МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ФІНАНСОВО-ЕКОНМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Акулов М. Г., Тютюніков І. Є.,
Куперштейн Л. М., Ткаченко М. І.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

ВФЕУ - 2017

УДК 330.519.6
ББК 65в641
М-63

Рецензенти:

Т.С. Клебанова, д-р екон. наук, проф.
(Харківський національний економічний університет)

П. С. Мартинюк , д-р екон. наук, проф.
(Київський інституту бізнесу і технологій)

О.В. Мороз, д-р екон. наук, проф.
(Вінницкий національний аграрний університет)

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист № 1/11-19814 від 17.12.2013

Акулов М.Г., Тютюніков І.Є., Куперштейн Л.М., Ткаченко М.І. Моделювання економічної динаміки / Навч. посібник**.** Під ред. М.Г. Акулова – Вінниця.: ВФЕУ, 2017. — 310 с.

У навчальному посібнику розглядаються теоретичні основи дослідження складних систем і процесів в економіці, наводиться відповідний математичний апарат, сучасні парадигми поведінки складних систем. Наведено можливості використання моделей в дослідженнях економічної динаміки, розглянуто відомі та нові лінійні та нелінійні моделі. Теоретичний матеріал супроводжується прикладами розв’язання задач, тестовими завданнями, а також завданнями для самостійного виконання.

Навчальний посібник призначений для студентів і аспірантів, які спеціалізуються в галузі економічної кібернетики, а також широкому колу фахівців.

ББК 65.050.9

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасні умови функціонування економіки України характеризуються високим рівнем невизначеності, що впливає на збільшення ризиків і втрат при прийнятті управлінських рішень. Цілком природно, що складність економічних процесів зростає і ставить нові, більш високі вимоги до управління економічними системами всіх рівнів. Але дослідження в економіці проявів хаотичної динаміки, а також виявлення подій катастрофічної природи, пов'язаних із різкими стрибкоподібними змінами змінних стану економічних систем, вплив невизначеностей і нерегулярності, що вагомо відбиваються на формування економічних умов, доводять, що застосування класичних методів й моделей у цій ситуації є малоефективним. Це диктує необхідність переорієнтації методології моделювання з досліджень процесів стабілізації на вивчення особливостей самоорганізації, з дослідження умов стабільності на функціонування за умов нестабільності й нерівновагової поведінки, з безперервності поведінки на стрибки й катастрофи, з детермінізму на вивчення невизначеностей.

Постановкою й вирішенням завдань економічної динаміки займалися колективи під керівництвом В.М. Глушкова, В.В. Леонтьєва, Ю.Г. Лисенка, В.Л. Петренка, Л.Н. Сергеєвої, В.М. Тімохіна. Проблемами моделювання процесів адаптації в економіці - наукові школи В.А. Забродського, Т.С. Клебанової, В.Л. Петренка. Питаннями розробки економіко-математичних моделей на різних рівнях розгляду економіки в різний час займалися видатні вітчизняні вчені: А.Г.Аганбегян, О.М. Алимов, В.Н. Амітан, К.А. Багриновський, О.О. Бакаєв, В.М. Геєць, Є.Г. Гольдштейн, Я.О. Дубров, Ю.М. Єрмольєв, Н.Ю.Кобринський, Н.І. Костіна, О.В.Лотов, І.М. Ляшенко, Є.З. Маймінас, В.С. Михалевич, М.В.Михалевич, Н.М. Моисеев, І.В. Сергієнко, І.С. Ткаченко, Н.З. Шор, В.Г.Штелик, Д.Б. Юдін, О.І. Ястремський. Фундаментальний внесок у розвиток методології застосування кількісних методів в економіці належить ученим В.М.Буркову, В.В. Вітлінському, В.М.Геєцю, О.Г. Гранбергу, В.Я. Зарубі, П.С.Краснощьокову, Ю.Г. Лисенку, Д.О. Новікову, О.А. Павлову, О.О.Петрову, О.І. Черняку.

Роботи зазначених авторів складають на даний момент базис методології моделювання економіки. Разом з тим необхідно відзначити, що накопичений досвід застосування математичних методів в економіці дотепер не одержав належного рівня систематизації й структурування, який би дозволив стверджувати існування єдиної методології економіко-математичного моделювання. Більш того, зростання складності економіки призвело до виникнення нової парадигми управління, що передбачає нелінійність і необоротність процесів економічного розвитку і орієнтує дослідження на вивчення процесів самоорганізації економічних систем, що виникають у сильно нерівноважних умовах. Необхідність переходу до нової парадигми управління викликано корінними змінами наукового світогляду, що протікають в інших галузях знань і природничих науках.

Першим кроком у напрямку до усунення теоретичної роз'єднаності в сфері застосування кількісних методів до аналізу економічних процесів повинне стати створення єдиного теоретичного інструментарію й визначення основних термінів з погляду нової еволюційної парадигми дослідження економіки. Відсутність загальної методології моделювання економічних систем, явищ і процесів не надає можливості дослідникам зосередитися на творчій складовій процесу моделювання, що перетворює весь процес відтворення істотних властивостей системи в інтуїтивний пошук структури моделі. При цьому в умовах відсутності єдиної методології весь масив знань щодо досліджуваної предметної області, недостатньо структурований для того, щоб гарантувати можливість вибору системи методів і моделей, адекватних проблемі.

Перспективність моделювання не тільки як технології дослідження економічних систем, але і як методу наукового пізнання, зумовлює необхідність проведення наукових досліджень в галузі структурування методів, підходів, технік й інструментальних засобів моделювання, які складають його методологію. Це зумовило актуальність здійснення розробок у написанні навчального посібника «Моделювання економічної динаміки», спрямованого на структурування наукового знання про моделювання економіки в частині моделювання динамічних економічних процесів.

Перелік розділів навчального посібника відповідає тематиці навчальної програми підготовки магістрів за спеціальністю «Економічна кібернетика усіх форм навчання». На відміну від існуючих підручників і навчальних посібників, удосконалено структуру розділів та розкрито додаткові теми, які запропоновано відповідно узагальненню загальнонаукових підходів до організації пізнавальної діяльності згідно методології моделювання економічної динаміки. Це дозволяє підвищити проведення адекватного вибору засобів, методів й інструментів для моделювання економічних процесів з урахуванням базових принципів і концепцій економічної динаміки. Обумовлено категоріальний апарат моделювання економіки, який засновано на аналізі базових категорій наукового пізнання та понятійного базису дослідження.

Концепція моделювання економічної динаміки заснована на узагальненні класичних підходів до моделювання економіки і дозволяє розробляти когнітивні й експериментальні моделі економічних процесів та підвищувати продуктивність процесів економіко-математичного моделювання. Економіко-математичні моделі динамічних процесів, що реалізують положення концепції дозволяють вирішувати завдання експериментального дослідження економіки, підвищувати обґрунтованість і своєчасність прийняття управлінських рішень.

У підготовці матеріалу та написанні навчального посібника брали участь чотири автори, за якими закріплюється написання наступних розділів:

Акулов М.Г. – загальна редакція, вступ, рзділи 6,8,11,12; Тютюніков І.Є. - рзділи 2,3,4,5;10; Куперштейн Л.М. - рзділи 1,9; Ткаченко М.І. - рзділ 7, практикум.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

1.1. Методологічні аспекти і основні категорії економічної динаміки

Під методологією моделювання динаміки економічних систем розуміється розділ галузі економічних знань, що являє собою впорядковану, структуровану й організовану сукупність принципів, концепцій, інструментів, засобів і методів моделювання, що служать для опису, аналізу й управління поведінкою економічних систем, а також стійкістю цієї поведінки.

На підставі аналізу сучасних проблем економічної динаміки, а також специфіки моделювання як методу наукового пізнання, обумовимо необхідність формулювання й структурування наукових основ методології економічної науки в галузі формалізації й застосування кількісних методів. Цю необхідність продиктовано не стільки внутрішньою потребою дослідників, що володіють апаратом економіко-математичного моделювання та прагнуть впорядкувати свою дослідницьку діяльність, скільки потребою всієї економічної науки в розробці й використанні доступних засобів пояснення й узагальнення суті економічних явищ і процесів. Методологія економіко-математичного моделювання й моделювання економічної динаміки зокрема виступає формалізованим інструментом пізнання закономірностей розвитку економічних систем, що є затребуваним у цей час економічною теорією, і дозволяє синтезувати нові, більш глибокі й достовірні знання про процеси функціонування, управління й розвитку економіки.

Процес моделювання являє собою дослідження об'єктів пізнання на моделях – побудову й вивчення моделей реально існуючих предметів й явищ. Можливість поширювати накопичений досвід на інші системи, що мають той або інший ступень подібності до первісної системи, універсалізація знання приходить із агрегуванням і систематизацією відомостей про досліджуваний об'єкт. Саме на цьому рівні стає у нагоді методологія економіко-математичного моделювання, тобто галузь знань, що досліджує передумови, принципи, структуру, логічну організацію, засоби й методи застосування формальних математичних методів до дослідження й вирішення проблем функціонування, управління й розвитку економічних систем. Це дозволяє сформулювати наступне визначення.

Економіко-математична модель – математичне відображення економічного процесу або економічної системи, що використовується під час дослідження замість об’єкту-оригіналу – економічної системи – з метою аналізу, визначення кількісних або логічних зв'язків між його різними частинами.

Складність і розмаїтість процесів, що протікають в економіці, різноманіття природи й форм зв’язку елементів висувають високі вимоги до процедур і методів розробки й прийняття управлінських рішень. Каскадне, лавиноподібне підвищення складності вимагає застосування математичних методів, які, у свою чергу, припускають інший рівень формалізації економіки як моделі. Для визначення галузі дослідження економічної динаміки запропоновано наступне визначення.

Економічна динаміка – розділ економічної науки, що вивчає детерміновану поведінку в часі економічних систем під впливом внутрішніх і зовнішніх факторів з метою аналізу рівноваги й управління стійкістю.

Динамічною називається система, параметри якої явно або неявно залежать від часу. З цього визначення виходить, що якщо для поведінки системи визначені функціональні рівняння, то в них включаються в явному вигляді змінні, залежні від часу.

При цьому, спираючись на аналіз підходів до визначення економічної системи, під економічною системою будемо розуміти складну динамічну цілеспрямовану систему, що охоплює процеси виробництва, обміну, розподілу, перерозподілу й споживання благ.

Проведемо класифікацію динамічних моделей, що дозволить виділити:

когнітивні моделі, призначенням яких є відтворення з метою подальшого дослідження істотних закономірностей, що мають місце в об’єкті-оригіналі, що відповідають на питання «що є досліджувана система?»;

прогностичні моделі, що служать для оцінки майбутнього стану об’єкта-оригіналу, що відповідають на питання: «якою буде досліджувана система?»;

управлінські моделі, метою якої є визначення бажаного стану системи й способів його досягнення, що відповідають на питання: «якою повинна бути досліджувана система?»;

експериментальні моделі, що застосовуються в ситуаційному аналізі та відповідають на питання: «що буде з досліджуваною системою, якщо..?».

З погляду класичних підходів до дослідження економічної динаміки в межах запропонованої класифікації запропонуємо наступне визначення моделі економічної динаміки.

Модель економічної динаміки – дескриптивна динамічна детермінована економіко-математична модель економічного процесу в термінах апарата диференціальних і різницевих рівнянь, яку використовують для дослідження детермінованої поведінки в часі економічних систем під впливом внутрішніх і зовнішніх факторів з метою аналізу рівноваги й управління стійкістю.

Адекватне відображення поведінки об'єкта-оригіналу в моделі відбувається на базі основних принципів методології моделювання економічної динаміки, відображених концепціями даної методології за допомогою застосування відомих моделей, а також наявних інструментів, методів і засобів.

Базовими принципами методології моделювання економічної динаміки є принципи: *подоби* (подоба виступає головним інструментом проектування й побудови моделей); *детермінізму* (детермінізм вказує на причинність, відсутність невизначеності у відношенні керуючих змінних); *керованості* (керованість означає не тільки принципову можливість переходу системи з довільного початкового в заданий кінцевий стан в обмеженій тимчасовій перспективі, але також указує на доступність механізмів здійснення такого переходу і наявність особи, зацікавленої в даному результаті); *зворотного зв'язку* (керованість вимагає зворотного зв'язку); *інерційності* (динамічним системам властива наявність лагів); *раціональності* (базовий принцип економічної діяльності, як окремий випадок відомого принципу найменшої дії), *адаптивності* (на противагу раціональності, адаптивність базується не на детермінізмі, а на посиленні зворотних зв'язків і виробленні чутливих реакцій на зміни); *емерджентності* (як неадитивність властивостей окремих елементів вона призводить до відображення призначення системи на її структуру, зумовлюючи вплив структури на функції).

Використання базових принципів дає можливість побудови моделей динаміки в межах обраної концепції. За пропонованої структури методології можна дослідити протиріччя концепцій моделювання економічної динаміки: лінійності й нелінійності; безперервності й дискретності; рівноваги, нерівноважності й катастроф; стійкості, нестійкості, циклів і хаосу.

Моделі економічної динаміки створюються засобами диференціального й інтегрального обчислення. У процесі моделювання для визначення типу й форми зв'язку між змінними, а також оцінки параметрів і коефіцієнтів моделі застосовується апарат економіко-статистичних методів, еволюційних методів пошуку, методу експертних оцінок, тощо.

1.1.1. Загальне поняття про математичні моделі

Математичні моделі – це моделі, в яких для опису властивостей і характеристик об’єкта, явища, процесу або системи використовуються математичні символи і методи.

