

# Методика расчета сборно-монолитных балок полого треугольного сечения с учетом нелинейных свойств бетона

T.N. Azizov<sup>1\*</sup>, D.V. Kochkarev<sup>2</sup>, T. A. Galinska<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University

<sup>2</sup> National University of Water and Environmental Engineering, Department Urban building and development

<sup>3</sup> Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

\* E-mail: taljat999@gmail.com

## Abstract

The article examines precast-monolithic reinforced concrete beams with a cross section in the form of a hollow triangle. The advantages of such beams are presented and say that their stiffness in torsion is ten times bigger than the similar rigidity of aT-beam with the same stiffness and bending resistance. The article introduces the method of manufacturing such beams without the use of form work which was developed by the author of the article. Earlier the authors investigated the stiffness of such beams in torsion and it is mentioned in the article. However, stiffness and bending resistance are not investigated. Resistance and stiffness of precast-monolithic beams under bending differs from the resistance and stiffness of the monolithic ones. Consequently, taking into account the nonlinear properties of materials the calculation of such beams is different. The method for calculating beams under bending is introduced and it is based on the application of the flat section hypothesis. This method is used in conventional methods of calculation. The difference from the traditional calculation is the addition of equilibrium stress to the equations which are perceived by sections of monolithic concrete with physical and mechanical characteristics that differ from those of the main part of the structure. In calculation the cross-section of the beam is reduced to the equivalent T-section. The obliquity of the side faces is taken into account and the thickness of the edge of the equivalent T-beam is understood as the doubled thickness of the side edge divided by the sine of the angle of obliquity of the edges. In order to apply this calculation method, at first, it is necessary to check the sufficiency of the presence of a transverse reinforcement in the grid which is laid in the construction of the structure. With a sufficient diameter and rod spacing of transverse reinforcement which are calculated according to the authors' previously developed method, the structure can be calculated as monolithic with sections with different material characteristics according to the method introduced in the article. The calculations based on the above procedure showed a good match with the results of experimental studies of the authors.

**Keywords:** Prefabricated monolithic beam, hollow triangle, hypothesis of plane sections, diagram, iteration.

## 1. Introduction

Известно, что учет пространственной работы железобетонных перекрытий обеспечивает существенную экономию материалов и значительно повышает точность определения усилий, действующих в элементах перекрытия [1]. Анализ различных типов перекрытий показывает, что пространственная работа последних, состоящих из плит типа Т или ТТ, является наименьшей. Это связано с малой крутильной жесткостью таких плит. В [2] показано, что перекрытия из плит Т или ТТ можно заменить перекрытиями из балок-плит треугольного сечения. Такие балки совмещают в себе функции балок и плит (рис. 1).

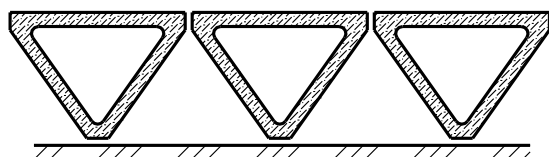


Fig. 1: Поперечное сечение перекрытия из сборных плит полого треугольного сечения

Изготовление тавровых и двутавровых балок связано с трудностями изготовления опалубки. Балка с сечением, показанным на рис. 1 имеет все достоинства тавровых балок, но при этом имеет крутильную жесткость в десятки раз большую жесткости аналогичной тавровой балки [2]. С целью упрощения и удешевления изготовления таких балок было предложено изготавливать их без применения опалубки в виде сборно-монолитной конструкции. Схема сечения балки в положении омоноличивания показана на рис. 2.

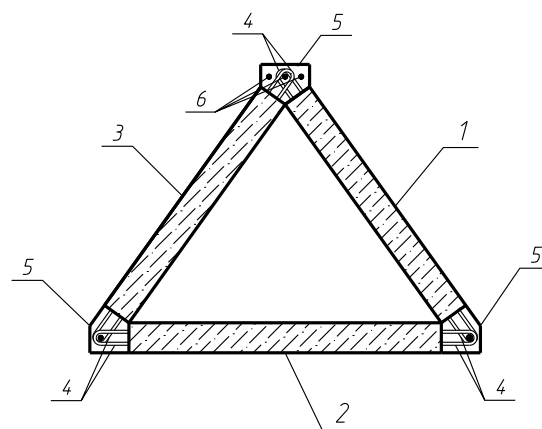


Fig. 2: Сечение сборно-монолитной железобетонной балки пологой треугольной формы. 1, 2, 3 грани балки; 4- арматурные выпуски; 5 – монолитные участки; 6 – рабочая арматура

После набора прочности бетона секций и монолитных участков 9 балка готова к применению. Она переворачивается в рабочее положение таким образом, чтобы рабочая арматура была в растянутой зоне. Такая балка совмещает в себе функции стропильной конструкции и плиты, т.к. ширина сжатой полки может свободно приниматься 1.5 и более метров. Крутильная жесткость такой балки значительно больше аналогичной жесткости тавровой балки при одинаковой прочности и жесткости на изгиб в вертикальном направлении. Последний фактор является весьма и весьма существенным преимуществом, так как чем больше крутильная жесткость, тем более проявляется эффект пространственной работы при действии локальных нагрузок.

В [2] исследована крутильная жесткость таких балок. Там же показан принцип расчета таких балок при изгибе. Однако



вопрос расчета таких балок с учетом нелинейных свойств бетона остается не исследованным.

## 2. Методы расчета сборно-монолитных балок полого треугольного сечения при изгибе с учетом нелинейных свойств материалов

### 2.1. Метод расчета сборно-монолитных балок полого треугольного сечения при изгибе на основании нелинейной деформационной модели

Для расчета с учетом нелинейных свойств материалов используем деформационный метод [3, 4, 5, 6, 7]. Расчетное поперечное сечение балки представлено на рис. 3.

