Міністерство освіти і науки України

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ З АЛГЕБРИ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Укладач: Рудницький С.О.

Умань

2019

УДК 512+517]075.8

О–54

Рекомендовано до друку Вченою радою
Факультету фізики, математики та інформатики
Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини
(протокол № 3 від 1 листопада 2019 року)

Рецензенти: **ПОЛІЩУК Т.В.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

ЧОРНОІВАН Ю.О., кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник Інституту механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України

О–54 Олімпіадні задачі з алгебри та математичного аналізу : навч. посібник / укл. С.О. Рудницький. – Умань: ВПЦ "Візаві", 2019 – 147 с.

У навчальному посібнику подано матеріал з практичної підготовки до участі у студентських олімпіадах з математики різних рівнів. Посібник складається з двох розділів: *алгебра* та *математичний аналіз*. Усі теоретичні відомості ілюструються прикладами та типовими вправами для самостійного розв'язування.

Посібник розрахований на студентів фізико-математичних факультетів усіх форм навчання.

УДК 512+517]075.8

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Олімпіади є важливою складовою підготовки сучасного вчителя або викладача математики. Вони надають змотивованим студентам шанс для вивчення концепцій та застосування стратегій, перевірки власних знань та здібностей, відкриття застосувань у реальному світі. Їхньою загальною метою є побудова відповідного підґрунтя для випускників математичних спеціальностей.

Навчальний посібник “Олімпіадні задачі з алгебри та математичного аналізу” підготовлено відповідно сучасним вимогам до професійної підготовки майбутнього вчителя математики. Він призначений допомогти у вивченні найважливіших тем та технік розв’язування задач, переконати читача у єдності різних розділів математики.

Матеріали посібника систематизовано у два розділи. У *першому розділі* розглядаються найважливіші поняття алгебри у розрізі окремих тем, де розкрито мистецтво алгебраїчного мислення в контексті олімпіадних задач. *Другий розділ* присвячено переважно тим задачам математичного аналізу, які є найуживанішими при проведенні математичних олімпіад різних рівнів.

Лаконічність, послідовність та доступність матеріалу, викладеного у посібнику, дозволить активізувати пізнавальну діяльність при вивченні математики, вивільнити час для практичної підготовки.

Розділ 1. Алгебра

Тема 1: Задачі в цілих числах.

*В окремих випадках розв'язування рівняння в цілих числах можна звести до дуже простого і популярного методу – **перебору.***

Приклад 1.1.1. Знайти всі пари цілих чисел (x,y), що задовольняють рівняння $x^2 - xy - 2y^2 = 7$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $(x-2y)(x+y)=7$. Оскільки x, y – цілі числа, то можливі такі випадки:

а) $\begin{cases} x-2y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y=-7 \\ x+y=-1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+y=-7 \end{cases}$

Розв'язавши ці ситеми, маємо розв'язки $(3,-2)$, $(5,2)$, $(-3,2)$, $(-5,-2)$.

Приклад 1.1.2. Знайдіть всі цілі розв'язки рівняння $x^2+y^2+z^2=2(yz+1)$, враховуючи , що $x+y+z=4018$.

Розв'язання. Перенесемо праву частину рівняння вліво та виділимо повний квадрат:

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2=0$$

$$x^2+(y-z)^2-2=0$$

$$x^2+(y-z)^2=2$$

Оскільки $x, y, z \in \mathbb{Z}$, то можливі випадки:

$$(x;\, y-z) = (\pm 1; \mp 1) \text{ або } (x;\, y-z) = (\pm 1; \pm 1).$$

Завершити розв'язання пропонуємо читачеві самостійно.

Приклад 1.1.3. Скільки впорядкованих четвірок цілих чисел (a,b,c,d), де $0 < a < b < c < d < 500$ задовольняють умови: $a+d = b+c$ та $bc - ad = 93$.

Розв'язання. Домножимо рівність $a+d = b+c$ з обох сторін на d і врахуємо, що $ad = bc - 93$. Тоді, матимемо:

$$bc - 93 + d^2 = bd + cd$$

$$(b-d)(c-d) = 93$$

Оскільки $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}$ та $0 < a < b < c < d < 500$, то можливі лише два випадки:

$$b - d = -31;\ c - d = -3$$

або

$$b - d = -93;\ c - d = -1$$

Також, додавши рівності для кожного випадку, матимемо $b + c - 2d = a - d = -34$; або $a - d = -94$. В результаті отримаємо наступні системи рівностей:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} a - d = -34; \\ b - d = -31; \\ c - d = -3. \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} a - d = -94; \\ b - d = -93; \\ c - d = -1. \end{cases}$$

Розглянемо систему (i), звідси $d-34<d-31<d-3<d$. Тоді для будь-якого цілого числа $d\in[35;499]$, матимемо розв'язки. Випишемо їх:

$$1<4<32<35$$

$$2<5<33<36$$

$$3<6<34<37$$

$$\ldots$$

$$465<468<496<499$$

Систему (ii) пропонуємо дослідити самостійно.

Метод розгляду остач при діленні на деяке число*, як правило, можна використовувати для доведення того, що дане рівняння не має розв'язків у цілих числах. Часто під час розв'язування рівнянь у цілих числах використовуються* ***властивості подільності****.*

Приклад 1.1.4. Чи може квадратне рівняння ax^2+bx+c з цілими коефіцієнтами мати дискримінант, що дорівнює 23?

Розв'язання. Число b^2-4ac при діленні на 4 може давати остачу 0 або 1, а число 23 дає остачу 3. Отже, не може.

Приклад 1.1.5. Доведіть, що наступне рівняння не розв'язується в цілих числах:

$$x^3+3x^2+2x=z^3-4z+4$$

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x(x+1)(x+2)=z^3-4z+4$$

Отже, при будь-якому цілому x, виразу $3\mid x(x+1)(x+2)$, тому вираз у правій частині $z^3-4z+4=z(z-2)(z+2)+4$, теж повинен ділитися на 3 націло. Але,

$$z(z-2)(z+2)+4\equiv 1 \quad (mod\ 3)$$ *(доведіть чому!)*,

тобто має остачу 1 при діленні на 3.

Приклад 1.1.6. Числа a,b,c квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ є додатними членами арифметичної прогресії. Нехай це рівняння має два різні цілі корені α та β. Знайдіть значення величини $\alpha+\beta+\alpha\beta$?

Розв'язання. Позначимо $(a,b,c)=(a,a+d,a+2d)$, де d – різниця арифметичної прогресії. Тоді:

$$ax^2+(a+d)x+(a+2d)=0$$

За формулою дискримінанта, маємо:

$$\alpha,\beta=\frac{-(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4a(a+2d)}}{2a}$$

Оскільки $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, то підкореневий вираз $(a+d)^2-4a(a+2d)$ повинен бути точним квадратом. Окрім того, за теоремою Вієта: $\alpha+\beta+\alpha\beta=\frac{c-b}{a}=\frac{d}{a}$. Оскільки $\alpha+\beta+\alpha\beta\in\mathbb{Z}$, то d ділить a націло. Звідси, маємо:

$$(a+d)^2-4a(a+2d)=p^2$$

$$-3a^2+d^2-6ad=p^2 \,\Big|\, :a^2$$

$$-3+\left(\frac{d}{a}\right)^2-6\frac{d}{a}=\left(\frac{p}{a}\right)^2$$

Оскільки $\frac{d}{a} \in \mathbb{Z}$, то $\left(\frac{d}{a}\right)^2 \in \mathbb{N}$, то $\left(\frac{p}{a}\right)^2 = l^2 \in \mathbb{N}$. Нехай $\frac{d}{a} = t$ та $\frac{p}{a} = l$, тоді:

$$t^2 - 6t - 3 = l^2$$

$$(t-3)^2 - 12 = l^2,$$

покладемо $(t-3)^2 = m^2 \in \mathbb{N}$:

$$m^2 - l^2 = 12$$

$$(m+l)(m-l) = 12.$$

Отже, залишилося розглянути три можливих випадки:

1) $(m+l)(m-l) = 1 \cdot 12$;

2) $(m+l)(m-l) = 2 \cdot 6$;

3) $(m+l)(m-l) = 3 \cdot 4$.

Завершити розв'язання пропонуємо читачеві самостійно.

Розглянемо деякі інші задачі в цілих числах, ***методи розв'язання яких потребують застосування знань з різних розділів елементарної або вищої математики****.*

Приклад 1.1.7. Знайдіть всі цілі розв'язки рівняння: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}$.

Розв'язання. Виразимо змінну m:

$$\frac{n^2 + mn - 1}{mn^2} = \frac{3}{4}$$

$$4n^2 + 4mn - 4 = 3mn^2$$

$$m = \frac{4\left(n^2 - 1\right)}{3n^2 - 4n}$$

Оскільки $\dfrac{4\left(n^2-1\right)}{3n^2-4n}=1+\dfrac{n^2+4n-4}{3n^2-4n}$ та останній дріб менший за одиницю, коли $n\geq 4$, то єдиний можливий цілий розв'язок $m=3, n=2$.

Приклад 1.1.8. Доведіть, що рівняння $x^2+10y^2=3z^2$ не має розв'язків в додатних цілих числах.

Розв'язання. Число зліва може закінчуватися цифрами 0, 1, 4, 5, 6 або 9, а те, що справа закінчується на 0, 2, 3, 5, 7 або 8. Для виконання рівності, обидва x та z повинні бути кратні 5, покладемо тоді $x=5x_0$ та $z=5z_0$. Але тоді $25{x_0}^2+10y^2=3\cdot 25{z_0}^2 \Leftrightarrow 5{x_0}^2+2y^2=15{z_0}^2$. Звідси слідує, що y також ділиться на 5, $y=5y_0$. Тому $5{x_0}^2+50{y_0}^2=15{z_0}^2 \Leftrightarrow {x_0}^2+10{y_0}^2=3{z_0}^2$. Додатні цілі числа x_0, y_0, z_0 задовольняють таке ж саме рівняння, продовжуючи процедуру далі отримаємо ***нескінченний спуск*** *(пропонуємо читачеві самостійно ознайомитись з цим методом більш детально!).* Оскільки такий спуск для цілих додатних чисел – неможливий (бо він скінченний), то початкове рівняння не має розв'язків в додатних цілих числах.

Приклад 1.1.9. Розв'язати рівняння у цілих числах

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Розв'язання. Серед чисел x, y, z обов'язково є хоча б одне натуральне, бо інакше ліва частина рівняння має бути від'ємною. Нехай це число x. Розглянемо випадки:

а) $x=1$. Тоді $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $y=-z=k\in\mathbb{N}$.

Маємо трійку $(1,k,-k)$ та всі трійки, отримані з неї за допомогою перестановок.

б) $x=2$. Тоді $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{y}$; $\frac{1}{z}=\frac{y-2}{2y}$;

$z=\frac{2y}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}$. Оскільки z – ціле число, то маємо: $y-2=1$, трійка $(2,3,6)$;

$y-2=-1$, трійка $(2,1,-2)$; $y-2=2$, трійка $(2,4,4)$; $y-2=-2$, але $y\neq 0$; $y-2=4$, трійка $(2,6,3)$; $y-2=-4$, трійка $(2,-2,1)$.

в) $x\geq 3$. Тоді $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1-\frac{1}{x}\geq\frac{2}{3}$, тому серед чисел y і z є хоч одне натуральне, нехай це y.

Випадки, коли серед чисел x,y,z є 1 чи 2, вже розглянуто. Тому вважатимемо, що $y\geq 3$.

Тоді $\frac{1}{z}\geq\frac{2}{3}-\frac{1}{y}\geq\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, звідки $1\leq z\leq 3$.

Знову ж таки випадки $z=1$ чи $z=2$ вже розглянуто, тому $z=3$.

Отже, маємо $x\geq 3$, $y\geq 3$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$, звідки $x=y=z=3$.

Відповідь: трійки $(1,k,-k)$, $(2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$ та отримані з них перестановки.

Приклад 1.1.10. Нехай $p=144^{sin^2 x}+144^{cos^2 x}$. Знайдіть кількість різних цілочисельних значень p.

Розв'язання. Використаємо наступні тригонометричні тотожності: $2cos^2(x)=1+cos\,2x$ та $2\,sin^2(x)=1-cos\,2x$.

Підставивши їх, отримаємо: $p = 12^{1-\cos 2x} + 12^{1+\cos 2x} = \frac{12}{12^{\cos 2x}} + 12 \cdot 12^{\cos 2x}$.

Нехай $12^{\cos 2x} = t$. Тоді розглянемо отриманий вираз як функцію змінної t: $f(t) = \frac{12}{t} + 12t$, де $1 \le t \le 12$. Першу похідну функції прирівняємо до нуля та знайдемо точки екстремуму на відрізку $[1;12]$: $f'(t) = -\frac{12}{t^2} + 12 = 0 \Rightarrow t = 1$. Наша функція – неперервна на відрізку $[1;12]$ та строго зростає на ньому, тому мінімум: $f(1) = 24$, а максимум $f(12) = 145$. Отже, вираз $p = 144^{\sin^2 x} + 144^{\cos^2 x}$ приймає будь-яке цілочислове значення з відрізку $[24;145]$.

Приклад 1.1.11. Скільки пар цілих чисел (x, y) є розв'язками нерівності:

$$|x| + |y| \le 2018$$

Розв'язання. Підсказка. Геометрична інтерпретація множини розв'язків рівняння $|x| + |y| = 2018$ – квадрат з вершинами в точках $A = (-2018; 0)$, $B = (0; 2018)$, $C = (2018; 0)$, $D = (0; -2018)$. Тоді, множиною розв'язків даної нерівності в цілих числах – будуть точки з цілими координатами на межі та всередині цього квадрата.

Приклад 1.1.12. Знайдіть кількість цілих розв'язків рівняння:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 31, \text{якщо } x_i \ge i, \quad i = 1,2,3,4,5$$

Розв'язання. Такі задачі тісно пов'язані з комбінаторикою. Уявімо, що ми розподіляємо 31 ідентичних предмети між 5 різними особами. І-а особа отримує щонайменше 1 предмет, ІІ-а особа – щонайменше 2 предмети, ІІІ-а – щонайменше 3 і т.д. Спочатку, нехай І-а особа – отримує 0 предметів, ІІ-а – 1 предмет, ІІІ-а – 2 і т.д. Тоді залишиться для розподілу $31-10=21$ предмет. Потім розподілимо 21 предмет, що залишилися серед цих 5 осіб, щонайменше один кожній особі. Підрахунок цієї кількості можна здійснити за формулою комбінацій з повтореннями $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$, у нашому випадку $k=20-5=16, n=5$. Отже, $\tilde{C}_5^{16} = C_{20}^{16}$.

Приклад 1.1.13. Знайдіть всі $x \in \mathbb{R}$, для яких обидва значення $(tgx)^{\cos x}$ та $(ctgx)^{\sin x}$ є цілими числами

Розв'язання. Нехай $t = tgx \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (зауважимо, що з існування такого t слідує $\cos x \neq 0$). Позначимо $(tgx)^{\cos x} = t^{\cos x} = m$ та $(ctgx)^{\sin x} = \frac{1}{(tgx)^{\sin x}} = \frac{1}{(tgx)^{tgx \cos x}} = \frac{1}{t^{t \cos x}} = n$, де $m,n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Отже $\frac{1}{m^t} = n$. Розглянемо наступні випадки:

1) $m=1$. Тоді $n=1$ і $t^{\cos x}=1$, звідки слідує (оскільки $\cos x \neq 0$) $t=1$. Тому, розв'язками будуть $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$;

2) $m \neq 1$. Тоді $|m| > 1$ і з $\frac{1}{|m|^t} = |n|$ випливає $t<0$, тому значення виразу $t^{\cos x}$ – невизначено. Отже, в цьому випадку розв'язків немає.

Приклад 1.1.14. Знайдіть всі функції $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, які задовольняють умову

$$2f\left(f\left(x\right)\right)-3f\left(x\right)+x=0 \text{ для всіх } x\in\mathbb{Z}.$$

Розв'язання. Нехай $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$. Тоді початкова рівність набуде вигляду $g\left(x\right)=2g\left(f\left(x\right)\right)$. Ітеруючи цю рівність, отримуємо $g\left(x\right)=2^n f^{(n)}\left(x\right)$ для всіх $x\in\mathbb{Z}$, де $f^{(n)}\left(x\right)$ – композиція функції $\underbrace{f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\right)\right)}_{n \text{ разів}}$. Звідси слідує, що для всіх $x\in\mathbb{Z}$, $g\left(x\right)$ ділиться на всі натуральні степені двійки, тобто $g\left(x\right)=0$. Тому, єдиною функцією, яка задовольняє умову задачі є $f\left(x\right)=x$ для всіх $x\in\mathbb{Z}$.

Приклад 1.1.15. Знайдіть c, якщо a, b та c є додатними цілими числами, які задовольняють $c=\left(a+bi\right)^3-107i$.

Розв'язання. Піднісши до кубу праву частину рівняння, матимемо:

$$c+107i=\left(a^3-3ab^2\right)+\left(3a^2b-b^3\right)i$$

Два комплексні числа будуть рівними тоді і тільки тоді, коли їхні дійсні та уявні частини будуть рівними, тому $c=a^3-3ab^2$ та $107=3a^2b-b^3=b\left(3a^2-b^2\right)$. Оскільки a, b – цілі числа, то це означає, що просте число107 ділить b націло. Отже, або $b=1$, або $b=107$. Якщо $b=107$, $3a^2-107^2=1$, але 107^2+1 не ділить 3 – суперечність. Тому $b=1$, $3a^2=108$, $a=6$. Остаточно, $c=6^3-3\cdot 6=198$.

Часто, при розв'язуванні діофантових рівнянь можна використати ***спосіб "обмеження"****, що полягає у обмеженні значень змінної в перетвореному початковому виразі до форми зручної для аналізу. Найкраще проілюструюємо це на прикладах.*

Приклад 1.1.16. Знайдіть всі пари (x,y) цілих чисел, які задовольняють рівняння

$$(x+1)^4-(x-1)^4=y^3.$$

Розв'язання. Розкривши дужки у лівій частині рівності, матимемо

$$(x+1)^4-(x-1)^4=8x^3+8x.$$

Тепер відмітимо, що, якщо ми припустимо $x\geq 1$, то

$$8x^3=(2x)^3\leq 8x^3+8x\leq(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1.$$

Звідси робимо висновок, що $8x^3+8x$, знаходиться між двома послідовними точними (цілими) кубами, що неможливо за умовою. Отже, можна стверджувати, що x є невід'ємним. Тепер, помічаючи, що, якщо (x,y) є розв'язком, то і $(-x,-y)$ також ним буде. Звідси, єдиним розв'язком буде $(0,0)$.

Приклад 1.1.17. Знайдіть всі додатні цілі розв'язки рівняння

$$3(xy+yz+xz)=4xyz$$

Розв'язання. Розділивши обидві частини на $3xyz$, одержимо

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3}$$

Без втрати загальності, припустимо $z\leq y\leq x$. Звідси випливає

$$\frac{3}{z} \geq \frac{4}{3}.$$

Звідси випливає $z \leq 2$. Розбиваючи на два окремі випадки та застосовуючи подібні міркування, ми прийдемо до системи рівнянь. Розв'язуючи її, переконаємося в тому, що єдиними ров'язками будуть $(1,4,12)$, $(1,6,6)$, $(2,2,3)$ та все можливі перестановки, завдяки симетричності початкового ріняння.

Приклад 1.1.18. Знайдіть всі пари додатних цілих чисел (x, y) такі, що

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

Розв'язання. Ми маємо

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = xy + 61.$$

Помітимо, що $x > y$. Отже, необхідно, щоб

$$x^2 + xy + y^2 \leq xy + 61 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 61.$$

Оскільки $x > y$, маємо

$$61 \geq x^2 + y^2 \geq 2y^2 \Rightarrow y \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\begin{cases} y = 1, & x^3 - x - 62 = 0 \\ y = 2, & x^3 - 2x - 69 = 0 \\ y = 3, & x^3 - 3x - 88 = 0 \\ y = 4, & x^3 - 4x - 125 = 0 \\ y = 5, & x^3 - 5x - 186 = 0. \end{cases}$$

З цих рівнянь, бачимо, що єдиним можливим розв'язком буде $(x, y) = (6,5)$.

Вправи з теми: “Задачі в цілих числах”

Приклад 1.1.19. Цілі числа a,b,c,d задовольняють наступні співвідношення:

(i) $10 \le a,b,c,d \le 20$

(ii) $ab - cd = 58$

(iii) $ad - bc = 110$.

Знайдіть значення величини $a+b+c+d$?

Приклад 1.1.20. Розв’язати у цілих числах рівняння $x^2 - 7y = 10$.

Приклад 1.1.21. Кожне з трьох цілих чисел a,x та y – більше за 100. Вони задовольняють рівняння $y^2 - 1 = a^2\left(x^2 - 1\right)$. Визначте найменше можливе значення відношення $\frac{a}{x}$.

Підсказка. Вираз $a^2x^2 - a^2 + 1$ є повним квадратом, отже $a^2x^2 - a^2 + 1 = \left(ax \pm 1\right)^2$.

Приклад 1.1.22. (IMO 2006) Знайдіть усі пари $\left(x,y\right)$ цілих чисел такі, що $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.

Тема 2: Алгебраїчні тотожності.

Метою цієї теми буде тренування алгебраїчних навичок. Ми ознайомимося з деякими важливими нестандартними тотожностями та методами їх доведення. Розглянемо наступні три приклади.

Приклад 1.2.1. Розв'яжіть у дійсних числах систему рівнянь

$$\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14,\\(x+y)\left(x^2+14xy+y^2\right)=36.\end{cases}$$

Розв'язання. Виконавши підстановку $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$, ми одержимо еквівалентну форму нерівності

$$\begin{cases}uv\left(3u^4+10u^2v^2+3v^4\right)=14,\\u^6+15u^4v^2+15u^2v^4+v^6=36.\end{cases}$$

Тепер можна розпізнати доданки другого рівняння як члени розкладу бінома Ньютона $(u\pm v)^6$. Ґрунтуючись на цих спостереженнях, можна помітити, що можна цей розклад доповнити таким чином:

$$36+2\cdot 14=u^6+6u^5v+15u^4v^2+20u^3v^3+15u^2v^4+6uv^5+v^6$$

та

$36-2\cdot 14=u^6-6u^5v+15u^4v^2-20u^3v^3+15u^2v^4-6uv^5+v^6.$ Тобто, $(u+v)^6=64$ та $(u-v)^6=8$, звідки випливає $u+v=2$ та $u+v=\pm\sqrt{2}$. Тому, $u=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ та $v=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $u=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ та $v=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. Розв'язками системи будуть

$$(x,y)=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2},\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) \text{ та } (x,y)=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2},\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$$

Приклад 1.2.2. За двома відрізками довжини a та b, побудуйте відрізок довжиною $\sqrt[4]{a^4+b^4}$, користуючись циркулем та лінійкою.

Розв'язання. Розв'язання базується на наступній тотожності Софі Жермен:

$$a^4+b^4=\left(a^2+\sqrt{2}ab+b^2\right)\left(a^2-\sqrt{2}ab+b^2\right).$$

Запишемо

$$\sqrt[4]{a^4+b^4}=\sqrt{\sqrt{a^2+\sqrt{2}ab+b}\cdot\sqrt{a^2-\sqrt{2}ab+b^2}}\,.$$

Згідно формули косинусів для трикутника, ми можемо побудувати відрізки довжиною $\sqrt{a^2\pm\sqrt{2}ab+b^2}$ за трикутником зі сторонами a та b з кутами 135° між ними та 45° відповідно.

З іншого боку, маючи два відрізки довжини x та y, можна побудувати відрізок довжини $\sqrt{xy}$ (їх середнє геометричне) як висота AD у прямокутному трикутнику ABC ($\angle A=90^\circ$), де $BD=x$ та $CD=y$.

Ці два кроки побудови, виконані послідовно описують метод побудови $\sqrt[4]{a^4+b^4}$.

