(x)\to\infty$, а $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)-\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Для невизначеностей типу $[1^{\infty}]$, ∞^{0} та 0^{0} знаходження границі функції зводиться до випадку $[0\cdot\infty]$, а потім до випадку $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ або $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ наступним шляхом: логарифмуємо функцію та знаходимо границю її логарифма, а потім за знайденою границею логарифма знайдемо і границю самої функції: $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$.

Зростання та спадання функції, достатня умова.

Функція $y=f(x)$ називається ***зростаючою*** на інтервалі (a,b), якщо більшому значенню аргументу з цього інтервалу відповідає більше значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2>x_1$, випливає нерівність $f(x_2)>f(x_1)$.

Функція $y = f(x)$ називається ***спадною*** на інтервалі (a,b), якщо більшому значенню аргументу з цього інтервалу відповідає менше значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2 > x_1$, випливає нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Достатня умова зростання (спадання) функції.

Якщо в кожній точці інтервалу (a,b) $f'(x) > 0$, то функція $y = f(x)$ зростає на цьому інтервалі.

Якщо в кожній точці інтервалу (a,b) $f'(x) < 0$, то функція $y = f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Екстремуми функцій, необхідна та достатня умови.

Точка x_0 називається точкою локального максимуму функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, для всіх точок x якого виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 називається точкою локального мінімуму функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, для всіх точок x якого виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимуму (x_{max}) і точки мінімуму (x_{min}) називаються точками екстремуму. Значення функції в точках максимуму (y_{max}) та мінімуму (y_{min}) називається екстремумами (максимумом і мінімумом) функції.

Критичні точки - це внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Необхідна умова екстремуму. Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо похідна функції в цій точці дорівнює нулю або не існує .

$$x_0 \text{ - точка екстремуму} \Longrightarrow \begin{matrix} f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) - \textit{не існує} \end{matrix}$$

Достатня умова екстремуму.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ функції змінює в точці x_0 знак на протилежний, то точка x_0 - є точкою екстремуму функції $y = f(x)$. Причому, якщо:

- у точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з „+” на „-” , то x_0- точка максимуму;
- у точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з „-” на „ +” , то x_0 - точка мінімуму.

Алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ на зростання (спадання) та екстремуми.

1. Знайти область визначення та інтервали, на яких функція неперервна.

2. Знайти похідну $f'(x)$ та критичні точки:

а) $f'(x) = 0$

б) $f'(x)$ не існує.

3. Позначити критичні точки на області визначення функції, таким чином розбиваємо цими точками область визначення функції на інтервали. Знаходимо знак похідної на кожному інтервалі.

4. Знайти проміжки зростання ($f'(x)$>0) та проміжки спадання ($f'(x)$< 0).

5. Визначити точки екстремуму (x_{max}) і (x_{max}). Знайти (y_{max}) і (y_{min}).

Достатні умови опуклості та вгнутості.

Графік диференційовної функції $y = f(x)$ називається ***опуклим (вгнутим)*** на відрізку $[a;b]$, якщо ділянка кривої $y = f(x)$ ($a \le x \le b$) розташована над (під) дотичною, проведеною в будь-якій точці цього відрізка. Якщо в кожній точці інтервалу (a,b) $f''(x) > 0$ і то на інтервалі (a,b) графік функції $f(x)$ напрямлено опуклістю вниз (***опуклий)***.

Якщо в кожній точці інтервалу (a,b) $f''(x) < 0$, то на інтервалі (a,b) графік $f(x)$ напрямлено опуклістю вгору ***(угнутий)***.

Якщо в кожній точці інтервалу (a,b) $f''(x)=0$, то на інтервалі (a,b) графік $f(x)$ є лінією і графіком її є пряма. Можна вважати, що пряма має опуклість направлену як до низу, так і доверху.

Достатня умова точки перегину.

Точки області визначення функції в яких змінюється напрямок вгнутості графіка функції називаються ***точками перегину***.

Точка x_0 області визначення функції, для якої $f''(x_0)=0$ або $f''(x_0)$ не існує, є ***точкою перегину*** за умови, що $f''(x)$ змінює свій знак при переході через значення x_0.

Необхідна умова існування точки перегину. У точках перегину функції $y=f(x)$ її друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує.

Алгоритм дослідження функції $y=f(x)$ на опуклість, угнутість та знаходження точок перегину

1.Знайти область визначення і інтервали, на яких функція неперервна.

2.Знайти другу похідну $f''(x)$ та критичні точки. Знайти внутрішні точки області визначення, в яких $f''(x)$ або не існує.

3. Позначити одержані точки на область визначення функції розбивши її таким чином на інтервали, та визначити знак другої похідної функції на кожному інтервалі.

4. Записати потрібний результат дослідження (інтервали опуклості, угнутості і точки перегину).

Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку.

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває свого ***найбільшого і найменшого*** значення ***на цьому відрізку або в критичних точках,*** які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку:

1. Знайти похідну $f'(x)$.

2. Знайти критичні точки: а) $f'(x) = 0$, б) $f'(x)$ не існує.

3. Вибрати критичні точки, які належать цьому відрізку.

4. Обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка.

5. Вибрати з отриманих значень найменше і найбільше.

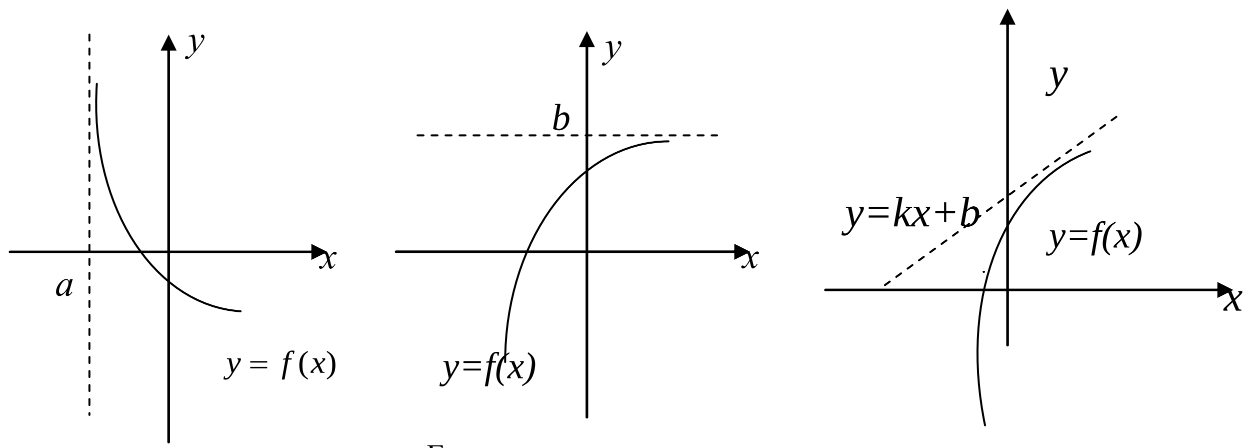
Асимптоти графіка функції.

Асимптотою графіка називають пряму, до якої необмежено наближається точка графіка при віддаленні цієї точки за нескінченною віткою.

Пряма $x = a$ є ***вертикальною асимптотою***, якщо хоч би одна з границь $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (права границя) або $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) =$ (ліва границя) дорівнює ∞.

Пряма $y = b$ є ***горизонтальною асимптотою***, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Пряма $y = kx + b$ є ***похилою асимптотою***, якщо існують скінченні границі $k = \lim \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim(f(x) - kx)$ або при $x \to +\infty$, або при $x \to -\infty$ (рис. 9)·



Вертикальна асимптота $x = a$ | Горизонтальна асимптота $y = b$ | Похила асимптота $y = kx + b$

Рис. 9.

Загальна схема дослідження функції:

Дослідження функції за допомогою похідних і побудова їх графіків проводять за такою схемою:

1. Знаходять область визначення. Встановлюють при цьому точки розриву та інтервали неперервності функції.

2. Досліджують функцію на парність (непарність). (Перевіряють умови: $f(-x)=f(x); f(-x)=-f(x)$).

3. Досліджують функцію на періодичність $f(x)=f(x+T)$.

4. Визначають точки перетину кривої з осями координат, інтервали знакосталості.

5. Знаходять точки екстремуму функції і обчислюють значення функції в цих точках. Встановлюють інтервали монотонності.

6. Знаходять точки перегину графіка функції і досліджують графік на опуклість (вгнутість).

7. Знаходять асимптоти графіка функції.

8. Будують графік функції.

Приклад 4.1. Користуючись правилом Лопіталя знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x-15}{3x^2-16x+5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$;

Розв'язання:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x-15}{3x^2-16x+5}$.

