

**IMPROVED SCHEME ROD APPROXIMATION FOR CALCULATION  
DEFORMATION OF REINFORCED CONCRETE ELEMENTS  
IN TORSION**

**Azizov T.N.**

Professor, DSc (eng.), Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Ukraine

**УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ СХЕМА СТЕРЖНЕВОЙ  
АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ  
ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ**

**Азизов Т.Н.**

Доктор технических наук, профессор, Уманский государственный  
педагогический университет имени Павла Тычины

**Abstract.** The article describes the method of calculating continuous torsion element via its shaft approximation as cross-bar system. It shows a method for determining the stiffness parameter rods approximating system. The advantages of the proposed method, which allows to significantly reduce the number of unknowns in the system of equations to calculate the elements of bending and torsion, as well as to take into account the change in stiffness as a result of material nonlinearity and cracking.

**Аннотация.** В статье приведена методика расчета на кручение сплошного элемента с помощью его стержневой аппроксимации в виде перекрестно-стержневой системы. Показан способ определения жесткостных параметров стержней аппроксимирующей системы. Показаны преимущества предложенной методики, позволяющей существенно уменьшить количество неизвестных в системе уравнений, рассчитывать элементы на изгиб с кручением, а также учитывать изменение жесткостей в результате нелинейной работы материалов и трещинообразования.

**Keywords:** rod approximation, torsion, bending with torsion, nonlinear properties, system of equations.

**Ключевые слова:** стержневая аппроксимация, кручение, изгиб с кручением, нелинейные свойства, система уравнений.

### **Постановка задачи и анализ исследований.**

В работах [1, 3, 4, 6] показана важность учета образования нормальных трещин на крутильную жесткость железобетонных элементов. Там же показано существенное влияние крутильной жесткости на распределение усилий в сложных статически неопределимых системах. В работах [1, 3, 6] предложены приближенные методики расчета деформаций таких элементов при кручении. В этих работах показано, что основной задачей при этом является определение взаимного перемещения блоков железобетонного элемента, отделенных нормальной трещиной. Однако, эти работы отличаются своей приближенностью, особенно в случае прямоугольного сечения стержня, подверженного кручению.

В работе [8] предложена методика расчета железобетонных элементов с нормальными трещинами с помощью стержневой аппроксимации. Недостатком этой методики является большое количество неизвестных при решении задачи. Кроме того, там не описана схема определения жесткостных параметров стержневой аппроксимирующей системы.

В связи с вышесказанным **целью настоящей статьи** является совершенствование методики стержневой аппроксимации при определении перемещений блоков железобетонного элемента, отделенных нормальной трещиной.

### **Изложение основного материала.**

Для расчета воспользуемся стержневой аппроксимацией сплошного тела, основы которой изложены в [8]. Пусть имеется блок железобетонного элемента, отделенного нормальными трещинами с поперечным сечением в виде прямоугольника с размерами  $b$  и  $h$  (рис. 1). Разделим поперечное сечение на конечное число прямоугольников со сторонами  $a$  и  $c$ .

