

**ДО РОЗРАХУНКУ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ПЛИТ  
ЗА ДОПОМОГОЮ СТРИЖНЕВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ**

**CONCRETE DEFORMATION DIAGRAMS OF THE NEW GENERATION  
TENSILE BENDING AND THEIR MECHANICAL CHARACTERISTICS**

**Азізов Т. Н., д.т.н., проф.,** ORCID ID: 0000-0001-9621-9805, (Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, м.Умань)  
**Кочкар'єв Д.В., д.т.н., доц.,** ORCID ID: 0000-0002-4525-7315 (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

**Azizov T.N., Dr., professor,** ORCID ID: 0000-0001-9621-9805, (Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman), **Kochkarev D.V., Dr., associate professor,** ORCID ID: 0000-0002-4525-7315, (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

**АНОТАЦІЯ.** Наведено методику розрахунку суцільних плит за допомогою перехресно-стрижневої апроксимації. Наведено методику визначення крутильних жорсткостей стрижневий системи. Показано, що при зміні кроку стержнів в стрижневій системі в порівнянні з базовим кроком слід коригувати значення крутильних жорсткостей стрижнів. Наведено формулу для такого коригування. Показані переваги стрижневої апроксимації при розрахунку залізобетонних плит в зв'язку з вивченістю зміни крутильних жорсткостей стрижневих елементів від тріщиноутворення і малою вивченістю плитних елементів.

**ABSTRACT:** Deflections of reinforced concrete slabs are determined by many modern methods of calculation significantly different from the experimental ones. So the plate, calculated with the nonlinear properties of the materials has a theoretical deflection, less experimental deflection. This is due in the first place to the fact that insufficient consideration of the change in stiffness due to the formation of cracks. The calculations on the vast majority of existing theories give a good match with the experimental data. However, they usually do not take into account the effect of normal cracks on the change in the stiffness of the section. The use of elasticity theory formulas can only be justified when calculating in the elastic stage and cannot be applied to fracture calculations. The finite element method (ITU) calculation is most acceptable. However, ITU has a number of disadvantages: the need to solve a system of large-scale equations and related

problems of conditionality, and to determine the parameters of the stress-strain state in the local area, you need to calculate the whole structure. Therefore, when calculating reinforced concrete overlays with regard to cracks, it is proposed to use the method of core approximation. This is due to the fact that the effect of different cracks on the bending and torsional stiffness of reinforced concrete core elements has been studied quite fully. It is suggested to approximate the slab by a system of longitudinal and transverse rods, located in a mutually perpendicular direction, but taking into account their torsional rigidity. This approximation has a number of advantages considered. The article describes the methods of determining the torsional rigidity of approximating rods for the calculation of solid plates.

**Ключові слова:**

стрижнева апроксимація, згин, залізобетонні плити, деформаційна модель, жорсткість.

**Аналіз досліджень і постановка задачі.**

При проектуванні залізобетонних плит часто виникає проблема, що розрахована в програмному комплексі плита має прогини, які істотно відрізняються від експериментальних. Як правило, плита, розрахована з урахуванням нелінійних властивостей матеріалів має теоретичний прогин, менший експериментального прогину. Це пов'язано в першу чергу з фактом недостатнього врахування зміни жорсткості в результаті утворення тріщин [2]. Розрахунки за теорією М.І. Карпенка [4] дають непоганий збіг з експериментальними даними. Однак в теорії М.І. Карпенка не враховується вплив нормальних тріщин на зміну жорсткості перерізу. Вплив нормальних тріщин на зміну жорсткості залізобетонних стрижневих елементів показано в ряді робіт [1, 2, 8]. Використання формул теорії пружності [9] може бути виправдано тільки при розрахунку в пружній стадії і не може бути застосоване для розрахунку з урахуванням тріщиноутворення. Розрахунок з використанням методу скінченних елементів (МСЕ) [3] є найбільш прийнятним. Однак, МСЕ властиві недоліки [3]: необхідність вирішення системи рівнянь великих розмірів і пов'язані з цим проблеми обумовленості, а для визначення параметрів напружено-деформованого стану в локальній області необхідно розраховувати всю конструкцію.