Математична модель є спрощеним представленням ситуації. Важливо в цій спрощеній формі зуміти передати суттєві характеристики явища, об’єкта або процесу, який досліджується. Модель може не все, але навіть досить груба на вигляд ідеалізація нерідко дозволяє глибше вникнути в суть проблеми. Здійснюючи вплив на параметри моделі (вибираючи їх, керуючи ними), ми одержуємо можливість провести якісний аналіз явища, яке досліджується, і зробити висновки загального характеру.

У даному посібнику розглядаються динамічні математичні моделі економічних систем, тобто моделі, у які входять величини, що змінюються у часі. На підставі таких динамічних моделей можна прогнозувати майбутнє і по-новому оцінити минуле.

Відмітимо, що у природничих науках, головним чином у фізиці, математичні моделі давно служать надійним інструментом дослідження. При цьому часто використовують основні, емпірично перевірені принципи, щоб одержати загальний вид залежностей (як правило, диференціальних рівнянь). Крім того, для опису об'єкта, який досліджується, будують додаткову систему гіпотез, з яких виводять властивості об'єкта. Такі гіпотези потрібні, щоб замкнути опис, наприклад, побудувати залежності коефіцієнтів диференціальних рівнянь від змінних, які характеризують стан системи.

У математичній економіці є невідомим загальний вигляд рівнянь, які описують еволюцію економічної системи. У кожному окремому випадку рівняння моделі носять гіпотетичний характер, і щоразу мають потребу в емпіричній перевірці. Тому головною проблемою математичного опису економічних систем на цей час є пошук загальних, «елементарних» принципів математичного моделювання економічних явищ у рамках цілісних економічних систем.

Основну задачу науки — перетворення повсякденного досвіду в критичний експеримент і на його основі абстрагування від емпірики до загальних принципів – не вирішити, просто імітуючи на комп'ютері видиму еволюцію економічної системи. У тій або іншій формі необхідно використовувати ідеологію математичного моделювання, накопичену у природничих науках.

1.1.2. Економічна система як об'єкт математичного аналізу складних систем

Політична економія визначає економічну систему як історично, тобто в процесі розвитку, сформовану сукупність умов виробничої діяльності багатьох людей. Ці умови виражаються виробничими відносинами.

Виробнича діяльність полягає в перетворенні ресурсів природи в матеріальні блага, необхідні для підтримки існування і духовного розвитку людей.

Продуктивні сили визначаються способами виробництва, матеріалізованими в накопичених засобах виробництва, і приводяться в дію працею людей, які беруть участь у виробництві – виробників. У розвитому суспільстві самі засоби виробництва викликають поділ праці. Внаслідок цього виробники взаємодіють, і між ними виникають визначені відносини, що виявляються, насамперед, як інтереси.

Взаємодія інтересів у рамках історично сформованої матеріальної і організаційної структури виробництва перетворюється в процеси саморегулювання економічної системи. Виникає представлення про виробничі відносини як про якийсь рівноважний стан процесів саморегулювання. Отже, виробничі відносини – це визначені механізми економічного регулювання процесів виробництва, розподілу, обміну і споживання матеріальних благ. Від цього залежать умови життя й інтереси людей.

Таким чином, через механізми економічного регулювання діють своєрідні зворотні зв'язки в економічній системі. Вони визначають характер еволюції системи. Ми добре знаємо, що економічні кризи виникають не тому, що ламаються верстати або паровози, а тому, що взаємодія інтересів стає конфліктною. Порушуються механізми економічного регулювання, від цього ламаються верстати і зупиняються паровози.

Економічна система піддається керуючим впливам. По-перше, суспільні норми формують суспільну свідомість і впливають на інтереси людей. По-друге, обмежуючи можливість людей діяти, керуючись тільки власними інтересами, економічні, політичні й інші дії державних органів змінюють параметри економічних механізмів регулювання. По-третє, державні установи споживають частину вироблених матеріальних благ. Усі ці заходи утворюють множину керуючих впливів на економіку.

Політична економія виробила специфічні методи дослідження економічних систем. Вони засновані на загальних категоріях, що виражають сукупні результати взаємодій численних груп людей – економічних агентів**:** сукупний суспільний продукт, національний доход, продуктивність суспільної праці, суспільно необхідні витрати, вартість, ціна, рента тощо. У цих категоріях сформульовані економічні закони, що мають характер емпіричних узагальнень.

Основу математичної моделі економічної системи утворюють описи структури і параметрів процесів виробництва. Усі процеси виробництва мають загальну властивість: у кожному з них деякі вихідні ресурси R перетворюються в продукти виробництва Y за умови, що використовуються засоби виробництва K і затрачується праця L. Отже, виробничі процеси можна описати деякими функціональними залежностями (операторами) T, що відображають обсяги використаних ресурсів в обсяги випусків продуктів при тому, що область визначення й область значень операторів T залежать від кількості засобів виробництва K і кількості витраченої праці L. Структура оператора визначається специфікою реальних виробничих процесів, які моделюються.

До опису процесів виробництва в основних секторах господарства потрібно додати опис механізмів економічного регулювання процесів виробництва, тобто модель економічної поведінки основних груп суспільства, що беруть участь у виробничих відносинах. Ці групи людей розрізняються типами поведінки. При цьому важливо, скільки людей дотримуються даного типу поведінки, а не хто саме. У результаті виникають оператори «зворотних зв'язків», що замикають опис процесів виробництва.

Така система моделей дозволить прогнозувати можливі структурні зміни в економічній системі в залежності від прийнятих керуючих економічних рішень. Коли б удалося реалізувати таку можливість, ми значно наблизилися б до головної мети економічної теорії – розробити методи оцінки ефективності використання ресурсів природи економічною системою для виробництва і розподілу матеріальних благ, що забезпечують процвітання суспільства.

Однак до практичної реалізації такої можливості ще далеко. Потрібно виробити надійні, емпірично перевірені принципи математичного опису процесів, що протікають в економіці, і елементів економічної системи. Саме тут дослідник зіштовхується з істотною відмінністю економічних систем від фізичних. З фізичними системами можна експериментувати і бути впевненим, що щоразу експеримент проводиться з тією же самою системою. Тому результати експериментів статистично достовірні.

Економічна система в кожний момент часу існує в єдиному екземплярі, тому не можна бути впевненим, що повторні експерименти проводяться з тією же самою системою. Емпіричні залежності в економіці зовсім іншої природи, ніж у фізиці. Принцип опису можна вважати таким, що емпірично підтверджується, якщо з моделей різних економічних систем, на ньому заснованих, виводиться сукупність основних якісних закономірностей еволюції всіх цих систем. Для емпіричної перевірки моделей можна використовувати дані про минулий розвиток економіки.

Помітимо, що обчислювальний експеримент в економічній області додатків як правило, проводиться для перевірки вихідних гіпотез і виведення з них основних рівнянь. Обчислювальні експерименти з моделями економічних систем дають вихідний експериментальний матеріал для індуктивного процесу виведення загальних принципів.

Однак не все в економіці піддається формалізації саме тому, що істотними є інтереси людей, а вони продукт суспільної свідомості. Еволюцію суспільної свідомості формалізувати не можна. Тому треба сумістити традиційні методи неформального аналізу, які розроблені у філософії, історії, соціології, політичній економії, і математичні методи переробки інформації, поданої у вигляді формальних моделей.

Така стратегія дає можливість використовувати нові інформаційні технології в керуванні техніко-економічними системами й економікою в цілому. Вона заснована на сформованих моделях економічної науки, досвіді і навичках фахівців-практиків, що приймають економічні рішення, накопиченої звітної інформації, а також на можливості за допомогою комп'ютера переробляти числову, символьну і графічну інформацію.

У формалізованому виді, придатному для представлення й обробки в комп’ютері, записуються впорядковані знання економістів і керівників-практиків про систему і правила прийняття рішень. По наявній звітній інформації уточнюються параметри у формальних співвідношеннях. Результатом є формалізована модель накопиченого досвіду професійної економічної діяльності, яку називають «м’якою» моделлю.

Працюючи з «м’якими» моделями, ми, взагалі кажучи, не поглиблюємо знання про закони функціонування економічної системи, проте одержуємо багато корисної інформації.

По-перше, проводимо системний аналіз накопиченого професійного досвіду в економічній області. Часто при цьому виявляються протиріччя, виникають нові задачі, рішення яких збагачує досвід. Крім того, висвітлюються проблеми, які не мають задовільного розв’язання, у результаті виникає відчуття актуальності фундаментальних досліджень.

По-друге, використання комп’ютера у процесі виконання типових процедур планово-економічної діяльності підвищує її ефективність і поліпшує якість прийнятих рішень. Зрозуміло, що таке підвищення і поліпшення має межу. Щоб подолати цю межу, потрібні фундаментальні дослідження, котрі поглиблюють наше розуміння принципів функціонування економічних систем.

1.1.3. Традиції математичної економіки

Математична економіка виникла з політичної економії. Схематично можна виділити дві лінії розвитку математичних методів аналізу економічних систем.

1.1.3.1. Загальна економічна рівновага

Засновниками одного напряму є Ж.-Б. Сей і А. Курно. Сей розглядав зв'язок процесів виробництва, розподілу і обміну в ринковій економіці. Він вважав, що в процесі виробництва затрачаються праця L, капітал K, земля Z і виробляються споживчі вартості-корисності.

Вартість товару визначається витратами виробництва і корисністю продукту. Установлюється вартість такою, що попит врівноважується з пропозицією товару. Ж.-Б. Сей сформулював закон ринку: процес обмінів на ринку автоматично приводить до рівноваги, тому сукупний попит на товар завжди дорівнює пропозиції товару. Оскільки є вірним закон Сея, вивчення саме стану рівноваги на ринку має важливе значення.

Розробка ідеї Сея привела до теорії економічної рівноваги.

Людині взагалі є притаманним прагнення до стабільності, яке формалізується в теорії динамічних економічних систем за допомогою поняття рівноваги. Рівновага – це стан системи, у якому параметри, що досліджуються, залишаються незмінними у часі.

Моделі стану рівноваги дають спрощену схему картини рівноважного світу ринкової економіки, проте вони допомагають точніше зрозуміти зв'язки економічних показників і тенденції структурних зрушень.

Отже, модель ринкової рівноваги містить опис сукупного попиту та сукупної пропозиції товару на ринку. Функція пропозиції будується на основі моделі виробництва.

Розглянемо деяку технологію, що перетворює деякі фактори виробництва в продукт. Позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кількість використаних факторів, а y – величину випуску в одиницю часу. Будемо вважати, що перетворення задається багатовимірною функцією вигляду

$$y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

За змістом, функція $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена тільки при $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, і приймає невід’ємні значення.

Частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0$ показує, яку добавку до випуску дає використання додаткової одиниці *i-го* фактора за інших однакових умов, і називається граничною продуктивністю *i-го* фактора.

Модель виробництва ґрунтується на аксіомі убутної граничної продуктивності Дж. Б. Кларка: за інших рівних умов гранична продуктивність *i-го* фактора спадає зі збільшенням кількості цього фактора у виробництві.

З аксіоми убутної граничної продуктивності випливає, що $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} < 0$, $i = 1,..., n$.

Отже, функція $y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ невід'ємна, монотонно зростаюча, увігнута. У математичній економіці вона називається виробничою функцією.

Функція попиту будується на підставі теорії граничної корисності, розробленої австрійською школою політичної економії. Відповідно до цієї теорії споживач має апріорне представлення про корисність продуктів і оцінює споживчу вартість набору продуктів у кількостях $y_1,... ,y_n$ функцією корисності $U(y_1 ,... ,y_n)$. Оскільки корисність має економічний зміст, то $U(y_1 ,... ,y_n) > 0$. Частинна похідна $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ показує, наскільки зросте корисність набору $y_1,... ,y_n$, якщо додати одиницю *i-го* продукту. Природно вважати, що $\frac{\partial U}{\partial y_i} > 0$, $i = 1,... ,n$.

Похідна $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ називається граничною корисністю одиниці *i-го* продукту в наборі $y_1,..., y_n$.

Теорія споживчого попиту заснована на аксіомі убутної граничної корисності: гранична корисність додаткової одиниці *i-го* продукту падає зі збільшенням кількості його в наборі за інших рівних умов. Отже, $\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} < 0$, $i = 1,... ,n$.

Функція корисності $U(y_1,... ,y_n)$ невід'ємна, монотонно зростаюча, увігнута.

Функція пропозиції виробника будується на підставі аксіоми про максимізацію прибутку виробниками, а функція попиту – на підставі аксіоми про максимізацію корисності при бюджетному обмеженні споживачів.

Математична модель об'єкта, що досліджується. як правило, містить у собі дві групи елементів: відомі до моменту побудови моделі, екзогенні, (визначені поза моделлю) параметри і невідомі – ендогенні (обумовлені усередині моделі) – параметри, які треба визначити з аналізу (розв'язання) моделі.

Побудувати математичну модель функціонування деякої системи означає відшукати або постулювати оператор (функцію), що зв'язує невідомі і відомі параметри моделі.

Як правило, у макроекономічних моделях як екзогенні параметри задаються технологія виробництва у вигляді виробничої функції і характер поведінки економічних суб'єктів на кожному з ринків у вигляді їхніх функцій попиту та пропозиції. Як ендогенні показники, які одержуються з аналізу моделі виступають величина реального національного доходу, рівень зайнятості, ставка реальної заробітної платні, реальна ставка відсотка і рівень цін. Особливий інтерес представляє такий вектор ендогенних величин, при якому економіка знаходиться в стані загальної рівноваги.