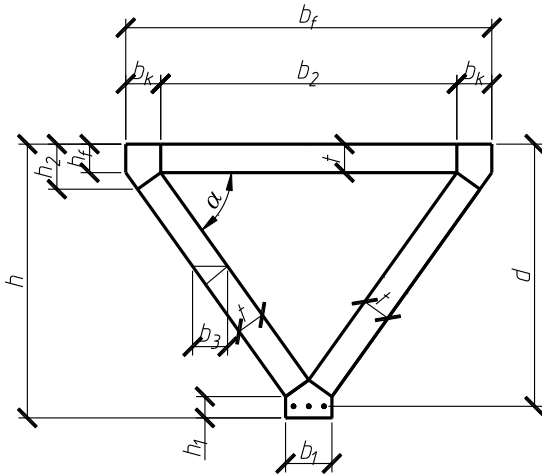


Fig. 3: Схема сечения элемента в виде полого треугольника

Монолитные участки в верхней зоне шириной  $b_k$  и в нижней зоне шириной  $b_1$  имеют физико-механические характеристики, отличные от характеристик основных граней балки. Для расчета на кручение сечение рассматривается в исходном виде. Для расчета на изгиб сечение в виде полого треугольника, можно заменить тавровым сечением (Fig. 4). Ширина ребра тавра равна удвоенной величине  $b_3$ , являющейся горизонтальной проекцией толщины  $t$  граней элемента (Fig. 3). Легко видеть, что  $b_3 = t/\sin\alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона боковых граней элемента (Fig. 3).

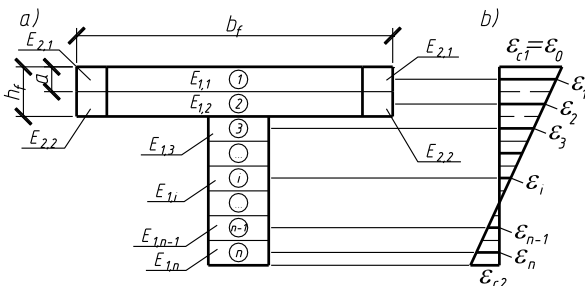


Fig. 4: Приведение полого треугольника к тавровому сечению: а) поперечное сечение; б) эпюра продольных деформаций

Так как торцовые части полки тавра изготовлены из бетона с отличающимися характеристиками, то можно проводить расчеты как для двухслойного элемента подобно методике [4]. Предварительные расчеты авторов, проведенные по этой методике, показали, что в виду небольшой ширины монолитных участков  $b_k$  сечение можно рассматривать как сплошное с шириной полки  $b_f = b_2 + 2b_k$  (Fig. 3). Кроме того, как показали расчеты на основе методики [1] при определенном шаге и диаметре стержней сетки балку можно считать монолитной.

Для расчета тавровое сечение следует разделить на некоторое число горизонтальных слоев толщиной  $a$  (Fig. 4). Слои могут быть как одинаковой толщины, так и различной.

Расчет ведется по алгоритму, подобному [3, 4] с некоторыми изменениями, связанными с наличием различных материалов в сечении. Остановимся на этих отличиях. Для расчета на нулевой итерации задается определенная деформация сжатой крайней сжатой фибры бетона  $\varepsilon_{c1}$  первого слоя (Fig. 4). Деформация на нижней грани последнего слоя с номером  $n$  (Fig. 4) принимается равной нулю  $\varepsilon_{c2} = 0$ .

Далее подсчитывается кривизна в сечении по формуле:

$$1/r = \frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2}}{h} \quad (1)$$

На уровне каждого  $i$ -го слоя, исходя из линейного распределения деформаций (Fig. 4, б) определяется деформация этого слоя  $\varepsilon_i$ . По известным диаграммам “ $\sigma$ - $\varepsilon$ ” определяются текущие значения модуля деформаций в этом слое для основного бетона  $E_{1,i}$  и бетона омоноличивания  $E_{2,i}$ . В каждом слое определяются усилия  $N_i$  по формуле:

$$N_i = \varepsilon_i [E_{1,i}A_{1,i} + E_{2,i}A_{2,i} + E_{s,i}A_{s,i}] \quad (2)$$

где  $A_{1,i}$  и  $A_{2,i}$  – площади сечения слоев соответственно для основного бетона и бетона омоноличивания;  $E_{s,i}$ ,  $A_{s,i}$  – соответственно модуль упругости и сечение арматуры  $i$ -го слоя.

Знаки  $N_i$  принимаются в соответствии со знаками эпюры деформаций: сжатие – положительный знак, растяжение – отрицательный.

Площади  $A_{1,i}$  и  $A_{2,i}$  определяются из выражений (Fig. 3, 4):

$$A_{1,i} = 2 \cdot a \frac{t}{\sin\alpha}; \quad A_{2,i} = 2 \cdot b_k \cdot a \quad (3)$$

Если ширина монолитного участка в нижней зоне (Fig. 3) больше  $2b_3$ , то площади этих слоев соответственно корректируются. Если слои по высоте сечения имеют разную толщину, то в выражении (3) вместо  $a$  следует принимать  $a_i$ .

Выражение (2) отличается от общеизвестных аналогичных выражений [3, 4] наличием вторых слагаемых  $E_{2,i}$  и  $A_{2,i}$ , которые учитывают наличие второй составляющей для монолитного бетона в сечении. При этом если для  $i$ -го слоя справедливо неравенство  $i \cdot a > h_f$ , т.е. если слой находится ниже полки элемента, то в выражении (2) принимается  $E_{2,i} = 0$  и  $A_{2,i} = 0$ .

Далее подсчитывается суммарное усилие в сечении. Если оно больше нуля, то на следующей итерации добавляется деформация растяжения  $\varepsilon_{c2}$  и расчет повторяется. Таким образом, дальнейший алгоритм не отличается от общеизвестного алгоритма [4], в связи с чем в настоящей статье далее не приводится.