В роботі [2] показано, що при розрахунку залізобетонних перекриттів з урахуванням тріщиноутворення зручно користуватися методом стрижневої апроксимації. Це пов'язано з фактом, що вплив різних тріщин як на згинальну, так і на крутильну жорсткості залізобетонних стрижневих елементів вивчено досить повно. В роботі [2] показано також, що суцільні плити теж можна розраховувати у вигляді апроксимації перехресно-стрижневою системою. При цьому на відміну від пропозицій О.Р. Ржаніцина

[7], де запропонована апроксимація у вигляді поздовжніх, поперечних і діагональних стрижнів без урахування їх жорсткості при крученні. В [2] запропоновано апроксимувати плиту системою тільки поздовжніх і поперечних стрижнів, розташованих у взаємно-перпендикулярному напрямку, але при цьому враховувати їх крутильну жорсткість. Така апроксимація має ряд переваг. Однак, в роботі [2] не розглянуті випадки, коли плита оперта чотирма сторонами, а також не наведена методика визначення крутильних жорсткостей стрижнів в стрижневій системі, яка апроксимує плиту, оперту по контуру.

У зв'язку з цим метою цієї статті є вдосконалення методики стрижневий апроксимації суцільних плит, опертих по контуру, в тому числі розробка методики визначення крутильних жорсткостей апроксимуючих стрижнів.

**Методика досліджень.**

Розглянемо плиту, оперту по контуру, з розмірами в плані  $l \times l_2$  (рис. 1).

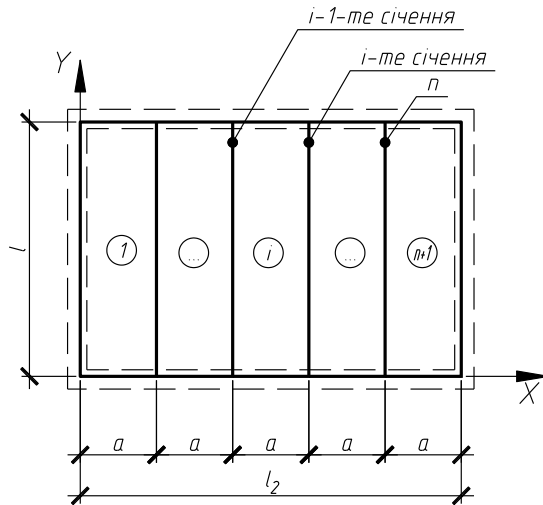


Рисунок 1 – Схема розбивки суцільної плити на смуги

Для розрахунку, слідуючи [2], розіб'ємо плиту уздовж напрямку  $l$  (уздовж осі  $Y$ )  $n$  січними площинами на  $n+1$  смуг шириною  $a$ . Уздовж ліній розбивки в кожному  $i$ -тому перерізі будуть діяти три функції невідомих погонних зусиль: вертикальних зусиль  $S_i(y)$ ; поперечних згинальних моментів  $m_i(y)$  і крутих моментів  $t_i(y)$  (моментів відносно ліній, паралельних осі  $X$ ). В [2] розглянуто континуальний розподіл зусиль уздовж осі  $Y$ . Попередні розрахунки показують, що можна розглядати в напрямку осі  $Y$  також дискретне розташування стрижнів. Іншими словами замість

суцільної плити можна отримати перехресно-стрижневу систему, показану на рис. 2.

