

# Проектування ефективних статично-невизначених залізобетонних балок

D. Kochkarev<sup>1</sup>[1111-2222-3333-4444], T. Azizov<sup>2</sup>[0000-1111-2222-3333] and T. Galinska<sup>3</sup>[1111-2222-3333-5555]

<sup>1</sup> National University of Water and Environment Engineering, Ukraine

<sup>2</sup> Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Ukraine

<sup>3</sup> Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University, Poltava, Ukraine  
galinska@i.ua

**Abstract.** Розглянуто особливості перерозподілу зусиль у статично-невизначених залізобетонних балках. Традиційні нерозрізні конструктивні схеми дозволяють виконувати перерозподіл згинаючих моментів у доволі не значних межах, що значно обмежують їх ефективність особливо за значних значень навантажень. Тому було запропоновано нові ефективні конструктивні рішення нерозрізних залізобетонних балок. Ефективні конструктивні рішення отримані на основі рівномоментної схеми, шляхом зміни жорсткості балок по їх довжині. На основі методу розрахункових опорів залізобетону запропоновано пошук ефективних параметрів та армування нерозрізних балочних конструкцій. В основу методу розрахункових опорів залізобетону покладено нелінійну деформаційну модель, яка використовує діаграми деформування бетону та арматури. На основі загальноприйнятих гіпотез та передумов встановлюються геометричні параметри, які дозволяють зводити розрахункові системи рівнянь рівноваги до чіткого розмежування геометричних та фізико-механічних параметрів перерізів. Це дає змогу виконати табулювання необхідних параметрів та значно спростити всі розрахунки прогинів залізобетонних елементів. Приведено приклад розрахунку нерозрізної двох пролітної балочної конструкції на основі запропонованої методики розрахунку. Показано ефективність запропонованих конструктивних рішень рівномоментних балочних систем у порівнянні із традиційними.

**Keywords:** перерозподіл зусиль, статично-невизначені балки, деформаційна модель, метод розрахункових опорів залізобетону, діаграма, згин.

## 1 Основні поняття про перерозподіл зусиль в стержневих елементах

Статично-невизначені залізобетонні конструкції доволі часто зустрічаються у сучасному будівництві. Їх напружено-деформований стан залежить від осьової, згинальної та крутильної жорсткостей, які в свою чергу залежать від утворення нормальних тріщин [A1, A2]. Згинальні статично невизначені балки характеризуються двозначною епюрою згинаючих моментів, значення цієї епюри залежать від жорсткісних характеристик перерізів балки по її довжині. Переважна більшість згинальних залізобетонних елементів працює з тріщинами у розтягнутій зоні, що суттєво впливає на значення жорсткості їх перерізів [A1]. Практично усі діючі на сьогодні норми проектування [] допускають обмежений перерозподіл зусиль у нерозрізних балках та рамах. У своїй більшості він полягає у зменшенні опорних згинаючих моментів та відповідному збільшенні прольотних. Проведені фундаментальні дослідження нерозрізних конструкцій цілою низкою вчених [], вказують на можливість зменшення опорних моментів до 30% за умови дотримання допустимої ширини розкриття тріщин. Тут варто відзначити, що не завжди є можливість отримати перерозподіл зусиль за умови дотримання умов нормативної тріщиностійкості. До того ж такий перерозподіл можливий лише за доволі низького проценту армування перерізу залізобетонних балок поздовжньою арматурою ( $\rho_f=1-1,5\%$ ) []. Більш консервативний варіант проектування нерозрізних балочних конструкцій зумовлює розрахунок армування перерізів балок у відповідності з отриманою епурою згинаючих моментів у пружній стадії без перерозподілу зусиль. Але існують ситуації коли проектувальних обмежень архітектурно-планувальними вимогами по висоті балок. У такому випадку необхідно вирівнювати згинаючі моменти на опорі та в прольоті. Одним з варіантів такого вирівнювання може бути зміна жорсткості нерозрізних балок.