Приклад 1.2.3. Нехай x,y,z – різні дійсні числа. Доведіть, що

$$\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}\neq 0.$$

Розв'язання. Розв'язання базується на тотожності

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

Цю тотожність можна одержати обчислюючи визначник

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

двома шляхами: перший – за правилом Саррюса, а другий – додаючи всі стовпці до першого та розкривши за елементами першого стовпця. Зауважимо, що ця тотожність може бути записана у формі

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

Повертаючись до нашої задачі, припустимо протилежне, покладемо $\sqrt[3]{x-y}=a$, $\sqrt[3]{y-z}=b$, $\sqrt[3]{z-x}=c$. За припущенням, $a+b+c=0$, а отже $a^3+b^3+c^3=3abc$. Але це приводить до протиріччя

$$0=(x-y)+(y-z)+(z-x)=3\sqrt[3]{x-y}\sqrt[3]{y-z}\sqrt[3]{z-x}\neq 0,$$

оскільки числа є різними. Одержана суперечність доводить хибність нашого припущення, і тому сума не дорівнює нулю.

Вправи з теми: “Алгебраїчні тотожності”

Приклад 1.2.4. Покажіть, що не існує такого натурального n, щоб вирази $n+3$ та n^2+3n+3 одночасно були точними кубами.

Приклад 1.2.5. Нехай A та B – дві квадратні матриці однакової розмірності, які задовольняють умову комутативності $(AB=BA)$ та для деяких натуральних p та q, $A^p=E$ та $B^q=O$. Доведіть, що $A+B$ – оборотна матриця, та знайдіть цю оборотну матрицю.

Приклад 1.2.6. Доведіть, що для будь-якого натурального n, число

$$5^{5^{n+1}}+5^{5^n}+1$$

не є простим.

Приклад 1.2.7 Доведіть, що для всіх непарних $n \geq 5$,

$$\binom{n}{0}5^{n-1} - \binom{n}{1}5^{n-2} + \binom{n}{2}5^{n-3} - \ldots + \binom{n}{n-1}$$

не є простим числом.

Приклад 1.2.8. Розкладіть число $5^{1985} - 1$ на добуток трьох цілих чисел, кожне з яких більше за 5^{100}.

Приклад 1.2.9. Доведіть, що число

$$\frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$$

не є простим.

Приклад 1.2.10. Доведіть, що будь-яке ціле число можна подати у вигляді суми п’яти точних кубів.

Приклад 1.2.11. Розв’яжіть у дійсних числах рівняння

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = 0.$$

Приклад 1.2.12. Знайдіть усі трійки (x, y, z) додатних цілих чисел, таких що

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p,$$

де p – просте число, більше за 3.

Тема 3: Невід’ємність квадрата $x^2 \geq 0$

Тепер ми звернемося до нерівностей. Найпростіша нерівність в алгебрі показує, що квадрат будь-якого дійсного числа є невід’ємним, та рівність нулю досягається лише тоді, коли власне *саме число є нулем. Ми покажемо, як ця проста нерівність може бути застосована на прикладах.*

Приклад 1.3.1. Знайдіть мінімальне значення функції $f:(0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x^z + y^z - (xy)^{z/4}.$$

Розв'язання. Перепишемо функцію, орієнтуючись на виділення повних квадратів

$$f(x,y,z) = \left(x^{z/2} - y^{z/2}\right)^2 + 2\left[(xy)^{z/4} - \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{1}{8}.$$

Тепер помітно, що мінімумом функції є $-\frac{1}{8}$, що досягається в точках з координатами $(x,y,z) = \left(a, a, log_a \frac{1}{16}\right)$, де $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$.

Приклад 1.3.2. Нехай $(a_n)_{n\geq 0}$ послідовність дійсних чисел така, що

$$a_{n+1} \geq a_n^2 + \frac{1}{5}.\text{ для всіх } n \geq 0.$$

Доведіть, що $\sqrt{a_{n+5}} \geq a_{n-5}^2$ для всіх $n \geq 5$.

Розв'язання. Достатньо довести, що $a_{n+5} \geq a_n^2$ для всіх $n \geq 0$ *(подумайте чому?!)*. З цією метою запишемо початкову нерівність для декількох послідовних індексів:

$$a_{n+1} \geq a_n^2 + \frac{1}{5},$$

$$a_{n+2} \geq a_{n+1}^2 + \frac{1}{5},$$

$$a_{n+3} \geq a_{n+2}^2 + \frac{1}{5},$$

$$a_{n+4} \geq a_{n+3}^2 + \frac{1}{5},$$

$$a_{n+5} \geq a_{n+4}^2 + \frac{1}{5}.$$

Якщо ми додамо ці нерівності, то одержимо

$$a_{n+5} - a_n^2 \geq \left(a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + a_{n+3}^2 + a_{n+4}^2\right) - \left(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}\right) + 5 \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a_{n+2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a_{n+3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a_{n+4} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Звідси випливає справедливість $a_{n+5} \geq a_n^2$.

Приклад 1.3.3. Нехай a,b,c – сторони трикутника. Доведіть, що

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Розв'язання. Розглянемо очевидну нерівність

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0,$$

яка має місце для будь-яких невід'ємних дійсних чисел a,b. Далі виконаємо наступні перетворення:

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$2(a+b) \geq 2\sqrt{ab} + a + b$$

$$2(a+b) \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)} \qquad (1.3.3.1)$$

Кінцева нерівність (1.3.3.1) буде ключовою для доведення початкової. Зробимо заміну $a\to a+b-c$; $b\to b+c-a$, тоді (1.3.3.1) набуде вигляду:

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le 2\sqrt{b} \qquad (1.3.3.2)$$

Аналогічно, виконавши подібні заміни, одержимо ще:

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{a} \qquad (1.3.3.3)$$

$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{c} \qquad (1.3.3.4)$$

Додавши нерівності (1.3.3.2) – (1.3.3.4), матимемо:

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \qquad \square$$

Вправи з теми: “Невід’ємність квадрата $x^2\ge 0$”

Приклад 1.3.4. Знайдіть

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} max\left(a^2+b,b^2+a\right).$$

Приклад 1.3.5. Доведіть, що для всіх дійсних x,

$$2^x+3^x-4^x+6^x-9^x\le 1.$$

Приклад 1.3.6. Знайдіть всі натуральні числа n, для яких рівняння

$$nx^4+4x+3=0$$

має дійсний корінь.

Приклад 1.3.7. Знайдіть всі трійки (x,y,z) дійсних чисел, які є розв’язками системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{4x^2+1} = y, \\ \dfrac{4y^2}{4y^2+1} = z, \\ \dfrac{4z^2}{4z^2+1} = x. \end{cases}$$

Приклад 1.3.8. Нехай a та b дійсні числа такі, що

$$9a^2 + 8ab + 7b^2 \le 6.$$

Доведіть, що $7a + 5b + 12ab \le 9$.

Приклад 1.3.9. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дійсні числа такі, що $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge n^2$ та $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \le n^3 + 1$. Доведіть, що $n - 1 \le a_k \le n + 1$ для усіх $1 \le k \le n$.

Приклад 1.3.10. Знайдіть всі пари (x, y) дійсних чисел, які є розв'язками системи:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3 - y = -\dfrac{1}{4} + \sqrt{3}, \\ y^4 + 2y^3 - x = -\dfrac{1}{4} - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Тема 4: Нерівність Коші-Шварца

Пряме застосування теми попереднього параграфу є доведення нерівності Коші-Шварца. Це можна зробити різними способами, ми використаємо тотожність Лагранжа:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \sum_{i<k} \left(a_i b_k - a_k b_i \right)^2 .$$

З невід'ємності квадрата правої частини рівності випливає нерівність Коші-Шварца:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2,$$

де рівність має місце тоді і лише тоді, коли $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *– пропорційні. Треба зауважити, що нерівність Коші-Шварца має місце і у нескінченновимірному випадку. Так, зокрема і для інтегралів, яку ми розглянемо пізніше. В цьому параграфі нашою метою буде застосування її для скінченних послідовностей.*

Приклад 1.4.1. Знайдіть максимальне значення функції $f(x,y,z) = 5x - 6y + 7z$ на еліпсоїді $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$.

Розв'язання. Для точки (x,y,z) на еліпсоїді,

$$\left(f(x,y,z)\right)^2 = (5x - 6y + 7z)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}x - \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}y + \frac{7}{2} \cdot 2z \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{6}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{7}{2} \right)^2 \right) \left(\left(\sqrt{2}x\right)^2 + \left(\sqrt{3}y\right)^2 + (2z)^2 \right) =$$

$$= \frac{147}{4}\left(2x^2 + 3y^2 + 4z^2\right) = \frac{147}{4}.$$

Отже, максимум функції f є $\sqrt{147}/2$, який досягається в точці (x,y,z) еліпсоїда, де $x,z > 0$, $y < 0$ та $x:y:z = \frac{5}{\sqrt{2}} : -\frac{6}{\sqrt{3}} : \frac{7}{2}$.

Приклад 1.4.2. Доведіть, що

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{b+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}$$

для усіх $a,b,c,d>0$.

Розв'язання. Для компактності позначимо вираз лівої частини нерівності через E. Тоді

$$\left(a\left(b+2c+3d\right)+b\left(c+2d+3a\right)+c\left(d+2a+3b\right)+d\left(a+2b+3c\right)\right)\times E\geq$$
$$\geq\left(a+b+c+d\right)^2$$

за нерівністю Коші-Шварца *(перевірте!)*. Остаточно

$$3\left(a+b+c+d\right)^2\geq 8\left(ab+ac+ad+bc+bd+cd\right),$$

тому що воно зводиться до

$$\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(a-d\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(b-d\right)^2+\left(c-d\right)^2\geq 0.$$

Поєднуючи ці дві нерівності та скоротивши на множник $\left(ab+ac+ad+bc+bd+cd\right)$, ми отримаємо початкову нерівність.

Приклад 1.4.3. (IMC, 2016). Нехай $n\in\mathbb{N}$. Також нехай $a_1,a_2,\ldots,a_n$ та $b_1,b_2,\ldots,b_n$ – дійсні числа, такі що $a_i+b_i>0$ для $i=1,2,\ldots,n$. Доведіть, що

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i-b_i^2}{a_i+b_i}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i-\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)}.$$

Розв'язання. Використаємо тотожність

$$\frac{XY-Y^2}{X+Y}=Y-\frac{2Y^2}{X+Y},$$

де $X=a_i$ та $Y=b_i$. Тоді ліва частина нерівності:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i-b_i^2}{a_i+b_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\frac{2b_i^2}{a_i+b_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}b_i-2\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i+b_i}$$

Ту ж саму тотожність застосуємо до правої частини початкової нерівності, поклавши $X = \sum_{i=1}^{n} a_i$ та $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i$, тоді:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i - 2\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}.$$

Отже, початкова нерівність еквівалентна до

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)},$$

яка є справедливою як варіант нерівності Коші-Шварца,

$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{Y_i} \geq \frac{\left(X_1 + \ldots + X_n\right)^2}{Y_1 + \ldots + Y_n} \quad \left(Y_1, \ldots, Y_n > 0\right)$, з $X_i = b_i$ та $Y_i = a_i + b_i$.

Вправи з теми: “Нерівність Коші-Шварца”

Приклад 1.4.4. Якщо a, b, c – додатні числа, доведіть, що

$$9a^2b^2c^2 \leq \left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right).$$

Приклад 1.4.5. Якщо $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$, доведіть, що $a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 \geq n$.

Приклад 1.4.6. Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_n$ додатні дійсні числа. Доведіть, що для будь-якого набору дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вираз

$$f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \ldots + f_nx_n^2 - \frac{\left(f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n\right)^2}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

є невід'ємним.

Приклад 1.4.7. Знайдіть всі натуральні $n, k_1, \ldots, k_n$, такі що $k_1 + \ldots + k_n = 5n - 4$ та

$$\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

Приклад 1.4.8. Доведіть, що скінченна послідовність $a_0, a_1, \ldots, a_n$ додатних дійсних чисел є геометричною прогресією тоді і тільки тоді, коли

$$\left(a_0a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n\right)^2 = \left(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

Приклад 1.4.9. Нехай $P(x)$ – поліном з дійсними додатними коефіцієнтами. Доведіть, що

$$\sqrt{P(a)P(b)} \ge P\left(\sqrt{ab}\right),$$

для всіх додатних дійсних чисел a та b.

Приклад 1.4.10. Розглянемо дійсні числа $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Доведіть, що

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \ge x_n + 2n.$$

Коли має місце рівність?

Приклад 1.4.11. Доведіть, що

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{2\sqrt[3]{abc}} \ge \frac{\left(a+b+c+\sqrt[3]{abc}\right)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

для усіх $a,b,c>0$.

Тема 5: Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним.

Нерівність Єнсена стверджує, що, якщо f – дійснозначна увігнута функція, тоді:

$$f\left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n\right)\geq \lambda_1 f\left(x_1\right)+\lambda_2 f\left(x_2\right)+\ldots+\lambda_n f\left(x_n\right),$$

для будь-яких $x_1,x_2,\ldots,x_n$ в області визначення f та для будь-яких ваг $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, де $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1$. Крім того, якщо функція ніде не є лінійною (тобто є строго увігнутою) та числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ є ненульовими, тоді рівність буде мати місце лише у випадку $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Застосувавши це до увігнутої функції $f\left(x\right)=\ln x$, додатних чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ та ваг $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$, матимемо

$$\ln\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\frac{\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n}{n}$$

Експоненціювання цієї нерівності приведе до важливої нерівності.

Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним. *Нехай $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – невід'ємні дійсні числа. Тоді*

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\,,$$

де рівність можлива тоді і тільки тоді, коли всі числа рівні.

Приклад 1.5.1. Знайдіть глобальний мінімум функції $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f\left(x,y\right)=3^{x+y}\left(3^{x-1}+3^{y-1}-1\right).$$

Розв'язання. Вираз

$$3f\left(x,y\right)+1=3^{2x+y}+3^{x+2y}+1-3\cdot 3^{x+y}$$

є вигляду $a^3+b^3+c^3-3abc$, де $a=\sqrt[3]{3^{2x+y}}$, $b=\sqrt[3]{3^{x+2y}}$, $c=1$, всі з яких є додатними. За нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним, цей вираз є невід'ємним. Він дорівнює нулю лише у випадку $a=b=c$, тобто коли $2x+y=x+2y=0$. Звідси робимо висновок, що мінімум f це $f\left(0,0\right)=-\dfrac{1}{3}$. ....□

Вправи з теми: " Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним"

Приклад 1.5.2. Покажіть, що всі дійсні корені полінома $P\left(x\right)=x^5-10x+35$ є від'ємними.

Приклад 1.5.3. Доведіть, що для будь-якого додатного цілого n,

$$n^n-1\geq n^{\frac{n+1}{2}}\left(n-1\right).$$

Приклад 1.5.4. Нехай a, b, c – довжини сторін трикутника з півпериметром $p=1$. Доведіть, що

$$1<ab+bc+ca-abc\leq\frac{28}{27}.$$

Приклад 1.5.5. Порівняйте числа

$$\prod_{n=1}^{25}\left(1-\frac{n}{365}\right) \quad \text{та} \quad \frac{1}{2}.$$

Приклад 1.5.6. На сфері одиничного радіуса задано чотири точки A, B, C, D такі, що

$$AB\cdot AC\cdot AD\cdot BC\cdot BD\cdot CD=\frac{2^9}{3^3}.$$

Доведіть, що тетраедр $ABCD$ є регулярним.

Приклад 1.5.7. Доведіть, що

$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geq 0,$$

для всіх дійсних чисел x, y, z.

Приклад 1.5.8. Задано додатні дійсні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з умовою $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1$. Доведіть, що

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\ldots+\frac{1}{n-1+x_n}\leq 1.$$

Тема 6: Поліноми

Задачі цієї теми опираються на ключові знання з вищої алгебри стосовно многочленів та їх властивостей. Нашою метою буде огляд основних методів та прийомів розв'язування задач на математичних олімпіадах. Розпочнемо з наступного прикладу.

Приклад 1.6.1. Нехай $p(x)$ поліном з цілими коефіцієнтами. Припустимо, що $p(a)=p(b)=p(c)=-1$, де a, b, c – три різні цілі числа. Доведіть, що не існує такого цілого числа d, що $p(d)=0$.

Розв'язання. За умовою $p(x)+1$ має три різних нулі при a, b, c, тому $p(x)+1=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)$. Якщо вимагається існування такого цілого d, щоб $p(d)=0$, то

$$p(d)+1=(d-a)(d-b)(d-c)q(d)$$

$$(d-a)(d-b)(d-c)q(d)=1.$$

Остання рівність є хибною, оскільки 1 розкладається у добуток двох цілих чисел лише двома способами $1\cdot 1$ або $-1\cdot(-1)$, що неможливо. □

Приклад 1.6.2. (USAMO 1975) Нехай $P(x)$ – поліном степеня n такий, що $P(k)=k/k+1$ для $k=0,1,2,\ldots,n$. Визначте $P(n+1)$.

Розв'язання. Розглянемо наступний поліном:

$$Q(x)=(x+1)P(x)-x$$

Матимемо $Q(k)=0$ для $k=0,1,2,\ldots,n$, тому

$$Q(x)=Cx(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n),$$

де C – невідома константа. Поклавши $x=-1$, матимемо

$$Q(-1)=C(-1)(-2)(-3)\cdot\ldots\cdot(-(n+1)).$$

З іншого боку $Q(-1)=0\cdot P(-1)-(-1)=1$, отже $C=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Потім, поклавши $x=n+1$, матимемо

$$(n+2)P(n+1)-(n+1)=C(n+1)!=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot(n+1)!=(-1)^{n+1}, \text{ тому}$$

$$\boxed{P(n+1)=\frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}}$$

Приклад 1.6.3. (USAMO 1984) Добуток деяких двох з чотирьох коренів рівняння

$$x^4-18x^3+kx^2+200x-1984=0$$

дорівнює -32. Знайдіть k.

Розв'язання. За узагальненою теоремою Вієта, матимемо:

$$a+b+c+d=18$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=k$$

$$abc+abd+acd+bcd=-200$$

$$abcd=-1984.$$

За умовою нехай $ab=-32$ та зробимо заміни $u=a+b$, $v=c+d$, $w=cd$. Тоді

$$u+v=18$$

$$-32+uv+w=k$$

$$-32v+uw=-200$$

$$-32w=-1984.$$

З останньої рівності, $w=62$, та підставляючи це значення у попередні рівності, легко одержуємо $u=4$, $v=14$. Отже,

$$k=-32+4\cdot 14+62=86.$$

□

Приклад 1.6.4. Нехай n – парне додатне ціле число та нехай $p(x)$ поліном n-го степеня, такий, що $p(k)=p(-k)$ для $k=1,2,\ldots,n$. Доведіть, що існує такий поліном $q(x)$, що $p(x)=q(x^2)$.

Розв'язання. Нехай $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. Тоді $p(x)-p(-x)=2\left(a_1x+a_3x^3+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}\right)$ дорівнює нулю при всіх $x=k$, де $k=1,2,\ldots,n$ за умовою задачі, отже він тотожно рівний нулю, оскільки ***кількість нулів полінома*** $p(x)-p(-x)$ ***перевищує найбільшу степінь*** x *(обдумайте цей факт!)*, тобто $a_1=a_3=\ldots=a_{n-1}=0$. Отже, $p(x)=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\ldots+a_nx^n$, тоді оберемо $q(x)=a_0+a_2x+a_4x^2+\ldots+a_nx^{n/2}$. □

Приклад 1.6.5. Знайдіть остачу від ділення $x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x$ на x^3-x.

Розв'язання. Позначимо частку $q(x)$ та остачу через $r(x)=ax^2+bx+c$ *(подумайте чому остача записується у вигляді такого полінома!)*. Тоді

$$x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x=q(x)\left(x^3-x\right)+r(x).$$

Покладаючи значення $x=-1,0,1$, матимемо $r(-1)=-5$, $r(0)=0$, $r(1)=5$. Звідси $a=c=0$, $b=5$, отже остача $r(x)=5x$. □

Приклад 1.6.6. Чи існує поліном $f(x)$ для якого $xf(x-1)=(x+1)f(x)$?

Розв'язання. Для додатних цілих n матимемо $f(n)=\frac{n}{n+1}f(n-1)=\frac{n-1}{n+1}f(n-2)=\ldots=0\cdot f(-1)=0$. Отже, $f(x)$ має нескінченну кількість нулів, і тому тотожно рівна нулю $f(x)\equiv 0$.

Приклад 1.6.7. Доведіть, що $\left(1+x+\ldots+x^n\right)^2-x^n$ можна подати у вигляді добутку двох поліномів.

Розв'язання. Позначимо $A_{n-1}=1+x+\ldots+x^{n-1}$. Матимемо

$$
\begin{aligned}
&\left(1+x+\ldots+x^n\right)^2-x^n=\left(A_{n-1}+x^n\right)^2-x^n=\\
&=A_{n-1}^2+2A_{n-1}x^n+x^{2n}-x^n=\\
&=A_{n-1}^2+2A_{n-1}x^n+\left(x^n-1\right)x^n=\\
&=A_{n-1}^2+2A_{n-1}x^n+A_{n-1}\left(x-1\right)x^n=\\
&=A_{n-1}\left(A_{n-1}+2x^n+\left(x-1\right)x^n\right)=\\
&=A_{n-1}\left(A_{n-1}+x^n+x^{n+1}\right)=\\
&=\left(1+x+\ldots+x^{n-1}\right)\left(1+x+\ldots+x^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Приклад 1.6.8. Нехай $f\left(x\right)$ поліном з дійсними коефіцієнтами та нехай $f\left(x\right)+f'\left(x\right)>0$ для всіх x. Доведіть, що $f\left(x\right)>0$ для всіх x.

Розв'язання. Оскільки $f\left(x\right)$ та $f\left(x\right)+f'\left(x\right)$ мають однаковий старший коефіцієнт, границя $f\left(x\right)$, коли $x\to\pm\infty$ є однаковою з $f\left(x\right)+f'\left(x\right)$, тобто $+\infty$.

Відмітимо, що f не може мати кратних дійсних коренів, тому що для них обидва поліноми $f\left(x\right)$ та $f'\left(x\right)$ обнуляються, суперечачи початковій гіпотезі. Отже, всі дійсні корені, якщо такі є, повинні мати кратність одиницю, тобто бути простими коренями.

Оскільки $f\left(x\right)\to+\infty$ при $x\to\pm\infty$, він повинен мати парну кількість дійсних коренів (якщо такі є): $x_1<x_2<\ldots<x_{2n}$.

Відмітимо, що між x_1 та x_2, $f(x)$ повинен бути від’ємний та за теоремою Ролля його похідна повинна дорівнювати нулю в деякій проміжній точці $a \in (x_1, x_2)$, отже $f(a) + f'(a) = f(a) < 0$, що суперечить початковій гіпотезі. Отже, $f(x)$ не має дійсних коренів, та не змінює знак в будь-якій точці, звідки випливає, що $f(x) > 0$ для всіх x. □

Приклад 1.6.9. Розглянемо всі прямі, що перетинають графік функції $y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ у чотирьох різних точках $P_i = [x_i, y_i]$, $i = 1,2,3,4$. Доведіть, що

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

є величиною незалежною від прямої, та знайдіть її значення.

Розв’язання. За загальним рівнянням прямої $y = mx + b$, точки перетину заданої кривої можна знайти з наступної системи:

$$\begin{cases} y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5 \\ y = mx + b. \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, одержуємо $2x^4 + 7x^3 + (3 - m)x - 5 - b = 0$. Якщо пряма перетинає криву у чотирьох різних точках, поліном повинен мати чотири різні корені x_1, x_2, x_3, x_4, та їх сума, за узагальнено теоремою Вієта, дорівнюватиме коефіцієнту біля x_3, взятому з протилежним знаком, поділеному на коефіцієнт біля x_4, тобто становитиме $-7/2$. Тому

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = -\frac{7}{8}.$$

Приклад 1.6.10. Доведіть, що $\left(2+\sqrt{5}\right)^{1/3} - \left(-2+\sqrt{5}\right)^{1/3}$ є раціональним числом.

Розв'язання. Нехай $\alpha = \left(2+\sqrt{5}\right)^{1/3} - \left(-2+\sqrt{5}\right)^{1/3}$. Піднісши до третьої степені та врахувавши, що $\sqrt{5}-2 = \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$, одержимо поліном $\alpha^3 + 3\alpha - 4$. Дійсним коренем рівняння $\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$ буде $\alpha = 1$.