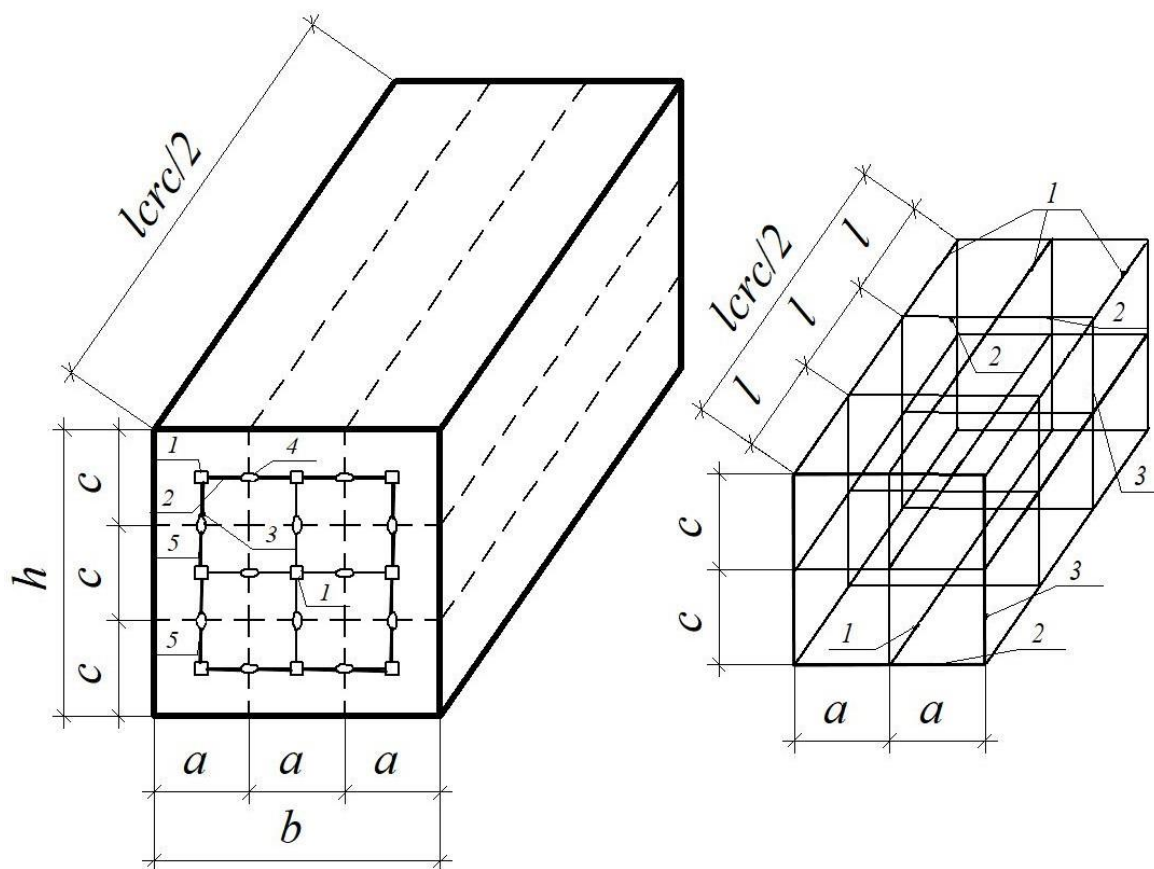


Рис. 1. Схема аппроксимации сплошного параллелепипеда перекрестно-стержневой системой

Тело сечением  $b \times h$  делится на некоторое количество стержней сечением  $a \times c$ . Соединение стержней сечением  $a \times c$  считается точечным по середине горизонтальных (поз. 4 на рис. 1,а) и вертикальных (поз. 5 на рис. 1,а) граней. Такое точечное соединение моделируется в конечном числе точек элемента по длине рассматриваемого блока  $l_{cr}/2$  условными поперечными вертикальными и горизонтальными стержнями, расположенными друг от друга на расстоянии  $l$  по длине блока (рис. 1, б). Таким образом вместо сплошного тела мы получаем перекрестно-стержневую систему (рис. 1, б), в которой в продольных стержнях (поз 1 на рис. 1) сосредоточена осевая, изгибная и крутильная жесткости стержней сечением  $a \times c$ , а поперечные горизонтальные (поз. 2 на рис. 1) и вертикальные (поз. 3 на рис. 1) моделируют местную деформацию продольных стержней в местах горизонтальных (поз. 4 на рис. 1,а) и вертикальных (поз. 5 на рис. 1,а) узлов

соединения продольных стержней.

Такая схема отличается от схемы [8] тем, что продольные стержни соединены по середине вертикальных и горизонтальных граней (в [8] стержни соединяли в угловых точках сечения продольных стержней). Такое изменение схемы упрощает расчет. Кроме того, в [8] задача решается с помощью рассечения всех поперечных стержней (и вертикальных, и горизонтальных) перекрестно-стержневой системы, в результате чего получается достаточно большое количество неизвестных сил, действующих в местах таких рассечений. По длине блока  $l_{cr}/2$  в расчетной перекрестно-стержневой схеме должна быть достаточно большое количество поперечных стержней. Для существенного уменьшения неизвестных предлагается методика расчета, в которой рассекаются поперечные стержни только в одном сечении. Алгоритм расчета выглядит следующим образом.