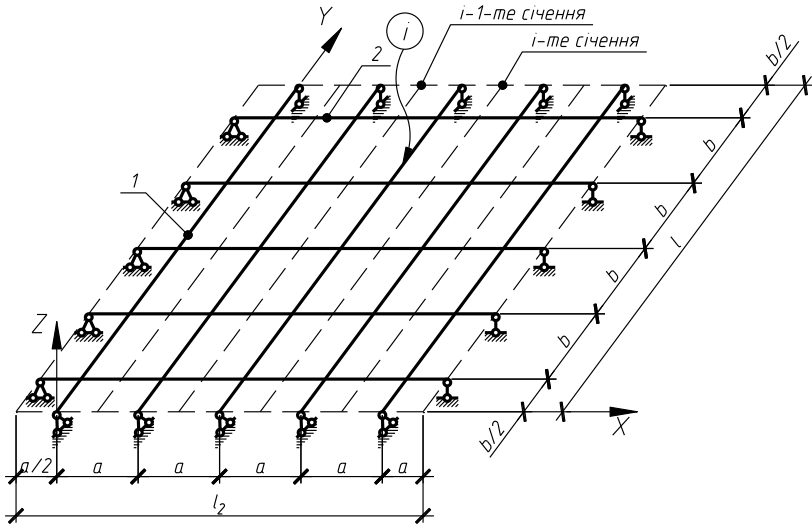


Рисунок 2 – Представлення суцільної плити перехресно-стрижневою системою

Для розрахунку перехресно-стрижневої системи слід розсікти поперечні стрижні площинами, паралельними осі  $Y$  (див. рис. 2). В кожному перетині слід визначити невідомі вертикальні сили  $S_{i,j}$ , згинальні моменти  $M_{i,j}$  і крутні моменти  $M_{ti,j}$ , де  $i, j$  - відповідно номер поздовжнього перерізу (див. рис. 2) і номер поперечного стрижня в напрямку осі  $Y$ .

Балки уздовж осі  $Y$  закріплені на опорах таким чином, що заборонено вертикальне переміщення (уздовж осі  $Z$ ) і заборонений повороту відносно осі  $Y$ . В балках поперечного напрямку заборонені переміщення по осі  $Z$  і повороти відносно осі  $X$ .

Після визначення невідомих зусиль кожна балка (смуга) з номером і розглядається як балка, до якої прикладена своє зовнішнє навантаження і визначенні з системи рівнянь внутрішні зусилля ліворуч і праворуч (рис. 3).

Подібну схему приймали різні дослідники, наприклад [5]. Однак, в цих роботах не показано, яку жорсткість апроксимуючих стрижнів слід приймати, щоб перехресно-стрижнева система за рис. 2 стала еквівалентною суцільній плиті за рис. 1. В роботі О.Р. Ржаніцина [7] суцільна плита представлена системою перпендикулярних і діагональних стрижнів, які умовно не сприймають крутні моменти. Однак, відомо, що вплив крутних моментів великий і при розрахунку з урахуванням тріщиноутворення такий підхід мало прийнятний.

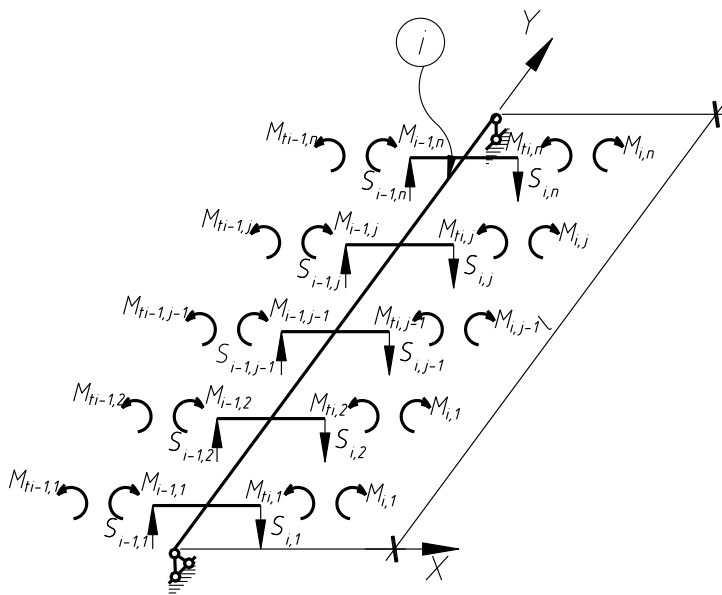


Рисунок 3 – Зусилля, що діють по лініях розтину

Осьові і згинальні жорсткості і поздовжніх, і поперечних балок приймаються як для прямокутного перерізу  $a \times h$ , де  $h$  – товщина плити. Проблем з визначенням осьових і згинальних жорсткостей не виникає. Що ж стосується крутильних жорсткостей стрижнів стрижневої системи, то на цьому слід зупинитися окремо.