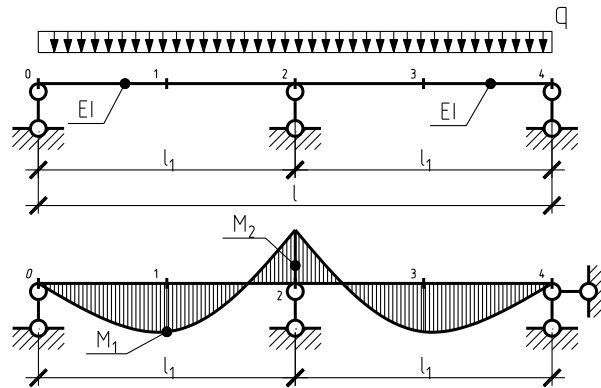
## 2 Ефективні статично-невизначені залізобетонні балки та основи їх проектування

Вирівнювання згинаючих моментів, які виникають у прольоті та на опорах нерозрізних балок значно підвищує ефективність використання матеріалів у конструкціях, зменшує трудомісткість опорних вузлів та дає можливість зменшення висоти балочних конструкцій.

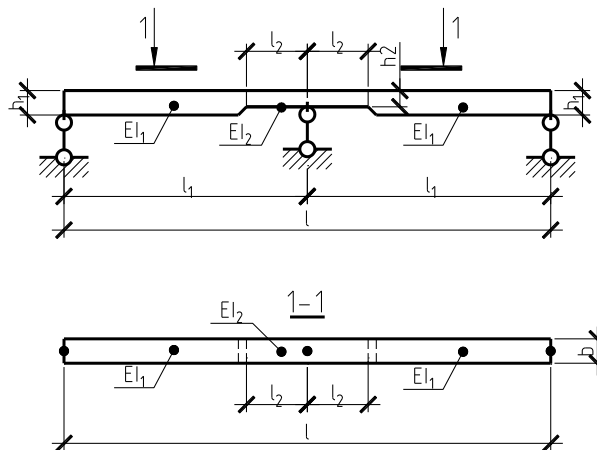
Як уже вказувалось раніше, зменшення моментів може відбуватись шляхом перерозподілу зусиль у наслідок утворення тріщин на опорі, та суттєвого зменшення жорсткості опорних перерізів. Даний спосіб дає змогу виконувати лише обмежене та незначне зменшення опорних моментів, а тому для отримання рівномоментних схем він не придатний. До того ж значний розвиток тріщин на опорі входить у протиріччя з психологічно-естетичними вимогами до конструкцій. Другий спосіб зменшення опорних моментів базується на зміні жорсткості нерозрізних балок. Збільшення розмірів балок у прольоті та зменшення їх на опорі призводить до суттєвого перерозподілу зусиль.

Розглянемо двохпролітну залізобетонну балку прольотом  $l$ , завантажену рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q$  (Fig. 1).

Для отримання ефективної рівномірної конструктивної схеми необхідно збільшити жорсткість балки у прольоті та зменшити на опорах. Для прямокутного поперечного перерізу балок це можна зробити декількома способами. Перший полягає у збільшенні ширини перерізу балок, а другий у збільшенні їх висоти (Fig. 2).



**Fig. 1.** Розрахункова схема та епюра згинальних моментів двохпролітної нерозрізної балки завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням



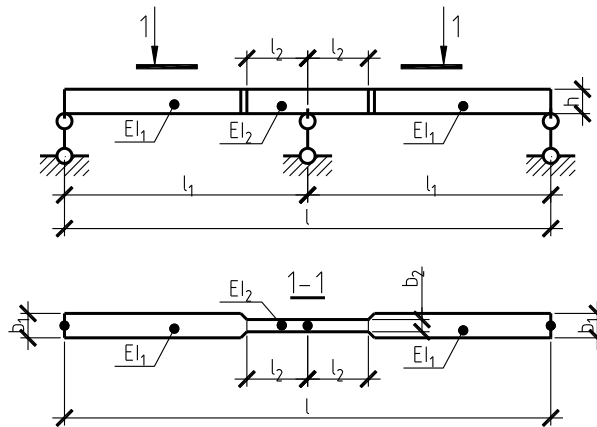
**Fig. 2.** Схема нерозрізної двохпролітної балочної конструкції із зміною висоти балки по довжині

Збільшення висоти балок доволі ускладнює монтаж, як арматурних каркасів так і опалубки. Тому, **на думку авторів**, більш прийнятним є збільшення саме ширини балок (Fig. 3). Розглянемо перерозподіл зусиль у нерозрізних балках прямокутного перерізу за пружної роботи матеріалів, на прикладі балки показаної на рис. 1.