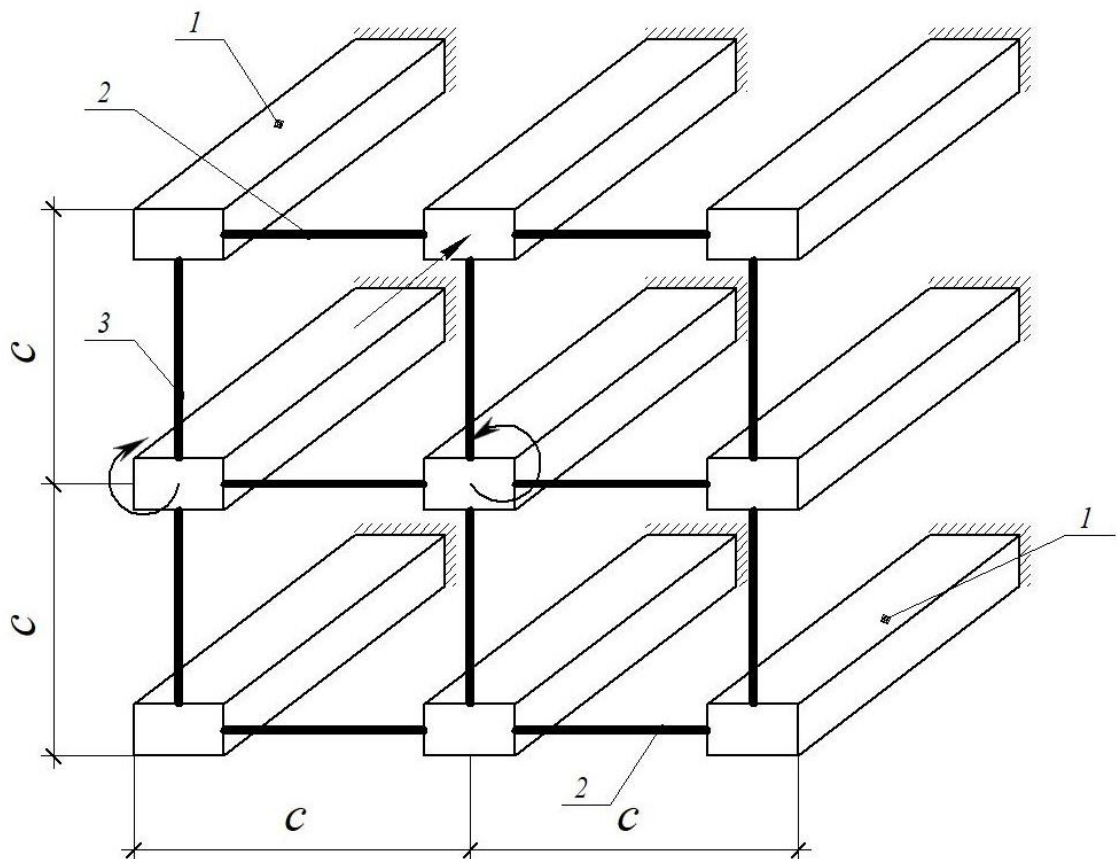


Рис. 2. Стержневая схема для расчета первого этапа

Сначала рассматривается первый блок перекрестно-стержневой

системы (см. рис. 2), т.е. торцевое сечение с приложенной внешней нагрузкой длиной  $l$ , равной в один шаг поперечных стержней.

Продольные стержни перекрестно-стержневой системы считаются условно жестко заделанными в плоскости, где располагается следующий ряд поперечных стержней (на расстоянии  $l$  от торца). Определение усилий в продольных стержнях осуществляется путем условного рассечения поперечных стержней и рассмотрения условий совместности деформаций в местах рассечения (эта методика будет описана ниже).

Усилия в продольных стержнях первого блока, определенные из решения первого этапа задачи, прикладываются к торцам продольных стержней второго блока (на расстоянии  $l$  от торца), которые в свою очередь считаются условно заделанными в уровне начала третьего блока (на расстоянии  $2l$  от торца). Снова определяются усилия в продольных стержнях, которые прикладываются к стержням следующего блока, и т.д. Такой расчет повторяется до середины длины рассматриваемого блока между трещинами, т.е. до  $l_{cr}/2$  столько раз, сколько шагов  $l$  в продольном направлении выбрано в расчетной схеме.