Якщо прийняти крутильні жорсткості поздовжніх стрижнів  $a \times h$ , а поперечних стрижнів  $b \times h$ , то при певному співвідношенні ширини перерізу стержнів до товщини система буде еквівалентною. Але спроба прийняти крутильну жорсткість стрижнів як прямокутників при довільних співвідношеннях  $a \times h$  і  $b \times h$  призводить до вельми помилкових результатів. Легко переконатися, що при збільшенні, наприклад, кроку поперечних стрижнів з відповідним зменшенням їх ширини перерізу, прогини в перехресно-стрижневої системі збільшуються. У цьому сенсі збіжності в розрахунках не спостерігається, що відмічалось також в роботі [2].

Для визначення жорсткості поздовжніх і поперечних стрижнів пропонується такий спосіб, який має високу точність для розрахунку опертих по контуру плит. З чисельних розрахунків за допомогою відомої програми «Ліра» було встановлено, що плиту можна представити перехресно-стрижневою схемою. Причому, якщо ширину перерізу стержнів  $a$  і поздовжнього, і поперечного напрямку прийняти рівною подвійній товщині плити (тобто прийняти  $a=2 \times h$ ), то прогини в перехресно-стрижневої системі

практично збігаються з прогинами в плиті, яка задана плоскими скінченими елементами. Якщо плиту розбити на  $n+1$  смуг уздовж сторони  $l_2$ , то крок смуг буде дорівнювати  $c=l_2/(n+1)$ , де  $l_2$  - ширина плити по осі  $X$ , а  $n+1$  – кількість поздовжніх смуг (стрижнів), на яке розбита плита (див. рис. 1). Отже, і ширина відсіченої смуги в розрахунковій схемі буде дорівнювати. Якщо крок поздовжніх стрижнів (смуг) буде менше величини  $a=2 \times h$ , то реальну крутильну жорсткість стержня перерізом  $c \times h$  слід помножити на коефіцієнт  $k_t$ , що визначається за формулою:

$$k_t = \frac{GI_a}{GI_c \frac{a}{c}},$$

(1)

де  $GI_a$ ,  $GI_c$  – крутильна жорсткість стержня відповідно перерізом  $axh$  і перерізом  $c \times h$ .

Коефіцієнт  $k_t$  по суті має той сенс, що якщо розмістити на відстані  $a$  кількість, рівну  $a/c$ , стрижнів шириною перетину  $c$  і жорсткістю  $GI_c$ , помножену на  $k_t$ , то їх сумарна крутильна жорсткість дорівнюватиме жорсткості  $GI_a$ , яка є базовою (див. вище). Крок поздовжніх стрижнів більший ніж величина  $a=2 \times h$  приймати не слід, тому що в цьому випадку точність розрахунку постраждає.

Аналогічно слід визначити коефіцієнт  $k_t$  для збільшення крутильної жорсткості стрижнів поперечного напрямку. При цьому у формулі (1) величина  $GI_c$  буде дорівнювати жорсткості стрижня перетином  $b \times h$ .

Застосування методик визначення крутильної жорсткості стрижнів стрижневої системи, апроксимуючої роботу суцільної плити, покажемо на прикладі розрахунку квадратної плити розмірами в плані  $8.5 \times 8.5$  м і товщиною  $h=25$  см.

Необхідна ширина смуг  $a$ , на які буде розбита плита в поздовжньому напрямку становить  $a=2 \times h=2 \times 25=50$  см. Розіб'ємо плиту на смуги шириною  $a$  і отримаємо, що ця кількість дорівнює  $850/50=17$ . Так як вийшло ціле число смуг і  $c=a$ , то змінювати крутильну жорсткість поздовжніх стержнів не треба (тобто коефіцієнт  $k_t$  дорівнює одиниці).

Якщо і поперечні стрижні прийняти з таким же кроком, то коефіцієнт  $k_t$  буде також дорівнювати одиниці. Однак, найчастіше проектувальнику доводиться учашати крок стрижнів для з'ясування більш точного напруженого стану в певних областях плити. В цьому випадку слід обчислювати коефіцієнт  $k_t$ .