Для такої балки пролітний та опорний моменти будуть дорівнювати:

$$M_1 = \frac{ql_1^2}{16}; \quad (1)$$

$$M_2 = \frac{ql_1^2}{8}. \quad (2)$$



**Fig. 3.** Схема нерозрізної двохпролітної балочної конструкції із зміною ширини балки по довжині

Збільшення жорсткості пролітної частини приблизно у два (1,5-2) рази призводить до вирівнювання опорних та пролітних моментів. При цьому опорна ділянка повинна складати приблизно  $l_2 \approx l_1/5$ . Для пружної стадії жорсткість прямокутного перерізу складає

$$EI = E \frac{bh^3}{12}. \quad (3)$$

Тоді для отримання рівномірної двох пролітної нерозрізної балки співвідношення ширини або висоти повинно бути в межах

$$\frac{EI_1}{EI_1} = \frac{b_1}{b_2} \approx 2; \quad (4)$$

$$\frac{EI_1}{EI_1} = \frac{h_1}{h_2} \approx \sqrt[3]{2} = 1,26. \quad (5)$$

Співвідношення (4), (5) дають можливість наближено оцінювати можливості проектування рівномірних балок у пружній стадії. Загально відомо, що залізобетон пружно пластичний матеріал, а тому робота конструкцій з нього може

суттєво відрізнятися від роботи пружних матеріалів. Для врахування нелінійних властивостей бетону та утворення тріщин у розтягнутій зоні скористуємося методом розрахункових опорів залізобетону.

Особливості використання методу розрахункових опорів [1] полягають у наступному:

1. В основу розрахунку закладаються експериментально та теоретично обґрунтовані передумови та гіпотези: приймається справедливою гіпотеза плоских перерізів – лінійності поздовжніх деформацій в перерізі елемента; приймаються нелінійні діаграми деформування матеріалів.
2. Встановлюються геометричні параметри, які зводять розрахункові системи рівнянь рівноваги до чіткого розмежування геометричних та фізико-механічних параметрів перерізу.
3. Шляхом проведення попередніх розрахунків табулюються основні розрахункові параметри.

У даному методі основним параметром який характеризує рівень навантаження виступають умовні напруження, які затабульовані по основним параметрам, тобто

$$\sigma_{zM} = M / W_c = f(\Sigma\varepsilon, \rho_f, C, f_y). \quad (6)$$

У виразі (6):  $M$  – згинаючий момент у відповідному перерізі, кН·м;  $\Sigma\varepsilon$  – сумарні деформації найбільш стиснутої зони бетону та розтягнутої арматури  $\varepsilon_c + \varepsilon_s$ ;  $C$  – клас бетону, клас бетону характеризується параметрами діаграми деформування при стиску та при розтязі тобто  $E_c$ ,  $\varepsilon_{cl}$ ,  $\varepsilon_{cu}$ ,  $f_c$ ,  $\varepsilon_{ct1}$ ,  $\varepsilon_{ctu}$ ,  $\rho_f$  – процент армування перерізу елемента поздовжньою арматурою  $\rho_f = A_s / (bd) \cdot 100\%$ ;  $W_c$  – момент опору робочого перерізу бетону  $W_c = bd^2/6$ ,  $f_y$  – межа текучості арматури.

Встановлення залежності (6) відбувається у такій послідовності:

1. Попередньо приймають діаграми деформування бетону та арматури. Як правило, перевагу віддають функціям, які відповідають загально прийнятим критеріям деформування. Найбільш загальною є функція деформування представлена у [1];

2. Приймають гіпотезу плоских перерізів, з корегуванням її після утворення тріщин у розтягнутій зоні бетону;

3. Записують систему рівнянь рівноваги для перерізів з тріщинами та без них, з якої за різних рівнів навантаження визначають умовні напруження  $\sigma_{zM}$  у відповідності з виразом (6). У даному випадку після утворення тріщин використовують параметри отримані для середнього перерізу. Вони визначаються, як середні значення параметрів отриманих для перерізу з тріщинами та без них.

Залежність (6) визначена за наведеною методикою, для окремих класів бетону проілюстрована у табл.1.

Подальший розрахунок відбувається ітераційним методом, шляхом уточнення на кожному кроці реальної жорсткості перерізів балки.

Остаточне проектування рівномоментних схем пропонується виконувати за такою схемою:

1. Встановлюють розрахункову схему нерозрізної балочної конструкції;
2. Виконують статичний розрахунок за пружної роботи матеріалів та встановлюють значення згинаючих моментів по довжині балки.
3. Встановлюють необхідне збільшення розмірів балки у прольоті за умови рівності опорних та прольотних моментів в балці також за пружної роботи матеріалів.