Приклад 1.6.11. Нехай $f\left(x\right)$ та $g\left(x\right)$ – ненульові поліноми з дійсними коефіцієнтами такі, що $f\left(x^2 + x + 1\right) = f\left(x\right)g\left(x\right)$. Покажіть, що $f\left(x\right)$ буде поліномом парної степені.

Розв'язання. Спочатку ми доведемо (методом від супротивного), що $f\left(x\right)$ не має дійсних коренів. По суті, якщо x_1 є дійсним коренем $f\left(x\right)$, то $x_2 = x_1^2 + x_1 + 1$ також є коренем $f\left(x\right)$, тому що $f\left(x_1^2 + x_1 + 1\right) = f\left(x_1\right)g\left(x_1\right) = 0$. Але $x_1^2 + 1 > 0$, отже $x_2 = x_1^2 + x_1 + 1 > x_1$. Повторюючи процедуру, $x_3 = x_2^2 + x_2 + 1$ є іншим коренем $f\left(x\right)$ більшим за x_2, і т.д., тобто одержуємо нескінченно зростаючу послідовність коренів $f\left(x\right)$, що є неможливим. В результаті $f\left(x\right)$ буде поліномом парної степені, тому що *всі поліноми непарної степені з дійсними коефіцієнтами мають хоча б один дійсний корінь!*

Примітка: Наведемо приклад полінома, що задовольняє умову задачі: $f(x) = x^2 + 1$, тоді $f(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)$.

Зауваження: відповідь в загальному не є вірною для поліномів з комплексними коефіцієнтами – контрприклад: $f(x) = x + i$, тоді $f(x^2 + x + 1) = (x + i)(x + 1 + i)$.

Вправи з теми: " Поліноми"

Приклад 1.6.12. Многочлен P задовольняє тотожну рівність

$$x^{2017} + x^{2016} + x^{2015} + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot P(x).$$

Знайти $P(-1)$.

Приклад 1.6.13. Знайдіть поліном з цілими коефіцієнтами, серед нулів якого є $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Приклад 1.6.14. Нехай a, b, c – різні цілі числа. Чи можна поліном $(x-a)(x-b)(x-c)-1$ розкласти на добуток двох поліномів з цілими коефіцієнтами?

Приклад 1.6.15. Знайдіть всі прості числа p, які можуть бути записані у вигляді $p = x^4 + 4y^4$, де x, y – додатні цілі числа.

Приклад 1.6.16. (Canada, 1970) Нехай $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ – поліном з цілими коефіцієнтами. Припустимо, що існує чотири різних цілих чисел a, b, c, d, що задовольняють умову $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Доведіть, що не існує такого цілого k, що задовольняє $P(k) = 8$.

Приклад 1.6.17. Знайдіть максимальне значення функції $f(x)=x^3-3x$ на множині всіх дійсних чисел x, що задовольняють нерівність $x^4+36\le 13x^2$.

Приклад 1.6.18. Припустимо, що α,β,γ – дійсні числа такі, що

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2,\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=14,\\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=17.\end{cases}$$

Знайдіть $\alpha\beta\gamma$.

Приклад 1.6.19. Якщо $a,b,c>0$, чи можливо, що кожен поліном $P(x)=ax^2+bx+c$, $Q(x)=cx^2+ax+b$, $R(x)=bx^2+cx+a$ має два дійсні корені?

Приклад 1.6.20. Доведіть, що не існує полінома $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ з цілими коефіцієнтами та степені принаймні 1 з властивістю, що всі $P(0),P(1),P(2),\ldots$, будуть простими числами.

Тема 7: Вкладені функції

Вкладені функції *– це вирази, такі як вкладені радикали або ланцюгові дроби, що містять нескінченну кількість рекурсивних виразів, наприклад*

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\ldots}}}}\ \text{або}\ 1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\ddots}}}.$$

Достатньо загальне та природне означення вкладених функцій містить також більш відомі вирази серед нескінченних рядів та нескінченних добутків. Обчислення значень вкладених функцій (коли вони збігаються) приводить до багатьох несподіваних та важливих тотожностей.

Вкладені радикали *містять рекурсивні вирази з повторюваними квадратними коренями. Найчастіше стратегія їх обчислення полягає у виявленні копії виразу, прихованої у ньому самому.*

Приклад 1.7.1. Знайдіть значення

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}},$$

припускаючи його збіжність.

Розв'язання. Позначимо вираз через x; тоді $x=\sqrt{n+x}$. Матимемо $x^2-x-n=0$. Розв'язуючи квадратне рівняння $x=\frac{1\pm\sqrt{4n+1}}{2}$, та за рахунок невід'ємності x обираємо лише відповідь зі знаком "+". Отже, $x=\frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$. □

До обчислення деяких вкладених функцій необхідно застосувати більш складні перетворення.

Приклад 1.7.2. Нехай a та b – додатні дійсні числа. Покажіть, що

$$a+b=\sqrt{b^2+a\sqrt{b^2+(a+b)\sqrt{b^2+(a+2b)\sqrt{\ldots}}}},$$

якщо він збігається. *Ця тотожність належить Рамануджану*.

Розв'язання. Оскільки $\left(b+x\right)^2 = b^2 + 2bx + x^2 = b^2 + x\left(b + \left(x+b\right)\right)$, беручи квадратний корінь з обох частин рівності, матимемо

$$b + x = \sqrt{b^2 + x\left(b + \left(x+b\right)\right)}.$$

Ідея полягає у повторюваному використанні цієї тотожності, застосовного до $x = a, a+b, a+2b, \ldots$ Проілюструємо це для декількох перших кроків:

$$b + a = \sqrt{b^2 + a\left(b + a + b\right)} = \qquad \text{(підстановка } x = a\text{)}$$

$$= \sqrt{b^2 + a\sqrt{b^2 + \left(a+b\right)\left(b + a + 2b\right)}} = \qquad \text{(підстановка } x = a + b\text{)}$$

$$= \sqrt{b^2 + a\sqrt{b^2 + \left(a+b\right)\sqrt{b^2 + \left(a+2b\right)\left(b + a + 3b\right)}}}.$$

(підстановка $x = a + 2b$) і так далі. □

Приклад 1.7.3. Використовуючи тотожність $\left(2^n + x\right)^2 = 4^n + x\left(2^{n+1} + x\right)$ обчисліть

$$\sqrt{4 + \sqrt{16 + \sqrt{64 + \sqrt{\ldots}}}}.$$

Розв'язання. Беручи квадратний корінь з обох частин тотожності, матимемо

$$2^n + x = \sqrt{4^n + x\left(2^{n+1} + x\right)}.$$

Рівність має місце для будь-якого цілого n; замінивши n на $n+1$, матимемо

$$2^{n+1} + x = \sqrt{4^{n+1} + x\left(2^{n+2} + x\right)}.$$

Помітимо, що $2^{n+1}+x$ є під коренем у початковій тотожності, тому, застосовуючи тотожність декілька разів, одержимо нескінченний вкладений радикал:

$$2^n + x = \sqrt{4^n + x\left(2^{n+1}+x\right)} =$$

$$= \sqrt{4^n + x\sqrt{4^{n+1} + x\left(2^{n+2}+x\right)}} =$$

$$= \sqrt{4^n + x\sqrt{4^{n+1} + x\sqrt{4^{n+2} + x\left(2^{n+3}+x\right)}}} = \ldots$$

$$\ldots = \sqrt{4^n + x\sqrt{4^{n+1} + x\sqrt{4^{n+2} + x\sqrt{\ldots}}}}$$

Коли $n = x = 1$, одержимо

$$3 = \sqrt{4 + \sqrt{16 + \sqrt{64 + \sqrt{\ldots}}}}\ .$$ □

Стосовно ***ланцюгових дробів*** *також виявлення копії вкладеної функції може слугувати ключем до розв'язку.*

Приклад 1.7.4. Нехай

$$x = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}}}$$

Знайдіть x.

Розв'язання. Виявивши копію, матимемо

$$x-6=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{12+(x-6)}}}=$$

$$=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{x+6}}}=$$

$$=\frac{1}{2+\frac{x+6}{2x+13}}=$$

$$=\frac{2x+13}{5x+32}.$$

$$5x^2+2x-192=2x+13$$

$$x^2=41,$$

Отже, $x=\sqrt{41}$. □

Приклад 1.7.5. Знайдіть значення

$$\sqrt{14+\sqrt[4]{14+\sqrt[4]{14+\sqrt[4]{\ldots}}}}.$$

Розв'язання. Позначимо вираз через x. Тоді $x=\sqrt{14+\sqrt{x}}$ або $x^2=14+\sqrt{x}$. Графіки функцій $y=x^2$ та $y=14+\sqrt{x}$ перетинаються в одній точці, та її легко вгадати, це $x=4$. □

Вправи з теми: "Вкладені функції"

Приклад 1.7.6. Знайдіть значення виразу $\sqrt{156+\sqrt{156+\sqrt{156+\ldots}}}$?

Приклад 1.7.7. Знайдіть значення виразу $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}$?

Приклад 1.7.8. Знайдіть значення виразу

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

Тема 8: Рекурентні послідовності

Вгадуємо формулу

*Розглянемо наступну **задачу**:*

Послідовність $\{a_n\}$ *задано співвідношеннями* $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$, $n \ge 1$. *Довести, що існує границя* a_n, *та обчислити її.*

Цю задачу можна розв'язати способом доведення зростання та обмеженості цієї послідовності з наступним знаходженням границі. Але ми запропонуємо такий спосіб:

1) знайдемо декілька перших членів цієї послідовності:

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{3^2+1}{3^1+1}$, $a_3 = \frac{14}{5} = \frac{28}{10} = \frac{3^3+1}{3^2+1}$, $a_4 = \frac{41}{14} = \frac{82}{28} = \frac{3^4+1}{3^3+1}$ і висунемо гіпотезу, що $a_n == \frac{3^n+1}{3^{n-1}+1}$;

2) доведемо справедливість цієї формули за допомогою методу математичної індукції (ММІ). Для $n=1$, $a_1 = 2$ і формула

справедлива. Нехай вона справедлива для деякого $n=k$, де $k\geq 1$, тобто $a_k == \frac{3^k+1}{3^{k-1}+1}$. Тоді $a_{k+1}=4-\frac{3\left(3^{k-1}+1\right)}{3^k+1}=\frac{3^{k+1}+1}{3^k+1}$, що завершує індуктивне доведення. Далі маємо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{3^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3^{-n}}{3^{-1}+3^{-n}}=3.$$

Приклад 1.8.1. Відомо, що $u_1=4$, $u_2=10$, $u_{n+2}=4u_{n+1}-3n$ при $n\geq 1$. Знайти формулу загального члена.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $u_3=28=3^3+1$, $u_4=82=3^4+1$. Висуваємо гіпотезу, що $u_n=3^n+1$. Далі застосуємо ММІ. Для $n=1$, $u_1=4$ і формула справедлива. Нехай вона справедлива для деякого $n=k$, де $k\geq 1$, тобто $u_k=3^k+1$. Тоді $u_{k+1}=4u_k-3u_{k-1}=4\left(3^k+1\right)-3\left(3^{k-1}+1\right)=3^{k+1}+1$, що завершує індуктивне доведення.

Приклад 1.8.2. Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Відомо, що

$$x_0=\frac{1}{n},\qquad x_k=\frac{1}{n-k}\left(x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}\right),\qquad k=1,2,\ldots,n-1.$$

Знайти суму $S=x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$.

Розв'язання.

$$x_0=\frac{1}{n};\ x_0+x_1=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\cdot x_0=\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1};$$

$$x_0+x_1+x_2=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\cdot\left(x_0+x_1\right)=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{(n-2)(n-1)}=\frac{1}{n-2}.$$

Висуваємо гіпотезу, що при всіх $k=0,1,\ldots,n-1$

$$x_0+x_1+\ldots+x_k=\frac{1}{n-k}. \qquad (1.8.2.1)$$

При $k=0$ маємо $x_0=\dfrac{1}{n}$. Формула (1.8.2.1) справедлива.

Нехай $x_0+x_1+\ldots+x_m=\dfrac{1}{n-m}$, де m фіксовано, $0\le m\le n-2$. Тоді

$$x_0+x_1+\ldots+x_m+x_{m+1}=\frac{1}{n-m}+x_{m+1}=\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n-m-1}\left(x_0+x_1+\ldots+x_m\right)=$$

$$=\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n-m-1}\cdot\frac{1}{n-m}=\frac{1}{n-m-1},$$

що завершує індуктивне доведення.

Тепер з (1.8.2.1) маємо $x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}=\dfrac{1}{n-(n-1)}=1$.

Приклад 1.8.3. Знайти суму $1+101+10101+\ldots+\underbrace{10101\ldots01}_{n\ одиниць}$.

Розв'язання. Послідовність $1,101,10101,\ldots$ можна задати рівностями

$$a_1=1, \qquad a_{k+1}=100a_k+1.$$

Звідси

$$a_{k+1}-a_k=99a_k+1. \qquad (1.8.3.1)$$

Нехай S – шукана сума. Додаючи почленно рівності (1.8.3.1) при $k=1,2,\ldots,n$, дістанемо $a_{n+1}-1=99S+n$ і

$$S=\frac{a_{n+1}-n-1}{99}=\frac{\overbrace{10101\ldots1}^{n\ одиниць}00-n}{99}.$$

Приклад 1.8.4. (АКНІМО 2018) Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність дійсних чисел задана рекурентно:

$$x_1 = 2018, \qquad \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2018 + \frac{2018}{n} \qquad \text{для } n \ge 1.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log_2 n}{n - log_{2018} x_n}.$$

Розв'язання. Знайдемо декілька перших членів цієї послідовності:

$x_1 = 2018$, $x_2 = 2\cdot 2018^2$, $x_3 = 3\cdot 2018^3$, $x_4 = 4\cdot 2018^4$. Висуваємо гіпотезу, що $x_n = n\cdot 2018^n$, яку легко довести ММІ. Тоді границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log_2 n}{n - log_{2018} x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{log_2 n}{n - \left(log_{2018} n + n\right)} = -log_2 2018.$$

Примітка. Формулу загального члена x_n можна було знайти і по-іншому:

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot x_1 = 2018^{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{1}\cdot 2018 = n\cdot 2018^n$$

.

Приклад 1.8.5. Задамо послідовність $\left(a_n\right)_{n\ge 0}$ наступним чином: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, та

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n, \text{ для } n \ge 0.$$

Доведіть, що a_n ділить n для всіх $n \ge 1$.

Розв'язання. За даною залежністю, маємо $a_4 = 12$, $a_5 = 25$, $a_6 = 48$. Помітимо, що відношення

$$\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{2}=1,\qquad \frac{a_3}{3}=2,\qquad \frac{a_4}{4}=3,\qquad \frac{a_5}{5}=5,\qquad \frac{a_6}{6}=8 -$$

є першими членами послідовності Фібоначчі. Ми припускаємо, що $a_n = nF_n$ для всіх $n \geq 1$. Це можна довести за індукцією. Крок індукції:

$$\begin{aligned}
a_{n+4} &= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - nF_n = \\
&= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - n(F_{n+2} - F_{n+1}) = \\
&= 2(n+3)F_{n+3} + 2F_{n+2} - (n+2)(F_{n+3} - F_{n+2}) = \\
&= (n+4)(F_{n+3} + F_{n+2}) = (n+4)F_{n+4}
\end{aligned}$$

Це доводить наше припущення.

Приклад 1.8.6. Послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задовольняє

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}),$$

для всіх невід'ємних цілих m та n, де $m \geq n$. Якщо $a_1 = 1$, обчисліть a_n.

Розв'язання. Покладемо $m = n$, тоді:

$$a_{2m} + a_0 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2m}),$$

та, поклавши $n = 0$, маємо:

$$a_m + a_m = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_0).$$

З отриманих рівностей випливає, що $a_0 = 0$ та $a_{2m} = 4a_m$. Обчислюємо $a_2 = 4$, $a_4 = 16$. Також, $a_1 + a_3 = (a_2 + a_4)/2$, отже $a_3 = 9$. Можемо припустити, що $a_k = k^2$ для всіх $k \geq 1$. Доведіть самостійно це за індукцією по k.

Приклад 1.8.7. Числову послідовність $(a_n, n \in \mathbb{N})$ задано умовами:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Знайти формулу загального члена a_n

Розв'язання. Випишемо декілька перших значень нашої послідовності

$$1,1,2,\frac{3}{2},\frac{8}{3},\frac{15}{8},\frac{48}{15},\frac{105}{48},\ldots .$$

За цією послідовністю можна вгадати таку закономірність:

$$a_n = \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!}.$$

Перевірка проводиться методом математичної індукції:

$$a_n + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!} + \frac{(n-1)!!}{n!!} = \frac{(n+1)!!}{n!!} = a_{n+2}.$$

Метод "розгортання"

Іноді, послідовно "розгортаючи" рекурентну формулу, можна дістати формулу загального члена послідовності.

Приклад 1.8.8. Послідовність задана рекурентно: $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = p^n - qa^n$, $n \geq 0$, $p,q \in \mathbb{N}$. Знайти формулу загального члена.

Розв'язання.

$$a_n = p^{n-1} - qa_{n-1} = p^{n-1} - q\left(p^{n-2} - qa_{n-2}\right) = p^{n-1} - qp^{n-2} + q^2 a_{n-2} =$$

$$= p^{n-1} - qp^{n-2} + q^2\left(p^{n-3} - qa_{n-3}\right) = \ldots$$

$$= p^{n-1} - qp^{n-2} + q^2 p^{n-3} - q^3 p^{n-4} + \ldots + (-q)^{n-1} + (-q)^n a_0 =$$

$$= p^{n-1} \frac{\left(-\frac{q}{p}\right)^n - 1}{-\frac{q}{p} - 1} + (-q)^n a_0 = (-q)^n a_0 + \frac{p^n - (-q)^n}{p+q}.$$

Приклад 1.8.9. Нехай $a_1 = 1$, $a_n = n(a_{n-1} + 1)$, $n \geq 2$. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right).$$

Розв'язання. Послідовно "розгортаючи" рекурентну формулу, дістанемо

$$a_n = n\left[(n-1)(a_{n-2} + 1) + 1\right] = n + n(n-1) + n(n-1)a_{n-2} =$$

$$= n + n(n-1) + n(n-1)(n-2)(a_{n-3} + 1) = \ldots$$

$$\ldots = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n!,$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k + 1}{a_k} = \frac{a_1 + 1}{a_1} \cdot \frac{a_2 + 1}{2(a_1 + 1)} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n + 1}{n(a_{n-1} + 1)} = \frac{a_n + 1}{n!}$$

Тут враховано, що $a_1 = 1$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + n + n(n-1) + \ldots + n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

Вправи з теми: "Рекурентні послідовності"

Приклад 1.8.10. Вгадайте формулу загального члена послідовності, а потім доведіть її справедливість за допомогою ММІ:

а) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$, $n \geq 1$;

б) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3^n} + \frac{2}{3}a_n$, $n \geq 1$;

в) $x_1 = a+b$, $a \neq b$, $a>0$, $b>0$ $x_{n+1} = a+b-\dfrac{ab}{x_n}$, $n \geq 1$.

Приклад 1.8.11. Знайти суму $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n\ одиниць}$.

Приклад 1.8.12. Знайдіть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n},$$

де u_n задається рекурентно співвідношенням $u_1 = 2$, $u_n = n! + \dfrac{n-1}{n} u_{n-1}$, $n \geq 2$.

Приклад 1.8.13. Знайдіть границю послідовності $(x_n, n \geq 1)$, де

$$x_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}.$$

Підказка. Виразіть x_{n+1} через x_n.

Тема 9: Функціональні рівняння

Нехай $f : A \to B$ є функцією. Множина A називається областю визначення, а B множиною значень. Деякі означення будуть корисними:

Означення 1. Функція $f : A \to B$ є ***ін'єктивною***, якщо $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Означення 2. Функція $f : A \to B$ є ***сюр'єктивною***, якщо для всіх $b \in B$, існує деяке $x \in A$, таке що $f(x) = b$.

Означення 3. Функція $f : A \to B$ є ***бієктивною***, якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна водночас.

Постановка.

Розв'язання типового функціонального рівняння передбачає знаходження ***<u>всіх</u>*** *функцій, які задовольняють певні властивості, наприклад:*

Приклад 1.9.1. (USAMO 2002)

Знайдіть всі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі що $f\left(x^2-y^2\right)=xf\left(x\right)-yf\left(y\right)$.

Відповіддю буде $f\left(x\right)=kx$ для деякої сталої k.

В будь-якій задачі, де потрібно "знайти всі X, що задовольняють Y" завжди є ***<u>дві</u>*** *речі, які треба зробити:*

- *перевірити, що всі об'єкти, які задовольняють умову мають описану вами форму;*
- ***і*** *довести, що будь-який об'єкт описаної вами форми задовольняє умову.*

В контексті приклада 1.9.1. це означає, що треба показати

$f\left(x^2-y^2\right)=xf\left(x\right)-yf\left(y\right)$ тоді і тільки тоді, коли $f\left(x\right)=kx$.

Звісно умова "тоді" є тривіальною в нашому прикладі, але рештою кропіткої роботи є умова "і тільки тоді". Вгадування функції, що задовольняє умову функціонального рівняння на олімпіадах без доведення єдиності цього розв'язку, очевидно приведе до втрати декількох балів. Тому ми рекомендуємо подавати розв'язання за наступною структурою:

Розв'язання. Відповіддю буде $f\left(x\right)=kx,\ k\in\mathbb{R}$. Легко бачити, що всі такі функції задовольняють початкову рівність.

Тепер ми покажемо, що це єдині розв'язки…

Перший приклад

Для конкретики, розпочнемо зі стандартного прикладу, що висвітлює основні підходи до задач подібного виду.

Приклад 1.9.2. (Kyrgyzstan 2012)

Знайдіть всі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі що $f\left(f(x)^2+f(y)\right)=xf(x)+y$ для всіх $x,y\in\mathbb{R}$.

Розв'язання. Перед тим, як розпочати розв'язувати задачу, спробуймо вгадати нашу відповідь. Очевидно, $f(x)=+x$ підходить. Але також $f(x)=-x$ працює. В загальному, багато функціональних рівнянь можуть мати в якості розв'язку $f(x)=+x$, але іноді і $f(x)=0$, $f(x)=kx$, $f(x)=x+c$, або навіть і $f(x)=kx+c$. *Тому, ми рекомендуємо* ***на початку розв'язання функціонального рівняння перевірити, які з цих функцій можуть підходити****, та тримати їх у пам'яті (в загальному можна спробувати підбирати функції, що є поліномами n степеня).*

В нашій задачі $f(x)=\pm x$ є розв'язками, тому ми пам'ятаємо, що вони можливі.

Тепер, з чого нам почати розв'язок? Найпростіше розпочати ***з підстановок конкретних значень аргументів, а саме цілих чисел з області допустимих значень****.* ***Це може допомогти виявити певні властивості шуканих функцій****. Тому, спробуємо підставити $x=y=0$; така підстановка часто є зручною, тому що кількість виразів зменшується.* В нашому прикладі, матимемо

$$f\left(f(0)^2+f(0)\right)=0.$$

Внутрішній вираз досить розмитий, але перепозначимо його через $f(0)^2+f(0)=u$, тобто для деякого u матимемо $f(u)=0$. Цей вираз є корисним, тому що ми можемо його використати для спрощення початкового рівняння! Покладемо $x=u$, одержимо

$$f(f(y))=y.$$

Така функція f *називається згорткою.* Тепер можна стверджувати, що f автоматично буде бієкцією. Доведіть це виконавши наступну вправу:

Вправа 1.9.1. Доведіть, якщо $f(f(y))=y$, тоді f є ін'єктивною та сюр'єктивною водночас. (для "ін'єкції", розпочніть з припущення $f(a)=f(b)$ та виконайте дещо в обох частинах рівності).