Преимуществом такого подхода к расчету является факт, что в расчете учитываются различные характеристики материалов сборных участков и монолитных, а также могут быть учтены арматурные стержни не только основной рабочей арматуры, но и продольные стержни сетки, находящейся в боковых гранях элемента и укладываемой во время бетонирования конструкции в горизонтальном положении.

Для уточнения расчетов можно на уровне (сверху вниз)  $h_2 \leq i \cdot a \leq h_f$  учитывать, что в этом слое площади основного бетона и бетона омоноличивания меняются, и они могут быть без труда подсчитаны из геометрических соображений (см. Fig. 3).

Следует отметить, что для того, чтобы сборно-монолитную балку рассчитывать как монолитную (без учета сдвига полки относительно ребер) нужно предварительно провести расчеты по методике [1] и принять определенный диаметр и шаг поперечной арматуры сетки при изготовлении балки. При меньшем диаметре или шаге арматуры следует учитывать возможность смещения полки относительно ребра и уменьшения суммарного усилия в сжатой зоне по [1].

Расчеты по вышеприведенной методике показали хорошее совпадение с экспериментальными исследованиями авторов.

## 2.2. Метод расчета сборно-монолитных балок полого треугольного сечения при изгибе с использованием метода расчетных сопротивлений бетона

Расчет балок полого треугольного сечения можно производить с использованием метода расчетных сопротивлений железобетона, который детально изложен в [8, 9]. Для расчета железобетонных элементов данным методом используют нелинейные диаграммы деформирования материалов, гипотезу линейности деформаций, а также соответствующие критерии образования трещин и разрушения. Расчетные формулы для удобства проведения расчетов сведены к формулам классического сопротивления материалов. Основные параметры напряженно-деформированного состояния сведены в табличную форму. Прочность тавровых сечений железобетонных элементов определяется исходя из следующего условия

$$\frac{M_{Ed}}{W_c} \leq f_{zM}, \quad (4)$$

где  $f_{zM} = f$  (класс бетона,  $\rho_f, f_{yd}$ ) – расчетное сопротивление железобетона определяется по соответствующим таблицам [4];  $W_c$  – упругий момент сопротивления сечения бетона. В таблице 1 приведено значение расчетного сопротивления железобетона, посчитанное для железобетонных элементов прямоугольного сечения с единичным армированием, при этом в качестве диаграммы деформирования бетона использовалась формула предложенная в Еврокод-2 [3].

**Table 1:** Расчетное сопротивление железобетона  $f_{zM}$  с единичным армированием

Concrete class	Proportion of reinforcement, $\rho_f$							
	0.05	0.50	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	3.00
$f_{yd}=375 \text{ МПа (A400C)}$								
C8/10	1.10	9.44	14.68	15.12	15.43	15.67	15.86	16.32
C12/15	1.11	9.97	17.38	20.09	20.85	21.27	21.60	22.45
C16/20	1.11	10.30	18.70	22.19	25.20	27.38	27.90	29.29
C20/25	1.11	10.49	19.48	23.40	26.95	30.11	32.88	35.65
C25/30	1.11	10.60	19.91	24.08	27.93	31.46	34.66	40.69
C30/35	1.12	10.68	20.24	24.59	28.66	32.45	35.96	45.45
C32/40	1.12	10.75	20.49	24.98	29.23	33.22	36.96	49.26
C35/45	1.12	10.81	20.72	25.35	29.76	33.94	37.90	51.52
C40/50	1.12	10.84	20.88	25.60	30.11	34.42	38.53	52.94
C45/55	1.12	10.87	21.01	25.80	30.40	34.82	39.05	54.10
C50/60	1.12	10.90	21.14	26.00	30.69	35.21	39.56	55.26
$f_{yd}=450 \text{ МПа (A500C)}$								
C8/10	1.32	10.90	14.57	15.02	15.35	15.60	15.79	16.27
C12/15	1.33	11.66	19.40	20.15	20.70	21.13	21.48	22.35
C16/20	1.33	12.13	21.53	25.17	26.50	27.16	27.71	29.13
C20/25	1.33	12.41	22.65	26.95	30.69	32.67	33.42	35.43
C25/30	1.34	12.57	23.28	27.93	32.12	35.82	37.89	40.40
C30/35	1.34	12.69	23.74	28.66	33.18	37.28	40.93	45.10
C32/40	1.34	12.78	24.11	29.23	33.99	38.39	42.40	49.53
C35/45	1.34	12.86	24.44	29.76	34.75	39.42	43.78	54.52
C40/50	1.34	12.92	24.67	30.11	35.26	40.11	44.68	58.52
C45/55	1.34	12.96	24.86	30.40	35.68	40.69	45.43	61.40
C50/60	1.34	13.01	25.04	30.69	36.10	41.25	46.17	63.37

Упругий момент сопротивления бетона определяется в зависимости от положения нейтральной линии в сечении:

- при положении нейтральной линии в ребре

$$W_c = \frac{b_f d^2}{6}; \quad (5)$$

- при положении нейтральной линии в полке

$$W_{ct} = \frac{b_f d^2}{6} - \frac{(b_f - b)(d - h_f)^2}{6}. \quad (6)$$

Для определения прочности сечения по формуле (4) необходимо наперед знать положение нейтральной линии в сечении. В таком случае каждое сечение рассчитывают дважды: элемент таврового профиля с моментом сопротивления  $W_i$  и эле-

мент прямоугольного сечения  $b_f \times d$  с моментом сопротивления  $b_f \times d^2/6$ . Из двух полученных значений при определении площади арматуры принимают большее значение, а при вычислении несущей способности – меньшее.

Прогибы тавровых железобетонных элементов методом расчетных сопротивлений железобетона рассчитывают с использованием кривизны сечений. В таком случае для определения прогибов используют интеграл Мора или формулу Симпсона. В отдельных случаях, для предварительного определения прогибов, можно использовать приближенную формулу. В ней прогиб определяется по одному значению кривизны, найденному в сечении с наибольшим моментом.