При $x\to 5$ маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-7x-15}{3x^2-16x+5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(2x^2-7x-15\right)'}{\left(3x^2-16x+5\right)'}=\lim_{x\to 5}\frac{4x-7}{6x-16}=\frac{13}{14}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$.

При $x\to 0$ маємо невизначеність типу $0\cdot\infty$. Перетворимо функцію до дробового вигляду, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля або до нескінченності, а потім застосуємо правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 0} xctg2x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{ctg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x'}{(ctg2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\dfrac{1}{\cos^2 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 4.2. Дослідити на екстремум функцію $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

Функція визначена на R. Маємо $f(x)=\dfrac{\frac{1}{3}-x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$. В точці $x_1=\frac{1}{3}$, похідна функції дорівнює нулю, в точках $x_2=0$ і $x_3=1$ похідна функції f не існує. Вилучення з R точок $x_1=\frac{1}{3}$, , $x_2=0$ і $x_3=1$ дає множину, яка є об'єднанням інтервалів $(-\infty;0),(0;\frac{1}{3}),(\frac{1}{3};1),(1;+\infty)$, в кожному з яких f' має сталий знак, а саме відповідно «+», «+», «-», «+». За теоремою 3 в точці $x_1=\frac{1}{3}$, функція має максимум, що дорівнює $f(\frac{1}{3})=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$. При $x_2=0$ екстремуму нема, при $x_3=1$ функція має мінімум $f(1)=0$.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3};1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	не існує	+	0	-	не існує	+
y	↗	0	↗	$\sqrt[3]{4/3}$ max	↘	0 min	↗

Результати досліджень записано в таблиці.

Приклад 4.3. Знайти мінімум і максимум функції $f(x)=x^2-3x+5$ на відрізку [0;2].

Дана функція неперервна на [0;2], тому на цьому відрізку вона має мінімум і максимум. Оскільки $f'(x)=2x-3, x\in R$ то інтервал (0;2) містить критичну точку $x=\frac{3}{2}$. Знаходимо $f(0)=5, f(2)=3, f(\frac{2}{3})=2\frac{3}{4}$. Отже, $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(\frac{3}{2})=2\frac{3}{4}, \max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(0)=5$.

Приклад 4.4. Знайти найбільше значення функції $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ на проміжку $(0;+\infty)$.

На проміжку $(0;+\infty)$ функція диференційована і її похідна

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Знайдемо критичні точки першого роду з таких умов: похідна $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує. Оскільки $f'(x)=0$ при $1-\ln x=0$ то $x=e$, а не існує при $x=0$ але ця точка не є критичною, бо при $x=0$ функція не визначена. Знайдемо $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{2}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x(3-\ln x)}{x^4}=\frac{3-\ln x}{x^3}.$$

Оскільки $f''(e)<0$, то в точці $x=e$ функція досягає максимуму $f(e)=\frac{1}{e}$. Тому $\max\limits_{x\in(0;+\infty)} f(e)=\frac{1}{e}$.

<u>Приклад 4.5.</u> Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=3-3x^2$ на відрізку $[-2;3]$

.

Знаходимо похідну функції $f'(x)3-3x^2=3(1-x)(1+x)$ та стаціонарні точки. Для цього розв’яжемо рівняння $f'(x)=0$. Його розв’язки $x=\pm1$.

Результати запишемо в таблицю:

x	$[-2;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;3]$
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$

loc max loc min

Знайшли локальний максимум $f(1)=2$ і локальний мінімум $f(-1)=-2$ функції на відрізку.

Обчислимо значення даної функції на кінцях відрізка $[-2;3]$ $f(-2)=2$, $f(3)=18$.

Із здобутих значень вибираємо найбільше і найменше. Таким чином, $\max\limits_{x\in[-2;3]} f(x)=f(2)=f(1)=2,\ \min\limits_{x\in[-2;3]} f(x)=f(3)=-18$.

<u>Приклад 4.6.</u> Дослідити напрям опуклості і знайти точки перегину графіка функції $f(x)=x^2e^{-x}$

Цю функцію ми вже розглядали в прикладі 1 27. $f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$ У точках $x_1=2-\sqrt{2}$ і $x_2=2+\sqrt{2}$ друга похідна дорівнює нулю. Вилучення з R точок $x_1 = 2-\sqrt{2}$ і $x_2 = 2+\sqrt{2}$ дає нам множину, яка є об'єднанням інтервалів $(-\infty;2-\sqrt{2}),(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}),(2+\sqrt{2};+\infty)$ в кожному з яких f'' має сталий знак,0 а саме відповідно «+», «-» , «+». Отже, графік функції f має в інтервалі $(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ опуклість, напрямлену вгору,а в інтервалах $(-\infty;2-\sqrt{2})$ і $(2+\sqrt{2};+\infty)$ опуклість, направлена вниз. Точки перегину графіка функції $f \in P_1(2-\sqrt{2};(6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-2})$ і $P_2(2+\sqrt{2};(6+4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}-2})$.

Результати досліджень записано у вигляді таблиці.

x	$(-\infty;2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2};+\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	$\bigcup$	$(6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-2})$ *перегин*	$\bigcap$	$(6+4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}-2})$ *перегин*	$\bigcup$

Приклад 4.7. Знайти асимптоти графіка функції $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+2)^2}$.

Дана функція визначена на множині $(-\infty;2)\bigcup(-2;+\infty)$. Оскільки $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{x^3}{(x+2)^2} = \lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{x^3}{(x+2)^2} = -\infty$, то пряма $x=-2$ є вертикальною асимптотою графіка функції f. Для знаходження похилих асимптот графіка даної функції скористаємось теоремою 8. З'ясуємо питання про границі вигляду

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x+2)^2 x} = 1, k=1; \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x+2)^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-4x^2-4x}{(x+2)^2} = -4.$$

Отже, згідно з теоремою 8 пряма $y = x-4$ є асимптотою графіка функції f як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$.

Приклад 4.8. Знайти проміжки монотонності функції $y = x^2 \cdot 2^{-x}$.

Область визначення функції *D(y)=R*. Обчислимо похідну функції $y' = (x^2 \cdot 2^{-x})' = 2x \cdot 2^{-x} + x^2 \cdot 2^{-x}\ln 2(-1) = x\cdot 2^{-x}(2 - x\ln 2)$
Розв'яжемо нерівність $x\cdot 2^{-x}(2-x\ln 2) > 0$. Оскільки $2^{-x} > 0$при всіх, то $2x\left(1 - x\dfrac{\ln 2}{2}\right) > 0$. Отже, при $x \in \left(0;\dfrac{2}{\ln 2}\right)$ похідна $y'(x) > 0$, і це означає, що

функція зростає; при $x \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{2}{\ln 2};+\infty\right)$ похідна $y'(x) < 0$, і це означає що на цих проміжках функція спадає.

<u>Приклад 4.9.</u> Дослідити функцію $f(x) = \frac{3x^2}{3x-1}$ та побудувати її графік.

Дана функція визначена на *R*, крім точки $x = \frac{1}{3}$ в якій знаменник дробу набуває нульового значення. Вона неперервна на своїй області визначення. Досліджувана функція f неперіодична, бо вона набуває нульового значення лише в точці *x=0*. Графік її перетинає осі координат у точці (0;0). Функція не є ні парною, ні непарною, оскільки її область визначення не симетрична відносно нуля.
Знаходимо першу похідну

$$f'(x) = \frac{6x(3x-)-3x^2 \cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{18x^2-6x-9x^2}{(3x-1)^2} = \frac{9x^2-6x}{(3x-1)^2} = \frac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2},$$

$$x \in R \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

Множиною розв’язків рівняння $f'(x) = 0, x \in R \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ є множина $\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$. Вилучення із множини $M = R \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ точок $x_1 = 0$ і $x_2 = \frac{2}{3}$, дає множину, що є об’єднанням інтервалів $(-\infty;0),(0;\frac{1}{3}),(\frac{1}{3};\frac{2}{3}),(\frac{2}{3};+\infty),$, в кожному з яких $f'(x)$ має сталий знак, а саме відповідно «+», «-»,«-» і «+». Отже, функція f є спадною на кожному з проміжків $(0;\frac{1}{3})$ і $(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$ та зростаючою на проміжках $(-\infty;0)$, $(\frac{2}{3};+\infty)$. $3x_1 = 0$ - точка максимуму, її максимум в цій точці дорівнює $f(0) = 0$, а $x_2 = \frac{2}{3}$ - точка мінімуму, мінімум дорівнює $f(\frac{2}{3}) = 1\frac{1}{3}$.