Зрозуміло, що цієї інформації все ще недостатньо. Тепер ми можемо покласти $x=f(t)$ *для того, щоб замінити всі* $f(x)$ *на* $f(f(t))=t$*. Після цього отримаємо:*

$$f\left(f(x)^2+f(y)\right)=xf(x)+y \qquad \textit{задано}$$

$$f\left(f(f(t))^2+f(y)\right)=(f(t))\,f(f(t))+y \qquad \textit{поклавши } x=f(t)$$

$$f\left(t^2+f(y)\right)=f(t)t+y \qquad \textit{врахувавши } f(f(t))=t$$

$$f\left(t^2+f(y)\right)=f\left(f(t)^2+f(y)\right)$$ *за початковою умовою*

Отже, ми прийшли до висновку, що

$$t^2+f(y)=f(t)^2+f(y)\Rightarrow f(t)=\pm t$$

для кожного t*! (Ось чому доказ ін'єктивності шуканих функцій часто є корисним.)*

Але це ще не кінець, не зважаючи на одержаний результат, який, на перший погляд, є завершеним. Оскільки, ми знаємо, що $f(t)=\pm t$ для кожного окремого t, ми не знаємо чи знак t буде змінюватися чи ні: що, якщо є розв'язки такі, що інколи $f(t)=t$ та $f(t)=-t$ в іншому разі? *(Цей тип помилок навіть одержав офіційну назву: так звана* ***поточкова пастка****.)*

Вочевидь, така ситуація не є бажаною, тому продовжимо…

Припустимо тепер, що $f(a)=+a$ та $f(b)=-b$.

Вправа 1.9.2. Підставте їх в початкову рівність та перевірте, що єдиною можливістю буде ситуація, коли один з них є нулем.

Отже, ми показали, що якщо f задовольняє початкову рівність, то $f(x)=\pm x$. Та останньою порадою буде їх перевірка. □

Зауваження 1.9.1. Звісно є і інші підходи. Окреслимо один із них. Після доказу, що f є згорткою, можна одразу покласти $x=f(t)$, $y=f(u)$ та натомість одержати

$$f\left(t^2+u\right)=tf(t)+f(u)$$ (перевірте це!).

Одержаний вираз швидко стане “рівнянням Коші”, які ми розглянемо пізніше.

Зауваження 1.9.2. Можливо корисною порадою буде наступне: ***множина розв’язків, які ви знайшли наштовхують на вірне русло доведення***. Наприклад, якщо $f(x)=x$ та $f(x)=2-x$ є представниками функцій, що розв’язують функціональне рівняння, ***<u>не треба</u>*** *намагатися довести* $f(0)=0$ *або* $f(xy)=f(x)f(y)$, краще можливо вірним буде показати, що $f(1)=1$ або, що f є згорткою.

Функціональне рівняння Коші над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$.

В цьому параграфі, всі функції будуть $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$.

Приклад 1.9.3. (функціональне рівняння Коші)

Розв’яжіть $f(x+y)=f(x)+f(y)$ над полем $\mathbb{Q}$.

Розв’язання. Так як і раніше спробуємо підібрати розв’язки серед найбільш можливих варіантів. Спробувавши загальний базовий варіант $f(x)=kx+c$, одержимо $c=0$, де k - довільне. Отже, за нашим припущенням відповідь: $f(x)=kx$.

Тепер ми доведемо, що наше припущення вірне, По перше, всі такі функції нам підходять.

Отже, щоб насправді розв’язати задачу, помічаємо, що ми маємо “одну степінь вільності”: сімейство розв’язків має вільну змінну. Отже, має сенс покласти, скажімо, $f(1)=k$ та спробувати розв'язати рівняння по k.

Ми розпочнемо тепер, поклавши $x=y=0$, отримавши $f(0)=0$. Тепер, можемо покласти $x=y=1$, отримавши $f(2)=f(1)+f(1)=2k$. Тепер, $(x,y)=(2,1)$ дає нам $f(3)=f(1)+f(2)=3k$, і так далі, тому за індукцією матимемо $f(n)=kn$ для будь-якого цілого $n\geq 1$.

Стосовно від'ємних цілих значень, покладемо $x=-y$, одержимо $f(x)+f(-x)=0$, тобто функція непарна. Отже, результат $f(n)=kn$ має місце і для від'ємних цілих значень.

Ми все ще не вирішили проблему для всіх раціональних чисел. Для початку, подивимося як одержати значення $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Маємо

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=k,$$

звідки $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}k$. І тепер ми маємо "стартовий майданчик" для раціональних чисел $\frac{p}{q}$:

$$\underbrace{f\left(\frac{p}{q}\right)+\ldots+f\left(\frac{p}{q}\right)}_{q}=f(p)=kp,$$

звідки $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{kp}{q}$. Отже, ми можемо стверджувати, що $f(x)=kx, x\in\mathbb{Q}$.

□

Зауваження 1.9.3. Відмітимо наскільки вибір $\mathbb{Q}$ як області є важливим: все працювало, оскільки ми мали змогу зробити індукцію для одержання функції f над полем цілих чисел, а згодом і над полем раціональних. Але це не працює, якщо $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$, як покаже наступний параграф.

Приклад 1.9.4. (функціональне рівняння Єнсена)

Розв'яжіть $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ над полем $\mathbb{Q}$.

Розв'язання. Цього разу, наша попередня перевірка виявляє, що $f(x)=kx+c$ підходить для будь-яких k,c. Тепер, ми виконаємо наступний трюк: ми можемо *зсунути функцію f на константу без зміни самого функціонального рівняння*. Для ясності, це означає, що ми перепишемо початкове рівняння у вигляді

$$\left(f(x)-f(0)\right)+\left(f(y)-f(0)\right)=2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(0)\right).$$

Якщо ми тепер покладемо $g(x)=f(x)-f(0)$, тоді матимемо

$$g(x)+g(y)=2g\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

тобто це те ж саме початкове рівняння – але тепер, ми знаємо, що $g(0)=0$. Отже, поклавши $(x,y)=(t,0)$ дає нам $g(t)=2g(t/2)$. Тепер спробуємо такий же трюк як у рівнянні Коші, скажімо поклавши $(x,y)=(1,2)$, одержимо

$$g(1)+g(2)=2g(3/2),$$

що, на перший погляд, не несе жодної користі, поки ми не згадаємо, що $g(t)=2g(t/2)$. Як наслідок, початкове функціональне рівняння можна переписати як

$$g(x)+g(y)=2g\left(\frac{x+y}{2}\right)=g(x+y)$$

з $t=x+y$. Отже, g задовольняє рівняння Коші!

Вправа 1.9.3. Розв'яжіть приклад з цього моменту. □

Приклад 1.9.5. (JMO 2015/4)

Знайдіть всі функції $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ такі, що

$$f(x)+f(t)=f(y)+f(z)$$

для всіх раціональних чисел $x<y<z<t$, яку утворюють арифметичну прогресію.

Розв'язання. Як і раніше, бачимо, що лінійні функції $f(x)=kx+c$ задовольняють умову.

Тепер, прояснимо наше рівняння, переписавши його як

$$f(a)+f(a+3d)=f(a+d)+f(a+2d)$$

для $d > 0$. Рівняння містить багато виразів і було б чудово, якщо б ми домоглися скоротити деякі з них. Трюк полягає знову ж таки у зсуві цього рівняння за допомогою заміни $a \to a-d$, тоді

$$f(a-d)+f(a+2d)=f(a)+f(a+d).$$

Додавши ці рівняння, матимемо:

$$f(a-d)+f(a+3d)=2f(a+d) \quad \forall a \in \mathbb{Q} \text{ та } d>0.$$

З цього моменту ми майже у цілі:

Вправа 1.9.4. Приведіть кінцевий вираз до функціонального рівняння Єнсена та завершіть розв'язання. (Коли $d=0$ розгляньте окремо) ☐

Отже, основна ідея цього розв'язку був зсув для скорочення деяких виразів і це привело рівняння Єнсена.

Функціональне рівняння Коші над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Як зауважувалось раніше, така задача стає значно іншою, якщо ми замінимо $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$, оскільки індукція більше не діє! А саме, над полем $\mathbb{R}$, ми одержимо нові паталогічні розв'язки для рівняння Коші, яких до того не було.

Подамо цю новизну у вигляді теореми:

Теорема 1.9.1.

Припустимо $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задовольняє $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Тоді $f(qx)=qf(x)$ для будь-якого $q\in\mathbb{Q}$. Окрім того, f є лінійною, якщо будь-що із наступного має місце:

- f є неперервною на будь-якому інтервалі;

- f є обмеженою (зверху або знизу) на будь-якому інтервалі;
- існує (a,b) та $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-a)^2 + (f(x)-b)^2 > \varepsilon$ для кожного x (тобто графік f оминає деякий як завгодно малий окіл)

Приклад 1.9.6. (Поле автоморфізмів $\mathbb{R}$)

Розв'яжіть над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ та } f(xy) = f(x) f(y)$$

Розв'язання. Ми стверджуємо, що $f(x) = x$ та $f(x) = 0$ є єдиними розв'язками. Згідно теореми для доведення лінійності f достатньо показати, що f є невід'ємною на деякому нетривіальному інтервалі. Тепер,

$$f(t^2) = (f(t))^2 \geq 0$$

для будь-якого t, що означає обмеженість f на $[0,\infty)$, тому ми стверджуємо, що $f(x) = cx$ для деякого c. Тоді з $cxy = (cx)(cy)$ слідує, що $c \in \{0,1\}$, як ми і припускали. □

В загальному, в залежності від контексту олімпіади, найбільш вживаними способами переходу від адитивності до лінійності є:

- *домогтися доведення умов обмеженості (такої як $f \geq 0$), або*

- *задача передбачає неперервність функції f. Дуже рідко пропонується довести неперервність самостійно.*

Розв'язуємо приклади

Наведемо ще деякі приклади функціональних рівнянь з умовою $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

> *Приклад 1.9.7.*
>
> Розв'яжіть над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$:
>
> $$f\left(x^2+y\right)=f\left(x^{27}+2y\right)+f\left(x^4\right)$$

Розв'язання. В цій задачі ми стверджуємо, що $f\left(x\right)=0$ буде єдиним розв'язком. Як зазвичай нашим першим кроком буде підстановка нулів, звідки маємо $f\left(0\right)=0$.

Тепер зробимо крок назад: чи можемо ми зробити певні перетворення для скорочення певних виразів? *Бачите вирази x^2+y та $x^{27}+2y$ в початковому рівнянні*? Давайте прирівняємо їх:

$$x^2+y=x^{27}+2y\Leftrightarrow y=x^2-x^{27}.$$

Підставляючи для такого вибору y, маємо $f\left(x^4\right)=0$, отже f дорівнює нулю для всіх невід'ємних чисел. Все, що залишилося це перевірка f на рівність нулю для всіх від'ємних дійсних чисел. Найпростіший шлях до цього: покласти $y=0$, оскільки це не вплине на вже додатні вирази x^2 та x^4.

Одержуємо ***нову пораду***: *подивіться, чи можна зробити підстановку, яка " прибере " одразу два вирази*.

Приклад 1.9.8. (Singapore 1999)

Розв'яжіть над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$:
$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy\left(x^2-y^2\right)$.

Розв'язання. По-перше, наявність всюди виразів $(x-y)$ та $(x+y)$ є підказкою до замін, наприклад $a=x+y$ та $b=x-y$. Тоді $x^2-y^2=ab$, і також $2x=a+b$, $2y=a-b$. Отже, початкове рівняння набуде вигляду

$$bf(a)-af(b)=ab\left(a^2-b^2\right).$$

Такий вигляд більш привабливий для розв'язання.

Почнемо відповідно його досліджувати. Спершу, спробуємо підібрати розв'язки, як і раніше. В цьому випадку, сталі або лінійні функції розв'язками не будуть.

Вправа 1.9.5. Знайдіть ненульову функцію, яка нам підходить.

Запам'ятовуємо її та продовжуємо. Вартим уваги буде зауваження, що ліва частина рівняння по суті є нульовою для $f(x)\equiv cx$. Це допоможе нам описати реальні розв'язки рівняння.

Підстановка $a=b=0$ приводить до рівності $0=0$, нічого корисного звідси не одержимо. Але підстановка одного нуля $a=0$ більш вигідна: ми одержуємо $bf(0)=0$, отже $f(0)=0$.

Далі припустимо $a,b\neq 0$. Поділимо рівняння на ab, одержимо

$$\frac{f(a)}{a}-\frac{f(b)}{b}=a^2-b^2.$$

Відмітимо, що тепер a,b повністю ізольовані! Так, можемо записати

$$\frac{f(a)}{a}-a^2=\frac{f(b)}{b}-b^2.$$

Достатньо наголосити, що $\frac{f(a)}{a}-a^2=c$ для деякої сталої c, коли $a\neq 0$; звідси $f(x)=x^3+cx$ для деякого c. Ми знаємо, що це працює для $x\neq 0$, але виконується також і для $x=0$, оскільки $f(0)=0$. □

Ще три трюки

- ***Застосування інволюції (згортки)***. Якщо нам відомо дещо про $f(f(x))$, спробуйте застосувати її ще раз $f(f(f(x)))$ різними способами. Наприклад, якщо нам відомо, що $f(f(x))=x+2$, тоді матимемо $f(f(f(x)))=f(x+2)=f(x)+2$.

- ***Ізольовані частини***. Коли намагаєтесь перевірити ін'єктивність або сюр'єктивність, шукайте "ізольовані" змінні або частини рівняння. Наприклад, нехай є така умова

$$f\left(x+2xf(y)^2\right)=yf(x)+f(f(y)+1).$$

Помітимо, що $f\equiv 0$ працює, тоді припустимо, що f є ненульовою скрізь. Тоді, поклавши x_0 з умовою $f(x_0)\neq 0$, можна показати ін'єктивність f (підстановкою y_1 та y_2). Доведення сюр'єктивності можна виконати в подібному ключі. Наприклад, припустимо

$$f\left(f(y)+xf(x)\right)=y+f(x)^2.$$

Змінюючи y при фіксованому x матимемо сюр'єктивність f, а тому ми можемо обрати x_0 так, що $f(x_0)=0$ і почати звідси. Сюр'єктивність особливо чітко можна перевірити, коли кожний y внесений як аргумент функції f, тоді кожне $f(y)$ можна замінити деяким початковим дійсним числом.

- ***<u>Виявлення зайвих виразів при симетрії</u>***. Якщо деякі частини рівняння є симетричними, а інші – ні, взаємозаміна $x \leftrightarrow y$ часто буває корисною. Наприклад, припустимо є умова

$$f\left(x+f(y)\right)+f(xy)=f(x+1)f(y+1)-1.$$

Це рівняння "майже симетричне", окрім виразу $f\left(x+f(y)\right)$, яке асиметричне. Тобто після взаємозаміни $x \leftrightarrow y$ набуде вигляду

$$f\left(x+f(y)\right)=f\left(y+f(x)\right).$$

Якщо покажемо ін'єктивність f, то задача розв'язана! Тому часто ці "зайві" вирази лише є об'єктом нашої уваги.

Висновки

На початку розв'язання функціонального рівняння:

- *З'ясуйте якою буде відповідь. В багатьох випадках кандидатом на відповідь буде $f(x)=kx+c$, спробуйте* ***перевірити*** *цю* ***функцію****, і для яких k, c вона нам підходить.*

*Також, в загальному, можна **спробувати поліноми** вищих степенів.*

- *Робіть очевидні оптимізації (такі як **зсув** або **розширення**).*

Після виконання цих очевидних кроків, деякі інші підходи можуть допомогти:

- *Робіть **підстановки**, що скорочують початкове рівняння, або деякі вирази зникають (часто пробуйте $x = y = 0$).*
- *Вбачайте можливість для доведення **ін'єктивності** або **сюр'єктивності**, наприклад використовуючи **ізольовані частини**.*
- *Виявляйте **зайві вирази при симетрії** та **згортки**.*
- *Для рівнянь над полем $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ або $\mathbb{Q}$, часто допомагає **індукція**. Також не цурайтесь її навіть і над полем $\mathbb{R}$.*
- *Стати в пригоді може **введення іншої функції**, яка утворюється із заданої, такої, як наприклад $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, якщо таке відношення має місце у початковому рівнянні. Зокрема, трюк "**зсув на нуль**" є підвидом цього способу.*
- ***Перевіряйте правильність розв'язків!***

Вправи з теми: "Функціональні рівняння"

Приклад 1.9.9. (Taiwan IMO Training) Знайдіть всі неперервні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що для будь-яких дійсних x та y,

$$f\left(f(x+y)\right) = f(x) + f(y).$$

Приклад 1.9.10. (Iran TST 1996) Знайдіть всі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що задовольняють рівність

$$f\left(x^2+y\right)=f\left(f\left(x\right)-y\right)+4f\left(x\right)y$$

для будь-яких дійсних x та y.

Приклад 1.9.11. Розв'яжіть $f\left(t^2+u\right)=tf\left(t\right)+f\left(u\right)$ над полем $\mathbb{R}$.

Приклад 1.9.12. Розв'яжіть $f\left(m+n\right)=f\left(m\right)+f\left(n\right)+mn$ для $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

Приклад 1.9.13. (USAMO 2002/4) Розв'яжіть над полем $\mathbb{R}$:

$$f\left(x^2-y^2\right)=xf\left(x\right)-yf\left(y\right).$$

Приклад 1.9.14. (IMO 2012/4) Знайдіть всі функції $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ такі, що для всіх цілих a,b,c, що задовольняють $a+b+c=0$, наступна рівність має місце:

$$f\left(a\right)^2+f\left(b\right)^2+f\left(c\right)^2=2f\left(a\right)f\left(b\right)+2f\left(b\right)f\left(c\right)+2f\left(c\right)f\left(a\right).$$

Приклад 1.9.15. (ELMO Shortlist 2013 A3) Знайдіть всі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що для всіх $x,y\in\mathbb{R}$,

$$f\left(x\right)+f\left(y\right)=f\left(x+y\right) \quad \text{та} \quad f\left(x^{2013}\right)=f\left(x\right)^{2013}.$$

Приклад 1.9.16. (USAMO 2016/4). Знайдіть всі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що для всіх $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\left(f\left(x\right)+xy\right)\cdot f\left(x-3y\right)+\left(f\left(y\right)+xy\right)\cdot f\left(3x-y\right)=\left(f\left(x+y\right)\right)^2.$$

Тема 10: Тригонометричні тотожності

Краса тригонометрії закладена в її тотожностях. З наступних 2-ох фундаментальних тотожностей

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ та } \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

решта тотожностей можуть бути виведені. В наших задачах потрібно буде використати формули кратних аргументів, формули додавання та віднімання, формули перетворення добутку в суму і т.д. Наголосимо, що вміння виводити ці формули сприяють кращому розумінню формул тригонометрії та запобігають механічному запам'ятовуванню масиву інформації. З іншого боку, на олімпіадах буде вітатися і ваш багаж знань з тригонометрії, що зекономить час на розв'язання проблемної задачі.

Приклад 1.10.1. Знайдіть всі гострі кути x, що задовольняють рівняння

$$2\sin x \cos 40^\circ = \sin\left(x + 20^\circ\right).$$

Розв'язання. Підставляючи конкретні значення, можна побачити, що $x = 30^\circ$ є розв'язком. А чи існують інші? Використаємо формулу додавання кутів для синуса та перепишемо її як:

$$\tan x = \frac{\sin 20^\circ}{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}.$$

Функція тангенса є бієкцією на інтервалі $\left(0,90^{\circ}\right)$, звідки випливає, що розв'язок початкового рівняння єдиний.

Приклад 1.10.2. Доведіть, що, якщо $cos\,\pi a=\frac{1}{3}$, тоді a буде ірраціональним числом.

Розв'язання. Припустимо, що a є раціональним, $a=\frac{m}{n}$. Тоді $cos\,na\pi=\pm1$. Доведемо, за індукцією, що для всіх $k>0$, $cos\,ka\pi=\frac{m_k}{3^k}$, де m_k – ціле число, яке не ділиться на 3 націло. Тоді це буде суперечити початковому припущенню.

Властивість є вірною для $k=0$ та $k=1$. Формула перетворення суми у добуток для косинуса можна задати рекурентно

$$cos\left(k+1\right)a\pi+cos\left(k-1\right)a\pi=2cos\,a\pi\,cos\,ka\pi$$

$$cos\left(k+1\right)a\pi=2cos\,a\pi\,cos\,ka\pi-cos\left(k-1\right)a\pi,\qquad k\ge1.$$

Використовуючи гіпотезу індукції $cos\left(k+1\right)a\pi=\frac{m_{k+1}}{3^{k+1}}$. Тоді

$$\frac{m_{k+1}}{3^{k+1}}=2\frac{m_1}{3}\frac{m_k}{3^k}-\frac{m_{k-1}}{3^{k-1}}$$

$$m_{k+1}=2m_1m_k-9m_{k-1}$$

Оскільки m_k – ціле число, яке не ділиться на 3, то і m_{k+1} також, твердження доведено.

Приклад 1.10.3. Нехай $a_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ та нехай $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 5}{2(a_n + 2)}$ для $n \ge 0$. Доведіть, що

$$a_n = cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2 \text{ для всіх } n.$$

Розв'язання. Покажимо справедливість цього твердження для $n = 0$. Для цього виконаємо такі перетворення:

$$cot\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{cos\frac{\pi}{24}}{sin\frac{\pi}{24}} = \frac{2cos^2\frac{\pi}{24}}{2sin\frac{\pi}{24}cos\frac{\pi}{24}} = \frac{1 + cos\frac{\pi}{12}}{sin\frac{\pi}{12}} = \frac{1 + cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Використовуючи формули різниці для синуса та косинуса, ми отримаємо далі:

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) + \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2}{6 - 2} =$$

$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = a_0 + 2.$$

Далі, для перевірки рівності для кожного $n \ge 1$, достатньо довести, що $b_n = cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)$, де $b_n = a_n + 2$, $n \ge 1$. Початкове рекурентне співвідношення набуде вигляду:

$$b_{n+1} - 2 = \frac{(b_n - 2)^2 - 5}{2b_n} \text{ або}$$

$$b_{n+1} = \frac{b_n^2 - 1}{2b_n}.$$

Припустивши за індукцією, що $b_k = \cot c_k$, де $c_k = \frac{2^{k-3}\pi}{3}$, та за формулою подвійного кута, одержимо

$$b_{k+1} = \frac{\cot^2 c_k - 1}{2\cot c_k} = \cot\left(2c_k\right) = \cot c_{k+1}.$$

Це завершує доведення.

Приклад 1.10.4. Обчисліть суму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

Розв'язання. Використавши формулу різниці двох арктангенсів,

$$\arctan u - \arctan v = \arctan\frac{u-v}{1+uv},$$

(ця формула справедлива за умови $uv \neq -1$) одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \arctan(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}\right) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n+1) - \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$$

Вправи з теми: "Тригонометричні тотожності"

Приклад 1.10.5. Доведіть, що

$$\sin 70^\circ \cos 50^\circ + \sin 260^\circ \cos 280^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Приклад 1.10.6. Покажіть, що тригонометричне рівняння

$$sin(cos\,x) = cos(sin\,x)$$

не має розв'язків.

Приклад 1.10.7. Покажіть, що, якщо кути a та b задовольняють

$$tan^2 a \cdot tan^2 b = 1 + tan^2 a + tan^2 b,$$ тоді

$$sin\,a\,sin\,b = \pm sin\,45^{\circ}.$$

Приклад 1.10.8. Знайдіть множину значень функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (sin\,x + 1)(cos\,x + 1)$.

Приклад 1.10.9. Нехай $a, b, c, d \in [0, \pi]$ такі, що

$$2cos\,a + 6cos\,b + 7cos\,c + 9cos\,d = 0$$ та

$$2sin\,a - 6sin\,b + 7sin\,c - 9sin\,d = 0.$$

Доведіть, що $3cos(a + d) = 7cos(b + c)$.

Тема 11: Тригонометричні підстановки

З того факту, що рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$ *можна параметризувати тригонометричною підстановкою* $x = cos\,t$ *та* $y = sin\,t$, *випливає можливість підстановки* $x = a\,cos\,t$ *(або* $x = a\,sin\,t$*) у вирази форми* $\sqrt{a^2 - x^2}$. *Нашою метою буде підбір подібного роду підстановок до задач, де простежується схожість між алгебраїчним виразом та тригонометричною формулою.*

Приклад 1.11.1. Нехай $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, така, що $f\left(2x^2-1\right)=2xf\left(x\right)$ для усіх $x\in[-1,1]$. Покажіть, що f тотожно рівна нулю.