Для определения перемещений в уровне  $i$ -того блока по длине следует сложить все перемещения блоков от первого (от середины рассматриваемого параллелепипеда) до  $i-1$ -го плюс перемещения самого  $i$ -того блока.

Такая схема расчета позволяет решать задачу с количеством неизвестных в  $n$  раз меньшим по сравнению с решением путем рассмотрения всей стержневой системы (где  $n$  – число расчетных блоков по длине элемента). При этом, правда, система уравнений решается  $n$  раз, но, как известно, решение системы с  $m \times n$  неизвестными сложнее решения системы с  $n$  неизвестными  $m$  раз. Кроме того, при таком поэтапном решении можно без труда решать задачу с измененными жесткостями продольных стержней в результате нелинейной работы материалов и трещинообразования.

Перейдем теперь к методике определения усилий в стержнях одного рассматриваемого блока (см. рис. 2). Для создания основной схемы расчета

методом сил рассечем все поперечные (и горизонтальные, и вертикальные) стержни по середине (т.е. в местах условного касания середины граней продольных стержней, обозначенных на рис. 1, а позициями 4 и 5). В месте рассечения в общем случае будут действовать 6 неизвестных внутренних усилий: сосредоточенные силы по направлению трех координатных осей и моменты относительно трех координатных осей. Расчеты показывают, что во многих случаях вполне достаточно учитывать только неизвестные сосредоточенные внутренние силы в направлении трех координатных осей. Тогда статически неопределимая система превратится в статически определимую систему продольных стержней, к которым приложены внешние силы, а в местах рассечения поперечных стержней – внутренние неизвестные силы. На рис. 3 показаны внутренние неизвестные силы в сечении  $j$ .