Загальна економічна рівновага – це стан, при якому обсяг виробництва і пропорції обміну склалися таким чином, що на всіх ринках одночасно досягнуто рівність між попитом та пропозицією і при цьому жоден з учасників ринкових угод не зацікавлений змінювати свої обсяги покупок або продажів.

Визначити стан загальної економічної рівноваги – значить з'ясувати, при яких умовах всі учасники ринкового господарства зможуть реалізувати свої цілі. Досягнення загальної економічної рівноваги не означає, що тепер кожен учасник ринкового господарства задоволений своїм положенням; рівновага просто констатує, що за рахунок зміни обсягу і структури покупок або продажів ніхто не зможе поліпшити свій добробут у сформованих умовах.

Загальна економічна рівновага не є типовим станом ринкової економіки, тому що плани суверенних суб'єктів, що розробляються незалежно один від одного, лише випадково можуть виявитися взаємно узгодженими. Однак поведінка суб'єктів у ринковому господарстві визначається їхнім бажанням досягти рівноваги.

Для розуміння специфіки поточної господарської кон'юнктури і прийняття рішень про заходи економічної політики важливо виявити, чи є економічна рівновага стійкою або нестійкою.

Якщо у відповідь на екзогенний імпульс, що порушує рівновагу, система сама під впливом внутрішніх сил повертається у рівноважний стан, то рівновага називається стійкою (стабільною). Економічна рівновага називається нестійкою, якщо після екзогенного імпульсу вона самостійно не відновлюється. Тому поряд з визначенням умов установлення загальної економічної рівноваги необхідно досліджувати характер рівноваги.

У залежності від того, якою мірою при дослідженні економічних явищ враховується час, розрізняють три вигляди аналізу: статичний, порівняльної статики і динамічний.

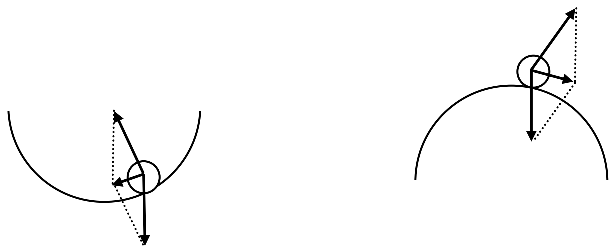
При статичному аналізі визначаються значення ендогенних параметрів на деякий момент часу.

Якщо модель дозволяє визначити значення ендогенних параметрів у різні моменти часу, але при цьому не описується процес переходу від одного рівноважного стану до іншого, то це модель порівняльної статики. Процес переходу економіки з одного стану в інший досліджується в ході динамічного аналізу, при якому екзогенні та ендогенні змінні розглядаються як функції від часу: $y(t)$, $P(t)$.

У рамках динамічного аналізу з'ясовуються також причини можливого неповернення економіки в рівноважний стан після екзогенного шоку (поштовху).

Через взаємозв'язок всіх ендогенних макроекономічних параметрів їхні рівноважні значення, як правило, можна визначити тільки спільно на основі розв’язання системи рівнянь, що описує взаємодія макроекономічних суб’єктів одночасно на всіх макроекономічних ринках.

Точка рівноваги – точка, потрапивши в яку траєкторія розвитку динамічної системи вже не може її залишити без додаткових зовнішніх впливів. Аналогічним чином можна сказати, що, якщо траєкторія починається в точці рівноваги, то без зовнішнього поштовху траєкторія не залишить цю точку. На рис. 1.1 розглянуто механічну інтерпретацію положення рівноваги.



а) б)

Рис.1.1. Положення рівноваги механічної системи
а) – стійке; б) – нестійке.

1.1.3.2. Модель розширеного відтворення

Кєне розглядав процес суспільного відтворення в цілому. Він вивчав рух різних частин суспільного продукту в процесі відтворення, виписуючи систему натуральних і вартісних балансів частин суспільного продукту.

Маркс розвив ідеї Кєне у відомій числовій моделі процесу відтворення і вивів знамениті умови розширеного відтворення.

Ці ідеї були розвиті далі В. В. Леонтьєвим у моделі «витрати-випуск» (input — output analysis). Модель економічної системи подано як систему лінійних балансових співвідношень виробництва і розподілу продуктів у процесі розширеного відтворення.

Отже, у теорії економічної рівноваги описані механізми ринкового регулювання виробництва і розподілу продуктів у конкретній формі ринкових механізмів, однак не розглядаються дія ринкових механізмів і сам процес еволюції економічної системи. У балансових моделях відтворення описані загальні співвідношення різних частин суспільного продукту в процесах еволюції економічної системи, але не описані механізми економічного регулювання, що могли б замкнути балансові співвідношення.

Сучасна математична економіка схрещуванням чистих ліній одержала гібрид – теорію економічного росту.

1.1.4. Інструментальні засоби економічної динаміки для моделювання та аналізу економічних процесів

В останні роки складність економічних процесів значно зросла. Відсутність сформованих надійних і безвідмовних механізмів регулювання економічних відносин приводить до збільшення ризиків, що означає втрати від раптових змін ринкового середовища. Насамперед, це стосується процесів інвестування, балансу споживання і накопичення, питань установлення відповідності між реальним і очікуваним рівнями інфляції, а також деяких інших проблем, що розвиваються за нелінійними сценаріями.

Складність економічних процесів викликала необхідність розвитку двох взаємодоповнюючих напрямів в економічній теорії: економічна статика і економічна динаміка.

Визначення 1. Система називається динамічною, якщо її поведінка в часі визначена функціональними рівняннями, у яких змінні в різні моменти часу включені в явному вигляді.

Іншими словами, система є динамічною, якщо всі значення змінних стану упорядковані в часі.

Економічною статикою прийнято називати такий розділ економічної теорії, де передбачається, що дослідника не турбує питання про час.

Економічною динамікою називають ті розділи економічної теорії, у яких усяка кількість повинна бути віднесена до певного часу.

Так, наприклад, економічна статика припускає, що підприємець застосовує скільки і стільки факторів виробництва, виготовляючи за їх допомогою певну кількість продуктів. При цьому питання про те, коли застосовуються ці фактори і коли завершується виготовлення продукції, не ставляться. В області економічної динаміки звертається особлива увага на те, яким образом зміни в цій часовій визначеності позначаються на взаємодії факторів і продуктів.

Економічна динаміка, на відміну від статики, вивчає поведінку економічних систем і розвиток процесів, що протікають у них, у часі. Це вивчення дає відповідь на важливе питання: яке буде стан системи в наступний момент часу, з огляду на стан у даний момент часу?

Таким чином, об’єктом вивчення економічної динаміки є складні динамічні економічні системи.

Предметом вивчення економічної динаміки є поведінка динамічних економічних систем, характер і стабільність цієї поведінки.

Дослідження динаміки поведінки економічних систем, тобто певного скінченого часового ряду спостережень за розвитком економічної системи, дозволяє не тільки визначити перспективи і можливі сценарії процесу подальшого розвитку об'єкта, що досліджується, але також розробити комплекс адаптивних впливів, виявити можливі резерви і скорегувати політику, яка реалізована в реальній економічній системі.

Інструментальні засоби дослідження поведінки динамічних систем в економіці пропонують кілька математичних теорій, зокрема математична статистика, економетрія, прогнозування. Ця група дисциплін вивчає економічні системи, ґрунтуючись на тому, що поведінка економічної системи є суттєво стохастичною.

Стохастичний підхід припускає вивчення процесу в цілому як результат взаємодії стійких тенденцій і випадкових подій, що розвиваються за своїми законами.

На відміну від цього підходу економічна динаміка вивчає системи, математичним моделями яких є різницеві, диференціальні, функціональні, інтегральні рівняння різних порядків і їх системи. Це означає, що економічна динаміка вивчає чітко детерміновані системи.

Поведінка системи являє собою розвиток за деякими сталими закономірностями, котрі є механізмом утворення поведінки. Але наскільки успішно економічна динаміка може моделювати таку складну систему, як економіка, що піддається інтенсивним стохастичним впливам?

Розглянемо два моменти.

1. На мікрорівні економічне середовище відрізняється крайньою нестабільністю: люди, здійснюючи діяльність від свого імені, або об'єднавшись у фірми, приймають економічні рішення, які впливають на економічну рівновагу в реальній економічній системі, без страхових рішень, відповідно до власних представлень про рівновагу. Держава намагається контролювати цей процес і також зрушує економічну рівновагу по-своєму суб'єктивно, і по-своєму випадково. Однак на визначеному рівні розгляду впливи учасників економічних відносин групуються в макроекономічні сили, що мають більш-менш стабільну структуру та стабільні інтереси. Ці сили через свою нечисленність і умовну детермінованість набагато менше піддані стохастичним впливам з боку більш низьких «поверхів» подання економіки.

Макроекономічний погляд на народне господарство розрізняє тільки чотири економічних суб’єкта:

- сектор домашніх господарств – усі приватні господарські одиниці у межах країни. Їх економічні інтереси: пропозиція факторів виробництва, споживання частини доходу, який одержується, зберігання залишків.
- підприємницький сектор – сукупність усіх фірм, які зареєстровано в межах країни. Економічні інтереси даного сектору економіки: попит на фактори виробництва, пропозиція благ та інвестування.
- державний сектор. Економічна активність держави як макроекономічного суб’єкта проявляється у виробництві суспільних благ, стягуванні податків та пропозиції грошей.
- сектор закордонний.

При макроекономічному дослідженні групуванню підлягає також характер поведінки фізичних та юридичних осіб у господарському житті. К найважливішим макроекономічним поняттям відноситься, наприклад, функція споживання домашніх господарств або функція попиту на працю, єдина для підприємницького сектору.

Отже, можна вважати, що в певному сенсі макроекономічне середовище є детермінованим та економічна динаміка як інструмент його дослідження є досить доречною.

Відомо, що економічні дані можна умовно представити у виді стохастичного і детермінованого компонента. Отже, при переході від мікро- до макрорівня настає момент, коли детермінований компонент починає превалювати, а стохастичний перетворюється в «шум». У випадку виникнення складних видів динаміки, наприклад, хаосу, у такій системі детермінований компонент її поведінки буде реалізовувати так званий «топологічний хаос» - зовні випадкові аперіодичні коливання, іншими словами, буде здаватися, що система цілком стохастична і некерована. При цьому застосування економічної динаміки дозволить полегшити вивчення проблеми, оскільки буде визначений детермінований механізм поведінки системи, що у свою чергу зменшить невизначеність у її поведінці.

2. Застосування статистичних методів може не дати такого результату, оскільки детермінований механізм може мати досить складний вигляд, не ідентифікований однозначно статистичними методами.

Детермінований підхід припускає глибокий розгляд внутрішньої структури процесу, урахування можливо більш повної множини взаємозв'язків і є інструментом класичного напрямку у вивченні економічних динамічних систем.

В економічній теорії важливим є поняття рівноваги, тобто такого стану об'єкта, що він зберігає при відсутності зовнішніх впливів. Цими питаннями займається теорія загальної економічної рівноваги.

Задачі економічної динаміки включають як опис процесів виведення системи до стану рівноваги, так і процесів трансформації самого цього стану під впливом зовнішніх сил.

Як математичний апарат економічна динаміка використовує математичний аналіз і варіаційне числення, графічні методи і теорію катастроф.

Дослідження показують, що спочатку в динамічних системах спостерігається монотонна й асимптотична збіжність до динамічної рівноваги. Моделювання такої ситуації не викликає особливих труднощів навіть при використанні статистичних методів. Подальший якісний зріст приведе до загасаючих коливань і виникнення циклічності, виникненню біфуркацій і переходу до скінчених циклів різних періодів. Застосування статистичних методів у цьому випадку досить ускладнено, не говорячи вже про випадок виникнення хаосу.

Хаос являє собою чітко детермінований процес, що зовні реалізує здавалося випадкову поведінку. Хаос – неповторювана, аперіодична, нестабільна і непередбачена поведінка системи.

Хаос є вершиною ускладнення розвитку системи. Якщо система є хаотичною, застосування стохастичних методів не дасть задовільних результатів, у той час як економічна динаміка дозволяє побудувати такий механізм управління, що спростить поведінку, зменшить амплітуду коливань і уможливить застосування методів прогнозування навіть при відсутності вичерпної інформації про механізм утворення поведінки .

Економіко-математичні моделі економічної динаміки зазвичай є дескриптивними, тобто вони описують поведінку системи. Однак можуть застосовуватися оптимізаційні моделі для пошуку оптимального стану, якщо це потрібно для виконання поставлених перед дослідником задач, тобто моделі, які крім опису основних властивостей системи містять деяку функцію мети функціонування. Але у будь-якому випадку на першому етапі будь-якого дослідження повинна вивчатися поведінка динамічної системи.

Етапи постановки задачі і побудови економіко-математичної моделі використовують звичайні методики моделювання.

На останньому етапі приймають рішення відповідно до мети дослідження. Як результат цього модель може бути доповнена новими рівняннями, що описують керуючі впливи. У цьому випадку варто провести повторний аналіз для визначення відповідності динаміки системи цілям її функціонування.

У залежності від типу динаміки системи, що досліджується, динамічні моделі можуть підрозділятися на дискретні і неперервні .

Крім того, в окремих випадках можуть зустрічатися системи зі змішаною динамікою. У цьому випадку для їхнього опису використовують диференційно-різницеві рівняння.

Приклади моделей економічної динаміки розглянуто в численних книгах з математичної економіки.