Результати досліджень запишемо у вигляді

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3};+\infty)$
y'	+	0	-	не існує	-	0	+
y	$\nearrow$	$\underset{\max}{0}$	$\searrow$	не існує	$\searrow$	$\underset{\min}{1\frac{1}{3}}$	$\nearrow$

Знайдемо другу похідну функції

$$f''(x)=\frac{(18x-6)(3x-1)^2-(9x^2-6x)\cdot 2(3x-1)\cdot 3}{(3x-1)^4}=\frac{6}{(3x-1)^3},\ x\in R\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

З формули другої похідної $f''(x)$ випливає, що ця похідна при всіх $x\in(-\infty;\frac{1}{3})$ набуває лише від’ємних значень, а при всіх $x\in(\frac{1}{3};+\infty)$ - лише додатних значень. Отже, графік функції f має в інтервалі $(-\infty;\frac{1}{3})$ опуклість, напрямлену вниз. У точці $x=\frac{1}{3}$ функція не визначена, тому ця точка не є точкою перегину. Пряма $x=\frac{1}{3}$ - вертикальна асимптота графіка функції f, оскільки

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}-0}\frac{3x^2}{3x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to\frac{1}{3}+0}\frac{3x^2}{3x-1}=+\infty,$$

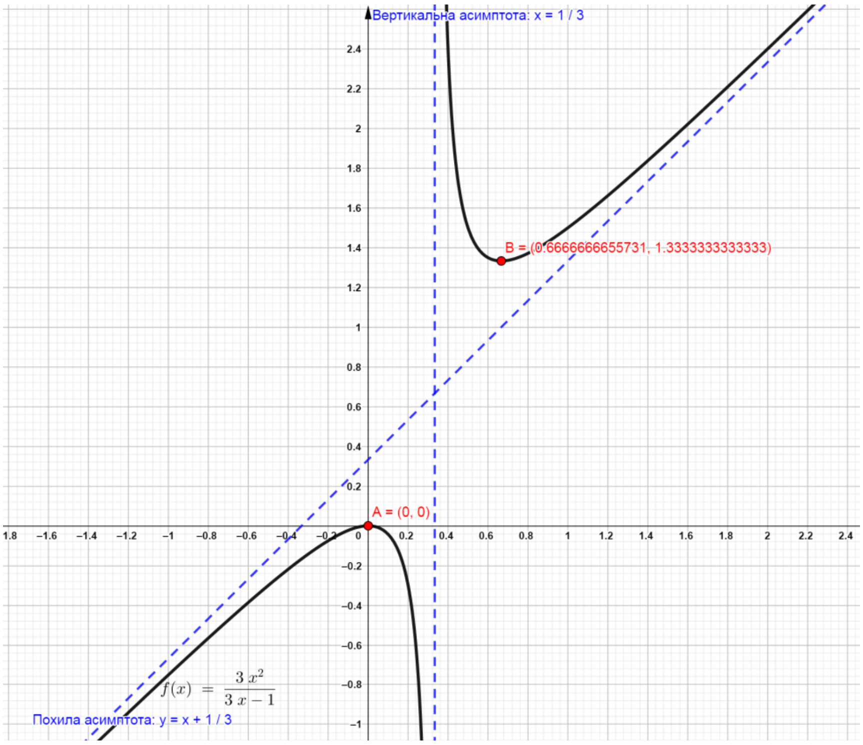
Знайдемо

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{3x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{3x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{3-\frac{1}{x}}=\frac{3}{3-0}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx);\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{3x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{x}}=\frac{1}{3-0}=\frac{1}{3}$$

Пряма $y=x+\frac{1}{3}$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x\to\infty$.

За цими результатами будуємо графік даної функції.



<u>Приклад 4.10.</u> Реакція організму на отримані ліки може виражатися у підвищенні кровяного тиску, зниженні температури тіла, змінні пульсу або інших фізіологічних пакازниках. Рівень реакції залежить від назначеної дози ліків. Припустимо, що x - доза отриманих ліків, а рівень реакції організму описується функцією $f(x) = x^2(a - x)$, де $a > 0$ довільна стала. Знайти при якому значенні дози отриманих ліків реакція організму буде максимальною.

Задача звадиться до задачі математичного аналізу про дослідження функції $f(x) = x^2(a - x)$ на найбільше та найменше значення. Знайдемо критичні точки:

$$f'(x) = 2x(a - x) - x^2 = 2ax - 3x^2 \Rightarrow 2ax - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{2a}{3}.$$

Визначимо знак похідної на відповідних інтервалах:

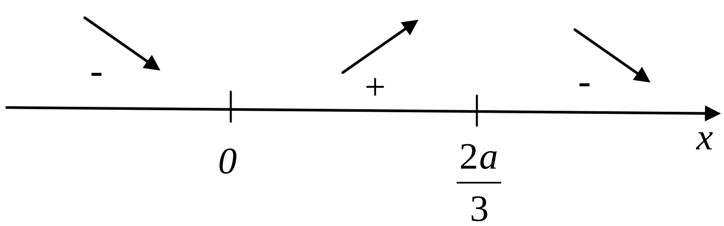


Рис. 10.

Як видно з рис. 10 , при переході через критичні точки похідна змінює знак на протилежний. Тому робимо висновок, що функція має екстремуми, а саме при $x=0$ мінімум, а при $x=\frac{2a}{3}$ максимум. Тобто значення $x=\frac{2a}{3}$ є тою дозою ліків, за якої настає максимальна реакція організму: $f(\frac{2a}{3})=2a\frac{2a}{3}-3(\frac{2a}{3})^2=\frac{4a^3}{27}$.

<u>**Приклад 4.11.**</u> У поживне середовище вносять популяцію з 10000 бактерій. кількість особин популяції росте відповідно до закону $f(x)=1000+\frac{1000x}{100+x^2}$, де x це час (одиниця вимірювання год.) Знайти максимальний розмір цієї популяції. Задача звадиться до задачі математичного аналізу про дослідження функції $f(x)=1000+\frac{1000x}{100+x^2}$ на максимум. Знайдемо похідну функції (швидкість зміни кількості особин популяції) та критичні точки :

$$f'(x)=\frac{1000(100-x^2)}{\left(100+x^2\right)^2}\Rightarrow 100-x^2=0\Rightarrow x=\pm 10.$$

Визначимо знак похідної на відповідних інтервалах:

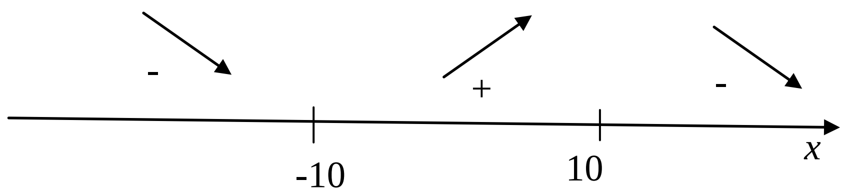


Рис. 11.

Як видно з рис. 11, при переході через критичні точки похідна змінює знак на протилежний. Тому робимо висновок, шо функція має екстремуми, а саме при $x=-10$ мінімум, а при $x=+10$ максимум. Тобто значення $x=10$ є тим значенням проміжку часу (10 год.) через який досягнеться максимальний розмір популяції і становитиме він: $f(10)=1050$ особин.

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Тема: Визначники та операції над ними

<u>Завдання 1</u>. Обчислити визначник:

а) за правилом трикутника;

б) розклавши його за елементами другого рядка.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -8 & 7 & 5 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

<u>Завдання 2:</u> Для даного визначника знайти мінори та алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}. Обчислити визначник: а) розкладаючи його по елементам i-того рядка; б) розкладаючи його по елементам j-того стовпця;

1. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4, j=3$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ $i=3, j=4$

3. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ $i=1, j=3$

4. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ $i=3, j=4$

5. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $i=2, j=4$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $i=2, j=3$

7. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $i=3, j=3$

8. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ $i=4, j=3$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3, j=2$

10. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $i=4, j=4$

11 $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2, j=2$

12. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i=2, j=3$

13. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2, j=4$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=1, j=2$

15. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=1, j=2$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i=2, j=4$

17. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}_{i=1, j=2}$

18. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}_{i=2, j=3}$

19. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{i=4, j=1}$

20. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}_{i=3, j=1}$

Тема: Матриці та операції над ними

Дані дві матриці A і B. Знайти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -5\\ -3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Тема: Системи лінійних рівнянь

<u>Завдання:</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь

а) за формулами Крамера;

б) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);

в) за методом Гауса

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Тема: Системи лінійних однорідних рівнянь

Завдання: Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

1. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

Тема: Вектори. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів

Завдання: За даними координатами точок A, B і C для зазначених векторів знайти:

а) модуль (довжину) вектора $\bar{a}$; б) скалярний, векторний, добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$; мішаний добуток векторів $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$.