Розв'язання. Вираз $2x^2-1$ нагадує нам тригонометричну формулу $2cos^2 t-1=cos\,2t$, пропонуючи підстановку $x=cos\,t$, $t\in[0,\pi]$. Одержуємо згідно початкової умови наступне функціональне рівняння $f\left(cos\,2t\right)=2cos\,tf\left(cos\,t\right)$.

Спершу, помітимо, що покладаючи $x=0$ та $x=1$, одержимо $f\left(1\right)=f\left(-1\right)=0$. Тепер, розглянемо функцію $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(t\right)=\dfrac{f\left(cos\,t\right)}{sin\,t}$. Тоді, для будь-якого t, яке не є множником π,

$$g\left(2t\right)=\frac{f\left(cos\,2t\right)}{sin\,2t}=\frac{2cos\,tf\left(cos\,t\right)}{2sin\,t\,cos\,t}=g\left(t\right).$$

Також, $g\left(t+2\pi\right)=g\left(t\right)$. Зокрема, для будь-яких цілих n та k,

$$g\left(1+\frac{n\pi}{2^k}\right)=g\left(2^{k+1}+2n\pi\right)=g\left(2^{k+1}\right)=g\left(1\right).$$

Оскільки f – неперервна функція, g – неперервна скрізь, окрім точок, які є множниками π. Множина $\left\{1+\frac{n\pi}{2^k}\,\middle|\,n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ є щільною на дійсній осі, і тому g повинна бути сталою в цій області. Тоді, $f\left(cos\,t\right)=c\,sin\,t$ для певних сталих c та t на $\left(0,\pi\right)$, тобто $f\left(x\right)=c\sqrt{1-x^2}$ для всіх $x\in\left(-1,1\right)$. Отже, f – парна функція. Але в початкової рівності $f\left(2x^2-1\right)=2xf\left(x\right)$, ліва частина є парною функцією, а права – непарною. Це протиріччя усувається лише тоді, коли обидві частини є тотожно рівними нулю. Отже, $f\left(x\right)=0$ для усіх $x\in\left[-1,1\right]$ є єдиним розв'язком функціонального рівняння.

Приклад 1.11.2. Нехай x,y,z – дійсні числа, такі що $x+y+z=xyz$. Доведіть, що

$$x\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)+y\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)+z\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)=4xyz.$$

Розв'язання. (*Нашою метою буде застосування тригонометричної підстановки, хоча читачу можна запропонувати довести рівність елементарним способом та порівняти його з пропонованим*) Рівність є очевидною, якщо $xyz=0$, тому припустимо, що $x,y,z\neq 0$. Поділивши праву та ліву частину рівності на $4xyz$, початкова рівність набуде вигляду

$$\frac{1-y^2}{2y}\cdot\frac{1-z^2}{2z}+\frac{1-z^2}{2z}\cdot\frac{1-x^2}{2x}+\frac{1-x^2}{2x}\cdot\frac{1-y^2}{2y}=1$$

Одержаний вираз та умова $x+y+z=xyz$ наводить на думку застосувати підстановки $x=tan\,A$, $y=tan\,B$, $z=tan\,C$, де A,B,C – кути трикутника. За формулою подвійного кута

$$\frac{1-tan^2 u}{2tan u}=\frac{1}{tan\,2u}=cot\,2u$$

далі перетворюємо рівність до вигляду

$$cot\,2B\,cot\,2C+cot\,2C\,cot\,2A+cot\,2A\,cot\,2B=1.$$

Але це ж еквівалентно до

$$t\,an2A+tan2B+tan2C=tan2A\,tan2B\,tan2C,$$

що слідує з рівняння $tan(2A+2B+2C)=tan2\pi=0$.

Вправи з теми: “Тригонометричні підстановки”

Приклад 1.11.3. Нехай $a,b,c\in[0,1]$. Доведіть, що

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\le 1.$$

Приклад 1.11.4. Розв’яжіть рівняння $x^3-3x=\sqrt{x+2}$ в дійсних числах.

Приклад 1.11.5. Нехай a,b,c дійсні числа. Доведіть, що

$$(ab+bc+ca-1)^2\le(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

Приклад 1.11.6. Обчисліть невизначений інтеграл: $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Тема 12: Тригонометричні телескопічні суми та добутки

Підходи до телескопічних сум та добутків у тригонометрії такі самі як і у загальному випадку, але ми будемо зустрічатися з більшою кількістю цікавих тотожностей.

Приклад 1.12.1. Доведіть, що

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k cos^3\left(3^{k-n}\pi\right)=\frac{3}{4}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+cos\frac{\pi}{3^n}\right]$$

Розв’язання. З рівності $cos3x=4cos^3x-3cos x$, ми одержимо

$$cos^3x=\frac{1}{4}(cos3x+3cos x).$$

Тоді

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} cos^{3}\left(3^{k} a\right)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} cos\left(3^{k+1} a\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} cos\left(3^{k} a\right)\right].$$

За принципом телескопу сума правої частини рівності скорочується до:

$$\frac{1}{4}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} cos\left(3^{n+1} a\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} cos\, a\right].$$

Поклавши $a=3^{-n}\pi$, ми одержимо початкову рівність.

Тепер ми розглянемо телескопічні добутки.

Приклад 1.12.2. Доведіть, що

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-tan^{2} 2^{-n}}=tan 1.$$

Розв'язання. Розв'язання базується на тотожності

$$tan\, 2x=\frac{2 tan\, x}{1-tan^{2} x}.$$

Застосовуючи її, можна переписати

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-tan^{2} 2^{-n}}=\prod_{n=1}^{N}\frac{tan\, 2^{-n+1}}{2 tan\, 2^{-n}}=\frac{2^{-N}}{tan\, 2^{-N}} tan 1.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tan\, x}{x}=1$, коли спрямуємо $N\to\infty$ матимемо $tan 1$.

Вправи з теми: “Тригонометричні підстановки”

Приклад 1.12.3. Доведіть, що

А) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

Б) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

при будь-яких $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 1.12.4. Доведіть, що

$$27\sin^3 9^\circ + 9\sin^3 27^\circ + 3\sin^3 81^\circ + \sin^3 243^\circ = 20\sin 9^\circ.$$

Приклад 1.12.5. Доведіть, що

$$\frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \ldots + \frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ} = \frac{1}{\sin 1^\circ}.$$

Приклад 1.12.6. Отримайте точні значення наступних рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\dfrac{2}{n^2}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\dfrac{8n}{n^4 - 2n^2 + 5}$.

Приклад 1.12.7. Для $n \geq 0$ покладемо

$$u_n = \arcsin\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}}.$$

Доведіть, що ряд

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

є збіжним та знайдіть його границю.

Приклад 1.12.8. Доведіть, що

$$\left(1 - \frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1 - \frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\ldots\left(1 - \frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right) = 1.$$

Приклад 1.12.9. Знайдіть значення добутку

$$\left(1-cot1^{\circ}\right)\left(1-cot\,2^{\circ}\right)...\left(1-cot\,44^{\circ}\right).$$

Приклад 1.12.10. Обчисліть добуток

$$\left(\sqrt{3}+tan1^{\circ}\right)\left(\sqrt{3}+tan\,2^{\circ}\right)...\left(\sqrt{3}+tan\,29^{\circ}\right).$$

Приклад 1.12.11. Доведіть тотожності:

а) $\left(\frac{1}{2}-cos\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1}{2}-cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(\frac{1}{2}-cos\frac{9\pi}{7}\right)=-\frac{1}{8}$

б) $\left(\frac{1}{2}+cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+cos\frac{27\pi}{20}\right)=\frac{1}{16}$.

Тема 13: Матриці та операції над ними

Розв'язуючи задачі з теми необхідно звернути увагу на подані нижче основні властивості, які розглядаються та доводяться в курсі лінійної алгебри та опанувати прийоми виокремлення необхідних рівностей.

Властивості операцій над матрицями (r, s – скаляри; матриці A, B, C обираються так, що кожна операція визначена; rank A – ранг матриці A; tr A – слід матриці A):

$$A+B=B+A$$

$$\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$$

$$A+\mathrm{O}=A$$

$$r\left(A+B\right)=rA+rB$$

$$\left(r+s\right)A=rA+sA$$

$$r\left(sA\right)=\left(rs\right)A$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

$$r(AB) = (rA)B = A(rB)$$

$$I_n A = A = AI_n$$

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(rA)^T = rA^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(I_n)^T = I_n$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

$$(rA)^{-1} = r^{-1}A^{-1}, \quad r \neq 0$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(I_n)^{-1} = I_n$$

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

$$tr(sA) = s\,tr(A)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

$$tr(A) = tr\left(A^T\right)$$

$$rank(AB) \le min(rank(A), rank(B))$$

$$rank(A+B) \le rank(A) + rank(B)$$

$rank(A) + rank(B) - n \le rank(AB)$ (тут n – кількість стовпців матриці A)

$$rank(AB) + rank(BC) \le rank(B) + rank(ABC)$$

Тепер перейдемо до прикладів.

Приклад 1.13.1. (IMC, 2005) Нехай A – квадратна матриця розмірності $n \times n$, кожен (i, j)-й елемент якої дорівнює $i + j$ для усіх $i, j = 1,2,\ldots,n$. Який ранг матриці A?

Розв'язання. Для $n = 1$ ранг дорівнює 1. Припустимо $n \ge 2$. Оскільки $A = (i)_{i,j=1}^{n} + (j)_{i,j=1}^{n}$, матриця A є сумою двох матриць першого рангу. Отже, ранг A може бути щонайбільше 2. Оскільки визначник крайнього мінора розмірності 2×2 лівої верхньої частини матриці A дорівнює -1, отже ранг точно дорівнює 2.

Приклад 1.13.2. (IMC, 2003) Нехай A – квадратна матриця розмірності $n \times n$ з дійсними елементами, така що $3A^3 = A^2 + A + I$ (тут I – одинична матриця). Покажіть, що послідовність A^k збігається до ідемпотентної матриці (матриця B називається *ідемпотентною*, якщо $B^2 = B$).

Розв'язання. Мінімальний поліном A є $3x^3 - x^2 - x - 1$. Поліном має три різні корені. Звідси випливає, що A можна діагоналізувати: $A = C^{-1}DC$, де D є діагональною матрицею. Власні значення матриць A та D є всіма коренями полінома $3x^3 - x^2 - x - 1$. Один з цих коренів є одиницею, решта двох коренів за абсолютним значенням менше одиниці. Звідси, діагональні елементи матриці D^k, які є k-ми степенями власних значень, прямують або до нуля або до одиниці, а, отже і границя $M = lim D^k$ є ідемпотентною. Отже, $lim A^k = C^{-1}MC$ також ідемпотентна.

Приклад 1.13.3. (IMC, 2004) Нехай A –матриця розмірності 4×2 з дійсними елементами та B – матриця розмірності 2×4 з дійсними елементами, такі що

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть BA?

Розв'язання. Покладемо $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, де A_1, A_2, B_1, B_2 матриці розмірності 2×2. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix},$$

звідси $A_1B_1 = A_2B_2 = I_2$ та $A_1B_2 = A_2B_1 = -I_2$. Тоді $B_1 = A_1^{-1}$, $B_2 = -A_1^{-1}$ та $A_2 = B_2^{-1} = -A_1$. Остаточно,

$$BA = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = B_1A_1 + B_2A_2 = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.13.4. (IMC, 2003) Нехай A та B квадратні матриці розмірності $n \times n$ з дійсними елементами, такі що $AB + A + B = 0$. Доведіть, що $AB = BA$.

Розв'язання. Оскільки $(A+I)(B+I) = AB + A + B + I = I$, матриці $A+I$ та $B+I$ є взаємооберненими. Тоді $(A+I)(B+I) = (B+I)(A+I)$ та $AB = BA$.

Приклад 1.13.5. (IMC, 2009) Нехай A, B та C квадратні матриці однакової розмірності з дійсними елементами, та A є оборотною. Доведіть, що, якщо $(A-B)C = BA^{-1}$, то тоді $C(A-B) = A^{-1}B$.

Розв'язання. Застосувавши алгебраїчні перетворення матричного рівняння $(A-B)C = BA^{-1}$ можна показати його еквівалентність до $AC - BC - BA^{-1} + AA^{-1} = I$. З іншого боку це еквівалентно до $(A-B)(C + A^{-1}) = I$. Отже, $(A-B)^{-1} = C + A^{-1}$, означаючи, що також має місце рівність $(C + A^{-1})(A-B) = I$. Розкриття дужок дає нам шуканий результат.

Приклад 1.13.6. Знайдіть всі пари (a,b) дійсних чисел, для яких існує єдина симетрична матриця M розмірності 2×2 з дійсними елементами, що задовольняє умови: $trM = a$ та $det(M) = b$.

Розв'язання. Позначимо задану матрицю

$$M = \begin{bmatrix} x & z \\ z & y \end{bmatrix}.$$

За двома початковими умовами, маємо: $x+y=a$ та $xy-z^2=b$. Оскільки ці рівняння симетричні відносно взаємозаміни $x \leftrightarrow y$, матриця буде єдиною, якщо $x=y$. Звідси, $2x=a$, $x^2-z^2=b$. Крім того, якщо (x,y,z) – є розв'язком системи рівнянь, то розв'язком також буде $(x,y,-z)$. Отже M буде єдиною, якщо $z=0$. Це означає, що $2x=a$, $x^2=b$, отже $a^2=4b$ і

$$M=\begin{bmatrix} a/2 & 0 \\ 0 & a/2 \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.13.7. (IMC, 2015) Для будь-якого цілого $n \geq 2$ та двох квадратних $n \times n$ матриць A,B з дійсними елементами, що задовольняють рівність

$$A^{-1}+B^{-1}=(A+B)^{-1}$$

доведіть, що $det(A)=det(B)$.

Розв'язання. Домножимо рівняння на $(A+B)$ зліва в обох частинах рівності:

$$(A+B)\left(A^{-1}+B^{-1}\right)=(A+B)(A+B)^{-1}$$

$$AA^{-1}+AB^{-1}+BA^{-1}+BB^{-1}=I$$

$$AB^{-1}+BA^{-1}+I=\mathrm{O}.$$

Покладемо $X=AB^{-1}$; тоді $A=XB$ та $BA^{-1}=X^{-1}$, тоді матимемо $X+X^{-1}+I=\mathrm{O}$; домножимо це рівняння на $(X-I)X$ зліва у обох частинах рівності:

$$(X-I)X\left(X+X^{-1}+I\right)=\mathrm{O}$$

$$(X-I)\left(X^2+X+I\right)=\mathrm{O}$$

$$X^3-I=\mathrm{O}$$

Отже,

$$X^3=I$$

$$(\det X)^3=\det\left(X^3\right)=\det I=1$$

$$\det X=1$$

$$\det A=\det(XB)=\det X\cdot\det B=\det B.$$

Приклад 1.13.8. (IMC, 2016) Нехай k та n – деякі натуральні числа. Послідовність $(A_1,A_2,\ldots,A_k)$ квадратних матриць розмірностей $n\times n$ з дійсними елементами назвемо *привілейованими*, якщо $A_i^2\neq 0$ для $1\le i\le k$, але $A_iA_j=0$ для $1\le i,j\le k$ з $i\neq j$. Покажіть, що $k\le n$ для всіх таких *привілейованих* послідовностей матриць та наведіть приклад *привілейованої* послідовності у випадку $k=n$ для кожного n.

Розв'язання. Для кожного $i=1,\ldots,n$, оскільки $A_iA_i\neq 0$, існує стовпець $v_i\in\mathbb{R}^n$ у A_i, такий, що $A_iv_i\neq 0$. Тепер ми покажемо, що вектори $v_1,\ldots,v_k$ є лінійно незалежними; це й буде доведенням $k\le n$.

Припустимо, що лінійна комбінація $v_1,\ldots,v_k$ дорівнює нулю:

$$c_1v_1+\ldots+c_kv_k=0,\ c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{R}.$$

Для $i\neq j$, ми матимемо $A_iA_j=0$; зокрема, $A_iv_j=0$. Тепер, для кожного $i=1,\ldots,n$, з

$$0 = A_i\left(c_1v_1 + \ldots + c_kv_k\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j\left(A_iv_j\right) = c_i\left(A_iv_i\right)$$

звідси очевидно, що $c_i = 0$. Отже, $c_1 = \ldots = c_k = 0$.

Випадок, коли $k = n$ є можливим; якщо A_i має елемент 1 на головній діагоналі на i-ій позиції та її інші елементи є нулями, тоді $A_i^2 = A_i$ та $A_iA_j = 0$ $i \neq j$.

Приклад 1.13.9. (IMC, 1997) Нехай M – оборотна матриця розмірності $2n \times 2n$, подана у блочній формі як

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ та } M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}.$$

Покажіть, що $det\, M \cdot det\, H = det\, A$.

Розв'язання. Нехай I – визначає як завжди одиничну матрицю розмірності $n \times n$. Тоді

$$det\, M \cdot det\, H = det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot det\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & H \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} = det\, A.$$

Приклад 1.13.10. Задано квадратну $n \times n$ матрицю A з дійсними елементами. Покажіть, що

$$\begin{vmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{vmatrix} = 0$$

Розв'язання. Треба лише помітити, що

$$\begin{pmatrix} A & O \\ A^3 & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix}.$$

Далі за властивістю $det\, XY = det\, X\, det\, Y$, все стає зрозуміло.

Приклад 1.13.11. Задано квадратні $n \times n$ матриці A та B з дійсними елементами, такі що $A + B = I$, $A^3 = A^2$. Доведіть, що матриця $I + AB$ має обернену та знайдіть її.

Розв'язання. Працюючи з матричними рівняннями, матимемо:

$$A + B = I$$

$$A^3 + A^2 B = A^2$$

$$A^3 + A^2 B = A^3$$

$$A^2 B = O$$

Тоді

$$A\left(I + AB\right) = A + A^2 B = A.$$

Звідси $I + AB = I$, тому матриця є оборотною (визначник дорівнює 1) та $\left(I + AB\right)^{-1} = I^{-1} = I$.

Приклад 1.13.12. Задано квадратні $n \times n$ матриці A та B з дійсними елементами, такі що $AB - BA = A$. Доведіть, що $det\, A = 0$.

Розв'язання. Методом від супротивного. Якщо $det\, A \neq 0$, тоді A є оборотною матрицею і ми матимемо:

$$I = A^{-1} A = A^{-1}\left(AB - BA\right) = B - A^{-1} BA.$$

Але ця рівність є неможливою: візьмемо слід обох частин рівняння

$$n = Tr\left(I\right) = Tr\left(B - A^{-1} BA\right) = Tr\left(B\right) - Tr\left(A^{-1} BA\right) = Tr\left(B\right) - Tr\left(B\right) = 0$$

Одержуємо суперечність, яка показує, що $det\, A = 0$.

Приклад 1.13.13. Нехай $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ діагоналізовні матриці у $\mathbb{R}$. Якщо $det\left(A^2 + B^2\right) = 0$ та $AB = BA$, то доведіть, що

$$det\,A = det\,B = 0.$$

Розв'язання. Ключовим фактом при розв'язуванні тут буде факт, що матриці можна діагоналізувати. Звідси, існує оборотна матриця $C \in M_n(\mathbb{R})$ та діагональні матриці $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$, такі що

$$A = CPC^{-1},\ B = CQC^{-1}$$

Отже,

$$\begin{aligned} 0 = det\left(A^2 + B^2\right) = \\ = det\left(CP^2C^{-1} + CQC^{-1}\right) \\ = det\left(C\left(P^2 + Q^2\right)C^{-1}\right) \\ = det\left(P^2 + Q^2\right) \\ = \prod_{i=1}^{n}\left(p_i^2 + q_i^2\right), \end{aligned}$$

де $p_i, 1 \le i \le n$ є діагональними елементами що матриці P та $q_i, 1 \le i \le n$ відповідно Q. Отже, ми маємо, що

$$p_i^2 + q_i^2 = 0 \text{ хоча б для одного } i \in \{1, \ldots, n\}$$

Також, оскільки $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, то $p_i = q_i = 0$ та нарешті робимо висновок, що:

$$det(A) = det(P) = \prod_{i=1}^{n} p_i = 0 = \prod_{i=1}^{n} q_i = det(Q) = det(B).$$

Приклад 1.13.14. Нехай $A \in M_2(\mathbb{R})$. Розглянемо

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

елементи якої задовольняють

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < \frac{1}{5}.$$

Покажіть, що $I + A$ є оборотною.

Розв'язання. Припустимо, що матриця $I + A$ не є оборотною, тоді визначник цієї матриці дорівнює нулю, тобто:

$$det(I + A) = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = (a+1)(d+1) - bc = 0.$$

Звідси $(a+1)(d+1) = bc$. Оскільки за класичною нерівністю

$$b^2 + c^2 \geq 2bc = 2(a+1)(d+1),$$

то нерівність умови задачі перетвориться на:

$$a^2 + 2(a+1)(d+1) + d^2 < \frac{1}{5}$$

$$(a+d)^2 + 2(a+d) + 2 < \frac{1}{5}$$

$$((a+d)+1)^2 < -\frac{4}{5}.$$

Оскільки квадрат є невід'ємним, то остання нерівність є хибною. Отримали протиріччя з початковим припущенням про рівність визначника нулю, а отже $I + A$ є оборотною.

Розділ 2. Математичний аналіз

Тема 1: Границі числових послідовностей

Розглядаючи задачі з цієї теми треба пригадати матеріал, який стосується рекурентних послідовностей, технік "обробки" послідовностей та пригадаємо основні теореми з курсу математичного аналізу стосовно границь числових послідовностей (Коші, Вейєрштраса, Чезаро-Штольца, Кантора і т.д.). Розпочнемо з наступного прикладу.

Приклад 2.1.1. Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – числова послідовність задана так:

$$x_n = sin1 + sin3 + sin5 + \ldots + sin(2n-1)$$

Знайдіть супремум та інфімум послідовності $\{x_n\}$.

Розв'язання. Застосувавши апарат комплексного аналізу для підрахунку скінченної суми тригонометричної функції $sin(2k-1)$, матимемо:

$$\sum_{k=1}^{n} sin(2k-1) = \mathfrak{Im}\left[\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)}\right] = \mathfrak{Im}\left[\frac{e^{i}\left(1-e^{2ni}\right)}{1-e^{2i}}\right] =$$

$$= \mathfrak{Im}\left[\frac{e^{i}\left(1-cos\,2n - i\,sin\,2n\right)}{1-e^{2i}}\right] = \mathfrak{Im}\left[\frac{i}{2\,sin1}\left(1-cos\,2n - i\,sin\,2n\right)\right] =$$

$$= \frac{1-cos\,2n}{2\,sin1}.$$

Отже, $x_n = \frac{1-cos\,2n}{2\,sin1}$ та необхідно знайти супремум та інфімум $cos\,2n$. Оскільки значення $n\,mod\,2\pi$ щільні на одиничному колі, томі і $2n\,mod\,2\pi$, отже $inf\,cos\,2n=-1$ та $sup\,cos\,2n=1$. В заключенні,

$$inf\left\{x_n\right\}=\frac{1}{2\,sin1}(1-1)=0, \qquad sup\left\{x_n\right\}=\frac{1}{2\,sin1}(1+1)=\frac{1}{sin1}.$$

Існує три основні методи для обчислення границі послідовності. Перший з них базується на наступному означенні.

Означення Коші.

(а) *послідовність* $\left(x_n\right)_n$ *збігається до скінченної границі* L *тоді і лише тоді, коли для будь-якого* $\varepsilon>0$ *існує* $n(\varepsilon)$ *таке, що для кожного* $n>n(\varepsilon)$, $\left|x_n-L\right|<\varepsilon$.

(б) *послідовність* $\left(x_n\right)_n$ *прямує до нескінченності, якщо для кожного* $\varepsilon>0$ *існує* $n(\varepsilon)$ *таке, що для* $n>n(\varepsilon)$, $x_n>\varepsilon$.

Другий метод для знаходження границі називається принципом стиску.

***Принцип стиску*.**

(а) *якщо* $a_n\le b_n\le c_n$ *для усіх* n, *і якщо* $\left(a_n\right)_n$ *та* $\left(c_n\right)_n$ *збігаються до скінченної границі* L, *тоді* $\left(b_n\right)_n$ *також збігається до* L.