1.2. Властивості динамічних систем

Динамічною називається система, параметри якої явно або неявно залежать від часу. З цього визначення виходить, що якщо для поведінки системи визначені функціональні рівняння, то в них включаються в явному вигляді змінні, залежні від часу.

Розглянемо найважливіші властивості складних динамічних систем.

1. Цілісність (емерджентність).

У системі окремі частини функціонують спільно, складаючи в сукупності процес функціонування системи як цілого. Сукупне функціонування різнорідних взаємозв’язаних елементів породжує якісно нові функціональні властивості цілого, що не мають аналогів у властивостях його елементів. Це означає принципову неможливість зведення властивостей системи до суми властивостей її елементів.

2. Взаємодія із зовнішнім середовищем.

Система реагує на дію навколишнього середовища, еволюціонує під цією дією, але при цьому зберігає якісну визначеність і властивості, що відрізняють її від інших систем.

3. Структура.

При дослідженні системи структура виступає як спосіб опису її організації. Залежно від поставленої задачі дослідження виробляється декомпозиція системи на елементи і вводяться відносини і зв’язки між ними, істотні для вирішуваної проблеми. Разом з тим декомпозиція системи на елементи і зв’язки визначається внутрішніми властивостями даної системи. Структура динамічна за своєю природою, її еволюція в часі і просторі відображає процес розвитку систем.

4. Нескінченність пізнання системи.

Під цією властивістю розуміється неможливість повного пізнання системи і всебічного уявлення кінцевою безліччю описів, тобто кінцевим числом якісних і кількісних характеристик. Тому система може бути представлена нескінченним числом структурних і функціональних варіантів, що відображають різні аспекти системи.

5. Ієрархічність системи.

Кожен елемент в декомпозиції системи може розглядатися як цілісна система, елементи якої, у свою чергу, можуть бути також представлені як системи. Але, з другого боку, будь-яка система – лише компонент ширшої системи.

6. Елемент.

Під *елементом* розуміється якнайменша ланка в структурі системи, внутрішня будова якого не розглядається на вибраному рівні аналізу. Відповідно до властивості 5 будь-який елемент є системою, але на вибраному рівні аналізу ця система характеризується тільки цілісними характеристиками.

Цілісність, структура, елемент, нескінченність і ієрархічність, складають ядро системоутворюючих понять загальної теорії систем і є основою системного представлення об'єктів і формування концепцій системних досліджень.

Проте для докладнішого вивчення властивостей динамічних економічних систем (ЕС) необхідно розглянути ще ряд найважливіших властивостей і характеристик.

1) Стан системи. Стан системи визначається станами її елементів. Теоретично можливий набір станів рівний числу можливих поєднань всіх станів елементів. Проте взаємодія складових частин приводить до обмеження числа реалізованих поєднань. Зміна стану елементу може відбуватися неявно, безперервно і стрибкоподібно.

2) Поведінка системи. Під поведінкою системи розуміється закономірний перехід з одного стану в інше, обумовлений властивостями елементів і структурою.

3) Безперервність функціонування. Динамічним системам властива безперервність функціонування. Система існує, поки функціонують соціально-економічні і інші процеси в суспільстві, які не можуть бути перервані, інакше система перестане функціонувати. Всі процеси в ЕС, як в живому організмі, взаємозв'язані. Функціонування частин визначає характер функціонування цілого, і навпаки. Функціонування системи пов'язане з безперервними змінами, накопичення яких приводить до розвитку.

4) Розвиток системи. Життєдіяльність складної системи є постійною зміною фаз функціонування і розвитку, яка виражається в безперервній функціональній і структурній перебудові системи, її підсистем і елементів.

Еволюція економічних систем визначається однією з найважливіших властивостей складних систем — здібністю до саморозвитку. Центральним джерелом саморозвитку є безперервний процес виникнення і вирішення протиріч. Розвиток, як правило, пов'язаний з ускладненням системи, тобто із збільшенням її внутрішнього різноманіття.

5) Динамічність. Економічна система функціонує і розвивається в часі, вона має передісторію і майбутнє, характеризується певним життєвим циклом, в якому можуть бути виділені певні фази: виникнення, зростання, розвиток, стабілізація, деградація, ліквідація або стимул до зміни.

6) Складність. Економічна система характеризується великим числом неоднорідних елементів і зв'язків, поліфункціональністю, поліструктурністю, багатокрітеріальностю, багатоваріантністю розвитку і властивостями складних систем.

7) Гомеостатичність. Гомеостатичність відображає властивість системи до самозбереження, протидія руйнуючим діям середовища.

8) Цілеспрямованість. Всім динамічним системам в економіці властива цілеспрямованість, тобто наявність певної мети і прагнення до її досягнення. Розвиток системи пов'язаний саме із зміною мети.

9) Керованість. Свідома організація цілеспрямованого функціонування системи і її елементів називається керованістю. В процесі життєдіяльності система за допомогою цілеспрямованого управління дозволяє постійно виникаючі в ній суперечності і реагує на зміну внутрішніх і зовнішніх умов свого існування. Відповідно до умов, що змінюються, вона міняє свою структуру, коректує цілі розвитку і зміст діяльності елементів, тобто відбувається цілеспрямована самоорганізація системи, яка на практиці реалізує здібність до саморозвитку. Однією з основних функцій самоорганізації є збереження в процесі еволюції системи її якісної визначеності.

Властивості керованості виявляються також в таких особливостях, як відносна автономність і функціональна керованість.

Відносна автономність функціонування економічних систем означає, що в результаті дії зворотного зв'язку кожна з складових вихідного сигналу може бути змінена за рахунок зміни вхідного сигналу, причому інші складові залишаються незміненими.

Функціональна керованість економічної системи означає, що відповідним вибором вхідної дії можна добитися будь-якого вихідного сигналу.

10) Адаптивність. Адаптивність економічної системи визначається двома видами адаптації — пасивної і активної. Пасивна адаптація є внутрішньо властивою характеристикою економічної системи, яка має в своєму розпорядженні певні можливості саморегулювання. Активна адаптація представляє механізм адаптивного управління економічної системи і організацію його ефективного здійснення.

11) Інерційність. Інерційність економічної системи позначається у виникненні запізнювання в системі, що симптоматично реагує на обурюючи і управляючі дії. Такі запізнювання враховуються, зокрема, за допомогою лагів, що включаються в моделі опису систем. Розрізняють внутрішні лаги, або лаги ухвалення рішень, щодо стабілізуючих дій, і зовнішні лаги, що відображають затриману реакцію системи на відповідні дії.

12) Стійкість. Система признається стійкій щодо введеного визначення околиці, якщо при достатньо малих змінах умов функціонування її поведінка істотно не змінюється. В рамках теорії систем досліджуються структурна стійкість і стійкість траєкторії поведінки системи. Стійкість ЕС забезпечується такими аспектами самоорганізації, як диференціація і лабільність (чутливість). *Диференціація* – це прагнення системи до структурної і функціональної різноманітності елементів, яка забезпечує не тільки умови виникнення і вирішення протиріч, але і визначає здатність системи швидко пристосовуватися до наявних умов існування. Більше різноманітності – більше стійкості, і навпаки. *Лабільність* означає рухливість функцій елементів при збереженні стійкості структури системи в цілому.

13) Стан рівноваги. Стійкість системи пов'язана з її прагненням до стану рівноваги, який припускає таке функціонування елементів системи, при якому забезпечується підвищена ефективність руху до цілей розвитку. У реальних умовах система не може повністю досягти стану рівноваги, хоча і прагне до нього. Елементи системи функціонують по-різному в різних умовах, і їх динамічна взаємодія постійно впливає на рух системи. Система прагне до рівноваги, на це направлені зусилля управління, але, досягаючи його, вона тут же від нього йде. Таким чином, стійка економічна система постійно знаходиться в стані динамічної рівноваги, вона безперервно коливається щодо положення рівноваги, що є не тільки її специфічною властивістю, але і умовою безперервного виникнення суперечностей як рушійних сил еволюції.

1.3. Формальне визначення динамічної системи

Формально динамічна система в загальному вигляді може бути задана наступним кортежем:

$$M = < T, \Phi, X, \Omega, V, Y, G, R>.$$

Властивості динамічної системи задаються наступними аксіомами:
Для системи S задані множина моментів часу T, макрофункція системи Φ, множина вхідних дій X, множина збурень Ω, множина станів V, множина значень вихідних величин Y, структура системи G і відносини емерджентністі R.

1. Множина T є деяка впорядкована підмножина множини дійсних чисел, що є множиною моментів часу, в які вивчається система.

2. Макрофункція системи визначається за допомогою двох функцій:

$$S: X \rightarrow Y \quad \text{і} \quad V: X \times Y \rightarrow C,$$

де S – функціональна модель об’єкту, V – функція якості, або оцінна функція, C – множина оцінок. Макрофункція системи визначається парою $\Phi = (S, V)$.

3. Множина обурень Ω, або множина невизначеностей, є множина всіх можливих дій, які позначаються на поведінці системи. Якщо така множина Ω не порожня, тобто $\Omega \neq 0$, то функціональна модель об’єкту приймає вигляд:

$$S: X \times \Omega \rightarrow Y,$$

а оцінна функція

$$V: X \times \Omega \times Y \rightarrow C.$$

4. Існує перехідна функція стану

$$\varphi = \Phi \times \Phi \times V \times X \rightarrow V,$$

значеннями якої служать стани $u(t) = \varphi(t, \tau, u, x) \in V$, в яких опиняється система у момент часу $t \in T$, якщо в початковий момент $\tau < t$ вона знаходилася в стані $u(\tau) \in V$ і протягом відрізка $[t, \tau]$ на неї діяли вхідні дії $x \in X$.

5. Задане вихідне відображення

$$\eta: T \times V \rightarrow Y,$$

визначаюче вихідні величинии $y(t) = \eta(t, u(t))$.

Пару (τ, u), де $\tau \in T$ і $u \in V$, називають *станом,* або *фазовими координатами системи S,* а множина $T \times V$ — *простором станів системи.*
Кінцевий набір станів системи $t_1, t_2 \in T$, що задається перехідною функцією φ і визначений на деякому тимчасовому відрізку $[t_1, jt_2]$, називається *траєкторією поведінки* системи на інтервалі $[t_1, t_2]$ за заданих початкових умов.

Кажучи про рух системи, ми матимемо на увазі траєкторію поведінки даної системи. Сукупність траєкторій системи, які відповідають різним (всім можливим) її початковим станам, називаються *фазовим портретом системи.*
6. Структура системи G визначається в термінах теорії графів:

$$G = \left\langle \{S_i\}, (S_i, S_j) \right\rangle, i, j = \overline{1, n}, i \neq j,$$

де S_i – вершини, а (S_i, S_j) – дуги графів.
8. Відношення емерджентності $R: \Phi \to G$.

Розглянуте поняття динамічної системи дозволяє виробити загальну термінологію, уточнити концептуалізацію і забезпечити єдиний підхід до опису загальних властивостей.

1.4. Математичний апарат опису динамічних характеристик складних систем

Якщо поведінку системи розглядати як ланцюг послідовних кінцевих змін її станів, то змінні системи, міняючись в часі, в кожен даний момент характеризуватимуться деякими значеннями. Якщо одне певне значення змінної u_1 у момент часу t_1 перетворюється на наступне значення u_2 у момент часу t_2, то вважається, що відбувся перехід системи із стану (u_1, t_1) у стан (u_2, t_2). Чинник, під дією якого відбувається перехід, називається оператором. Змінна, випробувана дію оператора, називається операндом. Результат переходу – (u_2, t_2) називається *образом.* Якщо розглядати деяку множину всіх переходів системи із стану a в стан b, із стану c в стан d і т. д., то така множина переходів для деякої множини операндів називається перетворенням. Перетворенням можна дати математичне уявлення за допомогою методу, запропонованого У. Ешбі.

Нехай множина станів деякої системи включає стани a, b, c, d і на цю множину операндів діє оператор P. Тоді поведінку системи можна описати, наприклад, таким чином:

$$P = \left\{ \frac{abdc}{bdca} \right. .$$

У першому рядку запису перераховані стани системи, або операнди. У другому рядку під кожним операндом знаходяться образи, в які система переходить із стану, записаного у верхньому рядку, під дією оператора P. В даному прикладі множина елементів другого рядка не містить жодного нового елементу в порівнянні з першим. Перетворення, яке не породжує нових елементів, називається замкнутим.

На рисунку 1.2 представлений граф переходів системи з приведеним вище перетворенням.

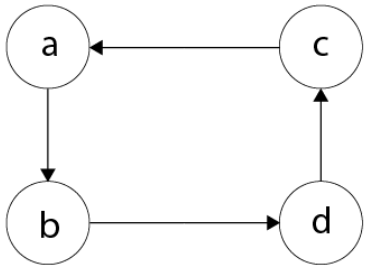


Рис. 1.2

У іншому перетворенні – $P = \begin{cases} a\ b\ c \\ e\ b\ c \end{cases}$ міститься новий елемент *e*, отже, перетворення виходить за межі початкової безлічі станів системи і називається незамкнутим. Перетворення вигляду $P = \begin{cases} abdc \\ bdca \end{cases}$ є тотожним. Існують і інші, компактніші, форми запису операндів.

Наприклад, перетворення $\mathrm{P} = \begin{cases} 1234 \\ 4567 \end{cases}$ можна записати так: $n' \to n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, 4)$.

Перетворення також можна представити в матричній формі, наприклад, для перетворення вигляду $\mathrm{P} = \begin{cases} \mathrm{abcd} \\ \mathrm{accb} \end{cases}$ одержуємо матрицю переходів де операнди представлені в заголовку стовпця, а образи – в заголовку рядка (рис. 1.3).