в) проекцію вектора $\bar{c}$ на вектор $\bar{d}$

№	A	B	C	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$
1	(5, 4, 4)	(-5, 2, 3)	(4, 2, -5)	$11\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
2	(6, 5, -4)	(-5, 2,2)	(3, 3, 2)	$6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$
3	(2, 4, 3)	(3, 1, -4)	(-1, 2, 2)	$2\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AB}$
4	(-2, -3, -4)	(2, -4, 0)	(1, 4, 5)	$4\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
5	(2, 4, 6)	(-3, 5, 1)	(4, -5, -4)	$-6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$
6	(-5, 4, 3)	(4, 5, 2)	(2, 7, -4)	$3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{AB}$
7	(3, 5, 4)	(4, 2, -3)	(-2, 4, 7)	$3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
8	(-2, 3, -4)	(3, -1, 2)	(4, 2, 4)	$7\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$
9	(3, 4, 1)	(5, -2, 6)	(4, 2, -7)	$-7\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
10	(4, 6, 7)	(2, -4, 1)	(-3, -4, 2)	$5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$
11	(1, 3, 2)	(-2, 4, -1)	(1, 3, -2)	$2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
12	(10, 6, 3)	(-2, 4, 5)	(3, -4, -6)	$5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
13	(3, 4, 6)	(-4, 6, 4)	(5, -2, -3)	$-7\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BC}$
14	(-3, -5, 6)	(3, 5, -4)	(2, 6, 4)	$4\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
15	(2, 4, 5)	(1, -2, 3)	(-1, -2, 4)	$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$
16	(-2, -3, -2)	(1, 4, 2)	(1, -3, 3)	$2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
17	(-4, -2, -5)	(3, 7, 2)	(4, 6, -3)	$9\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$

18	(6, 4, 5)	(-7, 1,8)	(2, -2, -7)	$5\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
19	(-2, -2, 4)	(1, 3, -2)	(1, 4, 2)	$2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
20	(0, 2, 5)	(2, -3, 4)	(3, 2, -5)	$-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$

Тема: Пряма на площині

1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $3x-2y-7=0$ і $x+3y-6=0$, відсікаючи на вісі абсцис відрізок, який дорівнює трьом.

2. Знайти проекцію точки $A(-8,\ 12)$ на пряму, яка проходить через точки $B(2,\ -3)$ і $C(-5,\ 1)$.

3. Дані дві вершини трикутника ABC: $A(-4,\ 4)$, $B(4,\ -12)$ і точка M (4, 2) перетину його висот. Знайти координати вершини C.

4. Знайти рівняння прямої, яка відсікає на вісі ординат відрізок у дві одиниці довжини і паралельна прямій $2y-x=3$.

5. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2,\ -3)$ і точку перетину прямих $2x-y=5$ і $x+y=1$.

6. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3,\ 1)$ перпендикулярно до прямої BC, якщо $B(2,\ 5)$ і $C(1,\ 0)$.

7. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2,\ 1)$ паралельно прямій MP, якщо $M(-3,\ -2)$ і $P(1,\ 6)$.

8. Знайти координати точки, яка симетрична точці M $(2,\ -1)$ відносно прямої $x-2y+3=0$.

9. Знайти точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-1,\ -3)$, $B(3,\ 5)$, $C(5,\ 2)$ і $D(3,\ -5)$.

10. Знайти точку перетину прямих $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ і рівняння прямої паралельної вісі абсцис, якій належить ця точка.

11. Обчислити координати точки перетину перпендикулярів, які проведені через середини сторін трикутника з вершинами: $A(2,\ 3)$, $B(0,\ -3)$, $C(6,\ -3)$.

12. Скласти рівняння висоти, яка проходить через вершину A трикутника ABC, якщо відомі рівняння його сторін: $-2x-y-3=0$; $-x+5y-7=0$; $-3x-2y+13=0$.

13. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку перетину прямих: $2x+5y-8=0$ і $2x+3y+4=0$.

14. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2,\ 3)$ і утворює з віссю Ox кут: а) 45º; б) 90º; в) 0º.

15. Через точку перетину прямих $2x-5y-1=0$ і $x+4y-7=0$ провести пряму, яка ділить відрізок між точками $A(4,\ -3)$ і $B(-1,\ 2)$ у відношенні $\lambda=2:3$.

16. Записати рівняння прямих, які проходять через точку $A(-1,\ 1)$ під кутом 45º до прямої $2x+3y=6$.

17. Знайти кут між прямими $y=(2/3)x-7$ і $y=5x+9$.

18. Перетворити пряму 3x–5y+10=0 до виду $y=кx+b$.

19. Знайти точку перетину прямих $y=3x$ і $x+y+4=0$.

20. Через точку A(1;–3) провести пряму паралельну до прямої $x-2y+3=0$.

Тема: Криві другого порядку

Завдання: Скласти канонічні рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи.

Тут: A, B − точки, які лежать на кривій; F − фокус; a − більша (дійсна) піввісь; b − менша (уявна) піввісь; ε − ексцентриситет;
k − кутовий коефіцієнт у рівнянні асимптоти гіперболи;
D − директриса кривої; $2c$ − міжфокусна відстань; $x=a$ або $y=b$ −рівняння директриси

B●	а)	б)	в)
1.	$a=15$; $F(-10,0)$	$a=13$; $\varepsilon=14/13$	D; $x=-4$
2.	$A(3,0)$; $B(2,\ \sqrt{5}/3)$	$A(-3,4)$; $B(-5,\ 4\sqrt{5})$	$D: y=1$
3.	$\varepsilon=\sqrt{21}/5$; $A(-5,0)$	$A(\sqrt{80},3)$; $B(4\sqrt{6},\ 3\sqrt{2})$	$D: x=5$
4.	$b=2$; $F(4\sqrt{2},\ 0)$	$a=7$; $\varepsilon=\sqrt{85}/7$	$D: y=-2$
5.	$a=11$; $\varepsilon=\sqrt{57}/11$	$k=2/3$; $C=5\sqrt{13}$	$D: x=-2$
6.	$b=\sqrt{15}$; $\varepsilon=\sqrt{10}/5$	$k=3/4$; $a=8$	$D: y=2$
7.	$a=4$; $F(3,0)$	$A(4,-6)$; $B(6,\ 4\sqrt{6})$	$D: x=3$
8.	$b=4$; $F(9,0)$	$b=2\sqrt{10}$; $F(-11,0)$	$D: y=-4$
9.	$A(0,\ \sqrt{3})$; $B(\sqrt{14}/3,1)$	$a=5$; $\varepsilon=7/5$	$D: x=-1$
10.	$A(4,-2)$; $B(2,\ \sqrt{7})$	$\varepsilon=8/7$; $A(-7,0)$	$D: y=4$
11.	$a=12$; $\varepsilon=\sqrt{22}/6$	$k=4/3$; $c=5$	$D: x=4$
12.	$b=2$; $\varepsilon=5\sqrt{29}/29$	$A(-4,-3)$; $B(8,9)$	$D: y=-1$
13.	$b=7$; $F=(5,0)$	$k=12/13$; $a=13$	$D: x=-3$
14.	$a=6$; $F=(-4,0)$	$b=3$; $F=(7,0)$	$D: y=3$
15.	$A(-\sqrt{17}/3,\ 1/3)$, $B(\sqrt{21}/2,\ 1/2)$	$a=11$; $\varepsilon=12/11$	$D: x=2$
16.	$\varepsilon=3/5$; $A(0,8)$	$A(\sqrt{6},0)$; $B(-2\sqrt{2},1)$	$D: y=-3$
17.	$a=11$; $\varepsilon=10/11$	$A(8,12)$; $B(-6,2\sqrt{15})$	$D: x=-5$
18.	$b=5$; $\varepsilon=12/13$	$k=\sqrt{11}/5$; $c=6$	$D: y=5$
19.	$a=9$; $F(7,0)$	$b=6$; $F(12,0)$	$D: x=1$
20.	$b=5$; $F(-10,0)$	$a=9$; $\varepsilon=4/3$	$D: y=-5$

Тема: Площина в просторі

1. Знайти величини відрізків, які відсікає на вісях координат площина, що проведена через точку $M\,(-2,\,7,\,3)$ паралельно площині $x-4y+5z-1=0$.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через середину відрізка M_1, M_2, перпендикулярно цьому відрізку, якщо $M_1(1,\,5,\,6)$, $M_2(-1,\,7,\,10)$.