В общем случае кривизна может быть найдена по формуле

$$\frac{1}{r} = \frac{\sum \varepsilon}{d}, \quad (7)$$

где  $\sum \varepsilon$  – сумма деформаций сжатого бетона и растянутой арматуры.

Суммарные деформации бетона зависят от следующих параметров

$$\sum \varepsilon = f(\rho_f, \sigma_{zM}, C, A), \quad (8)$$

где  $\sigma_{zM} = \frac{M}{W_c}$  – условные напряжения в сечении железобе-

тонного элемента. Сумму деформаций сжатого бетона и растянутой арматуры можно найти, используя соответствующие таблицы. Фрагмент такой таблицы приведен ниже (табл.2).

**Table 2:** Параметры напряженно-деформированного состояния

Concrete class	Load level	Proportion of reinforcement, $\rho_f$					
		0.5			1		
		$\sigma_{zM}$ , MPa	$\sum \varepsilon \times 10^4$	$\sigma_s$ , MPa	$\sigma_{zM}$ , MPa	$\sum \varepsilon \times 10^4$	$\sigma_s$ , MPa
C20/25	$M_{W1}$	3.4	2.9	31.9	4.1	3.0	31.8
	$M_{W2}$	3.4	4.4	101.6	4.1	4.4	63.0
	0.4	6.8	12.5	243.1	8.5	10.7	155.4
	0.6	9.1	18.1	329.1	12.8	16.9	239.4
	0.8	11.0	26.4	398.9	20.8	31.5	400.0
	1.0	11.3	126.5	400.0	21.3	72.4	400.0
C25/30	$M_{W1}$	4.0	3.0	33.8	4.7	3.2	33.7
	$M_{W2}$	4.0	4.7	118.6	4.7	4.7	72.2
	0.4	6.9	11.4	240.9	8.7	10.1	155.9
	0.6	9.1	16.8	329.0	13.0	16.2	241.4
	0.8	11.1	26.1	398.8	21.3	32.7	400.0
	1.0	11.4	137.9	400.0	21.7	77.7	400.0

## 2.3. Метод расчета прогибов сборно-монолитных балок полого треугольного сечения при изгибе с использованием линейаризационных зависимостей

Предложенный выше метод расчетных сопротивлений железобетона дает возможность значительно упростить нахождение прогибов железобетонных элементов. Для этого необходимо выполнить линейаризацию зависимости

$$\sigma_{zM} = a_i + b_i \sum \varepsilon, \quad (9)$$

где  $a_i, b_i$  – параметры линейаризованных зависимостей.

Линейаризацию параметров напряженно-деформированного состояния необходимо проводить от момента образования трещин до наступления границы текучести в растянутой арматуре. Это даст возможность находить прогибы с достаточной для инженерной практики точностью при эксплуатационных нагрузках. Полученные таким образом коэффициенты линейаризации для основных классов бетона, и процентов армирования 0.5-3%, представлены в таблице 3. Стоит отметить про высокую степень аппроксимации полученных прямых линий в заданных пределах, построенных по формуле (9). Так коэффициенты корреляции прямых линий находятся в пределах 0,956-0,98.

Используя формулу (9) несложно получить формулу линейаризованной кривизны

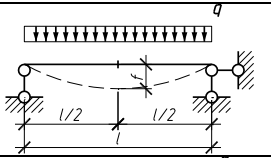
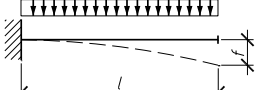
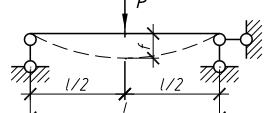
$$1/r_x = \frac{M_x}{b_i W_{ct} d} + \frac{a}{b_i d}. \quad (10)$$

Для нахождения прогибов необходимо для соответствующей расчетной схемы записать интеграл Мора или формулу Симпсона, и получить необходимую формулу. Для некоторых наиболее распространенных расчетных схем формулы для нахождения максимальных прогибов с использованием линеаризационных параметров представлены в табл. 4.

**Table 3:** К расчету прогибов изгибаемых железобетонных элементов с использованием линеаризационных зависимостей

Concrete class	a, MPa	Proportion of reinforcement, $\rho_f$			
		0.5	1	2	3
		$b_i, 10^{-4} \text{ MPa}$			
C8/10	1.845	0.262	0.410	0.614	0.764
C12/15	2.116	0.301	0.484	0.741	0.929
C16/20	2.146	0.343	0.544	0.851	1.075
C20/25	2.256	0.355	0.598	0.929	1.175
C25/30	2.455	0.368	0.613	0.992	1.277
C30/35	2.701	0.374	0.644	1.024	1.315
C32/40	2.769	0.396	0.663	1.038	1.376
C35/45	2.803	0.398	0.684	1.102	1.404
C40/50	2.843	0.419	0.706	1.148	1.475
C45/55	2.849	0.437	0.723	1.183	1.526
C50/60	3.188	0.452	0.725	1.201	1.563

**Table 4:** Формулы для определения прогибов

№	Beam scheme	Formula for determining deflection
1		$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{b_i W_{ct} d} - \frac{l^2}{8} \frac{a}{b_i d}$
2		$f = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{b_i W_{ct} d} - \frac{l^2}{2} \frac{a}{b_i d}$
3		$f = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{b_i W_{ct} d} - \frac{l^2}{8} \frac{a}{b_i d}$

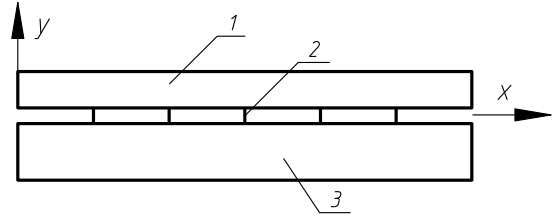
### 3. Определение усилий взаимодействия между полкой и наклонными ребрами в балках полого треугольного сечения

Особенность расчета сборно-монолитных балок полого треугольного сечения заключается в том, что их не всегда можно рассчитывать как элементы сплошного сечения ввиду наличия монолитного шва. Если жесткость монолитного шва достаточно высока, то его можно рассчитывать как монолитную конструкцию по описанному выше методу.