(б) *якщо* $a_n\le b_n$ *для усіх* n, *і якщо* $\left(a_n\right)_n$ *прямує до нескінченності, тоді* $\left(b_n\right)_n$ *також прямує до нескінченності.*

Третій метод спрощує задачу через алгебраїчні операції до послідовностей, границі яких є відомими. Ми проілюструє кожен з методів прикладами.

Приклад 2.1.2. Нехай $(x_n)_n$ послідовність з дійсних чисел, таких, що

$$\lim_{n\to\infty}(2x_{n+1}-x_n)=L.$$

Доведіть, що послідовність $(x_n)_n$ збігається та її границею є L.

Розв'язання. За припущенням, для кожного $\varepsilon>0$ *існує* $n(\varepsilon)$ *таке, що, якщо* $n\geq n(\varepsilon)$, *тоді*

$$L-\varepsilon<2x_{n+1}-x_n<L+\varepsilon.$$

Для такого n та деякого $k>0$ додамо нерівності

$$L-\varepsilon<2x_{n+1}-x_n<L+\varepsilon,$$

$$2(L-\varepsilon)<4x_{n+1}-2x_n<2(L+\varepsilon),$$

$$\dots$$

$$2^{k-1}(L-\varepsilon)<2^k x_{n+k}-2^{k-1}x_{n+k-1}<2^{k-1}(L+\varepsilon).$$

Ми одержимо

$$\left(1+2+\ldots+2^{k-1}\right)(L-\varepsilon)<2^k x_{n+k}-x_n<\left(1+2+\ldots+2^{k-1}\right)(L+\varepsilon),$$

яка після ділення на 2^k набуде вигляду

$$\left(1-\frac{1}{2^k}\right)(L-\varepsilon)<x_{n+k}-\frac{1}{2^k}x_n<\left(1-\frac{1}{2^k}\right)(L+\varepsilon).$$

Тепер оберемо k таке, що $\left|\frac{1}{2^k}x_n\right|<\varepsilon$ та $\left|\frac{1}{2^k}(L\pm\varepsilon)\right|<\varepsilon$. Тоді для $m\geq n+k$,

$$L-3\varepsilon<x_m<L+3\varepsilon,$$

і оскільки ε довільне, то $(x_n)_n$ збігається та її границею є L.

Приклад 2.1.3. Доведіть, що границею $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Розв'язання. Послідовність $x_n=\sqrt[n]{n}-1$ ясно, що є додатною, отже достатньо обмежити її зверху послідовністю, що збігається до нуля. З цією метою ми застосуємо біном Ньютона

$$n=(1+x_n)^n=1+\binom{n}{1}x_n+\binom{n}{2}x_n^2+\ldots+\binom{n}{n-1}x_n^{n-1}+x_n^n.$$

Звідси, наприклад

$$n>\binom{n}{2}x_n^2,$$

що зводиться до нерівності $x_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$, для $n\geq 2$. Послідовність $\sqrt{\frac{2}{n-1}}$, $n\geq 2$, збігається до нуля, отже за принципом стиску, $(x_n)_n$ збігається до нуля, що і треба було довести.

Приклад 2.1.4. Задано послідовність (x_n), де $n\in\mathbb{N}$, та відомо, що

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x_n}=e, \qquad n\geq 1.$$

Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ – ?

Розв'язання.

Прологарифмуємо ліву та праву частину рівності:

$$ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x_n}=ln e$$

$$\left(n+x_n\right)ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

$$x_n=\frac{1-ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

При знаходженні границі, маємо:

$\lim\limits_{n\leftarrow\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Застосувавши двічі правило Лопіталя, отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$.

Примітка: самостійно спробуйте розв'язати задачу способом розкладу в ряд Тейлора $ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Представимо два критерія для доведення, що послідовність є збіжною без прямого її обчислення. Перша належить Карлу Вейєрштрасу.

Теорема Вейєрштраса. *Монотонна обмежена послідовність дійсних чисел є збіжною.*

Також широко у вищій математиці використовують наступний критерій збіжності.

Критерій збіжності за Коші. *Послідовність* $\left(x_n\right)_n$ *точок простору* $\mathbb{R}^n$ *є збіжною тоді і лише тоді, коли для будь-якого* $\varepsilon>0$ *існує додатне ціле* n_ε *таке, що, якщо* $n,m\geq n_\varepsilon$, $\left\|x_n-x_m\right\|<\varepsilon$.

Теорема Чезаро-Штольца. *Нехай* $(x_n)_n$ *та* $(y_n)_n$ *дві послідовності дійсних чисел, де* $(y_n)_n$ *строго зростаюча, та необмежена. Якщо*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=L,$$

тоді границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$$

існує та дорівнює L.

Теорема (наслідок теореми Чезаро-Штольца). *Якщо* $(a_n)_{n\ge1}$ *збігається до* L, *тоді* $s_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, $n\ge1$, *також збігається до* L.

Вправи з теми: “Границі числових послідовностей”

Приклад 2.1.5. Обчисліть границю

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)\right|.$$

Приклад 2.1.6. Нехай $(x_n)_n$ послідовність додатних цілих чисел таких, що $x_{x_n}=n^4$ для усіх $n\ge1$. Чи є вірним, що $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$?

Приклад 2.1.7. Нехай $(a_n)_n$ послідовність дійсних чисел, що володіє властивістю, що для будь-якого $n\ge2$ існує ціле k, $\frac{n}{2}\le k<n$, таке, що $a_n=\frac{a_k}{2}$. Доведіть, що $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Приклад 2.1.8. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1} dx = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2.1.9. Нехай a – додатне дійсне число та $(x_n)_{n\ge1}$ – послідовність дійсних чисел таких, що $x_1 = a$ та

$$x_{n+1} \ge (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k \text{ для усіх } n \ge 1.$$

Знайдіть границю послідовності.

Приклад 2.1.10. Доведіть, що послідовність $(a_n)_{n\ge1}$ означена як

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - ln(n+1), \qquad n \ge 1,$$

є збіжною. *Підказка: теорема Вейєрштраса.*

Приклад 2.1.11. Доведіть, що послідовність

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}, \qquad n \ge 1,$$

є збіжною. *Підказка: теорема Вейєрштраса.*

Приклад 2.1.12. Нехай $(a_n)_n$ послідовність дійсних чисел, яка задовольняє рекурентному співвідношенню $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n - 1}$, для $n \ge 1$. Доведіть, що $a_1 \notin (-2,1)$. *Підказка: теорема Вейєрштраса.*

Приклад 2.1.13. Нехай p – дійсне число, $p \ne 1$. Обчисліть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Підказка: теорема Чезаро-Штольца.

Приклад 2.1.14. Нехай $0 < x_0 < 1$ та $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ для $n \ge 0$. Обчисліть $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$. *Підказка: теорема Чезаро-Штольца.*

Приклад 2.1.15. Нехай $x_0 \in [-1,1]$ та $x_{n+1} = x_n - arcsin\left(sin^2 x_n\right)$ для $n \geq 0$. Обчисліть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} x_n$. *Підказка: теорема Чезаро-Штольца.*

Тема 2: Ряди. Знаходження суми ряду. Телескопічні ряди та нескінченні добутки.

Нагадаємо, що рядом називається сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Одне з головних питань стосовно рядів є поняття збіжності. Збіжність може бути виражена на мові ε-δ, або через порівняння його з іншими рядами. Для порівняння найчастіше випростовують такі два ряди:

(i) *геометричний ряд*

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

який збігається, якщо $|x| < 1$ та розбігається в інших випадках;

(ii) p-*ряди*

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots,$$

який збігається при p>1 *та розбігається в інших випадках.*

В поєднанні з ознаками порівняння, необхідними та достатніми умовами збіжності рядів та деякими прийомами знаходження їх сум, вони стали важливою складовою задач олімпіадного характеру з аналізу.

Тепер перейдемо до прикладів.

Приклад 2.2.1. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ невід'ємні числа. Доведіть, що з $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_{n+1}a_n} < \infty$.

Розв'язання. За нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним, матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_{n+1}a_n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_n < \infty.$$

Отже, ряд збігається.

Приклад. 2.2.2. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+c_{n+1}}{n \cdot c_n}$ – розбіжний для довільної додатної обмеженої послідовності (c_n).

Розв'язання. За обмеженістю, маємо:

$$c_n \le M$$

$$nc_n \le nM$$

$$\frac{1}{nM} \le \frac{1}{nc_n}.$$

Досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+c_{n+1}}{n \cdot c_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot c_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n \cdot c_n}$. Врахувавши умову обмеженості, матимемо:

$$\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nc_n}.$$

Ряд правої частини нерівності – розбіжний, бо всі його члени не менші за відповідні члени гармонічного ряду, який, як відомо, є розбіжним. Тому початковий досліджуваний ряд, як сума розбіжного ряду і ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{n\cdot c_n}$ буде розбіжним. ***Примітка.*** *(Згадайте коли сума 2-х розбіжних рядів буде збіжним, та поміркуйте чому це неможливо у нашому випадку).*

Приклад. 2.2.3. Знайдіть значення нескінченної суми $\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\frac{8}{625}+\ldots$

Розв'язання. Перепишемо цю суму як: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}$. Такі ряди є арифметико-геометричною прогресією. Позначимо нашу суму:

$$S=\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\frac{8}{625}+\ldots$$

Помножимо S на $\frac{1}{5}$:

$$\frac{S}{5}=\frac{2}{25}+\frac{4}{125}+\frac{6}{625}+\frac{8}{3125}+\ldots$$

Віднімемо від S суму $\frac{S}{5}$:

$$S-\frac{1}{5}S=\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{2}{125}+\frac{2}{625}+\ldots$$

$$S-\frac{1}{5}S=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$$

$$\frac{4}{5}S=2\cdot\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$S=\frac{5}{8}.$$

Приклад. 2.2.4. Відомо, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Розв'язання. Помітимо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots\right)$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Звідси $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$.

Приклад. 2.2.5. Нехай у послідовності (u_n): $u_1>1$, $u_n>u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$, $n=2,3,\ldots$. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ збігається.

Розв'язання. Оберемо деяке число a, що задовольняє нерівність $1<a<u_1$. Тепер, врахувавши початкову нерівність, матимемо:

$$u_2>u_1>a$$

$$u_3>u_1+u_2>2a$$

$$u_4>(u_1+u_2)+u_3>4a$$

$$u_5>(u_1+u_2+u_3)+u_4>8a$$

$$\ldots$$

$$u_n>2^{n-2}a\ \Rightarrow\frac{1}{2^{n-2}a}>\frac{1}{u_n}\ \Rightarrow\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$$

За ознакою порівняння ряд правої частини нерівності збіжний, бо мажорується збіжним рядом нескінченно спадної геометричної прогресії в лівій частині нерівності.

Приклад 2.2.6. Для яких значень $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(2^n x\right)$$

збігається?

Розв'язання. Оскільки послідовність $a_n = cos\left(2^n x\right)$ задовольняє рекурентну послідовність $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$, робимо висновок, що потенційними значеннями границь є $-\frac{1}{2}$ або 1. Отже, послідовність не може прямувати до нуля (не виконується необхідна умова збіжності ряду), тому початковий ряд розбігається для $\forall x \in \mathbb{R}$.

Приклад. 2.2.7. Знайдіть значення $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{m+n}}$?

Розв'язання. Виконаємо наступні перетворення:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{m+n}} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^m 2^n} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^m}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)}{\frac{1}{2}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^m}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4^m} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Аналогічно числовим послідовностям, щоб знайти суму деякого ряду треба спробувати подати його у вигляді *телескопічного ряду і знайти його суму перейшовши до границі. Телескопічний метод також застосовний і до нескінченних добутків. Покажемо його застосування на наступних прикладах.*

Приклад 2.2.8. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{2^{n-1}}+1}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{1}{a+1}=\frac{a-1}{a^2-1}=-\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}\right) \text{ і}$$

$$\frac{1}{2(a+1)}=\frac{1}{2(a-1)}-\frac{1}{a^2-1}, \text{ то}$$

$$\frac{1}{a+1}=-\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{2(a-1)}+\frac{1}{2(a-1)}-\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{a-1}-\frac{2}{a^2-1}.$$

Тоді $u_n=2^n\cdot\frac{1}{3^{2^{n-1}}+1}=2^n\left(\frac{1}{3^{2^{n-1}}-1}-\frac{2}{3^{2^n}-1}\right)=\frac{2^n}{3^{2^{n-1}}-1}-\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}-1}$.

Отже,

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{3^{2^{k-1}}-1}-\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1}\right)=$$

$$=\left(\frac{2^1}{3^{2^0}-1}-\frac{2^2}{3^{2^1}-1}\right)+\left(\frac{2^2}{3^{2^1}-1}-\frac{2^3}{3^{2^2}-1}\right)+\left(\frac{2^3}{3^{2^2}-1}-\frac{2^4}{3^{2^3}-1}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{2^n}{3^{2^n}-1}-\frac{2^{n+1}}{3^{2^{n+1}}-1}\right)$$

Тоді, за принципом телескопа , скорочуються всі доданки окрім першого та останнього:

$$s_n=\frac{2^1}{3^{2^0}-1}-\frac{2^{n+1}}{3^{2^{n+1}}-1}=1-\frac{2^{n+1}}{3^{2^{n+1}}-1}.$$

Перейшовши до границі при $n\to\infty$, матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{2^{n-1}}+1}=\lim_{n\to\infty}(s_n)=1.$$

Пара послідовностей (a_n) *та* (p_n), *де* $p_n=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$, *називається* ***нескінченним добутком*** *і позначається* $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ *.Члени послідовності* (a_n) *називають співмножниками нескінченного добутку, а члени послідовності* (p_n) *– його частковими добутками.*

Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty}p_n=p\neq 0,$$

то нескінченний добуток називається ***збіжним****, а число* p *– його значенням. У противному разі нескінченний добуток називається* ***розбіжним****, зокрема, якщо*

$$\lim_{n\to\infty}p_n=0$$

–розбіжним до нуля.

Приклад 2.2.9. Довести, що нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$ збігається і знайти його значення.

Розв'язання. Подамо n-й співмножник у вигляді $a_n=1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$.

Тоді

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{n+3}{n+1}$$

і

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3},$$

тобто нескінченний добуток збігається, причому його значення дорівнює $\frac{1}{3}$.

Приклад 2.2.10. Довести, що нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ розбігається.

Розв’язання. Очевидно, що

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n} = n+1$$

і

$$\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty.$$

Вправи з теми: “Ряди. Знаходження суми ряду. Телескопічні ряди та нескінченні добутки.”

Приклад 2.2.11. Довести, що якщо з гармонічного ряду викреслити всі члени, в десятковому записі знаменників яких є цифра 3, то одержаний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\ldots+\frac{1}{22}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{29}+\frac{1}{40}+\ldots$$

збігається і його сума менше 25.

Приклад 2.2.12. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Приклад 2.2.13. Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n^2(2n-1)^2}$ і виразити його суму через суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Приклад 2.2.14. Нехай послідовність заданих додатних чисел (u_n) зростаюча і обмежена. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ збігається ?

Приклад 2.2.15. Знайти $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$.

Приклад 2.2.16. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{n!}$.

Приклад 2.2.17. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Приклад 2.2.18. (Putnam 1984) Подайте суму ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}$ у вигляді раціонального числа.

Приклад 2.2.19. (Putnam 1977) Обчисліть нескінченний добуток $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

Приклад 2.2.20. Знайти $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$

Тема 3: Похідна та її застосування. Теорема про середнє значення.

Під час розв'язування задач з теми треба згадати правила знаходження похідних, їх геометричну інтерпретацію. Також нашою метою буде демонстрація тієї частини класу олімпіадних задач, де використання похідної не завжди є таким очевидним.

Приклад 2.3.1. Знайдіть 100-ту похідну функції

$$f(x) = e^x cos(x), \text{ в точці } x = \pi$$

Розв'язання. Знайдемо декілька перших похідних *n*-го порядку:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)\\
&f''(x) = -2e^x \sin x\\
&f'''(x) = -2e^x(\sin x + \cos x)\\
&f^{IV}(x) = -4e^x \cos x = -4f(x)\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&\therefore\ f^{(100)}(\pi) = -4^{25} f(\pi)
\end{aligned}$$

Приклад 2.3.2. Знайдіть похідну 100-го порядку $\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$.

Розв'язання. Розкладемо дріб на суму елементарних $\dfrac{x^2+1}{x^3-x} = \dfrac{x^2-1+2}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x(x+1)(x-1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$. Звідси слідує, що:

$$f^{(100)}(x) = \frac{-100!}{x^{101}} + \frac{100!}{(x+1)^{101}} + \frac{100!}{(x-1)^{101}}.$$

Приклад 2.3.3. Нехай $f(x) = x^{\cos x + \sin x}$. Знайдіть $f'(1)$?

Розв'язання. Прологарифмуємо та продиференціюємо початкову рівність:

$$ln(f(x)) = ln\left(x^{\cos x + \sin x}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x + \sin x}{x} + ln\, x(\cos x - \sin x)$$

Поклавши $x = 1$, отримаємо: $f'(1) = \cos 1 + \sin 1$.

Приклад 2.3.4. Для $\forall x > 0, x \in \mathbb{R}$, доведіть, що $e^x > x + 1$.

Розв'язання. Введемо функцію $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x - 1$. Її перша похідна $f'(x) = e^x - 1$ має єдиний нуль $x = 0$, друга похідна $f''(x) = e^x$ – строго зростаюча. Звідси слідує, що $x = 0$ є точкою глобального мінімуму функції f, а, оскільки $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ для $x \neq 0$. Звідси випливає справедливість початкової нерівності.

Приклад 2.3.5. Довести, що для довільних $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$\frac{2\cos x}{1 + \cos x} < \frac{\sin x}{x}$$

Розв'язання. Перетворимо початкову нерівність

$$\frac{2\cos x}{1 + \cos x} < \frac{\sin x}{x} \Leftrightarrow 2x\cos x < \sin x + \cos x \sin x \Leftrightarrow tgx + \sin x - 2x > 0.$$

Розглянемо функцію $f(x) = tgx + \sin x - 2x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. При $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{cos^2 x}+cos\,x-2>\frac{1}{cos^2 x}+cos^2 x-2>0,$$

оскільки $\frac{1}{cos^2 x}+cos^2 x>2$. Таким чином, функція $f(x)$ є неперервною і монотонно зростаючою на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, тобто $f(x)=tgx+sin\,x-2x>0=f(0)$, або $\frac{2cos\,x}{1+cos\,x}<\frac{sin\,x}{x}$ для всіх $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, що й треба було довести.

Приклад 2.3.6. Функція $f(x)$ задовольняє умови: $f(1)=1$, $f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$, $\forall x\geq 1$. Довести, що існує $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ і що ця границя не більше, ніж $1+\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $f'(x)>0$ $\forall x>1$, а це означає, що функція $f(x)$ зростає на проміжку $(1;\infty)$. Крім того, з умови задачі також випливає, що $f(x)=\int_1^x\frac{dx}{x^2+f^2(x)}+1$ $\forall x\geq 1$. А це означає, що $f(x)<\int_1^x\frac{dx}{x^2+1}+1=\frac{\pi}{4}+1$, оскільки $f(x)\geq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Приклад 2.3.7. Нехай $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ та задано функцію

$$f(x)=a_1\tan x+a_2\tan\frac{x}{2}+\ldots+a_n\tan\frac{x}{n},$$

де $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\left| f(x) \right| \le \left| tan\,x \right|$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, тоді доведіть, що

$$\left| a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \right| \le 1$$

Розв'язання. Функція $f(x)$ є диференційовною в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ та її похідна буде

$$f'(x) = \frac{a_1}{cos^2 x} + \frac{a_2}{2cos^2 \frac{x}{2}} + \ldots + \frac{a_n}{n\,cos^2 \frac{x}{n}}.$$

Тоді видно, що доведення нерівності $\left| a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \right| \le 1$ співпадає з доведенням $\left| f'(0) \right| \le 1$. Помітимо, що для усіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ виконується

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \le \left| \frac{tan\,x}{x} \right|.$$

Отже,

$$\left| f'(0) \right| = \left| \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \le \lim_{x \to 0} \left| \frac{tan\,x}{x} \right| = 1.$$

Приклад 2.3.8. Про диференційовані функції f,g,h відомо,що

$$\begin{cases} f(0) = g(0) = h(0), \\ f'(x) = g(x), g'(x) = h(x), h'(x) = f(x) \end{cases}$$

для будь-якого $x \in \mathbb{R}$. Обчислити значення

$$f^3(1) + g^3(1) + h^3(1) - 3f(1)g(1)h(1).$$

Розв'язання. Знайдемо похідну функції

$a(x)=f^3(x)+g^3(x)+h^3(x)-3f(x)g(x)h(x)$:

$$a'(x)=3f^2(x)f'(x)+3g^2(x)g'(x)+3h^2(x)h'(x)-3f'(x)g(x)h(x)-$$
$$-3f(x)g'(x)h(x)-3f(x)g(x)h'(x)=0$$

Тобто функція $a(x)$ є сталою, а отже, $a(1)=a(0)=0$.

Приклад 2.3.9. Припустимо, що f – дійсно значна функція, така, що f – диференційована та визначена на $[1;\infty)$ та $f(1)=1$. Також відомо, що $f'(x)=1/(x^2+f^2(x))$. Покажіть, що $f(x)\le 1+\pi/4$ для всіх $x\ge 1$.

Розв'язання. Оскільки $f'(x)=1/(x^2+f^2(x))$, то $f'(x)>0$, тобто кутовий коефіцієнт дотичної до графіка $f(x)$ завжди додатній, а отже функція $f(x)$ – строго зростаюча $f(x)\ge f(1)=1 \quad \forall x\in[1;\infty)$. Тепер помітимо, що

$$f'(x)\le\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow\int_1^x f'(t)dt\le\int_1^x\frac{dt}{t^2+1}=arctgx-\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)\le f(1)+arctgx-\frac{\pi}{4}\le 1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=1+\frac{\pi}{4}$$

Приклад 2.3.10. Знайти всі диференційовані функції $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, які задовольняють рівняння $f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)}$, де $a>0$.

Розв'язання. Заміна $\frac{a}{x}\to x$:

$$f'(x)=\frac{a}{xf\left(\frac{a}{x}\right)}, \text{ звідки випливає, що}$$

$$xf\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{a}{f'(x)}.$$

Продиференціюємо обидві частини останнього рівняння за x:

$$f''(x)=-\frac{a}{\left(xf\left(\frac{a}{x}\right)\right)^2}\left[f\left(\frac{a}{x}\right)-\frac{a}{x}f'\left(\frac{a}{x}\right)\right]$$

$$xf''(x)=-f'(x)+\frac{x\left(f'(x)\right)^2}{f(x)} \text{ або } x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Інтегруючи, дістаємо $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{C_1}{x}$, звідки $f(x)=C_2x^{C_1}$, де C_1 та C_2 – довільні сталі. Оскільки з умови задачі випливає, що $f(x)>0$ і $f'(x)>0$, то $C_1>0$ і $C_2>0$. Підставивши $f(x)=C_2x^{C_1}$ у вихідне рівняння, одержимо розв'язок $f(x)=\frac{x^C}{\sqrt{Ca^{C-1}}}$, де $C>0$.

Приклад 2.3.11. Однією з поширених помилок знаходження похідної є знаходження похідної добутку за формулою $(fg)'=f'g'$. Нехай $f(x)=e^{x^2}$. Чи існують такий інтервал (a,b) і така визначена на (a,b) ненульова функція $g(x)$, що ця хибна формула виконується для всіх $x\in(a,b)$?

Розв'язання. Прирівнявши хибну формулу до вірної, матимемо:

$$f'g' = f'g + g'f$$

$$2xe^{x^2} g' = 2xe^{x^2} g + g'e^{x^2}$$

$$\frac{dg}{dx}\left(2xe^{x^2} - e^{x^2}\right) = 2xe^{x^2} g$$

Отже, отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (*розв'яжіть його самостійно*).

Приклад 2.3.12. (IMC 1994) Нехай $f \in C^1(a,b)$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = -\infty$ та $f'(x) + f^2(x) \ge -1$ для $x \in (a,b)$. Доведіть, що $b - a \ge \pi$.