3. Знайти відстань від точки $M\,(2,\;0,\;-0{,}5)$ до площини $4x-4y+2z+17=0$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,\,-3,\,5)$ паралельно площині Oxy.

5. Скласти рівняння площини, якій належить вісь Ox і точка $A\,(2,\,5,\,-1)$.

6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2,\,5,\,-1)$, $B\,(-3,\,1,\,3)$ паралельно вісі Oy.

7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,\,5,\,-1)$ і пряму $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

8. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ і $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$.

9. Скласти загальне рівняння прямої, утвореної перетином площини $x-y-7z+9=0$ з площиною, яка проходить через вісь Ox і точку $A\,(3,\,2,\,-5)$.

10. Скласти рівняння площини «у відрізках», якщо вона проходить через точку $M\,(6,\,-10,\,1)$ і відсікає на вісі Ox відрізок $a=-3$, а на вісі Oz − відрізок $c=2$.

11. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,\,3,\,-4)$ паралельно двум векторам $\vec{a}=(4,\,1,\,-1)$ і $\vec{b}=(2,\,-1,\,2)$.

12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1,\,1,\,0)$ і $B\,(2,\,-1,\,-1)$ перпендикулярно до площини $5x+2y+3z-7=0$.

13. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин: $2x-3y+z-1=0$ і $x-y+5z+3=0$.

14. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(3, -1, 2)$ і $B(2, 1, 4)$ паралельно вектору $\vec{a} = (5, -2, -1)$.

15. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(5, -2, 3)$, $B(1, -3, 5)$.

16. Знайти величини відрізків, які відсікає на вісях координат площина, що проведена через точку $M(-2, 7, 3)$ паралельно площині $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1, -1, 2)$, перпендикулярно відрізку $M_1 M_2$, якщо $M_1(2, 3, -4)$, $M_2(-1, 2, -3)$.

18. Скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку $A(3, -4, 1)$ паралельно координатній площині Oxy.

19. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M(3, -5, 2)$.

20. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M(3, -1, 2)$, $N(2, 1, 4)$ паралельно вісі Oz.

Тема: Пряма у просторі

Завдання: 1-10. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M, перпендикулярно до площини

1. $M(4;2;3)$, $x - y + z + 1 = 0$, $x - y + 2z - 3 = 0$;

2. $M(-3;4;5)$, $-3x - 2y + 4z + 1 = 0$, $x - 2y + 2z - 5 = 0$;

3. $M(1;0;6)$, $x - 2y + 4z - 10 = 0$, $3x - 2y + 2z - 3 = 0$;

4. $M(-2;-2;-2)$, $6x - 2y + 4z - 2 = 0$, $2x - 2y + 2z - 2 = 0$;

5. $M(0;2;-3)$, $2x - 2y + 4z + 2 = 0$, $3x - 8y + 2z - 3 = 0$;

6. $M(2;-2;2)$, $4x + 2y - 5z + 1 = 0$, $3x + 5y + z + 6 = 0$;

7. $M(3;-4;5)$, $x + 5y + 4z + 9 = 0$, $4x + 2y + 2z + 9 = 0$;

8. $M(4;5;6)$, $x - y + z + 1 = 0$, $x - y + 2z - 3 = 0$;

9. $M(-3;-2;-4)$, $-x - 2y + +6z + -5 = 0$, $8x - 2y + z - 1 = 0$;

10. $M(3;7;6),\quad 3x-4y+5z+6=0,\quad 7x-6y+5z-4=0$;

11. Знайти кут між площинами *3x+4y-z-30=0* і *2x+2y+z-6*=0.

12. Написати рівняння площини, яке проходить через три точки: A(-7, 4, 2), B(2, 1, -3), C(3, 2, 1).

13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(1, 2, 3) паралельно площині, заданої рівнянням *2x-3y+z=0.*

14. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(1, 2, 3) перпендикулярно до двох площин *x-y+z+2=0* і *2x+y-z=0*.

15. Знайти відрізки, які відтинає задана площина на осях координат і побудувати цю площину: *2x-3y+4z=12*.

16. Через точки (1, 1, 1) і (2, 2, 2) провести площину, перпендикулярну до площини *x+y-z=0.*

17. Скласти рівняння площини, знаючи, що вона відтинає на координатних осях відрізки *a=2, b=-3, c=4*.

18. Задана площина *3x-4y+12z+14=0* і точка M(4, 3, 1). Знайти відхилення точки M від даної площини.

19. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(2, 3, 5) і перпендикулярна вектору *P=3i+3j+2k*.

20. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(5, 4, 3) і відсікає рівні відрізи на осях координат.

Тема: Границя функції однієї змінної

<u>Завдання 1</u>: Знайти границі

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}$, якщо 1) $a=4$; 2) $a=1$; 3) $a=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+x-12}$, якщо 1) $a=3$; 2) $a=5$; 3) $a=\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+4x-5}$, якщо 1) $a=-3$; 2) $a=1$; 3) $a=\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+4x-21}{x^2+2x-15}$, якщо 1) $a=-2$; 2) $a=3$; 3) $a=\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2+2x-8}$, якщо 1) $a=3$; 2) $a=2$; 3) $a=\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x-6}$, якщо 1) $a=2$; 2) $a=1$; 3) $a=\infty$.

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2+2x-5}{6x^2-x-5}$, якщо 1) $a=-5$; 2) $a=1$; 3) $a=\infty$.

8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+4x-12}$, якщо 1) $a=2$; 2) $a=-2$; 3) $a=\infty$.

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5}$, якщо 1) $a=4$; 2) $a=1$; 3) $a=\infty$.

10. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{5x^2-6x+1}{2x^2+3x-5}$, якщо 1) $a=3$; 2) $a=1$; 3) $a=\infty$.

11. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-x-6}$, якщо 1) $a=2$; 2) $a=5$; 3) $a=\infty$.

12. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-2x-3}{3x^2-6x-9}$, якщо 1) $a=3$; 2) $a=4$; 3) $a=\infty$.

13. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+3x-18}$, якщо 1) $a=3$; 2) $a=6$; 3) $a=\infty$.

14. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+6x-8}$, якщо 1) $a=6$; 2) $a=1$; 3) $a=\infty$.

15. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$, якщо 1) $a=-4$; 2) $a=2$; 3) $a=\infty$.

16. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x+12}$, якщо 1) $a=3$; 2) $a=5$; 3) $a=\infty$.

17. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-3x^2+2x+16}{6x^2+12x}$, якщо 1) $a=4$; 2) $a=-2$; 3) $a=\infty$.

18. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{8x^2+5x-13}{-4x^2-x+5}$, якщо 1) $a=8$; 2) $a=1$; 3) $a=\infty$.

19. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2+7x-15}{5x^2+30x}$, якщо 1) $a=7$; 2) $a=-5$; 3) $a=\infty$.

20. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2-11x-4}{16-x^2}$, якщо 1) $a=3$; 2) $a=4$; 3) $a=\infty$.

<u>Завдання 2:</u> Знайти наступні границі

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$

3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$

6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$

7. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

8. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$

9. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$

10. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-8}$

12. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^3}{\sqrt{8+x}-3}$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{x\sqrt{7}}$

18. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{x^2+2x-15}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$

20. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

Тема: Функція однієї змінної

Завдання. Задано функції $y = f(x)$, знайти:

a) область визначення функції;
b) дослідити на парність (непарність) функцію;
c) дослідити на періодичність функцію.

1. $y = \frac{(x+2)^2}{x-2}$;
2. $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$;
3. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;
4. $y = \frac{x^2+2x}{x-1}$;
5. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$;
6. $y = \frac{x^2+x-5}{x-2}$;
7. $y = \frac{2x}{x^3-8}$;
8. $y = \frac{x^2-9}{x^2}$;
9. $y = \frac{(x+2)^2}{x^2+4}$;
10. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;
11. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$;
12. $y = \frac{x^2+6}{x^2-1}$;
13. $y = \frac{4x^3}{1-x^2}$;
14. $y = x^3 - 4x^2 + 4x$;
15. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$;
16. $y = \frac{2x^2}{x+1}$;
17. $y = \frac{1}{4}x^3 - 2x + 4$;
18. $y = \frac{x^2-x}{x-4}$;
19. $y = \frac{9-x^2}{x^2+9}$;
20. $y = \frac{x^2-6}{x-4}$;
21. $y = \frac{x^2+2}{x-4}$;

Тема: Похідна функції однієї змінної

Завдання 1: Знайти похідну функції

1. $y = \ln(3x+5)$;
2. $y = 2\sin x + 2x\cos x + x^2 \cdot \sin x$;
3. $y = \ln(x^2+3x+9)$;
4. $y = 2x^2 \cdot \ln x - x^4$;
5. $y = (x^2+3)\ln(2x+1)$;
6. $y = \ln(3x^2 - x^3)$;
7. $y = \log_5 x$;
8. $y = \lg\cos 5x$;
9. $y = \frac{1}{3\sqrt{x+1}}$;
10. $y = \frac{9x}{x^2-9}$;
11. $y = x^6 + 5x^5 + 4x^4$;
12. $y = (\sqrt{x}+1)(3x^2-5x+1)$;

13. $y=\dfrac{2x}{x^4-4}$;

14. $y=\dfrac{\sin x}{x^3-1}$;

15. $y=\dfrac{1-x^2}{4-x^2}$;

16. $y=3x^3\cdot\ln x-x^3$;

17. $y=\dfrac{2-x^3}{2x}$;

18. $y=2^{3x}\cdot 3^{-2x}$.