P	*a*	*b*	*c*	*d*
a	1	0	0	0
b	0	0	0	1
c	0	1	1	0
d	0	0	0	0

Рис. 1.3. Граф переходів станів системи

Приведений приклад описує зміну станів системи з детермінованою дією, яка описана однозначним перетворювачем. Однозначність перетворення означає, що система не може перейти в два або більш станів при заданому початковому. Таким чином, детермінована динамічна система поводиться так само, як замкнуте однозначне перетворення.

Якщо в систему (або її зовнішнє середовище) входять стохастичні елементи, то переходи із стану в стан не будуть строго детермінованими. В цьому випадку перетворення повинне відображати не тільки можливі нові стани системи, але і вірогідність, з якою ці стани здійсняться.

Система подій може бути описана за допомогою апарату символічної логіки. Логічні функції заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквівалентності широко застосовуються при моделюванні автоматичних систем.

Розрізняють три типи, або режими поведінки системи: рівноважний, перехідний і періодичний.

Стан рівноваги системи може розглядатися як деяка тотожність перетворень, що відбуваються в ній та визначають однаковий стан системи у будь-який момент часу. У рівноважній системі кожна частина знаходиться в стані рівноваги в умовах, визначуваних іншими її частинами.

Властивість стійкості не тотожне з рівновагою. Під стійкістю системи розуміється збереження її стану незалежно від зовнішніх збурень.

При вивченні поведінки динамічних систем важливим є дослідження характеру перехідних процесів. Перехідний процес – це процес зміни в часі координат динамічної системи при її переході з одного сталого стану в інший під дією прикладеного збурення, що змінює стан, структуру або параметри системи, або унаслідок ненульових початкових умов. Важливими характеристиками динамічної системи є тривалість і характер перехідного процесу.

В основі динамічного аналізу лежить поняття траєкторії. Типи поведінки економічної системи наведено на рис. 1.4.

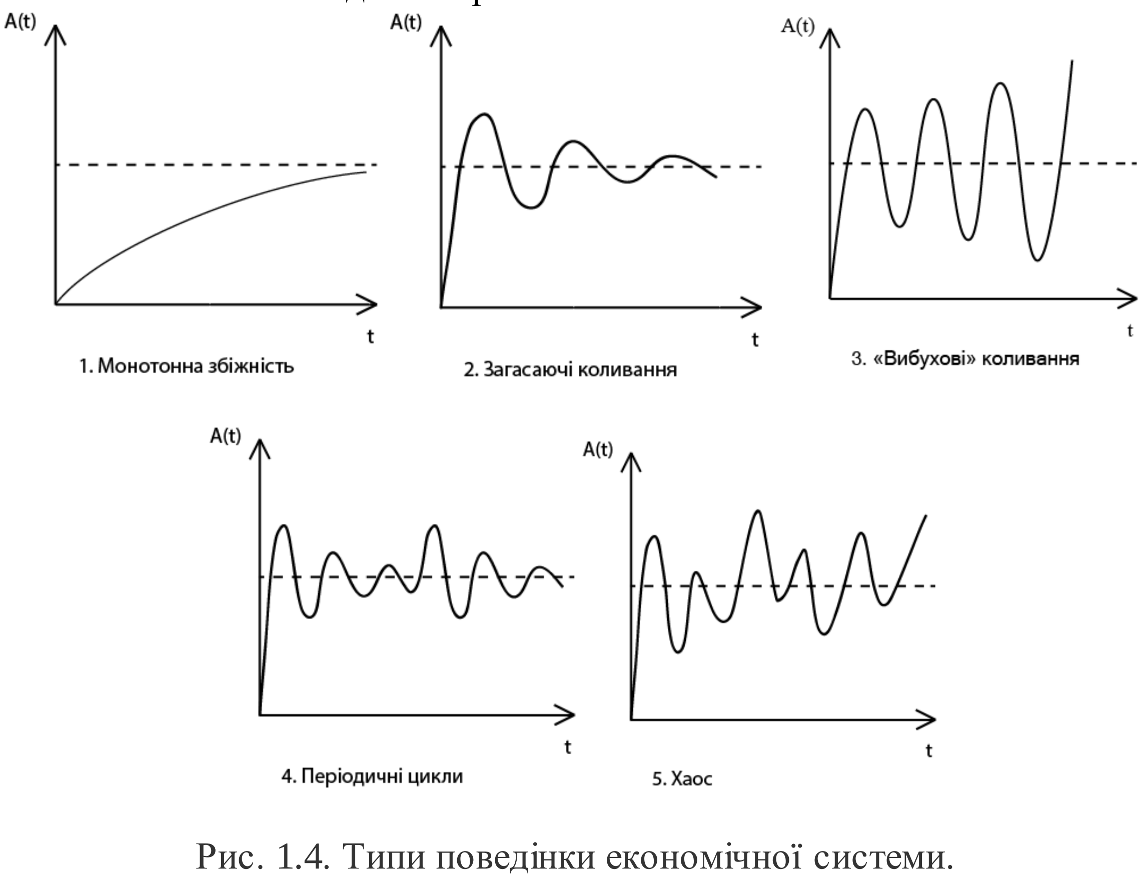


Рис. 1.4. Типи поведінки економічної системи.

У безперервних системах, як правило, сталий режим (тобто режим стійкого функціонування), досягається за нескінченно великий час. Залежно від характеру в безперервних системах розрізняють коливальний і монотонний перехідний процес.

Для дискретних систем перехідний процес можна визначити як послідовність станів, викликаних зовнішньою збурюючою дією, яку система проходить за постійних умов, до її повернення в сталий режим функціонування.

До понять рівноваги і стійкості примикає поняття циклу в перетворенні системи.

Циклом називається така послідовність станів системи, при якій повторна зміна перетворень примушує систему проходити повторно цю послідовність. Це можна проілюструвати перетворенням вигляду

$$P\left\{\frac{a}{c}\frac{b}{h}\frac{c}{b}\frac{d}{h}\,\frac{e}{f}\,\frac{f}{c}\,\frac{g}{c}\,\frac{h}{g}\right\}.$$

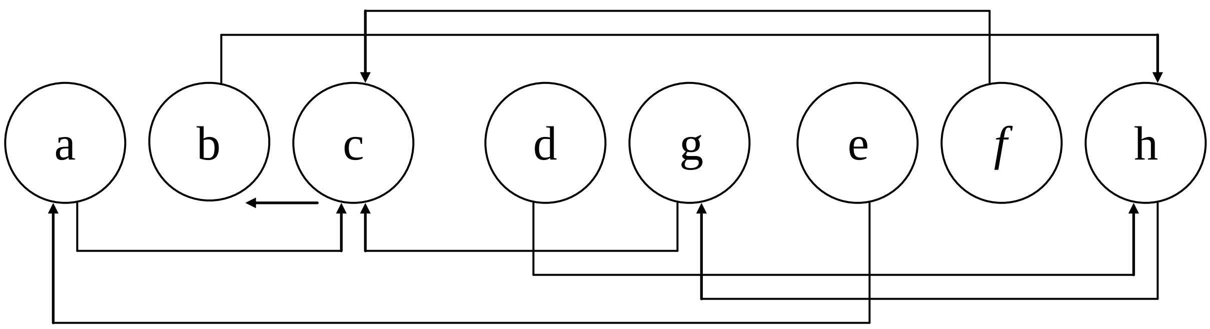


Рис. 1.5. Граф циклічного перетворення.

Якщо в початковий момент система знаходилася в стані *a*, то одержуємо послідовність станів:

$$a\ \ cbhg\, cbhg\, cbhg\ \ \ldots$$

Очевидно, виділяється цикл завдовжки 4. Перехід $a \rightarrow c$ можна розглядати як перехідний процес до сталої циклічної поведінки.

На підставі знань про перетворення, пов'язане з системою, вивчаються стани рівноваги, перевіряється, чи зміниться стан системи, підданої будь-яким діям, чи є стан рівноваги системи достатньо стійким, і якщо так, то який режим поведінки системи, що вивчається. Якщо заданий деякий стан (або стани) і конкретні обурення, то аналізується, чи повернеться система після зсуву в свою початкову область. Для безперервних систем розглядається питання, чи є вона стійкої проти всіх обурень усередині певної області значень.

Загальнішим є опис систем за допомогою набору функцій: перехідної, передавальної і імпульсної. У відмінності від приведеної вище, цей спосіб придатний для опису безперервних систем, що складаються з безлічі елементів.

Перехідна функція – це функція, що відображає реакцію динамічної системи на вхідний сигнал за нульових початкових умов. Перехідна функція є важливою характеристикою системи, що повністю визначає її динамічні властивості. Знаючи перехідну функцію $h(t)$, можна визначити сигнал $y(t)$ на виході системи при подачі у момент часу $t_0 = 0$ на її вхід сигналу $x(t)$:

$$y(t) = x(0)\times h(t) + \int_0^t \frac{dx(t)}{dt} h(t - t)dt. \qquad (1.1)$$

Передавальна функція – це функція, що є відношенням перетворення Лапласа $Y(p)$ вихідної координати $y(t)$ лінійної динамічної системи (або окремої ланки) до перетворення Лапласа $X(p)$ її вхідної координати $x(t)$ за нульових початкових умов:

$$W(p) = Y(p)/X(p).$$

Передавальна функція лінійних фізично реалізованих динамічних систем з постійними параметрами є дробово-раціональними функціями параметра перетворення Лапласа p.

Передавальні функції – зручний опис властивостей лінійної системи автономного управління. Дослідження коріння передавальної функції (нулів і полюсів) повністю визначає всі динамічні властивості системи (стійкість і ін.).

Імпульсна функція задає вхідний сигнал, що поступив в систему. Вона може мати, наприклад, ступінчастий вигляд, одиничну дію і т.п.
Для лінійних динамічних систем імпульсна функція $g(t)$ і передавальна функція $W(p)$ пов'язані з перехідною функцією $h(t)$ співвідношеннями:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt},\ h(t) = \frac{1}{2p}\int_{c-iw}^{c+iw} \frac{w(p)}{p} e^{-pt} dp; \tag{1.2}$$

$$w(p) = \int_{0}^{\text{¥}} \frac{dh}{dt} e^{-pt} dt \tag{1.3}$$

де c – компонента абсолютної збіжності.

При описі властивостей багатоланкової системи використовуються передавальні функції її ланок. При цьому використовуються наступні типи з’єднань:

- передавальна функція n ланок, що послідовно сполучаються;
- передавальна функція паралельного з’єднання n ланок;
- передавальна функція ланки, охопленої зворотним зв’язком.

Перехідні і передавальні функції широко використовуються в пакетах програм імітаційного моделювання і прогнозування на основі нейроних мереж.

Контрольні запитання:

1. Що таке математична модель?
2. Сформулюйте основну задачу моделювання економічної динаміки.
3. Якою є основна мета побудови економіко-математичної моделі?
4. У чому принципові відмінності між моделюванням фізичної (технічної, хімічної) і економічної системи?
5. Які агреговані параметри застосовуються у макроекономіці?
6. У чому різниця між екзогенними та ендогенними змінними?
7. Які види економічного аналізу застосовуються при дослідженні економічних явищ?
8. Назвіть відмінності у застосуванні детермінованого та стохастичного підходу при моделюванні складних динамічних економічних систем.
9. Що таке динамічна система?

10. Що є об'єктом та предметом вивчення дисципліни «Моделювання економічної динаміки?
11. Проведіть класифікацію динамічних моделей.
12. Проаналізуйте базові принципи методології моделювання економічної динаміки.
13. Охарактеризуйте найважливіші властивості складних динамічних систем.
14. Проведіть формальний опис динамічної системи.
15. Надайте характеристику математичного апарату, що застосовується при моделюванні економічних систем.
16. Надайте характеристику схеми дослідження динаміки економічних систем.
17. Що таке математична модель?
18. Якою є основна мета обчислювального експерименту в економічній області?
19. Сформулюйте закон Сея і поняття загальної економічної рівноваги.
20. Які агреговані параметри застосовуються у макроекономіці?
21. У чому різниця між екзогенними та ендогенними змінними?
22. Які види економічного аналізу застосовуються при дослідженні економічних явищ
23. Назвіть відмінності у застосуванні детермінованого та стохастичного підходу при моделюванні складних динамічних економічних систем.
24. Надайте визначення економічної статики як розділу економічної теорії.
25. Надайте визначення економічної динаміки як розділу економічної теорії.

Завдання для самостійної роботи:

1. Сформулювати методологічні і методичні особливості макроекономічного аналізу.
2. Визначити економічний, геометричний та фізичний смисл першої та другої похідної функції однієї змінної. Скласти таблиці перших похідних та первісних основних функцій. Виписати основні типи звичайних диференційних рівнянь першого порядку та основні правила інтегрування диференційних рівнянь.
3. Виконати аналіз основних положень таких макроекономічних теорій:
   a. теорії загальної економічної рівноваги;
   b. теорії ділових циклів;
   c. теорії економічного росту.
4. Здійснити пошук в Internet матеріалів щодо останніх досліджень в галузі економічної динаміки. Скласти бібліографічний перелік Лауреатів Нобелівської премії з економіки (починаючи з 1969 року) та визначити, які дослідження з економічної динаміки є приоритетними на цей час.
5. Визначити суть моделі динаміки Дж. Форрестера. (Дж. Форрестер спробував побудувати замкнуту модель економічної системи, увівши явний опис дії зворотних зв'язків, які, на жаль, не завжди мають очевидний економічний зміст, бо Форрестер використовував пряму аналогію між економічною системою і системою автоматичного

регулювання.) Проаналізувати значення підхіду Форрестера і чому він одержав широке поширення.