**Table 1.** Параметри напружено-деформованого стану перерізів згинальних елементів із

Клас бетону	Рівень навант.	Процент армування					
		1		2		3	
		$\sigma_{zM}$ , МПа	$\Sigma\varepsilon$ $\times 10^4$	$\sigma_{zM}$ , МПа	$\Sigma\varepsilon$ $\times 10^4$	$\sigma_{zM}$ , МПа	$\Sigma\varepsilon$ $\times 10^4$
C16/20	M <sub>w1</sub>	3.60	<b>2.99</b>	4.80	<b>3.26</b>	5.96	3.53
	M <sub>w2</sub>	3.60	<b>5.22</b>	4.80	<b>4.32</b>	5.96	4.20
	0.4	11.01	<b>16.77</b>	12.70	<b>12.09</b>	13.55	10.12
	0.6	16.51	<b>26.43</b>	19.04	<b>19.27</b>	20.33	16.25
	0.8	22.02	<b>37.90</b>	25.39	<b>28.07</b>	27.10	23.90
	1.0	27.52	<b>59.96</b>	31.74	<b>46.48</b>	33.88	40.67
C20/25	M <sub>w1</sub>	4.00	<b>3.02</b>	5.25	<b>3.27</b>	6.45	3.51
	M <sub>w2</sub>	4.00	<b>5.61</b>	5.25	<b>4.50</b>	6.45	4.30
	0.4	12.84	<b>18.80</b>	14.99	<b>13.55</b>	16.11	11.33
	0.6	19.26	<b>29.45</b>	22.48	<b>21.45</b>	24.16	18.05
	0.8	25.68	<b>41.87</b>	29.98	<b>30.95</b>	32.22	26.28
	1.0	32.10	<b>64.74</b>	37.47	<b>49.92</b>	40.27	43.51
C25/30	M <sub>w1</sub>	4.62	<b>3.18</b>	5.94	<b>3.41</b>	7.23	3.65
	M <sub>w2</sub>	4.62	<b>6.30</b>	5.94	<b>4.91</b>	7.23	4.60
	0.4	14.59	<b>20.70</b>	17.19	<b>14.91</b>	18.58	12.44
	0.6	21.89	<b>32.30</b>	25.79	<b>23.48</b>	27.87	19.73
	0.8	29.18	<b>45.67</b>	34.39	<b>33.67</b>	37.16	28.53
	1.0	36.48	<b>69.52</b>	42.98	<b>53.38</b>	46.46	46.37

4. Встановлюють необхідне армування для прольотних та опорних перерізів балки.

5. Уточнюють епюру згинаючих моментів методом ітерацій з використанням методу розрахункових опорів залізобетону. Для цього балку по довжині розбивають на певну кількість ділянок. У центрі кожної ділянки за відомого значення згинаючого моменту визначаємо умовні умовні напруження  $\sigma_{zM}$ , а далі сумарні деформації найбільш стиснутої зони бетону та розтягнутої арматури  $\Sigma\varepsilon$ . Кривизна перерізів відповідних ділянок може бути визначена за виразом

$$\frac{1}{r_{mi}} = \frac{\Sigma\varepsilon}{d}. \quad (7)$$

Уточнення жорсткості перерізів відбувається за виразом

$$D_i = \frac{M_i}{\frac{I}{r_{mi}}} \quad (8)$$

де  $D_i$  – згинальна жорсткість,  $M_i$  – згинальний момент у відповідному перерізі по довжині залізобетонного елемента,  $\frac{I}{r_{mi}}$  – середня кривизна на певній ділянці до відповідного перерізу.

Запропоновану методику проілюструємо на прикладі проектування двох пролітної нерозрізної балки.

### 3 Приклад проектування ефективно-статично-невизначеної залізобетонної балки

**Приклад.** Необхідно запроектувати двох пролітну нерозрізну балку прольотом  $l=12$  м (див. рис. 1), яка повинна сприймати рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q=90$  кН/м. До балки пред'являються об'ємно-планувальні вимоги по висоті. Висота балки повинна бути не більше 400 мм. Для балки використати клас бетону С20/25, та арматуру класу А500.