Наличие монолитного шва между полкой и ребром (двумя наклонными элементами, представляющими собой ребро балки) превращает такую балку в составную с податливыми связями сдвига. Ее расчет можно в первом приближении проводить по теории составных стержней А.Р. Ржаницына [10]. Однако при расчете с учетом нелинейных свойств бетона монолитного шва расчет по теории составных стержней [10] затруднен, т.к. в теории составных стержней пластические свойства связей сдвига учитываются только при подчинении диаграмме Прандтля.

Указанного недостатка можно избежать, если рассчитывать балку в виде стержневой системы, показанной на рис. 5. На этом рисунке обозначено: 1 - верхняя полка; 3 - ребро (боковые полки балки); 2 - связи, имитирующие работу монолитного шва между полкой и ребром. Количество и шаг

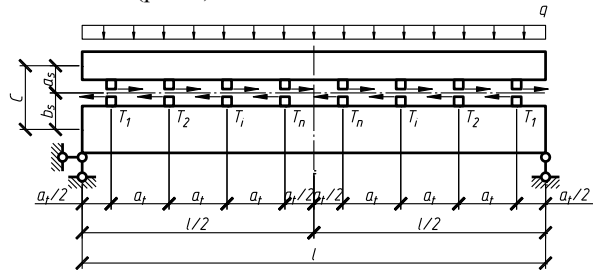
стержней 2, имитирующих работу монолитного шва можно подобрать предварительным расчетом.



**Fig. 5:** Схема сборно-монолитной двухслойной балки

Известно [10], что в двухслойных составных балках податливостью поперечных связей можно пренебречь и рассматривать их как абсолютно жесткие. Таким образом, если предположить, что в вертикальном направлении стержни 1 и 3 имеют одинаковые перемещения, то точность расчета не пострадает. Учтем этот фактор при разработке методики расчета рассматриваемых балок. Если связи 2 на рис. 5 в поперечном направлении не деформируются, то стержни 1 и 3 будут изгибаться по одинаковой кривой. Основную систему можно получить, рассекая поперечные связи и рассматривая совместность горизонтальных перемещений стержней 1 и 3. Т.е. перемещения по оси X нижней грани верхнего стержня равны перемещениям верхней грани нижнего стержня с поправкой на сдвиг поперечных связей.

Пусть имеется  $2n$  связей между двумя стержнями. Разделим пролет балки на участки  $a_t = l/(2n)$ . Причем расположение связей будет симметричным как показано на рис. 6. Если учитывать только условие совместности горизонтальных перемещений, то после мысленного рассечения связей основная система и неизвестные силы будут иметь вид, показанный на рис. 6. Пусть на балку действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ . Тогда в силу симметрии вместо  $2n$  будем иметь  $n$  неизвестных (рис. 6).



**Fig. 6:** Неизвестные силы после рассечения балки на два стержня

Перейдем теперь непосредственно к выводу системы уравнений для определения неизвестных сил  $T_i$ . Для определения перемещений по оси  $x$  сначала определяются углы поворота стержней.

1. Углы поворота балки в  $i$ -той точке

$$\varphi_i = \frac{ql^3}{24EI_{tot}} \alpha_i, \quad (11)$$

где индекс  $i$  означает номер точки расположения связи ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ );

$$\alpha_i = 1 - 6 \left( \frac{a_i}{l} \right)^2 + 4 \left( \frac{a_i}{l} \right)^3, \quad (12)$$

$a_i$  – расстояние от начала координат (левой опоры балки) до  $i$ -той точки:

$$\alpha_i = \frac{a_t}{l} + (i-1)a_t; \quad (13)$$

$EI_{tot}$  – сумма изгибных жесткостей верхнего и нижнего стержней.

Перемещения нижней грани верхнего стержня

$$\Delta_i^V = -\varphi_i a_s; \quad (14)$$

Перемещения верхней грани нижнего стержня:



При отсутствии податливости связей сдвига последнее слагаемое выражения (30) превращается в ноль и балка рассматривается как монолитная с полной высотой сечения, равной сумме высот верхнего и нижнего стержней.

Преимуществом предложенной методики расчета является возможность учета нелинейных свойств связей сдвига (монолитного шва), т.к. жесткость каждой связи может быть различной. При этом вместо последнего слагаемого выражения (30), являющегося константой для всех точек будет выражение  $\frac{2S}{G_i t_i d_i}$ , т.е. в каждой точке жесткость связи сдвига (модуль сдвига, толщина и ширина связи) различна. Эта жесткость определяется при итерационном расчете в зависимости от загруженности  $i$ -той связи сдвига известными методами.

Число участков, на которое следует разбивать длину балки, подбирается предварительным расчетом и обычно достаточно 15-20 участков для вполне приемлемой точности расчета.

Таким образом, мы разработали методику определения усилий в монолитном шве между полкой и ребрами рассматриваемой балки, позволяющую учитывать нелинейные свойства бетона омоноличивания. Методика основана на предположении теории составных стержней, но отличается возможностью использования любых законов деформирования монолитного шва, что в теории составных стержней практически невозможно.

Если жесткость связей достаточна велика, то балку можно рассматривать как монолитную и рассчитывать ее по методике, описанной выше. Для определения жесткости связи, при которой можно считать балку монолитной, следует провести несколько расчетов с постепенным увеличением жесткости связей. Если на последнем и предыдущем этапе увеличения жесткости связей, усилия мало отличаются друг от друга, жесткость связей можно считать условно бесконечной и балку можно рассматривать как монолитную.

#### 4. Расчет перекрытий, состоящих из балок полового треугольного сечения с учетом пространственной работы

Пусть задано перекрытие, состоящее из  $n$  балок полового треугольного сечения. В общем виде перекрытие с балками в одном направлении выглядит, как показано на рисунке 9.