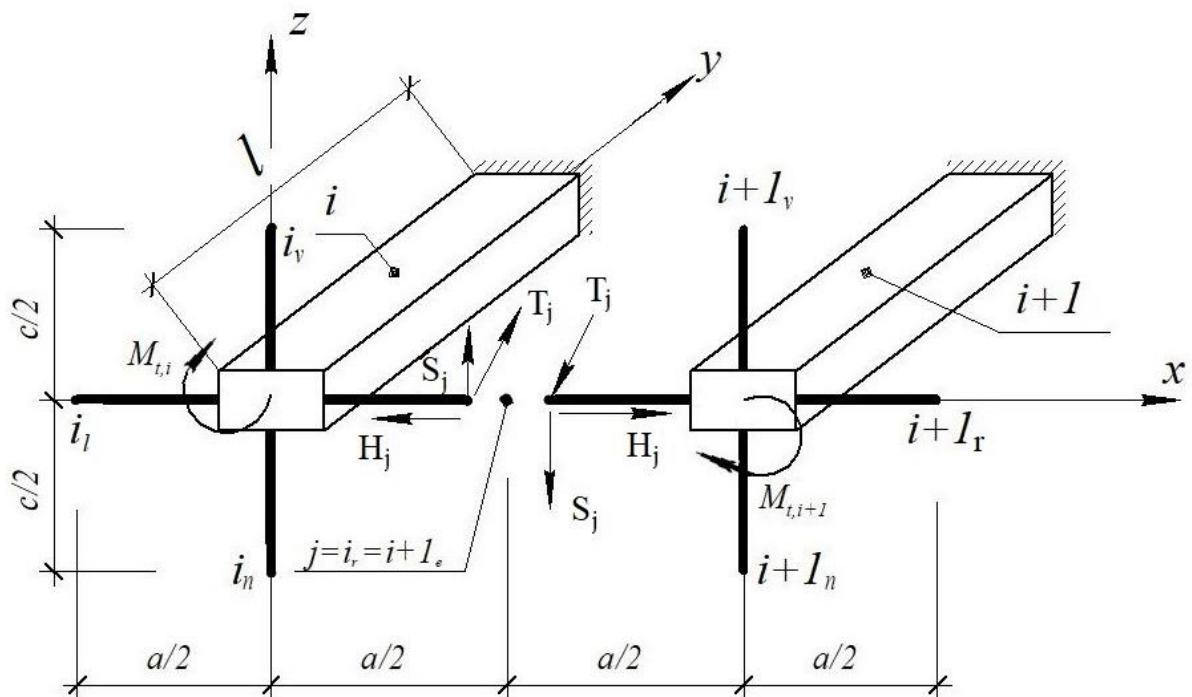


Рис. 3. Неизвестные силы, действующие в сечении с номером  $j$

Слева от  $j$ -того сечения находится  $i$ -й продольный стержень, справа –  $i+1$ -й. Для определения неизвестных следует составить уравнения совместности перемещений по направлению трех координатных осей в рассматриваемом сечении. Т.е. перемещения слева (на рис. 3) от  $j$ -го сечения

в продольном стержне с номером  $i$  и поперечном горизонтальном стержне справа от  $i$ -того продольного стержня должны быть равны перемещениям справа от этого сечения в  $i+1$ -ом продольном стержне и горизонтальном поперечном стержне этого элемента.

Продольные стержни, как было сказано выше, имеют осевую, изгибную и крутильную жесткости, равные соответствующим жесткостям стержней прямоугольного сечения со сторонами  $a$  и  $b$ , на которые условно поделен рассчитываемый параллелепипед (см. рис. 1, а). Остановимся на жесткости поперечных стержней, имитирующих местные деформации продольных. Так как первоначальная схема предполагает, что все продольные стержни соединены в точках по середине вертикальных и горизонтальных граней, то в месте соединения будут происходить местные деформации от действующих внутренних сил. Отдельный продольный стержень, с действующими по его правой вертикальной грани (в сечении  $j$ ) силами показан на рис. 4, а. На рис. 4, б показана эквивалентная схема с продольным стержнем и поперечными стержнями.

Изгибная и осевая жесткости поперечного стержня справа на рис. 4,б должна быть подобрана так, чтобы реальная местная деформация от сил  $T_j$ ,  $S_j$  и  $H_j$  в стержне на рис. 4,а была равна деформации поперечного имитирующего стержня на рис. 4,б. Учитывая принцип независимости действия сил, можно отдельно рассмотреть деформации от каждой из этих сил отдельно. Для этого рекомендуется подход, принятый в [2]. Согласно этому подходу, прямоугольный параллелепипед (рис. 4, а) следует смоделировать в каком-либо программном комплексе (например, Ansys, Lira и др.) с помощью объемных конечных элементов.

К такой модели приложить единичную силу (отдельно для каждого случая  $T_j$ ,  $S_j$  и  $H_j$ ) и сделать ряд расчетов с различным значением сторон прямоугольного сечения и различным расположением сил по длине параллелепипеда. На рис. 5 показан пример схемы для действия горизонтальных сил. Цифрами 1, 2, ..  $n$  обозначены варианты приложения

сил по длине параллелепипеда. Кроме того варьируются размеры  $a$  и  $c$  поперечного сечения.