19. $y=\ln 3x$;

20. $y=x-\ln(x+1)$;

Завдання 2: Знайти похідну неявно заданої функції

1. $x^2y^2-\cos x=0$;	2. $x^3+y^2-10xy+6=0$;
3. $xy+e^y+5=0$;	4. $(xy)^2-\cos x=0$;
5. $x^2-y^2-2y=0$;	6. $(xy)^4+e^y+e^x=0$;
7. $y=\cos(x+y)$;	8. $tgy-xy^2=0$;
9. $xy=ctgy$;	10. $\sin y+x^2y=0$;
11. $x=arctg(x+y)$;	12. $xy+e^{xy}=0$;
13. $5x^2y^2-7y+4=0$;	14. $y=1+xe^y$;
15. $3x^2+\sin y-\ln x+y=0$;	16. $x^3+e^{xy}=0$;
17. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;	18. $\ln x+\ln y-8=0$;
19. $x^y-y^x=0$;	20. $\sin y-xy^3+6=0$.

Завдання 3: Знайти похідну параметрично заданої функції

1. $\begin{cases}x=t^2+3,\\ y=t^5-7;\end{cases}$	2. $\begin{cases}x=ctgt,\\ y=\sin^2 t;\end{cases}$	3. $\begin{cases}x=\ln(t^2+1),\\ y=t-arctgt;\end{cases}$
4. $\begin{cases}x=7\sin t,\\ y=7\cos t;\end{cases}$	5. $\begin{cases}x=2t-\sin 2t,\\ y=8\sin^3 t;\end{cases}$	6. $\begin{cases}x=tarctgt,\\ y=\ln(t^2+1);\end{cases}$
7. $\begin{cases}x=t^2,\\ y=\dfrac{t^3}{3}-t;\end{cases}$	8. $\begin{cases}x=arctg3t,\\ y=\ln(1+9t^3);\end{cases}$	9. $\begin{cases}x=\sin^2 t,\\ y=\cos 2t;\end{cases}$
10. $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t);\end{cases}$	11. $\begin{cases}x=a\cos^2 t,\\ y=b\sin^3 t;\end{cases}$	12. $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t);\end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t; \end{cases}$	14. $\begin{cases} x = t^2 + \ln t, \\ y = 2t^3 + 3t; \end{cases}$	15. $\begin{cases} x = 23t, \\ y = te^{6t}; \end{cases}$
16. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + t; \end{cases}$	17. $\begin{cases} x = e^{2t}(\sin t + \cos t), \\ y = e^{2t}(\sin t - \cos t); \end{cases}$	18. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln 2t; \end{cases}$
19. $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}; \end{cases}$	20. $\begin{cases} x = 2 + t^3, \\ y = 0{,}5t^2; \end{cases}$	21. $\begin{cases} x = 2ctgt, \\ y = \ln\sin t; \end{cases}$

Тема: Диференціал функції

Завдання: Знайти диференціал першого порядку заданих функцій:

1. $y = x \cdot \cos x + \sin x$
2. $y = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$
3. $y = \ln(\sin x)$
4. $y = \sqrt{5x + 2}$
5. $y = 3^{\cos x}$
6. $y = 4(e^{\sin x} - 1)^2$
7. $y = x \cdot \arcsin 2x$
8. $y = arctg\sqrt{x^2 + 1}$
9. $y = x^2 \cdot \sin x$
10. $y = 2^{-\frac{1}{x}} + x$
11. $y = x^3 - 3x$
12. $y = x^3 - 6x^2 + x$
13. $y = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$
14. $y = 2x^2 + \ln x$
15. $y = x \cdot \arg tgx$
16. $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$
17. $y = x^3 - 3x + 4$
18. $y = \sqrt{x^2 - 1}$
19. $y = \dfrac{5x}{x - 1}$
20. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

Тема: Дослідження функції з використанням похідних

Завдання 1: Знайти найбільше і найменше значення функцій у заданих проміжках

1. $y = x^4 - 2x^2 + 5;\ [-2; 2]$
2. $y = x + 2\sqrt{x};\ [0; 4]$
3. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1;\ [-1; 2].$
4. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2;\ [-1; 1]$
5. $y = \sqrt{100 - x^2};\ [-6; 8]$
6. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2};\ [0; 1]$
7. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1};\ [0; 4]$

8. $y=\sin 2x-x;\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

9. $y=2\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^2x;\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

10. $y=x^x;\ (0{,}1\le x<\infty)$

11. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2};\ [0;3]$

12. $y=x^3:\left(x^2-x+1\right),\ [-1;\ 1]$

13. $y=\sqrt{x-x^3},\ [-2;\ -1]$

14. $y=3x^4-16x^3+2$, $[-3;\ 1]$

15. $y=x^2-2x+2\cdot\left(x-1\right)^{-1}$, $[\frac{3}{2};\ 4]$

16. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $[-1;\ 2]$

17. $y=108x-x^4,\qquad [-1;\ 4]$

18. $y=\sqrt{x-x^3}$, $[-2;\ -1]$

19. $y=\sqrt{5-4x},[-1;1]$

20. $y=x^3+3x^2+6x-4,[0;1]$

<u>Завдання 2:</u> Виконати загальне дослідження та побудувати графік функції:

1) $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2;$

2) $y=(x-2)^2(x+2);$

3) $y=x+\frac{1}{x};$

4) $y=4x^2+\frac{1}{x};$

5) $y=x+\frac{x}{3x-1};$

6) $y=\frac{(x+1)^2}{x-2};$

7) $y=\frac{x}{x^2-1};$

8) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2};$

9) $y=\frac{x^2-1}{x^4};$

10) $y=\frac{x}{1+x^2};$

11) $y=x\sqrt{2-x^2};$

12) $y=\sqrt[3]{x^2}-x;$

13) $y=\frac{1-x^2}{4-x^2};$

14) $y=x^2+\frac{1}{x^2};$

15) $y=\frac{e^{-x}}{1+x};$

16) $y=\frac{e^{-x}}{x^2};$

17) $y=(1+x^2)e^x;$

18) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}};$

19) $y=x^3e^{-x};$

20) $y=e^{\frac{1}{x}}-x;$

Зразок завдань для підсумкового контролю (тести)

1.	Таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, розташованих в *m* рядках та *n* стовпцях називають…						
A.	*матрицею-вектором*	B.	*визначником*	C.	*матрицею*	D.	*мінором*
2.	Якщо границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ існують при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=$						
A.	*0*	B.	$\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$	C.	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	D.	$g(x)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3.	Головну діагональ квадратної матриці А утворюють елементи…						
A.	$a_{11},a_{21},a_{31},...,a_{nn}$	B.	$a_{11},a_{22},a_{32},...,a_{nn}$	C.	$a_{11},a_{12},a_{13},...,a_{1n}$	D.	$a_{11},a_{22},a_{33},...,a_{nn}$
4.	Матрицею-стовпцем називається матриця розміром…						
A.	$m\times 1$	B.	$n\times 1$	C.	$m\times 0$	D.	$n\times 0$
5.	Канонічне рівняння прямої має вигляд…						
A.	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$	B.	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	C.	$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$	D.	$\frac{x+x_1}{x_2+x_1}=\frac{y+y_1}{y_2+y_1}=\frac{z+z_1}{z_2+z_1}$
6.	Як називаються системи лінійних алгебраїчних рівнянь, якщо їх розв'язки співпадають?						
A.	*рівними*	B.	*еквівалентними*	C.	*однорідними*	D.	*неоднорідними*
7.	Допоміжна діагональ утворюється з множини елементів						
A.	$a_{n1},a_{2(n-1)},a_{3(n-2)},...$	B.	$a_{1n},a_{2(n-1)},a_{3(n-1)},...,a_{n1}$	C.	$a_{1n},a_{2(n-1)},a_{3(n-2)},..$	D.	$a_{1n},a_{2n},a_{3n},...,a_{nn}$
8.	Найбільший порядок мінорів матриці, відмінних від нуля називається						
A.	*порядком матриці*	B.	*алгебраїчним доповненням*	C.	*рангом*	D.	*вищим мінором*
9.	Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною тоді і тільки тоді, коли…						
A.	*ранг основної матриці системи на порядок нижче рангу розширеної матриці*	B.	*ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці*	C.	*ранг основної матриці системи на порядок вище рангу розширеної матриці*	D.	*ранг основної матриці системи не дорівнює рангу розширеної матриці*
10.	Будь-яка площина у тривимірному просторі визначається лінійним рівнянням						
A.	$Ax+By+Cz+D=$	B.	$A^2x+B^2y+C^2z+D^2=$	C.	$Ax+By+Cz=0$	D.	$A^2x+B^2y+C^2z=0$
11.	Відстань від точки до площини визначається рівнянням…						
A.	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	B.	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	C.	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}}$	D.	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}}$
12.	Умова паралельності площин…						
A.	$A_1B_1C_1+A_2B_2C_2=0$	B.	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$	C.	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	D.	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=0$
13.	Умова перпендикулярності площин…						