Рассечем перекрытие на отдельные балки полового треугольного сечения плоскостями, параллельными продольным осям (рис. 9) и воспользуемся методикой пространственного расчета [2].

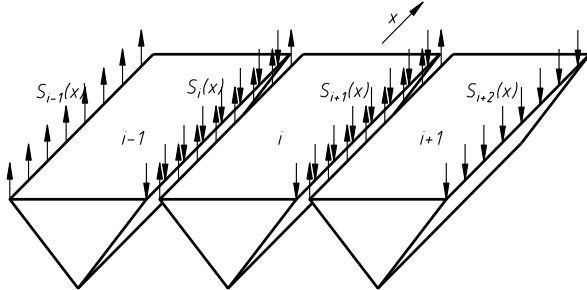


Fig. 9: Схема к расчету перекрытия с учетом пространственной работы

В упомянутом методе [2] в общем случае по линиям сечения перекрытия на отдельные балки действуют четыре составляющих усилия взаимодействия. Для расчета рассматриваемой нами системы вполне достаточно использовать методику, учитывающую только наличие вертикальных усилий взаимодействия балок друг с другом. Для этого из общей системы дифференциальных уравнений [2] следует оставить только члены, содержащие вертикальные усилия взаимодействия  $S(x)$ . Система дифференциальных уравнений в этом случае выглядит:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{EI_i} \cdot MS_{i-1} + \left( \frac{1}{EI_i} + \frac{1}{EI_{i+1}} \right) \cdot MS_i + \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot MS_{i+1} + \\ & + \frac{L_i \cdot R_i}{GI_i} \cdot MS_{i-1}'' + \left( \frac{R_i^2}{GI_i} + \frac{L_{i+1}^2}{GI_{i+1}} \right) \times \\ & \times MS_i'' + \frac{L_{i+1} \cdot R_{i+1}}{GI_{i+1}} \cdot MS_{i+1}'' + \left( \frac{R_i^3}{3D_i} + \frac{L_{i+1}^3}{3D_{i+1}} \right) \cdot MS_i^{iv} = \\ & = \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot MQ_{i+1} - \frac{1}{EI_i} \cdot MQ_i, \end{aligned} \quad (32)$$

где приняты следующие обозначения:  $L_i, R_i$  – расстояния от центра тяжести  $i$ -той балки до сечения слева и справа;  $EI_i, GI_i$  – изгибная жесткость балки соответственно в вертикальном и горизонтальном направлениях;  $EA_i$  – осевая жесткость балки;  $D_i$  – цилиндрическая жесткость полки тавровой балки;  $b_i$  – расстояние по вертикали от центра тяжести сечения балки до оси полки;  $MS_i = MS_i(x)$  – функция изгибающих моментов от неизвестных вертикальных усилий  $S_i(x)$ , связанная с последними дифференциальной зависимостью  $MS_i''(x) = S_i(x)$ ;  $MQ_i = MQ_i(x)$  – функция изгибающих моментов от внешней нагрузки  $q_i$ .

В нашем случае изгибная жесткость полки может быть принята равной бесконечности, т.к. треугольное сечение является достаточно жестким и изгибом в поперечном направлении можно пренебречь. С учетом сказанного, уравнение (32) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{EI_i} \cdot MS_{i-1} + \left( \frac{1}{EI_i} + \frac{1}{EI_{i+1}} \right) \cdot MS_i + \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot MS_{i+1} + \\ & + \frac{L_i \cdot R_i}{GI_i} \cdot MS_{i-1}'' + \left( \frac{R_i^2}{GI_i} + \frac{L_{i+1}^2}{GI_{i+1}} \right) \times \\ & \times MS_i'' + \frac{L_{i+1} \cdot R_{i+1}}{GI_{i+1}} \cdot MS_{i+1}'' = \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot MQ_{i+1} - \frac{1}{EI_i} \cdot MQ_i, \end{aligned} \quad (33)$$

Систему (33) удобно решать с помощью разложения в ряд Фурье по синусам:

$$MS_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} MS_{n,i} \cdot \sin \alpha x; \quad MQ_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} MQ_{n,i} \cdot \sin \alpha x, \quad (34)$$

где – для кратности обозначено  $\alpha = \frac{\pi \cdot n}{l}$ ;  $x$  – координата

вдоль пролета балки перекрытия;  $l$  – пролет балки;

Подставляя (34) в (33), произведя дифференцирование и сокращая на  $\sin(\alpha x)$ , получим вместо системы дифференциальных уравнений систему линейных конечных уравнений, которая в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{EI} + \frac{a^2 \cdot \alpha^2}{GI} \right) \cdot MS_{n,i-1} + \left( \frac{2}{EI} + \frac{2a^2 \cdot \alpha^2}{GI} \right) \cdot MS_{n,i} + \\ & + \left( -\frac{1}{EI} + \frac{a^2 \cdot \alpha^2}{GI} \right) \cdot MS_{n,i+1} = \frac{1}{EI} (-MQ_{n,i} + MQ_{n,i+1}) \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнения (35) следует записывать для каждого шва перекрытия. После определения усилий взаимодействия балок друг с другом следует рассматривать каждую  $i$ -тую балку с действующей на нее собственной внешней нагрузкой и усилиями взаимодействия слева  $S_i$  и справа  $S_{i+1}$  (рис. 10).

На рис. 10 в торцах балки показаны связи, препятствующие повороту балки вокруг продольной оси. Это связано с фактом, что торцы смежных балок связаны между собой, что препятствует их повороту вокруг продольной оси.

Усилия  $S_i(x)$  имеют нулевые значения на опорах (см. рис. 10), т.к. функции их изменения являются функциями синуса. Это вполне оправдано по следующей причине. Опоры балок на их концах являются жесткими и в этом месте балки не могут сдвигаться друг относительно друга. Поэтому и усилия сдвига одной балки относительно другой будут отсутствовать.