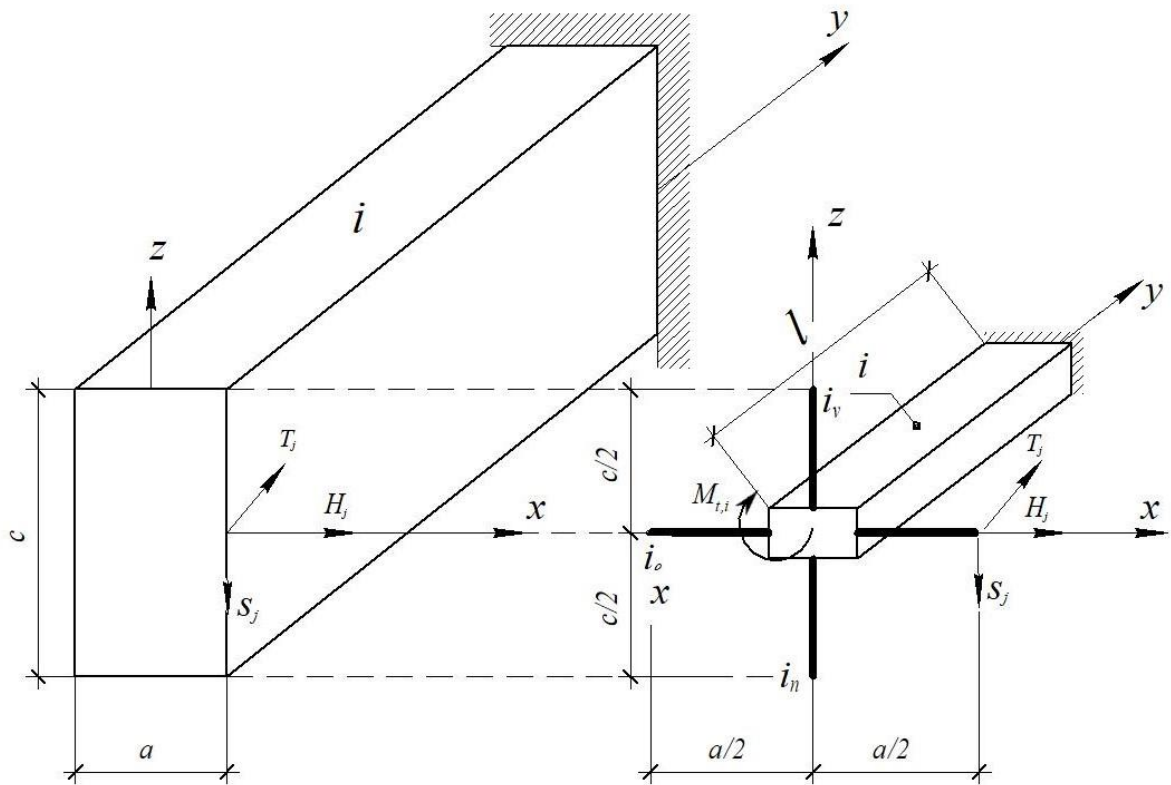


Рис. 4. Схема к определению жесткостей поперечных стержней расчетной системы

В результате серии расчетов будет получена функция вида:

$$\Delta = f(a, c, y_p) \quad (1)$$

где  $y_p$  - расстояние от торца параллелепипеда до точки приложения силы по оси  $y$ .

Продланная один раз такая серия расчетов может быть в дальнейшем использована при определении деформаций элемента любого поперечного сечения. Функцию, подобную (1) нетрудно получить и для действия сил  $S$  и  $T$ , показанных на рис. 4.

Имея значения  $\Delta$  для данной силы несложно определить осевую жесткость  $EA$  стержня на рис. 4,б из условия:

$$\Delta = \frac{(P=1) \frac{a}{2}}{EA} \quad (2)$$



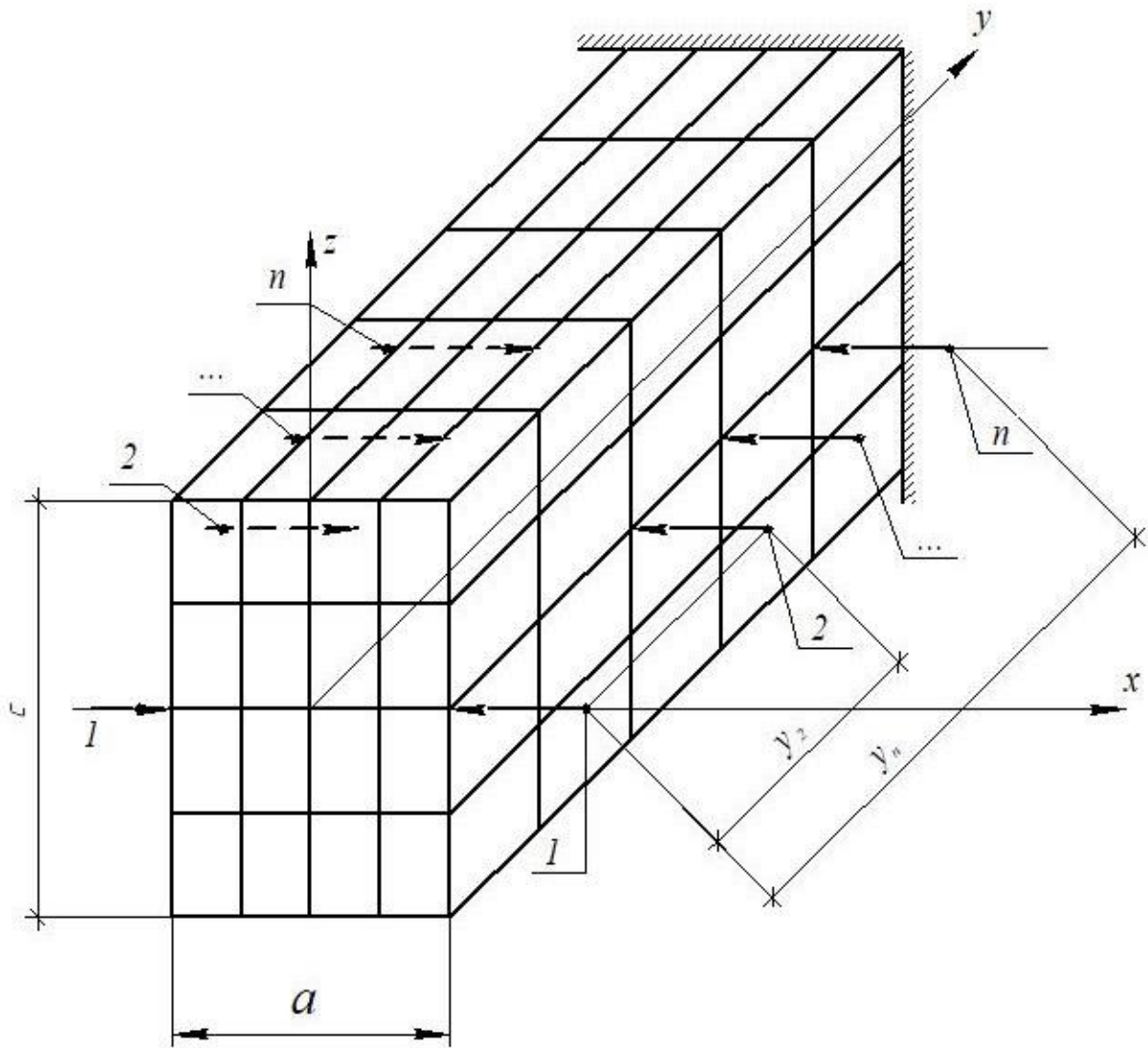


Рис. 5. Схема к определению местных деформаций для случая действия горизонтальных сил

Аналогично из условия равенства местной деформации вдоль оси  $Y$  от действия силы  $T$  (полученному по описанной выше схеме с использованием моделирования объемными конечными элементами) перемещению поперечного стержня (см. рис. 4,б) от этой же силы получим изгибную жесткость этого стержня в направлении оси  $Y$ . Учитывая, что в каждом сечении действуют три неизвестные внутренние силы, система уравнений будет состоять из  $3 \cdot n$  уравнений с  $3 \cdot n$  неизвестными, где  $n$  - количество сечений.

В каждом  $i$ -том продольном стержне в общем случае имеется четыре сечения (см. рис. 3): сверху стержня  $i_v$ , снизу –  $i_n$ , слева  $i_l$  и справа  $i_r$ . На рис. 3

сечение  $j$  является сечением  $i$ , для  $i$ -того стержня и сечением  $i+1$  для  $i+1$ -го стержня. Для составления системы уравнений следует все сечения пронумеровать последовательно.

В качестве преимуществ предложенного метода следует отметить следующее.

1. Имея один раз полученные данные (зависимости типа 1) на основе численных расчетов схемы по рис. 5, мы можем определять перемещения при кручении любого элемента. При этом жесткость поперечных стержней перекрестно-стержневой системы (см. рис. 1,б) подбирается в зависимости от глубины расположения по длине элемента от его торца, что несложно сделать в достаточно простой программе расчета.