#### Розв'язок.

1. Виконуємо статичний розрахунок балки в умовах пружної роботи матеріалів із попередньо прийнятим перерізом  $b \times h = 400 \times 400$  мм. Відповідні згинаючі моменти дорівнюють

$$M_1 = ql_1^2/8 = 90 \times 6^2/8 = 405 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = ql_1^2/16 = 90 \times 6^2/16 = 202,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

2. При вирівнюванні опорних та пролітних моментів отримаємо

$$M_1 = M_2 = ql_1^2/12 = 90 \times 6^2/12 = 270 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

3. Попередньо прийемо переріз на опорі  $b_1 \times h_1 = 400 \times 400$  мм, у прольоті  $b_2 \times h_2 = 600 \times 400$  мм,  $d = 400 - 30 = 370$  мм;

4. Встановимо необхідне армування, скориставшись методом розрахункових опорів залізобетону []

Необхідний розрахунковий опір

$$f_{zM1} = 6 \text{ М}/(b_1 d^2) = 29,58 \text{ МПа}; \quad f_{zM2} = 6 \text{ М}/(b_2 d^2) = 19,72 \text{ МПа};$$

5. За табл.2 використовуючи інтерполяцію знаходимо

$$\rho_{f1} = 1,43\%; \quad \rho_{f2} = 0,86\%.$$

**Table 2.** Розрахунковий опір залізобетону на згин  $f_{zМ}$  при одиничному армуванні, МПа

Клас бетону	Процент армування $\rho_f$								
	0.05	0.50	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00
	А-500С								
С8/10	1.32	10.90	14.57	15.02	15.35	15.60	15.79	16.07	16.27
С12/15	1.33	11.66	19.40	20.15	20.70	21.13	21.48	21.99	22.35
С16/20	1.33	12.13	21.53	25.17	26.50	27.16	27.71	28.53	29.13
С20/25	1.33	12.41	22.65	26.95	30.69	32.67	33.42	34.57	35.43
С25/30	1.34	12.57	23.28	27.93	32.12	35.82	37.89	39.33	40.40
С30/35	1.34	12.69	23.74	28.66	33.18	37.28	40.93	43.80	45.10
С32/40	1.34	12.78	24.11	29.23	33.99	38.39	42.40	48.01	49.53

<b>C35/45</b>	1.34	12.86	24.44	29.76	34.75	39.42	43.78	51.43	54.52
<b>C40/50</b>	1.34	12.92	24.67	30.11	35.26	40.11	44.68	52.94	58.52
<b>C45/55</b>	1.34	12.96	24.86	30.40	35.68	40.69	45.43	54.10	61.40
<b>C50/60</b>	1.34	13.01	25.04	30.69	36.10	41.25	46.17	55.26	63.37

6. Визначаємо необхідне армування перерізів

$$A_{s1} = \rho_{fl} \cdot b_1 d / 100\% = 1,43 \times 400 \times 370 / 100 = 2116,4 \text{ mm}^2;$$

$$A_{s2} = \rho_{fl} \cdot b_1 d / 100\% = 0,86 \times 600 \times 370 / 100 = 1909,2 \text{ mm}^2.$$

Приймаємо симетричне армування  $4\varnothing 28$  A500  $A_{s1} = A_{s2} = 2463 \text{ mm}^2$ .

7. Скориставшись методом розрахункових опорів визначаємо остаточну епюру моментів (див. табл.3 та табл.4).

**Table 3.** Епюра моментів та армування по довжині балки

№ перерізу	Діаметр арматури d, мм	К-ть, шт	M, кН·м	b, мм	h, мм	Площа армування, mm <sup>2</sup>	Процент армування, ρ <sub>f</sub>
0	28	4	0.00	60	40	24.63	1.080
1	28	4	205.13	60	40	24.63	1.080
2	28	4	280.67	60	40	24.63	1.080
3	28	4	226.60	60	40	24.63	1.080
4	28	4	42.93	60	40	24.63	1.080
5	28	4	-270.33	40	40	24.63	1.620
6	28	4	42.93	60	40	24.63	1.080
7	28	4	226.60	60	40	24.63	1.080
8	28	4	280.67	60	40	24.63	1.080
9	28	4	205.13	60	40	24.63	1.080
10	28	4	0.00	60	40	24.63	1.080