Тести:

1. Стан економічної системи визначається …
a) станами її елементів;
b) множиною станів елементів найвищого рівня ієрархії;
c) множиною станів елементів найнижчого рівня ієрархії;
d) не підлягає визначенню.

2. Лабільність системи – це:
a) постійна зміна характеру зв'язків між елементами системи;
b) рухливість функцій елементів при збереженні стійкості структури системи в цілому;
c) нестійкість системи в цілому;
d) невизначеність функцій елементів при збереженні стійкості структури системи в цілому;
e) стан рівноваги функцій елементів при зміні структури системи;
f) здатність системи досягти стану рівноваги;
g) нездатність системи досягти стану рівноваги.

3. Розділ економічної науки, що вивчає детерміновану поведінку в часі економічних систем під впливом внутрішніх і зовнішніх факторів з метою аналізу рівноваги й управління стійкістю має назву:
a) теорія систем;
b) системний аналіз;
c) економічний аналіз;
d) економічна динаміка.

4. Система, параметри якої явно або неявно залежать від часу називається
a) статичною;
b) кількісною;
c) динамічною;
d) хронологічною.

5. Чинник, під дією якого відбувається перехід системи із одного стану в інший в певний момент часу, називається
a) операндом;
b) оператором;
c) образом;
d) перетворенням.

6. Послідовність станів системи, при якій повторна зміна перетворень примушує системи проходити повторно цю ж саму послідовність – це:
a) рекурсія;
b) цикл;
c) репетиція;
d) мутація.

7. Функція, що відображає реакцію динамічної системи на вхідний сигнал за нульових початкових умов має назву
a) перехідної функції;
b) передавальної функції;
c) імпульсної функції;
d) нульової функції.

8. Стійка економічна система постійно знаходиться в стані
a) умовної рівноваги;
b) медіальної рівноваги;
c) статичної рівноваги;
d) динамічної рівноваги.

9. Процес зміни в часі координат динамічної системи при її переході з одного сталого стану в інший під дією прикладеного збурення, що змінює стан, структуру або параметри системи, або унаслідок ненульових початкових умов має назву
a) перехідного процессу;
b) процесу зміни стану;
c) процесу зміни координат;
d) зміни параметрів системи.

10. Гомеостатичність — це:
a) виникнення запізнювання у системі, яка симптоматичне реагує на дії управління або обурення;
b) властивість системи до самозбереження, протидія руйнуючим діям середовища;
c) прагнення системи до структурної і функціональної різноманітності елементів;
d) постійна зміна фаз функціонування і розвитку системи.

11. Вкажіть основні особливості складних динамічних систем:
a) цілісність
b) взаємодія із зовнішнім середовищем
c) ієрархічність системи
d) можливість кінцевого пізнання системи

12. Динамічною називається система, параметри якої:

a) не залежать від часу
b) явно залежать від часу
c) не явно залежать від часу
d) є взаємозалежними один від одного

13. Траєкторією поведінки динамічної системи називають:
a) визначений неперервний набір станів на деякому часовому відрізку
b) визначені стани системи на кінцях деякого часового відрізку
c) кінцевий набір станів системи на деякому часовому відрізку
d) сукупність довільних станів системи на деякому часовому відрізку

14. Перехідна функція динамічної системи – це функція, що:
a) відображає реакцію динамічної системи на вхідний сигнал при нульових початкових умовах
b) являє собою відношення перетворення Лапласа і вихідної координати при нульових початкових умовах
c) задає вхідний сигнал який надходить в систему
d) визначає процес зміни координат системи в часі.

№ теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
відповідь	a	b	d	c	b	b	a	d	c	b	a, b, c	b	a	a

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

2.1. Диференціальні рівняння

2.1.1. Диференціальні рівняння першого порядку та їх застосування у моделюванні економічних систем

Нагадаємо основні положення теорії диференціальних рівнянь, які вивчались у курсі вищої математики [26,27,29] і стануть у пригоді надалі.

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку є таким:

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0\,, \tag{2.1}$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція, $\frac{dy}{dx}$ – похідна першого порядку невідомої функції y.

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно y, тобто записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx}= f(t,y), \tag{2.2}$$

то говорять, що рівняння записане в *нормальній формі* (або у *формі Коші)*.

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної невідомої функції, яка входить до рівняння.

Зауваження 2.1. У даному посібнику викладаються інструментальні засоби дослідження поведінки економічних динамічних систем, тому далі, не втрачаючи загальності, в якості незалежної змінної прийматимемо час t, тобто $x=t$ і рівняння (2.2) набуде вигляду:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y). \qquad (2.3)$$

Далі вважатимемо записи $\frac{dy}{dt}$ та y' еквівалентними.

Зауваження 2.2. В даному посібнику в якості математичної моделі динамічних економічних систем розглядаються тільки звичайні диференціальні рівняння, тобто шукана функція (або функції, якщо розглядається система диференціальних рівнянь) залежить тільки від однієї незалежної змінної t.

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку (2.1) в області визначення D функції $f(t,y)$ є функція вигляду:

$$y = \varphi(t, C), \qquad (2.4)$$

де C – довільна постійна.

Диференціальне рівняння має нескінченно багато розв'язків. Щоб з цієї безлічі виділити якийсь конкретний розв'язок, потрібно визначити довільну постійну C, для чого необхідно вказати додаткову умову. Найчастіше така умова задається у вигляді початкової умови

$$y\,(t_0)= t_0. \qquad (2.5)$$

Задача про знаходження розв'язків диференціального рівняння (2.1), що задовольняють початковій умові (2.4), називається *задачею Коші.*

Як правило, задача Коші має єдиний розв'язок, який називається *частинним розв'язком* рівняння (2.3). Умовою, що гарантує як існування розв'язку задачі Коші для рівняння $y'=f(t,y)$, так і його єдиність у деякому околі початкової точки $(t_0,\ y_0)$ є диференційованість функції $f(t,\ y)$ у цьому околі. Однак можливі випадки, коли задача має нескінченно багато розв'язків або взагалі не має розв'язків.

Відзначимо, що в деяких випадках процес розв'язання диференціального рівняння визначає розв'язок як неявну функцію, тобто як співвідношення вигляду

$$\Phi(t,y,C)=0, \qquad (2.6)$$

яке називається *загальним інтегралом диференціального рівняння.*

Відзначимо також, що процес розв'язання диференціального рівняння прийнято називати *інтегруванням* цього рівняння.

Одним з найбільш простих, але досить важливих з погляду економічних додатків типів диференціальних рівнянь першого порядку є *рівняння зі змінними, що розділяються або відокремлюються*:

$$\frac{dy}{dt}=p(t)g(y), \qquad (2.7)$$

де $p(t)$ і $g(y)$ – неперервні функції.

Для розв'язання цього рівняння необхідно відокремити в ньому змінні, тобто переписати рівняння в такий спосіб:

$$\frac{dy}{g(y)}=p(t)dt \tag{2.8}$$

у припущенні, що $g(y) \neq 0$. Тепер ліва частина рівняння містить тільки змінну y, а права – тільки змінну t. Інтегруючи обидві частини рівняння (2.8), одержимо:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(t)dt.$$

Останню рівність запишемо у видгляді наступного співвідношення:

$$G(y)=P(t)+C,$$

де $G(y)$ – будь-яка первісна для $1/g(y)$, а $P(t)$ – первісна для $p(t)$. Таким чином, знайдено загальний інтеграл рівняння (2.7).

Приклад 2.1. Нагадаємо, що *еластичністю* функції $y=f(x)$ щодо змінної x називають границю відношення відносного збільшення y до відносного збільшення змінної x при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / x}{\Delta x / y} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x) = \frac{x}{y} y'. \tag{2.9}$$

Цю границю позначають через $E_x(y)$.

Величину $E_x(y)$ при заданому значенні x називають також *показником*, або *коефіцієнтом еластичності.* Еластичністю функції y відносно x є наближений процентний приріст функції (підвищення або зниження), що відповідає збільшенню незалежної змінної на 1%.

Еластичність функції застосовується під час аналізу попиту й споживання. Наприклад, еластичність попиту y щодо ціни x (або доходу x) – коефіцієнт, що показує приблизно, на скільки відсотків зміниться попит (обсяг споживання) при зміні ціни (або доходу) на 1%. Якщо $| E_x(y) | > 1$, то попит вважають еластичним, якщо $| E_x(y) | = 1$ – нейтральним, якщо $| E_x(y) | < 1$ – нееластичним щодо ціни.

Отже, *задача є такою*: знайти функцію, що має постійну еластичність k.

За умовою задачі маємо

$$\frac{y'x}{y} = k, \text{ тобто } \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = k . \tag{2.10}$$

Звідси, при природному припущенні, що $x \neq 0$, одержимо:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \cdot k .$$

Інтегруючи обидві частини отриманої рівності, знайдемо:

$ln\,|y| = k\, ln|x| + C.$

Не втрачаючи загальності, подамо цю рівність у вигляді:

$ln\,|y| = k\, ln|x| + lnC$ або $ln\,|y| = lnC|x|^k$.

Потенціюючи останнє співвідношення, одержимо вигляд функції, що має постійну еластичність, яка дорівнює k:

$y=C\,x^k$.

Приклад 2.2. Швидкість знецінювання устаткування внаслідок його зносу пропорційна в кожен даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість – A_0. Визначити, коли вартість устаткування знеціниться втричі.

Розв'язання.

Нехай A_t – вартість устаткування в деякий момент часу t, $t_{шукане}$ – час, коли вартість устаткування знеціниться втричі. Зміна вартості (знецінювання) подається у вигляді різниці $(A_0 - A_t)$. Швидкість знецінювання $\frac{d}{dt}(A_0 - A_t)$ пропорційна фактичній вартості в даний момент A_t. Одержуємо задачу Коші

$$\frac{d}{dt}(A_0 - A_t) = k A_t, \tag{2.11}$$

$$A_t|_{t=0} = A_0. \tag{2.12}$$

Процес розв'язання рівняння (2.11) має вигляд:

$$-\frac{d}{dt}A_t = k A_t,$$

$$\int \frac{dA_t}{A_t} = -\int k dt,$$

$$ln|A_t| = -kt + ln|C|,$$

$$A_t = C e^{-kt}.$$

Для визначення довільної постійної C використовуємо початкову умову (2.12):

$$A_0 = C e^{-k0} \Rightarrow C = A_0,$$

$$A_t = A_0 e^{-kt}. \tag{2.13}$$

За умовою задачі $\frac{A_0}{A_{t_{шукане}}} = 3$,

отже,

$$e^{kt} = 3 \Rightarrow t_{шукане} = (ln3)/k.$$

Приклад 2.3. Нехай $y(t)$– кількість продукції, що випускається за час t; p – ціна продукції. Сума інвестицій $I(t)$ пропорційна доходові $py(t)$– з коефіцієнтом пропорційності m $(m=const,\ 0<m<1)$. Збільшення швидкості випуску продукції пропорційне збільшенню інвестицій з коефіцієнтом пропорційності η.

Знайти кількість продукції, що випускається галуззю за час t, якщо в початковий момент часу $t=t_0$, $y=y_0$.

Розв'язання. За умовою задачі $I(t)=m\,py(t)$, тому основним рівнянням є диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}y = \eta I(t) \text{ або } \frac{d}{dt}y = mpy(t)\eta.$$

Позначимо $k=mp\eta$. Тоді попереднє рівняння набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt}y = ky. \qquad (2.14)$$

Рівняння (2.14) – це диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, що діляться. Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y=Ce^{kt}.$$

Врахуємо, що $y\Big|_{t=t_0} = y_0$,

$$y_0 = Ce^{kt_0}, \quad C = y_0 e^{-kt_0}.$$

Звідси кількість продукції, що випускається галуззю за час t за даної початкової умови

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Одним із важливих окремих випадків диференціальних рівнянь зі змінними, що діляться, є так звані *автономні* рівняння. Це рівняння вигляду:

$$\frac{dy}{dt} = g(y). \qquad (2.15)$$

Такі рівняння часто зустрічаються в різних питаннях економічної динаміки. Відсутність часу (незалежної змінної) у правій частині рівняння (2.15) можна трактувати як незмінність законів, за якими розвивається економічна система в розглянутий проміжок часу.

Якщо y^* – корінь рівняння $g(y) = 0$ (тобто похідна $\frac{dy}{dt}$ шуканої функції дорівнює нулю), то $y=y^*(=const)$ є розв'язком рівняння (2.15). Такий розв'язок називається *стаціонарним (стаціонарна точка)*.

Економіко-математичні моделі, що базуються на диференціальних рівняннях, називаються *моделями зростання з неперервним часом.* Відзначимо, що існують також дискретні аналоги цих моделей, що будуть розглянуті нижче.

2.1.2. Геометричний зміст розв'язків диференціального рівняння

Загальний розв'язок (2.4) $y = \varphi(t,C)$ рівняння (2.3) визначає на площині $y0t$ сім'ю кривих, що залежить від параметра C. Ці криві називаються *інтегральними*.

Приклад 2.4. Розглянемо геометричну інтерпретацію загального розв'язку $y=C\,x^k$ задачі прикладу 2.1. Ряд 1 на рис.2.1. відповідає значенню довільної постійної $C=1$, ряд 2 – значенню $C=2$, ряд 3 – значенню $C=3$.