2. Как было сказано выше, при поэтапном «продвижении» от торца элемента в его глубь путем рассмотрения одного шага  $l$  поперечных стержней система уравнений получается значительно меньшего размера.

3. С помощью предложенного метода стержневой аппроксимации можно рассчитывать не только элементы прямоугольного сечения, на котором показан метод расчета, но и любого другого поперечного сечения. Это сделать достаточно просто, т.к. любое поперечное сечение (тавровое, двутавровое, уголковое, швеллерное и др.) можно разбить на конечно число небольших прямоугольников и составить условие совместности деформаций в местах рассечения условных поперечных стержней.

4. Предложенным методом легко решается задача расчета не только на кручение, но и на изгиб с кручением. Для этого в торце элемента прикладываются не только крутящие моменты  $M_t$  (см. рис. 3), но и изгибающие моменты, а также продольные силы.

5. Методика расчета позволяет использовать любые зависимости диаграммы деформирования материалов, т.к. при нелинейном расчете в каждом продольном или поперечном стержне отдельно можно изменять его жесткостные параметры любыми известными методами расчета железобетонных стержневых элементов. В этом смысле методика выгодно

отличается от расчета с привлечением программ, в которых реализован метод конечных элементов (при расчете с использованием объемных конечных элементов), в которых использование нисходящей ветви диаграммы деформирования материала практически невозможно ввиду двойственности решения (при наличии нисходящей ветви на диаграмме « $\sigma$ - $\epsilon$ » одному и тому же значению напряжений соответствуют разные деформации).

6. Методика позволяет рассчитывать на кручение элементы, к торцу которых приложены крутящие моменты, распределенные каким угодно образом, в том числе при действии момента на части сечения, что практически не возможно при использовании классических методов теории упругости [7], в которых предполагается, что касательные напряжения равномерно распределены по торцевому сечению.

7. Методику расчета достаточно просто уточнить учетом моментов относительно координатных осей. При этом в каждом сечении следует учитывать шесть составляющих усилий (кроме рассмотренных здесь сил вдоль осей еще и моменты относительно координатных осей).

### **Выводы и перспективы исследований.**

Для расчета сплошного тела на кручение с любым поперечным сечением предложено аппроксимировать его перекрестно-стержневой системой. При этом предложено рассматривать последовательное определение неизвестных в каждом ряде поперечных стержней с целью уменьшения количества неизвестных. Преимущества методики состоят в возможности расчета элемента любого поперечного сечения и с учетом нелинейных свойств материалов, а также в возможности расчета как на кручение, так и на изгиб с кручением.

В перспективе предполагается разработка программы расчета по предложенной методике, а также получение аппроксимационных формул типа (1), которые могут быть использованы проектировщиками и инженерами для расчета каких угодно систем.

## Список использованной литературы

1. Азизов Т.Н. Жесткость железобетонных элементов при кручении и ее влияние на пространственную работу мостов // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій// Збірник наукових праць. НАН України. Фізико-мех.інститут ім.. В.Г. Карпенка. – Львів, 2009. – С. 576-590.
2. Азизов Т.Н. Использование аппроксимационных конечных элементов в расчетах конструкций // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 39, частина 1. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2010. – С. 4-9.
3. Азизов, Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами / Т.Н. Азизов // Дороги і мости. Збірник наукових праць. К.: ДерждорНДІ, 2007. – Вип. 7. Том 1. – С. 3-8.
4. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчёт несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. – М.: Стройиздат, 1977. – 223 с.
5. Коуэн, Г.Дж. Кручение в обычном и предварительно напряженном железобетоне: Пер. с англ. / Г.Дж. Коуэн; – М.: Изд-во литературы по строительству, 1972. – 104 с.
6. Срібняк, Н.М. Крутильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами: автореф. дис. .... канд. техн. наук 05.23.01 / Срібняк Наталія Миколаївна; Одеська державна академія будівництва та архітектури. – О., 2009. – 23 с.
7. Тимошенко С.П. Теория упругости. – М.:ОНТИ, 1934. – 451с.
8. Azizov T.N. Stem approximation to determine torsion deformations of reinforced concrete elements with normal cracks // Sciences of Europe. – 2018. – Vol 1, № 32. – P. 63-69.