**Table 4.** Уточнення епюри моментів нерозрізної балки

№ перерізу	Відстань від т.0, m	W <sub>c</sub> , см <sup>3</sup>	Повне навантаження			
			σ <sub>зс</sub> , МПа	Σε×10 <sup>4</sup>	1/r <sub>mi</sub> , ×10 <sup>4</sup> см <sup>-1</sup>	a <sub>i</sub> ×1/r <sub>mi</sub> , ×10 <sup>4</sup> см <sup>-1</sup>
0	0.00	14440	0.0	0.0	0.000	0.0000
1	1.20	14440	14.2	18.6	0.491	0.0245
2	2.40	14440	19.4	27.3	0.719	0.0719
3	3.60	14440	15.7	20.9	0.550	0.0825
4	4.80	14440	3.0	2.1	0.056	0.0113
5	6.00	9627	-28.1	-90.3	-2.377	-0.5944
6	7.20	14440	3.0	2.1	0.056	0.0113
7	8.40	14440	15.7	20.9	0.550	0.0825
8	9.60	14440	19.4	27.3	0.719	0.0719
9	10.80	14440	14.2	18.6	0.491	0.0245
10	12.00	14440	0.0	0.0	0.000	0.0000
f=Σa <sub>i</sub> ×1/r <sub>mi</sub> =						0.0000

8. Проведені розрахунки дозволили встановити дійсну епюру згинаючих моментів. Підтвердженням її правильності є отриманне значення прогину рівним нулю на середній опорі (див. табл.4).

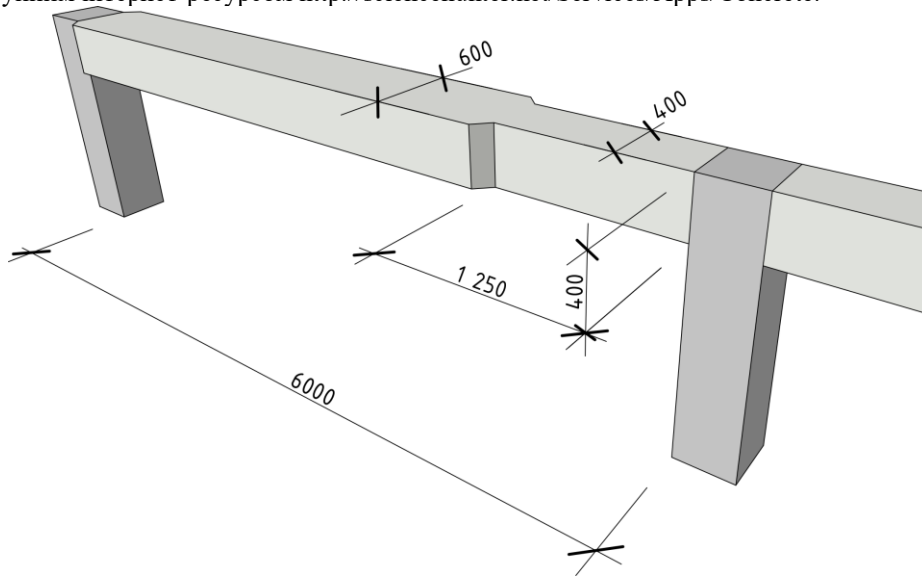
9. Остаточний вигляд балки приведено на рис.4.

## 4 Висновок

Розглянуті основи проектування рівномоментних балочних конструкцій. Запропоновано виконувати перерозподіл згинаючих моментів шляхом зміни жор-



сткості пролітних та опорних перерізів нерозрізних балочних конструкцій. Наведений приклад розрахунку підтверджує ефективність запропонованих конструкцій та можливість їх широкого використання у сучасній будівельній практиці. Для підтвердження всіх проведених розрахунків можна скористатися наступним інтернет-ресурсом <http://sciencehunter.net/Services/Apps/Concrete>.



**Fig. 4.** Нерозрізна рівномоментна залізобетонна балка

## References

1. Kochkarev, D., Azizov, T., & Galinska, T. (2018). Bending deflection reinforced concrete elements determination. Paper presented at the MATEC Web of Conferences, 230 doi:10.1051/mateconf/201823002012

A1. Taliat Azizov, Nadzieja Jurkowska, Dmytro Kochkarev **BASIS OF CALCULATION ON TORSION FOR REINFORCED CONCRETE STRUCTURES WITH NORMAL CRACKS** // Concrete Innovations In Materials, Design And Structures. Fib Symposium 2019. Cracow 27-29 May 2019. Book of Abstracts. S. 489-490

A2. Taliat Azizov, Wit Derkowski, Nadzieja Jurkowska. **Consideration of the Torsional Stiffness in Hollow-Core Slabs' Design**// Materials Science Forum Submitted: 2019-05-28 ISSN: 1662-9752, Vol. 968, pp 330-341 Accepted: 2019-05-29 doi:10.4028/www.scientific.net/MSF.968.330 Online: 2019-08-23 © 2019 Trans Tech Publications Ltd, Switzerland