Візьмемо деяку точку (t_0, y_0) з області визначення D функції $f(t,y)$. Нехай $y = \varphi(t)$ – інтегральна крива, що проходить через цю точку (тобто $y_0 = \varphi(x_0)$). З рівняння (2.3) випливає, що

$$\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = f\,(t_0, y_0).$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої у точці (t_0, y_0), дорівнює (при $t = t_0$) числу $f(t_0, y_0)$.

Точки, через які не проходить жодна інтегральна крива або проходить більше ніж одна інтегральна крива, називаються *особливими точками* даного диференціального рівняння.

Із співвідношення (2.4) за допомогою вибору константи C можна одержати рівняння будь-якої інтегральної кривої, тобто можна одержати будь-який *частковий розв'язок*. Таким чином, сім'я інтегральних кривих рівняння (2.10) на рис. 2.1. складається з трьох часткових розв'язків.

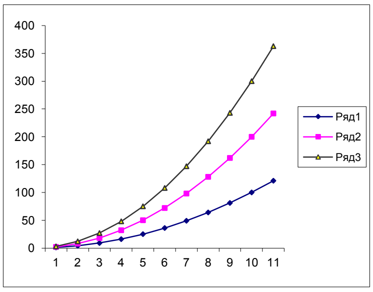


Рис. 2.1. Сім'я інтегральних кривих рівняння (2.10) – функції з еластичністю $E_x(y)= 2$

2.1.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння називається *лінійним,* якщо воно є рівнянням першого ступеню щодо шуканої функції y і її похідної $\frac{dy}{dt}$. Загальний вигляд лінійного рівняння першого порядку такий:

$$\frac{dy}{dt}+P(t)y=Q(t). \qquad (2.15)$$

Якщо права частина рівняння має вигляд $Q(t)$ = 0, то рівняння (2.15) називається *лінійним однорідним*, у противному випадку воно називається *неоднорідним.*

Будемо далі розглядати окремий випадок рівняння (2.15) – рівняння з постійними коефіцієнтами вигляду:

$$\frac{dy}{dt}+ay=B, \qquad (2.16)$$

де a, B – деякі постійні.

Однорідне диференціальне рівняння, яке відповідає рівнянню (2.16), має вигляд:

$$\frac{dy}{dt}+ay=0. \qquad (2.17)$$

Теорема 1. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (2.16) $y(t)$ – це сума часткового розв'язку y^* цього рівняння і загального розв'язку $\bar{y}\,(t,C)$ відповідного йому лінійного однорідного диференційного рівняння (2.17):

$$y(t)= y^* + \bar{y}\,(t,C).$$

Відмітимо, що теорема 1 є вірною незалежно від порядку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Розв'язок однорідного лінійного рівняння (2.17) не вимагає спеціального розгляду, оскільки рівняння (2.17) одночасно є рівнянням зі змінними, що розділяються (див. п. 2.1.1.).

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння (2.17) має вигляд:

$$\bar{y}\,(t, C)=C e^{-at}. \tag{2.18}$$

Частковий розв'язок y^* рівняння (2.17) визначається за допомогою варіації довільної постійної. Будемо шукати розв'язок y^* рівняння (2.16) у вигляді

$$y^*=K, \tag{2.19}$$

де K – деяка невідома постійна.

Підставимо значення (2.19) у рівняння (2.16), враховуючи, що $\dfrac{dy^*}{dt}=0$. Тоді $aK=B,$ таким чином $y^* = K = \dfrac{B}{a}$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференційного рівняння (2.16) $y(t) = y^* + \bar{y}\,(t, C)$ буде таким:

$$y(t)= \frac{B}{a} + C e^{-at}. \tag{2.20}$$

2.1.4. Найпростіша модель рівноваги

Рівновага – це такий стан об'єкта, в якому об'єкт знаходиться за відсутності зовнішніх впливів. Задачі економічної динаміки включають як опис процесів виходу до стану рівноваги, так і визначення процесів трансформації самого цього стану під впливом зовнішніх сил.

Розглянемо просту економічну систему в стані рівноваги та опишемо динаміку такої системи за допомогою диференційного рівняння.

Диференціальне рівняння пов'язує зміну показника (нехай наша система описується одним показником $y(t)$, або просто y) зі швидкістю його руху $\dfrac{dy}{dt}$.

Нехай швидкість зміни показника y пропорційна величині його відхилення від рівноважного значення y_e. Отже, чим далі показник відхилився від рівноважного значення, тим швидше він прагне повернутися до положення рівноваги. Якщо в рівнянні присутня тільки перша похідна y за часом, а сам зв'язок лінійний, то воно є лінійним неоднорідним диференціальним рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. Нехай воно має такий вигляд:

$$y' = k(y - y_e), \tag{2.21}$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

У цьому рівнянні ky_e – вільний член; без нього рівняння $y=ky$ є *однорідним* і його загальним розв’язком є сім’я функцій $y = Ce^{kt}$. Вихідне неоднорідне рівняння (2.21) має *частковий* розв’язок $y = y_e$ (характеризує величину y у стані рівноваги), *а загальний його розв’язок* є сума часткового розв’язку неоднорідного рівняння (2.21) і загального розв’язка відповідного однорідного рівняння, тобто рівняння вигляду:

$$y = y_e + Ce^{kt}. \tag{2.22}$$

Довільну постійну C можна визначити, застосовуючи початкову умову вигляду $y_{|t=0} = y(0)$. Отже, з початкової умови одержимо:

$C=y(0) - y_e$, і $y(t) = y_e + (y(0) - y_e)e^{kt}$.

Якщо $k < 0$, то $e^{kt} \to 0$ при $k \to \infty$. Рівновага стійка, тобто при відхиленні величини $y(t)$ від значення y_e, процес у часі знову збігається до значення рівноваги (рис 2.2).

При $k > 0$ величина $e^{kt} \to \infty$ і відповідно ряд значень $y(t)$ розбігається (якщо початковий стан не збігається зі станом рівноваги). Поведінку системи при $k > 0$ проілюстровано на рис. 2.3.

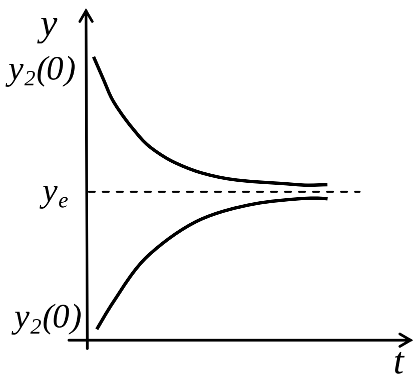


Рис. 2.2. Збіжність до рівноважного стану

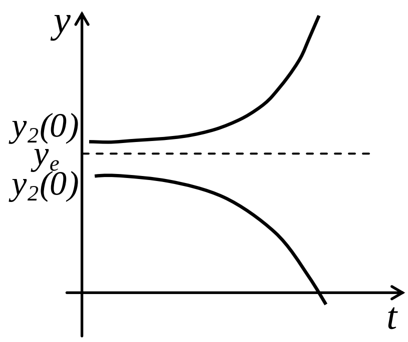


Рис. 2.3. Монотонна розбіжність процесу

Поведінка динамічних систем може також описуватися, наприклад, графіками рис. 2.4 – 2.5.

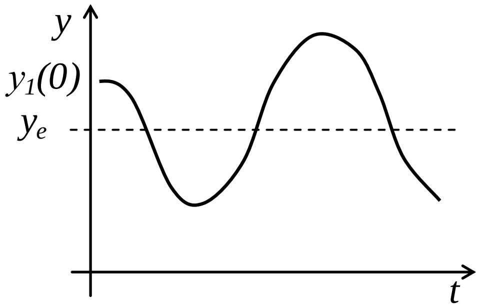


Рис. 2.4. Коливальна розбіжність

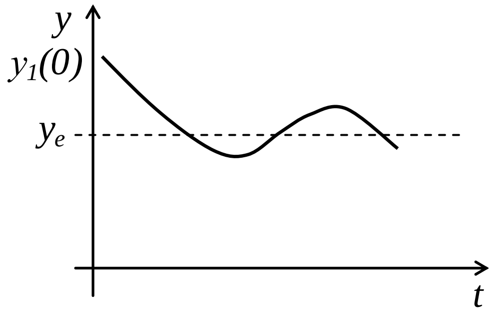


Рис. 2.5. Коливальна збіжність

2.2. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Розглянемо узагальнення класу рівнянь першого порядку на випадок рівнянь більш високих порядків.

Диференціальне рівняння n-го порядку називається *лінійним*, якщо воно має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + a_2(t)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n(t)y = B(t), \tag{2.23}$$

де $a_1(t), a_2(t),\ldots, a_n(t), B(t)$ – неперервні функції.

Теорема 2. Нехай функції $a_1(t), a_2(t),\ldots, a_n(t), B(t)$ неперервні на відрізку $[a, b]$. Тоді існує, причому єдиний, розв'язок $y(t)$ рівняння (2.23), що задовольняє початковим умовам $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $y^{(n-1)}(t_0)=y^{(n-1)}_0$, де $t \in [a,b]$.

Далі будемо розглядати диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами, тобто $a_1, a_2,\ldots, a_n, B$ – деякі постійні величини.

Отже, диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = B \tag{2.24}$$

називається *лінійним диференціальним неоднорідним ($B \neq 0$) рівнянням n-го порядку з постійними коефіцієнтами*.

Рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{2.25}$$

називається *лінійним однорідним диференційним рівнянням n-го порядку з постійними коефіцієнтами.* У даному випадку це рівняння відповідає рівнянню (2.24).

Наступна теорема зв'язує розв'язки рівнянь (2.24) і (2.25).

Узагальнення теореми 1. Загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (2.24) є сума часткового розв'язку y^* цього рівняння і загального розв'язку $\bar{y}\,(t, C_1, C_2,\ldots, C_n)$ відповідного йому лінійного однорідного диференціального рівняння (2.25).

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$\bar{y}\,(t, C_1, C_2,\ldots, C_n) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) +\ldots + C_ny_n(t). \tag{2.26}$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.24) має вигляд

$$y(t) = \bar{y}\,(t, C_1, C_2,\ldots, C_n) + y^*. \tag{2.27}$$

Для пошуку загального розв'язку $\bar{y}\,(x, C_1, C_2,\ldots, C_n)$ рівняння (2.25) застосовують характеристичне рівняння:

$$\lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} +\ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{2.28}$$

Характеристичне рівняння (2.28) є звичайним алгебраїчним квадратним рівнянням. При цьому змінні λ мають назву *характеристичні числа.* Характеристичне рівняння одержують з вихідного диференціального рівняння (2.25) заміщенням у ньому похідних шуканої функції відповідним ступенем характеристичного числа λ, причому сама функція „як похідна нульового порядку" заміщується одиницею.

Під час розв'язання рівнянь (2.28) можливі такі розв'язки:

1. Характеристичні числа λ_1, λ_2, ..., λ_n є дійсними числами та не дорівнюють одне одному. Тоді загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (2.25) має вигляд:

$$y(t) = C_1 exp(\lambda_1 t) + C_2 exp(\lambda_2 t) +... + C_n exp(\lambda_n t). \qquad (2.29)$$

2. Характеристичні числа λ_1, λ_2 ..., λ_n є дійсними числами, крім того кратними коренями кратності $m \leq n$. Тоді корені

$t exp(\lambda^* t)$, $t^2 exp(\lambda^* t)$ ... , $t^{m-1}\ exp(\lambda^* t)$

також є коренями однорідного рівняння.

3. Серед характеристичних чисел λ_1, λ_2 ..., λ_n є комплексно-спряжені числа (числа вигляду $\lambda_{1,2} = \alpha \pm\ i\beta$ – див. *Зауваження 2.3.)*.

Тоді загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (2.25) має також корені вигляду:

$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)). \qquad (2.30)$$

Зауваження 2.3. Комплексне число λ – це число вигляду $\lambda= \alpha +\ i\beta$, де α і β – дійсні числа, а i – так звана уявна одиниця (число, квадрат якого дорівнює "-1"); $\alpha=Re\lambda$ називається дійсною частиною, а $\beta= Im\ \lambda$ – уявною частиною комплексного числа. Дійсні числа – окремий випадок комплексних чисел (при $\beta = 0$). Комплексні числа, що не є дійсними ($\beta \neq 0$), іноді називаються уявними числами, при $\alpha = 0$ комплексні числа називаються чисто уявними. Геометрично кожне комплексне число $\lambda=\alpha+i\beta$ зображується точкою площини, що має прямокутні координати α і β (рис.2.7). Якщо полярні координати цієї точки позначити через r і φ, то відповідне комплексне число можна подати у вигляді: $\lambda=r(\cos\varphi\ +\ i\sin\varphi)$, що є тригонометричною формою комплексного числа; $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ називається модулем комплексного числа $\lambda= \alpha + i\beta$, а φ = arctg(β/α) – його аргументом, або в експонентному вигляді: $\lambda=r\ e^{i\varphi}$. Інакше кажучи, дійсне число є скаляром, а комплексне – вектором. Числа $\lambda_{1.2} =\alpha\ \pm\ i\beta$, є комплексно-спряженими (рис 2.6).