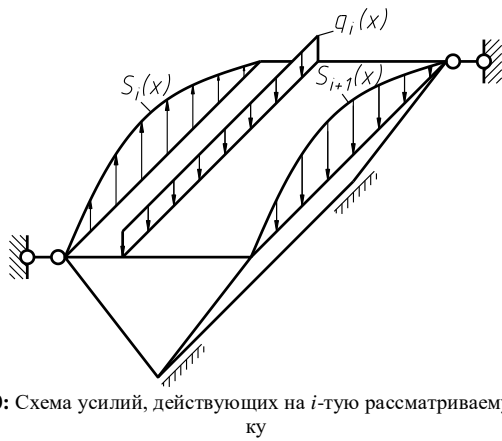


Fig. 10: Схема усилий, действующих на  $i$ -тую рассматриваемую балку

Таким образом, первый этап расчета перекрытия, состоящего из балок полого треугольного сечения, является расчетом его пространственной работы по вышеприведенной методике с целью определения усилий взаимодействия отдельных балок друг с другом. После этого следует приступить собственно к расчету жесткости и прочности каждой из балок, на которые действуют внешние нагрузки и приложенные к их краям усилия взаимодействия (см. рис.10). В результате этого расчета проверяется наличие трещин, изменяются жесткостные характеристики полки и боковых ребер балки, а также ее жесткость в целом и повторяется расчет совместной работы всех балок по вышеприведенной методике, но уже с измененными жесткостными характеристиками.

## 5. Примеры расчета сборно-монолитных балок полого треугольного сечения при изгибе

Рассмотрим примеры расчета сборно-монолитных балок полого треугольного сечения при изгибе.

**Пример 1.** Определить прочность сечения на изгиб сборно-монолитной балки показанной на рис.11. Класс бетона сборных и монолитных частей C20/25. Армирование в стенках конструктивное. Балку рассчитать без учета сдвига полки относительно ребер.

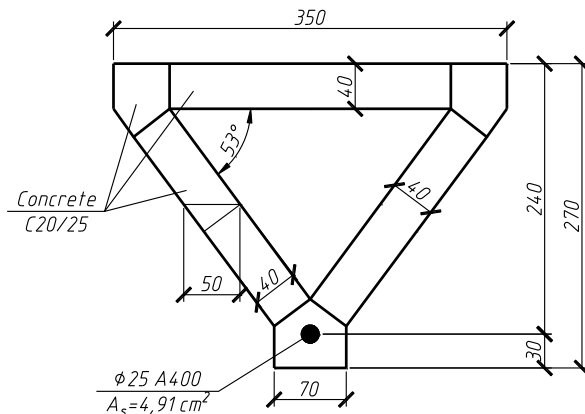


Fig. 11: Поперечное сечение сборно-монолитной балки

**Solution.**

Заменим полое треугольное сечение приведенным тавровым (fig.12).

Определим момент сопротивления для прямоугольного сечения  $b_f \times d$

$$W_c = \frac{b_f d^2}{6} = \frac{35 \times 24^2}{6} = 3360 \text{ cm}^3.$$

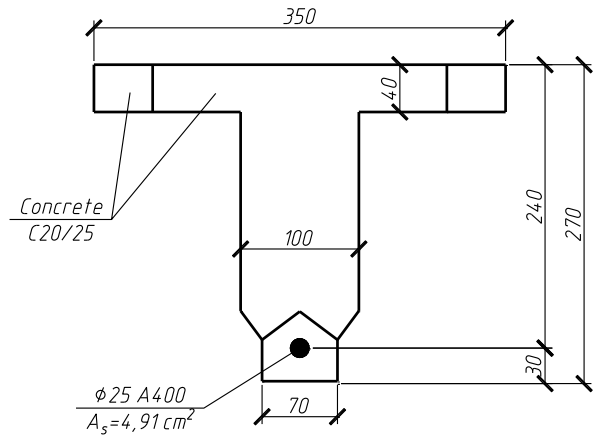


Fig. 12: Приведенное поперечное сечение сборно-монолитной балки

Далее определяем процент армирования

$$\rho_f = \frac{A_s}{b_f d} = \frac{4.91}{35 \times 24} 100\% = 0.585 \%$$

Используя интерполяцию по данным таблицы 1, находим расчетное сопротивление железобетона  $f_{zM} = 11.70 \text{ МПа}$ .

Находим значение предельного изгибающего момента

$$M_{Ed} = f_{zM} W_c = 11.70 \times 3360 \times 10^{-3} = 39.31 \text{ кНм}.$$

Находим момент сопротивления для таврового сечения

$$W_t = \frac{b_f d^2}{6} - \frac{(b_f - b_1)(d - h_f)^2}{6} = 1693.33 \text{ см}^3.$$

Процент армирования для таврового сечения равен

$$\rho_{f,t} = \frac{A_s}{b_1 d + (b_f - b_1) h_f} = 1.444 \%$$

Находим расчетное сопротивление железобетона по табл.1  $f_{zM,t} = 25.31 \text{ МПа}$ .

Предельное значение изгибающего момента, при положении нейтральной линии в ребре

$$M_{Ed,t} = f_{zM,t} W_t = 25.31 \times 1693.33 \times 10^{-3} = 42.87 \text{ кНм}.$$

Из двух значений  $M_{Ed}$  и  $M_{Ed,t}$  принимаем меньшее, то есть прочностное нормального сечения равно  $M = 39.31 \text{ кНм}$ .

В результате расчета балки итерационным методом получили значение несущей способности  $M = 39.66 \text{ кНм}$ , разница составляет 0.88 %.

**Пример 2.** Определить прогибы балки (см. пример 1) на двух опорах загруженной равномерно распределенной нагрузкой (схема №1, табл.4) полого треугольного сечения показанного на рис.5 при следующих нагрузках  $0.9q = 7.86 \text{ кН/м}$ ,  $0.8q = 6.99 \text{ кН/м}$ ,  $0.7q = 6.12 \text{ кН/м}$ ,  $0.6q = 5.24 \text{ кН/м}$ . Балка имеет пролет  $l = 6 \text{ м}$ .