Так, якщо ширину перетину поперечних стрижнів прийняти рівною 25 см (перетином  $25 \times 25$  см з відповідною кількістю поперечних стрижнів), то момент інерції при крученні  $I_c$ , дорівнюватиме  $54922$  см<sup>4</sup>. Момент інерції при крученні перетину  $a \times h=50 \times 25$  см дорівнює  $I_a=178658$  см<sup>4</sup>. З огляду на

те, що модуль пружності при зсуві  $G$  однаковий для всіх стрижнів, за формулою (1) будемо мати ( $c=25\text{см}$ ):  $k_t=178658/(54922\times 50/25)=1.626$ . Тобто розрахунковий момент інерції при крученні поперечних балок повинен бути прийнятий рівним  $54922\times 1.626 = 89303\text{ см}^4$ .

Підстановка відповідних значень жорсткостей для поперечних стрижнів показує, що зусилля і переміщення практично повністю збігаються з відповідними зусиллями і переміщеннями плити, змодельованої за допомогою плоских скінчених елементів. Правильність розрахунку легко перевірити, змодельовавши перехресно-стрижневу систему в будь-якій відомій програмі. При цьому жорсткості стрижнів перехресно-стрижневої системи слід прийняти як було показано вище.

Якщо ширину перетину поперечних стрижнів прийняти рівною  $5\text{ см}$  (для спрощення завдання схеми і зменшення числа невідомих), то реальну крутильну жорсткість поперечних стрижнів  $I_c=910\text{ см}^4$  згідно з формулою (1) слід збільшити в  $178658/[910\times(50/5)]=19.6$  разів. При підстановці такої жорсткості для поперечних стрижнів результат стає рівним реальному.

Слід зазначити, що для прямокутних в плані плит співвідношення ширини перерізу стержнів до висоти (товщини) плити може бути прийняте аналогічно описаному вище способу.

Для того, щоб не застосовувати програмні комплекси для розрахунку такої перехресно-стрижневої системи, неважко скласти систему рівнянь для визначення невідомих зусиль в кожному перетині (див. рис. 3). Для цього є такі умови сумісності деформацій: рівність вертикальних переміщень в перетині  $i,j$  зліва від  $i$ -того перерізу і праворуч від нього; рівність кутів повороту відносно осей, паралельних осі  $Y$ ; рівність кутів повороту відносно осей, паралельних осі  $X$ .

Істотною перевагою запропонованого методу розрахунку є досить проста можливість розрахунку з урахуванням зміни згинальних і крутильних жорсткостей в результаті утворення різних тріщин. У цьому випадку програма розрахунку на кожному кроці ітерації звертається до підпрограми зміни характеристик жорсткості параметрів стержнів в результаті утворення тріщин. При цьому зміна згинальних жорсткостей кожного поперечного і поздовжнього стрижня від утворення тріщин рекомендується визначати за методикою [6], а крутильну жорсткість – за методикою [1].

Наведемо ще один факт переваги стрижневої апроксимації при розрахунку залізобетонних плит. Методика розрахунку жорсткості залізобетонних стрижнів при наявності нормальних тріщин розроблена в [1], а зміна жорсткості в елементах плит при наявності нормальних тріщин не досліджена.

Зміна жорсткості стрижнів апроксимуючої системи в результаті утворення в них нормальних тріщин слід проводити в такому порядку. Спочатку слід визначити крутильну жорсткість суцільного стержня перерізом

$a \times h$ . Потім за методикою [1] визначити коефіцієнт  $\gamma_t < 1$  зниження жорсткості від утворення нормальних тріщин. Після цього крутильну жорсткість, яка підставляється в розрахунок при наступній ітерації, помножити і на коефіцієнт  $\gamma_t$ , і на коефіцієнт  $k_t$ , визначений за формулою (1).