A.	$A_1B_1C_1 + A_2B_2C_2 = 0$	B.	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$	C.	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	D.	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = 0$
14.	Умова перпендикулярності прямої і площини:						
A.	$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$	B.	$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$	C.	$Al + Bm + Cn = 0$	D.	$Al - Bm - Cn = 0$
15.	Кут між прямими визначається кутом θ між їх напрямними векторами:						
A.	$\cos\theta = \frac{l_1l_2 - m_1m_2 - n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 +}}$	B.	$\cos\theta = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\pm\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 +}}$	C.	$\cos\theta = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$	D.	$\cos\theta = \frac{l_1l_2 - m_1m_2 - n_1n_2}{\pm\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$
16.	Яке з рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт?						
A.	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	B.	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	C.	$y = kx + b$	D.	$y - y_0 = k(x - x_0)$
17.	Канонічне рівняння еліпса						
A.	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$	B.	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$	C.	$y^2 = 2px$	D.	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0$
18.	Канонічне рівняння гіперболи						
A.	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$	B.	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$	C.	$y^2 = 2px$	D.	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0$
19.	Канонічне рівняння параболи						
A.	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$	B.	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$	C.	$y^2 = 2px$	D.	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0$
20.	Що називається кутовим коефіцієнтом k прямої l?						
A.	Кут нахилу прямої l до осі Ox: $k = \alpha$.	B.	Тангенс кута нахилу прямої l до осі Ox: $k = tg\alpha$.	C.	Синус кута нахилу прямої l до осі Ox: $k = \sin\alpha$	D.	Косинус кута нахилу прямої l до осі Oy: $k = \cos\beta$.
21.	За якою формулою обчислюється кут φ між двома прямими l_1 : $y = k_1x + b_1$ і l_2 : $y = k_2x + b_2$?						
A.	$tg\varphi = \frac{k_1 + k_2}{1 - k_1k_2}$	B.	$tg\varphi = \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1k_2}$	C.	$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1k_2}$	D.	$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$
22.	Що називається алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n n-го порядку?						
A.	$A_{ij} = (-1)^{i-j} M_{ij}$.	B.	$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$	C.	$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$	D.	$A_{ij} = (-1)^{2+i} M_{ij}$
23	Рівнянням прямої у відрізках на осях						
A.	$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$	B.	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	C.	$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -1$	D.	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = -1$
24.	Умовою перпендикулярності двох прямих виду $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$						
A.	$\frac{k_1}{k_2} = -1$	B.	$\frac{k_1}{k_2} = 1$	C.	$k_2 = -\frac{1}{k_1}$	D.	$k_2 = \frac{1}{k_1}$
25.	Загальне рівняння прямої						
A.	$Ax + By + C = 0$	B.	$Ax - By - C = 0$	C.	$A^2x + B^2y + C^2 = 0$	D.	$A^2x - B^2y - C^2 = 0$
26.	Нормальним рівнянням прямої називається рівняння виду						

A. $\frac{\lvert Ax_1+By_1+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$	B. $\frac{\lvert Ax_1+By_1+C\rvert}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$	C. $\frac{\lvert Ax_1-By_1-C\rvert}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$	D. $\frac{\lvert Ax_1-By_1-C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$
27. Яка матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A?			
A. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A\cdot A^{-1}=0$.	B. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=E$, де E – одинична матриця того ж порядку.	C. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A^{-1}A=A$.	D. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A\cdot A^{-1}=A$.
28. Вказати, коли два вектори колінеарні.			
A: їхні координати пропорційні	B: їхні координати рівні	C: їхні координати обернені	D: їхні координати обернено-пропорційні
29. Вказати, чому дорівнює довжина вектора $\lvert\overline{a}\rvert$, якщо $\overline{a}=(0;6;-8)$.			
A: 3	B: $\sqrt{10}$	C: 100	D: 10
30. Вказати умову парності функції:			
A: область визначення функції симетрична відносно нуля та $f(-x)=f(x)$	B: область визначення функції симетрична відносно осі абсцис та $f(-x)=f(x)$	C: область визначення функції симетрична відносно осі ординат та $f(-x)=f(x)$	D: область визначення функції симетрична відносно нуля та $f(-x)\neq f(x)$
31. Число А називається границею функції $f(x)$ в т. x_0 якщо:			
A: *інший варіант.*	B: для довільної послідовності $\{x_n\}$, яка збіжна до x_0 ($x_n\neq x_0$), послідовність $\{f(x_n)\}$ відповідних значень функції збігається до x_0.	C: для довільної послідовності $\{x_n\}$, яка збіжна до x_0 ($x_n=x_0$), послідовність $\{f(x_n)\}$ відповідних значень функції збігається до А.	D: для довільної послідовності $\{x_n\}$, яка збіжна до x_0 ($x_n\neq x_0$), послідовність $\{f(x_n)\}$ відповідних значень функції збігається до А.
32. Нехай задано два вектори $\overline{a}\ (a_1,a_2,a_3)$ та $\overline{b}\ (b_1,b_2,b_3)$. Завершіть формулу: $\cos\varphi=$			
A: $\frac{a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$	B: $\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2-b_2^2-b_3^2}}$	C: $\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$	D $\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2-a_2^2-a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$
33.Завершіть формулу $d(uv)=$			
A: $vdu+udv$	B: $vdu-udv$	C: $dudv$	D: інша відповідь
34. Похідну функції $y=f(x)^{\varphi(x)}$ можна знайти:			
A: як степеневої функції	B: як показникової функції	C: як степенево-показникової функції	D: інша відповідь

35. Завершіть формулу $(u \pm v)' =$			
A: $u' \pm v'$	B: $u' + v'$	C: $u' - v'$	D: $u' \mp v'$
36. Вкажіть область визначення функції $y = \frac{x+1}{x-1}$.			
A: $(-\infty;+\infty)$	B: $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$	C: $(-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$	D: $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

Завдання для модульного контролю

Контрольна робота №1

Варіант 1

1. Обчислити визначники четвертого порядку, використовуючи метод розкладання визначника за елементами рядка чи стовпця:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix};$$

2. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь за трьома методами: методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y\text{-}4z = 0 \\ 4x + 5y\text{-}3z = 1 \end{cases}$$

Варіант 2

1. Обчислити визначники четвертого порядку, використовуючи метод розкладання визначника за елементами рядка чи стовпця:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix};$$

2. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 9 & 8 & -4 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь за трьома методами: методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y\text{-}3z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = \text{-}1 \\ x\text{-}y + 5z = \text{-}2 \end{cases}$$

Варіант 3

1. Обчислити визначники четвертого порядку, використовуючи метод розкладання визначника за елементами рядка чи стовпця:

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 9 & 16 \\ 1 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix};$$

2. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 9 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь за трьома методами: методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x\text{-}y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 8 \\ 2x\text{-}2y + 4z = 0 \end{cases}$$

Варіант 4

1. Обчислити визначники четвертого порядку, використовуючи метод розкладання визначника за елементами рядка чи стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix};$$

2. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & -7 & -3 \\ 2 & 8 & -2 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & -11 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь за трьома методами: методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x\text{-}3y + 2z = \text{-}4 \\ 2x + y\text{-}3z = \text{-}1 \\ x\text{-}2y + 5z = 1 \end{cases}$$

Варіант 5

1. Обчислити визначники четвертого порядку, використовуючи метод розкладання визначника за елементами рядка чи стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ -5 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \end{vmatrix};$$

2. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 9 & 7 & -2 & 3 \\ -3 & 11 & 8 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь за трьома методами: методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x\text{-}y + 4z = 2 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ 5x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

Контрольна робота №2

Варіант №1

1. Дано еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Знайти координати фокусів еліпса і відстань між ними.
2. Задані координати точок А і В. (-6;6), В(10;18).Потрібно:
   а) визначити відстань між даними точками;
   б) знайти координати точки К – середину відрізка АВ;
   в) знайти вектор АВ і ВА та їхню довжину;
   г) кут між векторами.
3. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1, \quad 2)$ паралельно прямій $3x+4y-12=0$.
4. Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3;-5;2)$ та $M_2(1;-1;-4)$.