Розв'язання. Розглянемо задану нерівність

$$f'(x) + f^2(x) \ge -1$$

Перетворимо її до такого вигляду:

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} + 1 \ge 0$$

Можна помітити, що ліва частина нерівності є похідною наступної функції:

$$\frac{d}{dx}\left(arctg\left(f(x)\right) + x\right) = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} + 1 \ge 0 \text{ для } x \in (a,b).$$

Отже, $arctg\left(f(x)\right) + x$ є неспадною на інтервалі та використовуючи початкові границі отримуємо $\frac{\pi}{2} + a \le -\frac{\pi}{2} + b$. Звідси, $b - a \ge \pi$.

Нагадаємо ***теорему про середнє значення.***

Припустимо, що функція f є:

1) неперервною на відрізку $[a,b]$ та

2) диференційовною на інтервалі (a,b).

Тоді існує число c *таке, що* $a<c<b$ *та* $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Зрозуміло, що цей факт розглядається в курсі математичного аналізу, тому нашою метою буде його застосування при розв'язуванні задач олімпіадного змісту.

Приклад 2.3.13. Доведіть, що $ln(x+1)<x$ при $x>0$.

Розв'язання. Дослідимо функцію $f(t)=ln(t+1)-t$. Відмітимо, що t – фіктивна змінна, так як ми будемо використовувати x при виборі нашого інтервалу. Тепер, за визначеністю $f(t)$, вона є неперервною та диференційовною на відрізку $[0,x]$, за теоремою про середнє, маємо

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \text{ для деякого } c\in(0,x)$$

$$\frac{1}{c+1}-1=\frac{ln(x+1)-x}{x}.$$

Оскільки $c+1>1$, звідси $\dfrac{1}{c+1}-1<0$, а, отже і $\dfrac{ln(x+1)-x}{x}<0$, що рівносильне нерівності $ln(x+1)<x$ при $x>0$.

Приклад 2.3.14. Чи існує така неперервна функція $f(x)$, що $f(0)=-1$ $f(2)=4$ та $f'(x)\le 2$ для усіх x?

Розв'язання. Якщо така функція існує, тоді з теореми про середнє значення існує таке число c, що $0<c<2$ та

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{5}{2}.$$

Але це неможливо, тому що за припущенням $f'(x) \le 2$. Отже, такої функції не існує.

Приклад 2.3.15. Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, а також f – диференційовна та має місце нерівність

$$f(4) < f'(x) < f(5),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доведіть, що f – строго зростаюча функція.

Розв'язання. За теоремою про середнє, існує таке $c \in (4,5)$, що $f'(c) = f(5) - f(4)$, отже $f(4) < f(5) - f(4) < f(5)$ або $f(4) > 0$. Звідси слідує $f'(x) > f(4) > 0$ для всіх x, тобто f – строго зростаюча функція.

Приклад 2.3.16. Нехай $f(x)$ – двічі диференційовна на відрізку $[-2,2]$ функція, така що $|f(x)| \le 1$ та $f^2(0) + \left[f'(0)\right]^2 = 4$. Доведіть, що $\exists \xi \in (-2,2)$: $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = \left[f(x)\right]^2 + \left[f'(x)\right]^2$. Тоді за умовою $g(0) = 4$. Тепер застосуємо теорему Лагранжа про середнє на інтервалі $(0,2)$ для $f(x)$. Матимемо

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(\alpha)$$

для деякого $\alpha \in (0,2)$.

За умовою $|f(x)| \le 1$, матимемо $-1 \le f'(\alpha) \le 1$. Аналогічно застосуємо теорему про середнє на інтервалі $(-2,0)$ для $f(x)$. Матимемо

$$\frac{f(0)-f(-2)}{2}=f'(\beta),$$

де знову $-1\leq f'(\beta)\leq 1$ для деякого $\beta\in(-2,0)$.

Звідси $g(\alpha)\leq 2$, так як $|f(\alpha)|\leq 1$ та $f'(\alpha)\leq 1$. Оскільки $f(x)$ – двічі диференційовна функція, $g(x)$ – неперервна функція. Отже крива $g(x)$ перетинає пряму $y=2$, скажімо в точці $x=x_2$ з інтервалу $(0,2)$ та точці $x=x_1$ з інтервалу $(-2,0)$. Тому, за теоремою Ролля для функції $g(x)$ в інтервалі (x_1,x_2), матимемо

$$\exists\xi\in(-2,2),\text{ таке що } g'(\xi)=0.$$

Але $g'(\xi)=2f'(\xi)\left[f(\xi)+f''(\xi)\right]$. Зауважимо, що $g(x)\geq 2$ для $\forall x\in[x_1,x_2]$, але $f(x)\leq 1$. Отже, $f'(x)$ не може бути нулем на цьому відрізку. Звідси, робимо висновок, що $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

Приклад 2.3.17. (VJMC 2018) Знайдіть всі дійсні розв'язки рівняння

$$17^x+2^x=11^x+8^x$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння

$$17^x-11^x=8^x-2^x.$$

Легко бачити, що $x=0$ розв'язок. Зафіксуємо деяке $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ та припустимо, що це розв'язок нашого рівняння. Розглянемо функцію $f(t)=t^x$. За *теоремою про середнє значення* на відрізку $[2,8]$ існує таке $t_1\in(2,8)$, що

$$6f'(t_1)=f(8)-f(2)=8^x-2^x.$$

За цією ж теоремою на відрізку $[11,17]$ матимемо

$$6f'(t_2) = f(17) - f(11) = 17^x - 11^x.$$

Оскільки x є розв'язком та $x \neq 0$, маємо

$$6f'(t_1) = 6f'(t_2)$$

$$6xt_1^{x-1} = 6xt_2^{x-1} \Rightarrow t_1^{x-1} = t_2^{x-1}$$

$$(t_1/t_2)^{x-1} = 1.$$

Тому $x = 1$, оскільки $t_1 < t_2$, а отже маємо ще один розв'язок.

Вправи з теми: "Похідна та її застосування. Теорема про середнє значення."

Приклад 2.3.18. Про функції f, g та $\frac{f}{g}$ відомо, що значення їх похідних в точці $x = 2013$ однакові і не дорівнюють нулеві. Які значення може набувати число $f(2013)$?

Приклад 2.3.19. Знайти $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, якщо $f\left(\frac{x}{x+2}\right) = x$.

Приклад 2.3.20. (Putnam 1992) Нехай f неперервно диференційована дійсно значна функція на області дійсних чисел. Якщо

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Обчисліть значення похідних $f^{(k)}(0), k = 1, 2, 3, \ldots$.

Приклад 2.3.21. Для функції $f(x) = (x^2+1)cos\,2x$ знайти похідну 2017-го порядку

Підсказка. Застосуйте *формулу Лейбніца* для похідної добутку.

Приклад 2.3.22. Знайдіть похідну 10-го порядку $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x^2}$ в точці $x=0$.

Підсказка. Розкладіть функцію в ряд Маклорена.

Приклад 2.3.23. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} f'=f\,sin\,x+g\,cos\,x, \\ g'=g\,sin\,x+f\,cos\,x, \\ f\left(0\right)=g\left(0\right)=1. \end{cases}$$

Тема 4: Інтеграли та способи їх обчислення. Суми Рімана. Диференціювання під знаком інтеграла.

Спочатку нашою метою буде опанування деяких вишуканих методів для підрахунку невизначених та визначених інтегралів та їх застосування на нестандартних задач з аналізу. Тому розпочнемо з наступного прикладу.

Приклад 2.4.1. Обчисліть $I_1=\int\dfrac{sin\,x}{sin\,x+cos\,x}dx$ та $I_2=\int\dfrac{cos\,x}{sin\,x+cos\,x}dx$.

Розв'язання. Традиційним способом розв'язування інтегралів такого виду є підстановка $tg\dfrac{x}{2}=t$. Але ми покажемо простіший спосіб, для цього запишемо наступну систему:

$$I_1+I_2=\int\frac{sin\,x+cos\,x}{sin\,x+cos\,x}dx=\int 1dx=x+C_1,$$

$$-I_1+I_2=\int\frac{cos\,x-sin\,x}{sin\,x+cos\,x}dx=ln\left(sin\,x+cos\,x\right)+C_2,$$

розв’язуючи, отримаємо:

$$I_1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}ln\left(sin\,x+cos\,x\right)+C_1' \text{ або } I_2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}ln\left(sin\,x+cos\,x\right)+C_2'.$$

Приклад 2.4.2. Обчисліть $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^{2005}x}{sin^{2005}x+cos^{2005}x}dx$.

Розв’язання. Позначимо початковий інтеграл через I_1. Введемо допоміжний інтеграл $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^{2005}x}{sin^{2005}x+cos^{2005}x}dx$. Складемо $I_1+I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$. Зробимо заміну в I_1: $x=\frac{\pi}{2}-t$. Тоді, врахувавши, що $dx=-dt$ та $cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=sin\,t$ і $sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=cos\,t$, матимемо

$$I_1=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{cos^{2005}t}{cos^{2005}t+sin^{2005}t}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^{2005}t}{cos^{2005}t+sin^{2005}t}dt.$$ Отже, $I_1=I_2=\frac{\pi}{4}$.

Приклад 2.4.3. Обчисліть $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{2009}}{x^{4021}+x^{4020}+x+1}dx$.

Розв’язання. Зробивши в інтегралі заміну змінної $y=\frac{1}{x}$, одержимо:

$$I=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{2009}}{x^{4021}+x^{4020}+x+1}dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{dy}{y^{2011}\left(y^{-4021}+y^{-4020}+y^{-1}+1\right)}=\int\limits_0^{\infty}\frac{y^{2010}dy}{y^{4021}+y^{4020}+y+1}$$

Тому

$$2I=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{2009}+x^{2010}}{x^{4021}+x^{4020}+x+1}dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{2009}}{x^{4020}+1}dx=\frac{1}{2010}arctg\,x^{2010}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{4020}.$$

Звідси одержуємо $I=\frac{\pi}{8040}$.

Приклад 2.4.4. Обчисліть $\int\limits_0^1 \left(\sqrt[4]{1-x^7} - \sqrt[7]{1-x^4} \right) dx$.

Розв'язання. Помітимо, що для $x, y \ge 0$ функція $y = \sqrt[7]{1-x^4}$ еквівалентна запису $y^7 + x^4 = 1$ або $x = \sqrt[4]{1-y^7}$. Оскільки обидві функції є оберненими одна одній та відображають $[0,1] \to [0,1]$, обидві площі повинні бути рівними, тобто: $\int\limits_0^1 \left(\sqrt[4]{1-x^7} - \sqrt[7]{1-x^4} \right) dx = 0$.

Приклад 2.4.5. Які значення може приймати інтеграл

$$\int\limits_0^1 xf(x) f'(x) dx,$$

якщо f – деяка неперервно диференційована функція, така, що $f(1) = 0$?

Розв'язання. Проінтегруємо частинами:

$$\int\limits_0^1 xf(x) f'(x) dx = \begin{vmatrix} u = xf(x) & du = \left(f(x) + xf'(x) \right) dx \\ dv = f'(x) dx & v = f(x) \end{vmatrix} =$$

$$= xf^2(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f^2(x) dx - \int\limits_0^1 xf(x) f'(x) dx.$$

Враховуючи, що $f(1) = 0$, отримаємо:

$$\int\limits_0^1 xf(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 f^2(x) dx \le 0,$$

Оскільки функція f^2 невід'ємна.

Покажемо тепер, що наш інтеграл може приймати будь-яке значення з проміжку $(-\infty; 0]$. Для цього розглянемо функцію

$f(x)=\alpha(x-1), \alpha\in\mathbb{R}$ (така функція задовольняє умову задачі, оскільки $f(1)=0$).

$$\int_0^1 xf(x)f'(x)dx=\int_0^1 x\alpha(x-1)\alpha dx=\alpha^2\int_0^1(x^2-x)dx=-\frac{1}{6}\alpha^2.$$

Обираючи потрібне $\alpha\in\mathbb{R}$, можемо досягати довільного від'ємного значення.

Приклад 2.4.6. Нехай $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $x\neq 0$. Нехай $f^{(n)}$ позначає похідну *n*-го порядку. Доведіть, що

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<\frac{1}{n+1}$$

Розв'язання. Зауважимо, що

$$\frac{\sin x}{x}=\int_0^1\cos\alpha x\,d\alpha$$

Отже,

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|(-1)^n\int_0^1\alpha^n\cos\alpha x\,d\alpha\right|=$$

$$=\left|\int_0^1\alpha^n\cos\alpha x\,d\alpha\right|<$$

$$<\int_0^1\alpha^n\,d\alpha=\frac{1}{n+1}$$

Приклад 2.4.7. Нехай $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ – двічі диференційовна функція, така що $f''(x)>0$ для всіх $x\in[0,2]$. Доведіть, що

$$\int_0^2 f(x)dx>2f(1).$$

Розв'язання. Рівняння дотичної (l) в точці $x_0=1$ буде

$$(l): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Оскільки $f''(x) > 0$ для всіх $x \in [0,2]$, то функція строго опукла. Отже, дотична лежить під графіком f, окрім точки дотику $x_0 = 1$. Звідси,

$$f(x) \geq f'(1)(x-1) + f(1) \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx > \int_0^2 f'(1)(x-1)dx + f(1)\int_0^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx > 2f(1)$$

Приклад 2.4.8. Нехай f – неперервна дійснозначна функція на $(0,+\infty)$, яка задовольняє тотожність

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \text{ для усіх } x \in (0,+\infty).$$

Обчисліть інтеграл

$$I = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{dx}{(1+x^2)\left(1+a^{f(x)}\right)}.$$

Розв'язання. Ми застосуємо класичну підстановку $u = \dfrac{1}{x}$, тоді:

$$I = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{dx}{(1+x^2)\left(1+a^{f(x)}\right)} \overset{u=1/x}{=} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+a^{f\left(\frac{1}{x}\right)}\right)} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{dx}{(1+x^2)\left(1+a^{-f(x)}\right)} = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{a^{f(x)}dx}{(1+x^2)\left(1+a^{f(x)}\right)}$$

Тоді, $2I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{dx}{(1+x^2)\left(1+a^{f(x)}\right)} + \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{a^{f(x)}dx}{(1+x^2)\left(1+a^{f(x)}\right)} = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{dx}{(1+x^2)}.$

Звідси $I = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{2}\left[arctan\, x\right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} = \frac{\pi}{8}$.

Приклад 2.4.9. Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – двічі диференційовна функція, така що $f''(x)>0$ для усіх $x\in\mathbb{R}$. Якщо f має локальний екстремум у точці $x_0=0$ та значення $f(x_0)=0$, а також виконується

$$f(-2)+f(2)=2017,$$

тоді:

(i) Обчисліть площу, обмежену графіком f', прямими $x=-2$, $x=2$ та віссю $x'x$.

(ii) Нехай $0\le a<b\in\mathbb{R}$. Якщо

$$\int_a^b f(t)dt > (b-a)f(a),$$

то доведіть, що

$$f(0)+f(1)+\ldots+f(2016) < \int_0^{2017} f(t)dt$$

(iii) Доведіть, що f має обернену на $(0,+\infty)$. Якщо вам також відомо, що графік функції проходить через точки $(1,8)$ та $(10,13)$, обчисліть значення

$$I = \int_1^{10} f(x)dx + \int_8^{13} f^{-1}(x)dx.$$

(iv) Доведіть, що для всіх $x\in[1,10]$ виконується

$$f^2(x)-21f(x)+104\le 0.$$

Розв'язання. Оскільки $f''(x)>0$ для усіх $x\in\mathbb{R}$, то функція опукла. Також можна стверджувати, що f' є строго зростаючою на $\mathbb{R}$. Оскільки f має локальний екстремум у точці $x_0=0$, то це має бути локальним мінімумом, тому що $f'(0)=0$ (це слідує з теореми Ферма) та поєднуючи ці два наслідки, маємо

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0.$$

(i) Площа, обмежена графіком f', прямими $x=-2$, $x=2$ та віссю $x'x$ дорівнює

$$E(\Omega)=\int_{-2}^{2}\left|f'(x)\right|dx=\int_{-2}^{0}\left|f'(x)\right|dx+\int_{0}^{2}\left|f'(x)\right|dx=$$

$$=-\int_{-2}^{0}f'(x)dx+\int_{0}^{2}f'(x)dx=$$

$$=f(-2)+f(2)=2017.$$

(ii) Слідом за цим, маємо

$$\int_{0}^{2017}f(x)dx=\sum_{k=0}^{2016}\int_{k}^{k+1}f(t)dt>\sum_{k=0}^{2016}f(k)(k+1-k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{2016}f(k)=f(0)+f(1)+\ldots+f(2016)$$

(iii) Ми розпочнемо зі класичної заміни $u=f^{-1}(x)$, тоді:

$$\int_{1}^{10}f(x)dx+\int_{8}^{13}f^{-1}(x)dx\overset{u=f^{-1}(x)}{=}\int_{1}^{10}f(x)dx+\int_{1}^{10}xf'(x)dx=$$

$$\int_{1}^{10}f(x)dx+\left[xf(x)\right]_{1}^{10}-\int_{1}^{10}f(x)dx=\left[xf(x)\right]_{1}^{10}=$$

$$\left[xf(x)\right]_{1}^{10}=10f(10)-f(1)=10\cdot 13-8=130-8=122.$$

(iv) Тут просто помітимо, що

$$f^2(x)-21f(x)+104=\left[f(x)-8\right]\left[f(x)-13\right],$$

а звідси випливає бажана нерівність.

Приклад 2.4.10. (Seemous 2016) Нехай $n\geq 1$ будь-яке натуральне число, покладемо

$$I_n=\int_0^{\infty}\frac{arctan\,x}{\left(1+x^2\right)^n}dx.$$

Доведіть, що:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n}{n}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Розв'язання. Оскільки похідна від $\left(arctan\,x\right)'=\frac{1}{1+x^2}$, то доцільно виконати наступну заміну в підінтегральній функції: $arctan\,x=t$. Тоді $\frac{dx}{1+x^2}=dt$, $\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}=\left(cos\,t\right)^{2n-2}$, нові межі: нижня $arctan0=0$, верхня $arctan\infty=\frac{\pi}{2}$. Інтеграл набуде вигляду:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left(cos\,t\right)^{2n-2}dt$$

Як відомо, такі інтеграли називаються *рекурентними*, і переважно зв'язані рекурентними співвідношеннями. З цією метою подамо інтеграл у наступному вигляді:

$$I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left(cos\,t\right)^{2n}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left(cos\,t\right)^{2n-1}\left(sin\,t\right)'dt.$$

Останній інтеграл проінтегруємо частинами (з метою опанування ідеї розв'язування пропонуємо читачеві самостійно це виконати, поклавши $u = t(cos\,t)^{2n-1}$, $dv = (sin\,t)'$). В результаті одержимо рекурентне співвідношення вигляду:

$$I_{n+1} = -\frac{1}{2n} + (2n-1)I_n - (2n-1)I_{n+1}$$

або у еквівалентній формі

$$\frac{I_n}{n} = 2(I_n - I_{n+1}) - \frac{1}{2n^2}.$$

Тоді шукана сума:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2(I_n - I_{n+1}) - \frac{1}{2n^2}\right) = 2I_1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Визначений інтеграл від функції є площею її підграфіка. При наближенні площі підграфіка сімейством прямокутників, сума площ прямокутників, яка називається сумою Рімана, наближує значення інтеграла. Коли ці прямокутники мають однакову ширину, наближення інтеграла рімановою сумою запишеться як

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx,$$

де ξ_i *– число з інтервалу* $\left[a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)\right]$.

Оскільки сума Рімана залежить від натурального n, *то її можна розглядати як вираз заданої послідовності. Іноді члени послідовності* ***можна розглянути як ріманові суми певної***

функції, *і це можна використати при знаходженні границі послідовності. Покажемо, як це працює на конкретному прикладі.*

Приклад 2.4.11. Обчисліть границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Розв'язання. Якщо переписати

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

як

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right],$$

можна помітити, що даний вираз є рімановою сумою функції $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$, що відповідає підрозбиттю $x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<\ldots<x_n=\frac{n}{n}=1$, з вибором середньої точки $\xi_i=\frac{i}{n}\in[x_i,x_{i+1}]$. Звідси слідує, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}=ln(1+x)\Big|_0^1=ln2.$$

Приклад 2.4.12. (VJIMC, 1999) Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1999}{n}}-1\right)ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+n}\right)\right).$$

Розв'язання. Виконаємо наступні перетворення:

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1999}{n}}-1\right)ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{1999}{n}}-1\right)}{\frac{1999}{n}}\frac{1999}{n}ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+n}\right)\right)=$$

$$=1999\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ln\left(\frac{k}{k+n}\right)=1999\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ln\left(\frac{1}{1+\frac{n}{k}}\right)=$$

$$=1999\int_0^1 ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx=-3998\,ln\,2.$$

Диференціювання під знаком інтеграла це операція у математичному аналізі, яка використовується для обчислення деяких інтегралів. Враховуючи, що функція підпорядкована певним умовам, цей метод інтегрування дозволяє змінити порядок інтегрування та диференціювання. У найпростішій формі, він називається ***інтегральною формулою Лейбніца****:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt=\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt.$$

Багато інтегралів, які неможливо обчислити стандартними методами (заміна, інт. частинами і т.і.) можуть бути обчислені за допомогою цього методу.

Загальний вигляд*. Найбільш загальний вигляд диференціювання під знаком інтеграла передбачає наступне: якщо* $f(x,t)$ *неперервна та неперервно диференційована (тобто частинні похідні існують та також є неперервними) функція та* *межі інтегрування $a(x)$ та $b(x)$ неперервні та неперервно диференційовані функції змінної x, тоді:*

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = f\left(x,b(x)\right)\cdot b'(x) - f\left(x,a(x)\right)\cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

Якщо $a(x)$ та $b(x)$ є сталими функціями, формула набуває найпростішого вигляду:

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{b} f(x,t)dt = \int_{a}^{b} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

В загальному, використання методу диференціювання під знаком інтегралу для обчислення інтегралів розглядається в смислі належності до деякого сімейства інтегралів параметризованих дійсною змінною. Для кращого розуміння цього твердження, розглянемо наступний приклад:

Приклад 2.4.13. Обчисліть визначений інтеграл

$$\int_0^1 \frac{t^3-1}{lnt}dt.$$

Розв'язання. Інтеграл не піддається стандартним технікам, таким як інтегрування частинами, заміна і т.і. Ми застосуємо диференціювання під знаком інтегралу для його обчислення. Як обрати функцію для диференціювання під знаком інтегралу? Поява lnt в знаменнику підінтегральної функції є досить незручним моментом, тому нам потрібно якимось чином позбутися цього. Завдяки тому, що

$$\frac{d}{dx}t^x = t^x\,lnt,$$

це і буде ключем до позбавлення lnt в знаменнику. Тобто, ми визначаємо функцію:

$$g(x)=\int_0^1 \frac{t^x-1}{lnt}dt.$$

При такому означенні, інтеграл, який нас цікавить є значенням функції в точці $x=3$. Його можна розглядати як член сімейства визначених інтегралів $g(x)$ за змінною x.

За правилом Лейбніца для інтегралів, ми рахуємо

$$g'(x)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{t^x-1}{lnt}dt=\int_0^1 \frac{t^x\,lnt}{lnt}dt=\left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right|_0^1=\frac{1}{x+1}.$$

Звідси слідує, що $g(x)=ln|x+1|+C$. Для визначення сталої, помітимо, що $g(0)=0=ln|0+1|+C=C$. Отже, $g(x)=ln|x+1|$ для всіх x таких, що інтеграл існує. Зокрема, $g(3)=ln4=2ln2$.

Цей приклад є гарною ілюстрацією для наступної поради: якщо Ви "зациклилися" на певній задачі, спробуйте вирішити більш загальну проблему.