**Висновки.** Суцільну плиту, оперту по контуру, пропонується розраховувати за допомогою апроксимації системою перехресних стрижнів, розташованих у взаємно перпендикулярному напрямку. Показано спосіб визначення крутильних жорсткостей перехресно-стрижневої системи. При підстановці визначених таким чином крутильних жорсткостей в розрахункову схему прогини і зусилля в перехресно-стрижневій системі практично збігаються з прогинами і зусиллями, визначеними за допомогою методу скінчених елементів при моделюванні плоскими скінченими елементами. Запропонована методика розрахунку дозволяє розраховувати залізобетонні плити, оперті по контуру, з урахуванням зміни характеристик жорсткості в результаті утворення тріщин.

У перспективі передбачається розроблення програми на ЕОМ для розрахунку з урахуванням тріщиноутворення.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Azizov T., Melnik O. and others. Calculation of reinforced concrete ceilings with normal cracks accounting the Chebyshev approximation // 6 th International Scientific Conference “Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings” Transbud-2017. – Kharkiv, April 19-21, 2017 - P. 1-7.
2. Азизов Т.Н. Пространственная работа железобетонных перекрытий. Теория и методы расчета. – Дисс. ... докт. техн. наук. – Полтава, 2006. – 405 с.
3. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. – К., 2007. – 394 с.
4. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
5. Кваша В.Г., Іванік І.Г. Особливості просторового розрахунку розширених прольотних будов залізобетонних мостів // Будівельні конструкції. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип.50. Київ – 1999. – С. 95-100.
6. Azizov, T., Jurkowska, N., Kochkarev, D. (2019). Basis of calculation on torsion for reinforced concrete structures with normal cracks. Proceedings of the fib Symposium 2019: Concrete - Innovations in Materials, Design and Structures. Krakow, Poland, 2019.
7. Ржаницын А.Р. Строительная механика: Учеб. пособие для вузов. – М., 1982. – 400 с.
8. Срібняк Н.М. Крутильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами: автореф. дис. .... канд. техн. наук 05.23.01 /



Срібняк Наталія Миколаївна; Одеська державна академія будівництва та архітектури. – О., 2009. – 23 с.

9. Тимошенко С.П., Гуд'єр Д. Теорія упругости. – М., 1976. – 576 с.

#### REFERENCES

1. Azizov T., Melnik O. and others. Calculation of reinforced concrete ceilings with normal cracks accounting the Chebyshev approximation // 6 th International Scientific Conference “Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings” Transbud-2017. – Kharkiv, April 19-21, 2017// - P. 1-7.
2. Azizov T.N. Prostranstvennaya rabota zhelezobetonnykh perekrytiy. Teoriya i metody rascheta. – Diss. ... dokt. tekhn. nauk. – Poltava, 2006. – 405 s.
3. Gorodetskiy A.S., Yevzerov I.D. Komp'yuternyye modeli konstruktsey. – K., 2007. – 394 p.
4. Karpenko N.I. Teoriya deformirovaniya zhelezobetona s treshchinami. – M.: Stroyizdat, 1976. – 208 p.
5. Kvasha V.H., Ivanyk I.H. Osoblyvosti prostorovoho rozrakhunku rozshyrenykh prol'otnykh budov zalizobetonnykh mostiv // Budivel'ni konstruktseyi. Mizhvidomchyy naukovu-tekhnichnyy zbirnyk. Vyp50. Kyiv – 1999. – P. 95-100.
6. Azizov, T., Jurkowska, N., Kochkarev, D. (2019). Basis of calculation on torsion for reinforced concrete structures with normal cracks. Proceedings of the fib Symposium 2019: Concrete - Innovations in Materials, Design and Structures. Krakow, Poland, 2019.
7. Rzhanytsyn A.R. Stroytel'naya mekhanyka: Ucheb. posobyе dlya vuzov. – M., 1982. – 400 p.
8. Sribnyak N.M. Krutyl'na zhorstkist' zalizobetonnykh elementiv perekryttiv z normal'nymy trishchynamy: avtoref. dys. .... kand. tekhn. nauk 05.23.01 / Sribnyak Nataliya Mykolayivna; Odes'ka derzhavna akademiya budivnytstva ta arkhitektury. – O., 2009. – 23 p.
9. Tymoshenko S.P., Hud'er D. Teoryya uprugosty. – M., 1976. – 576 p.