Варіант №2

1. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ох, якщо його велика вісь дорівнює *10*, а ексцентриситет $\frac{1}{2}$.
2. Задані координати точок А і В. А(-8;8), В(4;24). Потрібно:
   а) визначити відстань між даними точками;
   б) знайти координати точки К – середину відрізка АВ;
   в) знайти вектор АВ і ВА та їхню довжину;
   г) кут між векторами.
3. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки (3;1;7), (3;0;5)
4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку М(5;4;3) і відсікає рівні відрізи на осях координат.

Варіант №3

1. Побудувати гіперболу $9x^2-16y^2-144=0$. Знайти фокуси, ексцентриситет.
2. Задані координати точок А і В. А(-3;2), В(9;2).Потрібно:

а) визначити відстань між даними точками;

б) знайти координати точки К – середину відрізка АВ;

в) знайти вектор АВ і ВА та їхню довжину;

г) кут між векторами.

3. Написати рівняння площини, яке проходить через три точки: А(2;4;2), В(2;0;-3), С(3;2;1).

4. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку M і через точку перетину прямих l_1 і l_2. $M(1;-4); l_1: 3x-2y-8=0; l_2: -3x+4y+4=0.$

Варіант №4

1. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі ***Ox***, якщо її дійсна вісь дорівнює ***12***, а відстань між фокусами дорівнює $4\sqrt{10}$

2. Задані координати точок А і В. А(-6;8), В(18;14).Потрібно:

а) визначити відстань між даними точками;

б) знайти координати точки К – середину відрізка АВ;

в) знайти вектор АВ і ВА та їхню довжину;

г) кут між векторами.

3. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку M і через точку перетину прямих l_1 і l_2, $M(3;3); l_1: x-2y-1=0; l_2: x-7y+4=0.$

4. Записати рівняння площини, яка проходить через точки (1;2;1), (1;8;4), (6;3;1).

Варіант №5

1. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $(-10;0)$, $(10;0)$ і ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

2. Задані координати точок А і В. А(-3;2), В(13;10).Потрібно:

а) визначити відстань між даними точками;

б) знайти координати точки К – середину відрізка АВ;

в) знайти вектор АВ і ВА та їхню довжину;

г) кут між векторами.

3. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку M і через точку перетину прямих l_1 і l_2, $M(4;4); l_1: 2x+2y-2=0; l_2: x-3y+5=0.$

4. Записати рівняння площини, яка проходить через точки (-1;2;-1), (5;-3;1), (-1;2;1).

Контрольна робота №3

Варіант 1

1. Знайти:
   a) область визначення функції;
   b) дослідити на парність (непарність) функцію;

$$y = x^2 - 5x + 4;$$

2. Обчислити границі

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

3. Продиференціювати функцію

$$y = (2x^3\text{-ln}5)\cdot\text{tg}^2 3x$$

4. Знайти значення похідної у точці x_0: $y = \cos x - \dfrac{2}{\pi}x^2 + 1,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Знайти похідну функції, що задана параметрично $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

Варіант 2

1. Знайти:
   a) область визначення функції;
   b) дослідити на парність (непарність) функцію;

$$y = \frac{x^2 + 5x}{x - 4};$$

2. Обчислити границі

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{9x+4}-7}{x^2-25}$;

3. Продиференціювати функцію

$$y = x^4\cdot tg(e^{2x})$$

4. Знайти значення похідної функції у точці x_0: $f(x) = (x^2 + 2x + 1)\sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

5. Знайти похідну функції, що задана параметрично $\begin{cases} x = 9t^2, \\ y = \ln t. \end{cases}$

Варіант 3

1. Знайти:

a) область визначення функції;

b) дослідити на парність (непарність) функцію;

$$y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$$

2. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$;

3. Продиференціювати функцію

$$y = (x^3+\ln 3)\cdot e^{4x^3-1}$$

4. Знайти значення похідної функції у точці x_0: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$, $x_0 = 4$.

5. Знайти похідну функції, що задана параметрично $\begin{cases} x = 6\sin\frac{\pi}{3}t, \\ y = 3\cos\frac{\pi}{3}t. \end{cases}$

Варіант 4

1. Знайти:

a) область визначення функції;

b) дослідити на парність (непарність) функцію;

$$y = \frac{9-x^2}{x^2+9};$$

2. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{-2x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$;

3. Продиференціювати функцію

$$y = \frac{1}{3}(arctg\,\frac{x}{3})^2\cdot(x^4+12)$$

4. Знайти значення похідної функції у точці x_0: $f(x) = (x^2-4x+4)tgx$, $x_0 = \pi$

.

5. Знайти похідну функції, що задана параметрично $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5-4\sin t. \end{cases}$

Варіант 5

1. Знайти:
   a) область визначення функції;
   b) дослідити на парність (непарність) функцію;

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1};$$

2. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x+2}\right)^{3x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

3. Продиференціювати функцію

$$y = (2x^4 - 4)\cdot\sin(\sqrt{x^2+1})$$

4. Знайти значення похідної у точці x_0: $y = \frac{2}{x^2} - 4x - \frac{3}{x} + 6,\ x_0 = 1$.

5. Знайти похідну функції, що задана параметрично $\begin{cases} x = 2t - 4t^2, \\ y = t - 2t^2. \end{cases}$

Список використаних джерел та рекомендованої літератури

1. Архіпова О.С., Протопопова В.П., Пахомова Є.С. Посібник для розв’язання типових завдань з курсу «Вища математика». – Харків: ХНАМГ, 2008р. − 210 с.
2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення / Т.І. Труш, С.А. Закорчевна. Під ред. В.Є. Березовського. – Умань: УДАУ, 2008. – 82 с.
3. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике: В 2 ч. Ч.1: Для вузов. – 2-е изд., перераб. – Мн.: Выс. шк., 1988. – 247 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Наука, 2000, ч. 1,2.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, “А.С.К.”, 2005. – 648 с.
6. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика.
7. Кадильникова Т.М., Запорожченко О.Є., Бас Т.П. Вища математика в прикладах та задачах. Частина І : Навч. посібник.- Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010.- 92 с.
8. Карпік В.В. Дослідження ірраціональних функцій за допомогою похідної. Побудова графіків. – Х.: Вид. група «Основа», 2010. – 78, с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 10 (94)).
9. Карпік В.В. Дослідження показникових функцій за допомогою похідної. Побудова графіків. – Х.: Вид. група «Основа», 2010. – 111, с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 11(95)).
10. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. Видання друге перероблене і доповнене. Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 600 с.
11. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика»: У 3 частинах /Укладач О.І. Оглобліна. – Суми: Вид-во СумДУ, 2009. – Ч.1. – 210 с.

12. Лозовий Б.Л., Пушак Я.С., Шабат О.Є. Практикум з вищої математики: Навч. посібник – 2-ге вид., доповн. і переробл. – Львів: «Манголія – 2006», 2007. – 285 с.

13. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1978.

14. Моденов П. С. Аналитическая геометрия. – Издательство Московского университета, 1969.

15. Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 600с.

16. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. Ч 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П.М. Юрченка. – 3-тє вид., випр. – К: Техніка, 2003. – 600 с.

17. Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В. Лінії на евклідовій площині. — К: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. — 44 С.

18. Тарасенкова Н.А., Коломієць О.М. Лінії другого порядку. Навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи студентів. – Черкаси: Сіяч, 2000. – 80с.

19. Хазін Г.А, Поліщук Т.В. Математичний аналіз. Частина 1. Модуль: Вступ до аналізу. Модуль 2: диференціальне числення функції олнієї змінної. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів III - IV рівнів акредитації. – Умань. – Алмі – 2008. –132с.

20. Вища математика для біологів : навч.-метод. посіб. : у 2 ч. / Галина Михайлівна Барабаш, Львів. нац. ун-т ім. І. Франка.– Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2013 . – На укр. яз.