**Solution.**

Используя таблицу 3 определим коэффициенты линеаризации по интерполяции, в зависимости от класса бетона C20/25 и процента армирования  $\rho_{f,t} = 1.444 \%$  –  $a = 2.256 \text{ МПа}$ ;

$b_i = 0.745 \times 10^4 \text{ МПа}$ .

Расчет прогибов выполним по формуле метода линеаризации (1, таб.4):

$$f_1 = \frac{5}{384} \frac{0.9ql^4}{b_i W_c d} + \frac{l^2}{8} \frac{a}{b_i d} = 3.813 \text{ cm};$$

$$f_2 = \frac{5}{384} \frac{0.8ql^4}{b_i W_c d} + \frac{l^2}{8} \frac{a}{b_i d} = 3.328 \text{ cm};$$

$$f_3 = \frac{5}{384} \frac{0.7ql^4}{b_i W_c d} + \frac{l^2}{8} \frac{a}{b_i d} = 2.843 \text{ cm};$$

$$f_4 = \frac{5}{384} \frac{0.6ql^4}{b_i W_c d} + \frac{l^2}{8} \frac{a}{b_i d} = 2.355 \text{ cm}.$$

Прогобы, определенные методом итераций на основе нелинейной деформационной модели имеют следующие значения  $f_1 = 3,828 \text{ cm}$  ( $\Delta=0,39\%$ ),  $f_2 = 3,469 \text{ cm}$  ( $\Delta=4,07\%$ );  $f_4 = 3,117 \text{ cm}$  ( $\Delta=8,79\%$ ),  $f_4 = 2,771 \text{ cm}$  ( $\Delta=15,01\%$ ).

## 1. Conclusion

Предложены методики расчета сборно-монолитных балок полого треугольного сечения, как комбинированных конструкций, состоящих из двух материалов с различными характеристиками. При этом во всех методиках расчета жесткости и прочности сечения используется гипотеза плоских сечений. Сравнительные расчеты прочности и жесткости балок полого треугольного сечения показали удовлетворительную сходимость инженерных и итерационных методов их расчета. В перспективе предполагается разработка методики расчета наклонных сечений сборно-монолитных балок полого треугольного сечения.

## References

- [1] Azizov, T., Azizova, A., & Al Ghabban, S. (2018). Construction and calculation of reinforced concrete overlap with a high spatial work effect. *International Journal of Engineering and Technology(UAE)*, 7(3), 567-574. <http://dx.doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.14591>
  - [2] Азизов Т.Н. К расчету изгибаемых железобетонных элементов полого треугольного сечения / Т.Н. Азизов, Сакр Эль Гадбан // Ресурсоeкономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 30., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2015. – С. 79-85.
  - [3] ENV 1992-1. *Eurocode- 2. Design of concrete structure. Part 1, General rules and rules for buildings*, GEN, 1993.
  - [4] DBN V.2.6-98:2009. *Konstruktivni budynkiv i sporud. Betonni ta zalizobetonni konstruktivni. Osnovni polozhennya.*, Minrehiombud, Kyiv
  - [5] Li, G., Wang, B., & Zhou, M. (2018). *Study on Flexural Properties of Reinforced Spontaneous Combustion Gangue Concrete Beams*. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 62(1), 206-218. <https://doi.org/10.3311/PPci.10647>
  - [6] J. K. Wight, J.G MacGregor . *Reinforced Concrete: mechanics and design*, New Jersey: Upper Saddle River, (2009).
  - [7] Rombach G.A. *Finite-element Design of Concrete Structures: Practical problems and their solutions*, Second edition. ICE Publishing, 2011. - 350p.
  - [8] Kochkarev, D., & Galinska, T. (2017). Calculation methodology of reinforced concrete elements based on calculated resistance of reinforced concrete. Paper presented at the *MATEC Web of Conferences*, 116 <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711602020>
  - [9] Kochkarev, D., Galinska, T., & Tkachuk, O. (2018). Normal sections calculation of bending reinforced concrete and fiber concrete element. *International Journal of Engineering and Technology(UAE)*, 7(3), 176-182. <http://dx.doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.14399>
  - [10] Ржаницын А.Р. *Теория составных стержней строительных конструкций*, Госстройиздат. Москва. 1948, 192.
  - [11] Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренко, К.Вища шк., 2004, 655.
1. Азизов Т.Н. К расчету изгибаемых железобетонных элементов полого треугольного сечения / Т.Н. Азизов, Сакр Эль Гадбан // Ресурсоeкономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 30., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2015. – С. 79-85.
  2. Азизов Т.Н. Пространственный расчет железобетонных пролетных строений мостов / Т.Н. Азизов // Дороги і мости. Збірник наукових праць. Вип. 7. Том 1. – К.: ДерждорНДІ, 2007. – 8-21.
  3. Азизов Т.Н. Расчет железобетонных перекрытий и пролетных строений мостов / Т.Н. Азизов, А.Я. Барашников, В.С. Дорофеев. - Одесса, 2009. – 193 с.
  4. Азизов Т.Н. Сборно-монолитные пространственные конструкции, изготавливаемые без применения опалубки / Т.Н. Азизов // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 25 – Одеса: ОДАБА, 2007. – С. 3-9.
  5. Азизов Т.Н. Теория пространственной работы перекрытий. / Т.Н. Азизов. – Киев: Науковийсвіт, 2001. – 276 с.
  6. Азизов Т.Н. Учет нелинейных свойств материалов изгибаемых каменных элементов, усиленных железобетонными пластинами / Т.Н. Азизов, А.С. Мыза // *SciencesofEurope*. – 2016. – Vol 1, № 8. – S. 69-74.
  7. Азизов Т.Н. Ефективні конструкції мостових споруд / Т.Н. Азизов, О.С. Мельник // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 47 – Одеса: овнішрекламсервіс, 2012. – С. 16-22.