Також, вважаємо доцільним навести контрприклад, для якого застосування цього методу є хибним. Наприклад, припустимо необхідно обчислити інтеграл:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

Виконавши заміну $u=x/t$ для деякого $t\neq 0$. Тоді,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\infty \frac{\sin tu}{u}du=g(t).$$

Диференціювання під знаком інтегралу дає нам

$$0 = g'(t) = \int_0^\infty \cos tu\, du,$$

рівність, яка не має змісту. Проблема полягає в тому, що функція $f(x,t) = \sin tx/x$ *не є неперервно диференційованою (розгляньте* $\partial f/\partial t$*, коли* $x = 0$*), а ця умова є необхідною для застосування методу диференціювання під знаком інтегралу.*

Вправи з теми: "Інтеграли та способи їх обчислення. Суми Рімана. Диференціювання під знаком інтеграла."

Приклад 2.4.14. Обчисліть наступні невизначені інтеграли:

а) $\int (1+2x^2)e^{x^2}dx$; б) $\int \frac{x+\sin x-\cos x-1}{x+e^x+\sin x}dx$;

в) $\int (x^6+x^3)\sqrt[3]{x^3+2}\,dx$; г) $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx, \quad x>0$.

Приклад 2.4.15. Обчисліть наступні визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}}dx$; б) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx$;

в) $\int_0^1 \sqrt[3]{2x^3-3x^2-x+1}\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

Приклад 2.4.16. Обчисліть інтеграл

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Використайте відповідь для доведення *формули Валліса*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n} = \pi.$$

Приклад 2.4.17. Нехай $f(1)+g(1)=9e$, $f(x)=-x^2g'(x)$, $g(x)=-x^2f'(x)$. Обчисліть $I=\int_1^4 \frac{f(x)+g(x)}{x^2}dx$.

Підказка: проінтегруйте похідну рівність $\frac{f'+g'}{f+g}=-\frac{1}{x^2}$.

Приклад 2.4.18. Обчисліть

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right).$$

Приклад 2.4.19. Обчисліть

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

Приклад 2.4.20. Обчисліть

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Приклад 2.4.21. Доведіть, що для $n\geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2+5n}}+\frac{1}{\sqrt{4+5n}}+\frac{1}{\sqrt{6+5n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n+5n}}<\sqrt{7n}-\sqrt{5n}.$$

Приклад 2.4.22. Обчисліть

$$\lim_{n\to\infty}\left(tg\frac{\pi}{n+1}+tg\frac{\pi}{n+2}+\ldots+tg\frac{\pi}{n+n}\right).$$

Тема 5: Інтегральні нерівності.

Базова примітка: Якщо $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ інтегровна (за Ріманом) та невід'ємна функція, тоді

$$\int_a^b f(t)dt\geq 0.$$

Рівність досягається тоді і лише тоді, коли $f=0$ *майже скрізь.*

Незважаючи на простоту цієї нерівності, застосування її в багатьох випадках не є очевидним.

Приклад 2.5.1. Знайдіть всі неперервні функції $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, що задовольняють умову

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}+\int_0^1 f^2\left(x^2\right)dx.$$

Розв'язання. Спершу доб'ємося, щоб підінтегральні функції мали однакову змінну. Заміна у першому інтегралі перетворює його на $\int_0^1 f\left(x^2\right)2xdx$. Далі, подамо дріб $\frac{1}{3}$ у вигляді інтеграла, найпростіше як $\int_0^1 x^2dx$. Тоді початкова умова набуває вигляду

$$\int_0^1 2xf\left(x^2\right)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 f^2\left(x^2\right)dx.$$

Звідси

$$\int_0^1\left[f^2\left(x^2\right)-2xf\left(x^2\right)+x^2\right]dx=0.$$

Помітимо, що підінтегральна функція $f^2\left(x^2\right)-2xf\left(x^2\right)+x^2=\left(f\left(x^2\right)-x\right)^2$ є точним квадратом, тому є невід'ємною. Отже, її інтеграл на відрізку $[0,1]$ є невід'ємним, та дорівнює нулю лише в тому випадку, коли функція тотожно рівна нулю. Ми маємо, що $f\left(x^2\right)=x$. Отже, $f(x)=\sqrt{x}$ є єдиною функцією, яка задовольняє початкову умову.

Приклад 2.5.2. Нехай $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, така що

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=1$$

Доведіть, що $\int_0^1 f^2(x)dx\ge 4$.

Розв'язання. Помічаємо, що $f(x)=6x-2$ задовольняє початкове рівняння. Тоді:

$$0\le\int_0^1\left(f(x)-6x+2\right)dx=\int_0^1 f^2(x)dx-4.$$

Звідси слідує доведення нерівності.

Приклад 2.5.3. (IMC 2010) Нехай $0<a<b$. Доведіть, що

$$\int_a^b\left(x^2+1\right)e^{-x^2}dx\ge e^{-a^2}-e^{-b^2}.$$

Розв'язання. Поглянемо на праву частину нерівності як на кінцевий результат формули Ньютона-Лейбніца, тоді, виконавши зворотну дію відновимо інтеграл:

$$\int_a^b\left(x^2+1\right)e^{-x^2}dx\ge e^{-a^2}-e^{-b^2}=\left[-e^{-x^2}\right]_a^b=\int_a^b 2xe^{-x^2}dx.$$

Одержана нерівність очевидна, оскільки $x^2+1\ge 2x$.

Приклад 2.5.4. (АКНІМО, 2018) Нехай $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ – неперервна та неспадна функція. Доведіть, що

$$\int_{-1}^1 f\left(x^2+1\right)dx\ge\int_0^2 f(x)dx.$$

Коли має місце рівність?

Розв'язання. З нерівності $x^2+1 \geq 2x$ та монотонності функції f випливає, що $f\left(x^2+1\right) \geq f\left(2x\right)$ для всіх $x \in \left[0,1\right]$. Звідси,

$$\int_{-1}^{1} f\left(x^2+1\right)dx - \int_{0}^{2} f\left(x\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(f\left(x^2+1\right)-f\left(2x\right)\right)dx \geq 0.$$

Оскільки f – неперервна, рівність має місце тоді і лише тоді, коли

$$f\left(x^2+1\right) = f\left(2x\right) \text{ для всіх } x \in \left[0,1\right]. \qquad (2.5.4.1)$$

Поклавши $x=0$ у (2.5.4.1) одержимо $f\left(0\right)=f\left(1\right)$, а це означає, що f – є сталою на $\left[0,1\right]$. Розглянемо послідовність $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{4}+1$ (де $x_1=0$). Помітимо, що така послідовність є збіжною (оскільки є зростаючою та обмеженою зверху числом 2) та її границя $a=2$ (тому що $a=\frac{a^2}{4}+1$). Ми також маємо згідно (2.5.4.1):

$$f\left(x_n\right) = f\left(2\cdot\frac{x_n}{2}\right) = f\left(\frac{x_n^2}{4}+1\right) = f\left(x_{n+1}\right).$$

Отже, завдяки неперервності функції f в точці $x=2$, виконується $f\left(0\right)=f\left(x_1\right)=f\left(x_n\right) \to f\left(2\right)$. Звідси, функція f – є сталою на $\left[0,2\right]$.

Очевидно, будь-яка стала функція задовольняє рівність.

Приклад 2.5.5. (VJIMC 2018) Знайдіть всі неперервно диференційовні функції $f:\left[0,1\right] \to \left(0,+\infty\right)$ такі, що $\frac{f\left(1\right)}{f\left(0\right)}=e$ та

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(f(x)\right)^2} + \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx \le 2.$$

Розв’язання. Спочатку, помітимо, що, якщо f є такою функцією, тоді

$$0 \le \int_0^1 \left(f'(x) - \frac{1}{f(x)} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx - 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int_0^1 \frac{dx}{\left(f(x)\right)^2} =$$

$$= \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx - 2\int_0^1 \left(ln\, f(x)\right)' dx + \int_0^1 \frac{dx}{\left(f(x)\right)^2} =$$

$$= \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx - 2\, ln \frac{f(1)}{f(0)} + \int_0^1 \frac{dx}{\left(f(x)\right)^2}$$

Звідси $\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx + \int_0^1 \frac{dx}{\left(f(x)\right)^2} \ge 2$. Оскільки вимагається довести протилежну нерівність, то її справедливість можлива лише за умови рівності двійці. Маємо:

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx + \int_0^1 \frac{dx}{\left(f(x)\right)^2} = 2 \text{ або}$$

$$\int_0^1 \left(f'(x) - \frac{1}{f(x)} \right)^2 dx = 0 \qquad (2.5.5.1.)$$

Оскільки $f:[0,1] \to (0,+\infty)$ є неперервно диференційовними функціями, рівність (2.5.5.1.) еквівалентна до

$$f'(x)\, f(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]. \qquad (2.5.5.2.)$$

Розв'язавши диференціальне рівняння (2.5.5.2.), матимемо $f(x)=\sqrt{2x+C}$ для деякої сталої $C>0$. Оскільки $\frac{f(1)}{f(0)}=e$, матимемо $C=\frac{2}{e^2-1}$, а отже

$$f(x)=\sqrt{2x+\frac{2}{e^2-1}}$$

Єдина функція, що задовольняє початкову умову.

Важливий наслідок: Монотонність інтегралу, з $f\le g$ *випливає* $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$.

Тепер ми наведемо деякі фундаментальні нерівності. Розглянемо лише такі класи функцій, щоб уникнути втручань теорії інтегрування за Лебегом.

Теорема 2.5.1. *Нерівність Чебишева: якщо* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *мають однакову монотонність, тоді*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt \ge \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\cdot\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right),$$

якщо f,g *мають різну монотонність, то знак нерівності слід змінити на протилежний.*

Теорема 2.5.2. *(Теорема про середнє). Нехай* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *неперервна функція та* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *невід'ємна інтегровна функція. Тоді існує* $c\in[a,b]$ *таке, що*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Теорема 2.5.3. *(Обмеженість) Якщо* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *інтегровна, тоді* f *обмежена,* $|f|$ *інтегрована і*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\le\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(t)|dt\le\sup_{a\le t\le b}|f(t)|$$

Зауваження 2.5.4*. Якщо* f' *– інтегрована, тоді*

$$0\le\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|dx-\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{b-a}{3}\sup_{a\le x\le b}|f'(x)|$$

Зауваження 2.5.5. *Якщо* f' *– неперервно диференційовна на відрізку* $[a,b]$ *та* $f(a)=f(b)=0$*. Тоді*

$$\sup_{a\le t\le b}|f(t)|\le\frac{b-a}{2}\int_a^b|f'(t)|dt$$

Приклад 2.5.6. (IMC, 2005) Нехай $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ неперервно диференційовна функція. Доведіть, що

$$\left|\int_0^1 f^3(x)dx-f^2(0)\int_0^1 f(x)dx\right|\le\max_{0\le x\le1}|f'(x)|\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

Розв'язання. Покладемо $M=\max\limits_{0\le x\le1}|f'(x)|$. З нерівності $-M\le f'(x)\le M,\quad x\in[0,1]$ слідує:

$$-Mf(x)\le f'(x)f(x)\le Mf(x),\quad x\in[0,1].$$

Проінтегрувавши, одержимо:

$$-M\int_0^x f(t)dt\le\frac{1}{2}f^2(x)-\frac{1}{2}f^2(0)\le M\int_0^x f(t)dt,\quad x\in[0,1]$$

$$-Mf(x)\int_0^x f(t)dt \le \frac{1}{2}f^3(x)-\frac{1}{2}f^2(0)f(x) \le Mf(x)\int_0^x f(t)dt, \quad x\in[0,1]$$

Проінтегрувавши останню нерівність на відрізку $[0,1]$, маємо:

$$-M\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int_0^1 f(x)dx \le M\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left|\int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int_0^1 f(x)dx\right| \le M\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

Приклад 2.5.7. (VJIMC, 1992) Доведіть, що для неперервно диференційованої функції $f(x)$, де $f(a)=f(b)=0$,

$$\max_{x\in[a,b]}|f'(x)| \ge \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx$$

Розв'язання.

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx \le \frac{1}{(b-a)^2}\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\int_a^b dx = \frac{\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|}{b-a} =$$

$$= \frac{\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-f(a)|}{b-a} = \frac{\max\limits_{x\in[a,b]}|(x-a)f'(\xi)|}{b-a} \le \max_{\xi\in[a,b]}|f'(\xi)|$$

Теорема 2.5.6. *(нерівність Коші-Шварца) Якщо* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *інтегровні, тоді*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \le \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{1/2},$$

рівність буде мати місце, якщо f,g *будуть пропорційними майже скрізь.*

Приклад 2.5.8. Нехай H_n позначає n-е гармонічне число та $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1} \geq \frac{1}{H_n}$$

Розв'язання. Ми розпочнемо з інтегрального представлення гармонічного числа, а саме:

$$H_n = \int_0^1 \left(1+x+\ldots+x^{n-1}\right)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Отже, нам треба довести еквівалентну нерівність

$$\int_0^1 \left(x^{n-1}+\ldots+x+1\right)dx \int_0^1 \frac{dx}{x^{n-1}+\ldots+x+1} \geq 1.$$

Вона є очевидною як нерівність Коші-Шварца.

Приклад 2.5.9. (VJIMC, 2013) Нехай $f, g : [0,1] \to (0,+\infty)$ – неперервні функції, такі що f та $\frac{g}{f}$ є зростаючими функціями. Доведіть, що

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt} \leq 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}\,dt.$$

Розв'язання. Спершу, оцінимо вираз під знаком інтеграла у лівій частині даної нерівності. За нерівністю Чебишева для інтегралів від зростаючих функцій f та $\frac{g}{f}$ на відрізку $[0,x]$ (де $x \in (0,1]$ є фіксованим), ми маємо

$$\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)\left(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}dt\right) \le \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\text{, звідси}$$

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \le \frac{x}{\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}dt} \qquad (2.5.9.1)$$

для кожного $x \in (0,1]$. За інтегральною нерівністю Коші-Шварца на відрізку $[0,x]$, маємо

$$\left(\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}dt\right)\left(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2 f(t)}{g(t)}dt\right) \ge \left(\int_0^x tdt\right)^2 = \frac{x^4}{4}\text{, або}$$

$$\frac{1}{\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}dt} \le \frac{4}{x^4}\int_0^x \frac{t^2 f(t)}{g(t)}dt\,. \qquad (2.5.9.2)$$

З (*2.5.9.1*) та (*2.5.9.2*) ми одержимо

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \le \frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t^2 f(t)}{g(t)}dt\,. \qquad (2.5.9.3)$$

Остаточно, треба проінтегрувати (*2.5.9.3*) на відрізку $[0,x]$ та змінити порядок інтегрування

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \le \int_0^1\left(\int_0^x \frac{4t^2 f(t)}{x^3 g(t)}dt\right)dx = \int_0^1\left(\int_t^1 \frac{4t^2 f(t)}{x^3 g(t)}dx\right)dt = \int_0^1 \frac{4t^2 f(t)}{g(t)}\left(\int_t^1 \frac{1}{x^3}dx\right)dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{4t^2 f(t)}{g(t)}\left(\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2}\right)dt = 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}\left(1-t^2\right)dt \le 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}dt.$$

Теорема 2.5.7. *(нерівність Ерміта-Адамара) Якщо $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ – опукла функція, тоді*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

рівність можлива лише для афінних функцій.

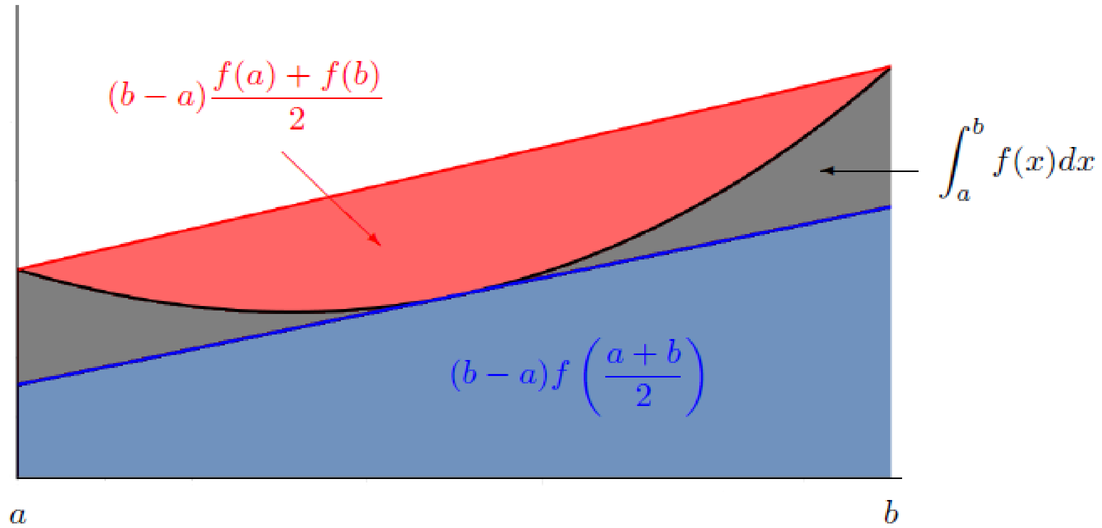

Рис 2.5.1. Ілюстрація нерівності Ерміта-Адамара

Теорема 2.5.8. *(нерівність Єнсена) Якщо* $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ *є інтегровною функцією та* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *– неперервна опукла функція, тоді*

$$f\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\right)\leq\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,dx$$

Приклад 2.5.10. (IMC, 2019) Нехай $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ – двічі диференційована функція така, що

$$2f'(x)+xf''(x)\geq 1 \text{ для } x\in(-1,1).$$

Доведіть, що

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx\geq\frac{1}{3}.$$

Розв'язання.

Нехай

$$g(x)=xf(x)-\frac{x^2}{2}.$$

Її друга похідна

$$g''(x)=\left(g'(x)\right)'=\left(\left(xf(x)-\frac{x^2}{2}\right)'\right)'=\left(f(x)+xf'(x)-x\right)'=$$

$$=2f'(x)+xf''(x)-1.$$

За умовою задачі $g''(x)=2f'(x)+xf''(x)-1\geq 0$, а отже $g(x)$ – опукла функція. Зробимо оцінку функції $g(x)$ за її дотичною в нулі. Нехай $g'(0)=a$, тоді за класичним рівнянням дотичної, маємо:

$$g(x)-g(0)=g'(0)(x-0)$$

$$(l):\ g(x)=ax+g(0)=ax.$$

Оскільки $g(x)$ – опукла функція, то її *графік знаходиться вище будь-якої дотичної проведеної до точки з області її визначення*. Тому справедливою є оцінка: $g(x)\geq ax$. Отже,

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(g(x)+\frac{x^2}{2}\right)dx\geq\int_{-1}^{1}\left(ax+\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{3}.$$

Теорема 2.5.9. *(нерівність Мінковського) Якщо* $p>1$*, тоді*

$$\left(\int_D\left|f(x)+g(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_D\left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_D\left|g(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 2.5.10. *(нерівність Гельдера) Якщо* $p,q>1$*, такі що* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*, тоді*

$$\int_D \left|f(x)g(x)\right|dx \le \left(\int_D \left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_D \left|g(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Вправи з теми: "Інтегральні нерівності"

Приклад 2.5.11. Визначте неперервні функції $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, які задовольняють

$$\int_0^1 f(x)\left(x-f(x)\right)dx=\frac{1}{12}.$$

Приклад 2.5.12. Нехай *n* непарне ціле число більше за одиницю. Визначте всі неперервні функції $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, такі що

$$\int_0^1 \left(f\left(x^{\frac{1}{k}}\right)\right)^{n-k} dx=\frac{k}{n},\quad k=1,2,\ldots,n-1.$$

Приклад 2.5.13. Нехай $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ неперервна функція, така що

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=1.$$

Доведіть, що

$$\int_0^1 f^2(x)dx\ge 4.$$

Приклад 2.5.14. Для кожної неперервної функції $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, ми означимо $I(f)=\int_0^1 x^2 f(x)dx$ та $J(f)=\int_0^1 x\left(f(x)\right)^2 dx$. Знайдіть максимальне значення $I(f)-J(f)$ над усіма такими функціями f.

Приклад 2.5.15. Нехай $0<a<b$ та $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – неперервна та зростаюча функція. Доведіть, що

$$ab\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \le \int_a^b f(x)dx$$

Підказка. (скористайтеся нерівністю Чебишева).

Приклад 2.5.16. Нехай $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ неперервна функція. Доведіть, що

$$\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 \le \int_0^1 f(t)dt.$$

Приклад 2.5.17. Знайдіть максимальне значення частки

$$\frac{\left(\int_0^3 f(x)dx\right)^3}{\int_0^3 f^3(x)dx}$$

Приклад 2.5.18. Нехай f – незростаюча функція на відрізку $[0,1]$. Доведіть, що для будь-якого $\alpha\in(0,1)$,

$$\alpha\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^\alpha f(x)dx.$$

Приклад 2.5.19. Нехай $f:[0,1]\to[0;\infty)$ – диференційовна функція зі спадною першою похідною та яка задовольняє умовам: $f(0)=0$ та $f'(0)>0$. Доведіть, що

$$\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)+1} \le \frac{f(1)}{f'(1)}.$$

Чи може мати місце рівність?

Приклад 2.5.20. Доведіть, що будь-яка неперервно диференційовна функція $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ для якої $f(a)=0$ задовольняє нерівність

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \le (b-a)^2\int_a^b f'(x)^2\,dx.$$

Приклад 2.5.21. Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – диференційовна функція, яка має обмежену похідну. Доведіть, що

$$Var(f) \le \frac{(b-a)^2}{12}\cdot \sup_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|^2,$$

де $Var(f)$ – дисперсія (варіація) функції f .

Підказка: Покладіть $M = \sup_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|$. Тоді застосуйте нерівність Чебишева до пари функцій $f(x)+Mx$ та $f(x)-Mx$ (перевірте, що вони мають протилежну монотонність).

Приклад 2.5.22. Нехай f – неперервно диференційовна на відрізку $[0,1]$. Доведіть, що

$$\sup_{0\le x\le 1}\left|f(x)\right| \le \int_0^1\left(\left|f(t)\right|+\left|f'(t)\right|\right)dt$$

та

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \int_0^1\left(\left|f(t)\right|+\frac{1}{2}\left|f'(t)\right|\right)dt$$

Приклад 2.5.23. Для довільного дійсного $t>1$, розглянемо функцію

$$f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=x^t.$$

i) Застосуйте теорему Лагранжа про середнє для порівняння $f(7)-f(6)$ з $f(9)-f(8)$;

ii) Доведіть нерівність $7^t+8^t<6^t+9^t$.

Приклад 2.5.24. Застосовуючи нерівність Коші-Шварца, доведіть, що

$$ln(n+1)-ln\,n<\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ для натурального } n$$

Приклад 2.5.25. Доведіть нерівності:

$$\int_0^1 2^{x^2}dx\le 3/2; \quad \left(\int_0^\pi e^{sin\,x}dx\right)\cdot\left(\int_0^\pi e^{-sin\,x}dx\right)\ge\pi^2.$$

Приклад 2.5.26. (Інтегральний аналог нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним). Нехай $f:[a,b]\to(0,\infty)$ – неперервна функція. Доведіть, що

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b ln\,f(x)dx}\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Gelca R., Putnam and beyond / Razvan Gelca, Titu Andreescu. – 2nd ed. – Springer, 2017. – 850 p.

2. Математичні олімпіади – 2014 : Метод. вказівки до розв’яз. задач для студ. усіх форм навчання / Уклад.: А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. – К.: НТУУ “КПІ”.– 2015. – 57 с.

3. Мітін Д.Ю. Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу: задачі студентських олімпіад. – Київ, 2014. – 64 с.

4. Nested functions [Електронний ресурс].– Режим доступу: https://brilliant.org/wiki/nested-functions/

5. Niculescu P. Integral inequalities. **Lecture presented on December 16, 2008, at the Abdus Salam School of Mathematical Sciences, Lahore*. [Електронний ресурс].– Режим доступу: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.625.7106&rep=rep1&type=pdf

6. Putnam training problems, 2017 [Електронний ресурс].– Режим доступу: http://math.northwestern.edu/putnam/training_problems-2017.pdf

7. Студентські математичні олімпіади. Збірник задач. / Уклад. В.В. Булдигін, В.А. Кушніревич, О.С. Шкабара, В.В. Ясінський. – Київ, 2002. – 175 с.

8. Федак І.В. Функціональні рівняння: Навчальний посібник. (Видання друге). – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 144 с.

9. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди. – К.: Вища шк., 1995. – 541 с.