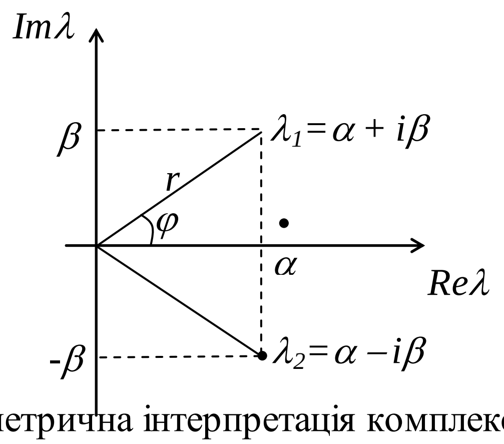


Рис. 2.6. Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Частковий розв'язок y^* неоднорідного рівняння (2.28) одержують за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Нехай

$$y^*=K, \qquad (2.31)$$

де K – деяка невідома постійна.

Підставимо вираз (2.31) у рівняння (2.28), маючи на увазі, що $y^{*(n)} = y^{*(n-1)} = \ldots = y^{*'} = 0$. Тоді $a_n K = B$, таким чином, $y^* = K = \dfrac{B}{a_n}$ (порівняйте з (2.19)!). Безпосередньо підстановкою можна перевірити, що даний розв'язок задовольняє рівняння (2.28).

2.2.1. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Надалі в загальному випадку будемо розглядати динамічні економічні системи, математичними моделями яких є лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами вигляду:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2y = B. \tag{2.32}$$

Відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння має вигляд:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2y = 0. \tag{2.33}$$

Згідно з теоремою 1 загальним розв'язком $y(t)$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння (2.32) є сума часткового розв'язку y^* цього рівняння і загального розв'язку $\bar{y}(t,\ C_1,\ C_2)$ відповідного йому лінійного однорідного диференціального рівняння (2.33).

Розглянемо відшукування загального розв'язку $\bar{y}(t,C_1,C_2)$ лінійного однорідного диференціального рівняння (2.33).

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{2.34}$$

Це звичайне квадратне рівняння, корені якого (характеристичні числа) мають вигляд:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_0}. \tag{2.35}$$

У залежності від значення дискримінанту $D = a_1^2 - 4a_2$ квадратного рівняння (2.35) можливі три варіанти.

1. Характеристичні числа λ_1, λ_2 є дійсними числами і не дорівнюють одне одному. Тоді загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (2.33) має вигляд:

$$y(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t). \tag{2.36}$$

2. Характеристичні числа λ_1, λ_2 є дійсними числами, крім того $\lambda_1 = \lambda_2$. Тоді загальний розв'язок рівняння (2.33) має вигляд:

$$y(t) = C_1 \exp(\lambda t) + C_2 t \exp(\lambda t). \tag{2.37}$$

3. Характеристичні числа λ_1, λ_2 є комплексно-спряженими. Тоді загальний розв'язок рівняння (2.33) є функцією вигляду:

$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t). \qquad (2.38)$$

Приклад 2.5. Нехай попит та пропозиція на товар визначаються співвідношеннями:

$D= 2p'' - p'- p + 15, \quad S= 3p'' + p' + p + 5,$

де p – ціна на товар, p' – тенденція формування ціни, p'' – темп зміни ціни.

Нехай також у початковий момент часу

$p(0)=6,$

$D(0)=S(0)=10.$

Враховуючи вимогу відповідності попиту до пропозиції, знайти залежність ціни від часу.

Розв'язання

Вимога відповідності попиту до пропозиції має вигляд:

$$D=S.$$

Отже,

$$2p'' - p'- p + 15 = 3p''+ p' + p + 5.$$

У результаті одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$p'' + p'+ 2p = 10, \qquad (2.39)$$

відповідне однорідне рівняння має вигляд:

$$p'' + p'+ 2p = 0, \qquad (2.40)$$

характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння є комплексно-спряженими:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (2.40) є таким:

$$p(t)= \exp(-t)\,(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння (2.39) будемо відшукавати у вигляді

$$p^*=A.$$

Тоді $p^{*\prime}=0,\ p^{*\prime\prime}=0.$

Підставивши ці значення в диференціальне рівняння (2.40), одержимо:

$$2A=10.$$

$$A=5 \Rightarrow p^*=5.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння, який відповідає початковій умові, має вигляд:

$$p(t)= \exp(-t)\,(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 5. \qquad (2.41)$$

Урахуємо початкову умову: $p(0)=6$. Тоді (2.41) приймає вигляд:

$$6=C_1+5 \Rightarrow C_1=1.$$

Обчислимо першу й другу похідну функції (2.41):

$$p'(t)= -\exp(-t)\,(\cos t + C_2 \sin t) + \exp(-t)\,(-\sin t – C_2\cos t)= \exp(-t)((C_2-1)\cos t – (C_2+1)\sin t).$$

$$p''(t)=exp(-t)(-2C_2cost+2sint).$$

Звідси

$$p'(0)=C_2-1;\ p''(0)=-2C_2.$$

Використовуючи другу початкову умову $D(0)=10,$ знаходимо

$$10=2(-C_2)=(C_2-1)-6+15.$$

Отже, $C_2=0$. Відповідний даним початковим умовам розв'язок має вигляд:

$$p(t)=5+exp(-t)cos\ t.$$

2.3. Системи диференціальних рівнянь

Системою диференціальних рівнянь називається сукупність рівнянь, що містять кілька невідомих функцій і їхні похідні.

Розглядаються системи диференціальних рівнянь, що містять стільки рівнянь, скільки невідомих функцій в них входить. При цьому всі невідомі функції є функціями однієї незалежної змінної t.

Обмежимося розглядом систем диференціальних рівнянь спеціального вигляду, які називаються *лінійними системами*. У випадку двох невідомих функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$ лінійна система має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+d_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+d_2, \end{cases} \tag{2.42}$$

де коефіцієнти a_{ij}, $i,j=1,2,$ будемо вважати постійними.

Розв'язанням системи диференціальних рівнянь (2.42) називається сукупність функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$, які під час підстановки в рівняння перевертають їх на тотожності.

2.3.1. Еквівалентність системи двох диференціальних рівнянь першого порядку та диференціального рівняння другого порядку

Покажемо, що система двох диференціальних рівнянь першого порядку є еквівалентною одному диференціальному рівнянню другого порядку.

Диференціюючи перше рівняння системи (2.42), одержимо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=a_{11}\frac{dx_1}{dt}+a_{12}\frac{dx_2}{dt}.$$

Підставивши в це рівняння значення $\dfrac{dx_2}{dt}$ з другого рівняння системи (2.42), одержимо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=a_{11}\frac{dx_1}{dt}+a_{12}(a_{21}x_1+a_{22}x_2+d_2).$$

З першого рівняння системи (2.42) функцію x_2 виразимо так:

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}}(\frac{dx_1}{dt} - a_{11}x_1 - d_1).$$

Підставляючи, нарешті, останній вираз у передостаннє рівняння, одержимо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1}{dt} + a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}\frac{1}{a_{12}}(\frac{dx_1}{dt} - a_{11}x_1 - d_1) + d_2)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dx_1}{dt} + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}d_1 - a_{12}d_2 \tag{2.43}$$

Однорідне рівняння, яке відповідає рівнянню (2.43), має вигляд:

$$x_1'' - (a_{11} + a_{22})x_1' + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_1 = 0. \tag{2.44}$$

Відзначимо, що в правих частинах системи диференціальних рівнянь (2.42) змінної t у явному вигляді немає. Це *автономна* динамічна система.

Розглянемо тепер лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами вигляду (2.32):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2y = B.$$

Це рівняння легко привести до вигляду системи двох диференціальних рівнянь першого порядку введенням нової невідомої функції $x = \frac{dy}{dt}$. Одержимо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = x, \\ \dfrac{dx}{dt} = B - a_1x - a_2y. \end{cases}$$

2.3.2. Розв'язання лінійної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

Розглянемо лінійну неоднорідну систему двох диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами вигляду (2.42).

Під час вивчення лінійних систем диференціальних рівнянь зручно використовувати матричні позначення. Умовимося для стислості записувати $\dot{x}$ замість $\frac{dx}{dt}$. Введемо такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (2.42) можна записати у вигляді одного матричного рівняння

$$\dot{X} = AX + D.$$

Наприклад, система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 - 2x_2, \end{cases}$$

у матричному записі має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 1 *загальним розв'язком* $(x_1(t),\ x_2(t))$ неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду (2.42) є сума часткового розв'язку $(x^*,\ y^*)$ цієї системи і загального розв'язку $(\bar{x}_1(t,C_1,C_2), \bar{x}_2(t,C_1,C_2))$ відповідної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \tag{2.45}$$

Визначимо частковий розв'язок $(x^*,\ y^*)$ неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (2.42).

Положення рівноваги системи (2.42) (стаціонарна точка) характеризується властивістю $\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dx_2}{dt} = 0$. Отже, координати положення рівноваги визначаються з системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2. \end{cases}$$

Як розв'язок даної системи, одержимо вектор (x^*,y^*), який характеризує положення рівноваги динамічної системи і, одночасно, є частковим розв'язком неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (2.42), у чому можна переконатися, здійснивши безпосередню перевірку.

Визначимо загальний розв'язок $(\bar{x}_1(t,C_1,C_2), \bar{x}_2(t,C_1,C_2))$ однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (2.45).

Насамперед помітимо, що система (2.45) має очевидний частковий розв'язок $x_1(t)=0,\ x_2(t)=0$. Цей розв'язок називається *нульовим*. Інтерес викликають, звичайно, ненульові розв'язки. Будемо відшукувати такі розв'язки у вигляді $x_1(t) = p_1 e^{\lambda t}$, $x_2(t) = p_2 e^{\lambda t}$ або, використовуючи матричний запис

$$X = Pe^{\lambda t}, \tag{2.46}$$

де $P = (p_1,\ p_2)^T$ – власний вектор матриці A з елементами $(p_1,\ p_2)$, які одночасно не дорівнюють нулю. При цьому $\dot{X} = \lambda P e^{\lambda t}$.

Підставивши вирази для X і $\dot{X}$ в систему рівнянь (2.45), одержимо:

$\lambda P e^{\lambda t} = P e^{\lambda t}$,

а після скорочення обох частин рівняння на $e^{\lambda t}$ одержимо:

$AP = \lambda P$

або

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 = 0, \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 = 0. \end{cases} \tag{2.47}$$

За теоремою про однорідну систему лінійних рівнянь [26] система має ненульові розв'язки, якщо визначник цієї системи дорівнює нулю. Отже, ця умова дає

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або } |A - \lambda E| = 0, \tag{2.48}$$

де E – одинична матриця.

Матричне рівняння (2.48) називають *характеристичним рівнянням* системи (2.49).

Розкриваючи визначник та приводячи подібні складові, матимемо квадратне рівняння вигляду:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{2.49}$$

Зауваження 2.4. Величина $a_{11} + a_{22}$ називається *слідом* матриці коефіцієнтів A і позначається як $Tr\,A$. Величина $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}$ чисельно дорівнює *визначникові* матриці A, і позначається $detA$. Отже, рівняння (2.49) можна переписати у вигляді:

$$\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + det\,A = 0. \tag{2.50}$$

Нехай λ_1 і λ_2 – корені характеристичного рівняння (2.50). Числа λ_1 і λ_2 називаються характеристичними числами системи (2.45), а вектори $P^1 = (p_1^1, p_2^1)^T$, $P^2 = (p_1^2, p_2^2)^T$ – власними векторами, що відповідають числам λ_1 і λ_2.

Отже, кожному кореню λ_i відповідає розв'язок (2.46), коефіцієнти якого (p_1^i, p_2^i) визначаються з відповідної системи (2.47) з точністю до множника пропорційності.

Як і у випадку диференціального рівняння другого порядку, можливі три випадки:

1. Характеристичні числа λ_1, λ_2 є дійсними числами, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Тоді загальний розв'язок системи (2.45) у матричному вигляді набуває вигляду:

$$X(t) = C_1 X_1 + C_2 X_2, \text{ де } X_1 = P^1 e^{\lambda_1 t}, X_2 = P^2 e^{\lambda_2 t}, \tag{2.51}$$

де $P^1 = (p_1^1, p_2^1)^T$ – деякий власний вектор, що відповідає λ_1; $P^2 = (p_1^2, p_2^2)^T$ – власний вектор, що відповідає довільним постійним λ_2, C_1, C_2.

2. Характеристичні числа λ_1, λ_2 ..., λ_n є дійсними числами, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Тоді корені

$$X(t) = C_1 X + C_2 t X, \text{ де } X = P e^{\lambda t} \tag{2.52}$$

також є коренями однорідної системи рівнянь (2.45).

3. Характеристичні числа λ_1, λ_2 є комплексно-спряженими числами: $\lambda_{1.2} = \alpha \pm i\beta$.

Тоді загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (2.45) має пару дійсних розв'язків, яку містять функції вигляду:

$$e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)). \tag{2.53}$$

Приклад 2.6. У результаті економічного аналізу встановлено, що поведінка динамічної системи залежить від двох змінних $x_1(t)$, $x_2(t)$ і описується системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 - 2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 - 2, \end{cases} \tag{2.54}$$

Необхідно: 1. дати характеристику системи (2.54);

2. знайти загальний розв'язок системи.

Розв'язання

1. Система (2.54) – це лінійна неоднорідна система двох диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами. Крім того, ця динамічна система автономна (час у явному вигляді в правій частині рівнянь системи відсутній).

$Tr\, A = 2$, $\det A = -1$ (див. *зауваження 2.4*).

2.1. Визначимо частинний розв'язок (x_1^*, x_2^*) (стаціонарну точку, точку рівноваги) неоднорідної системи (2.54).

Прирівнявши похідні до нуля, одержимо систему:

$$\begin{cases} 0 = x_1 - 2x_2 - 2, \\ 0 = -x_1 + x_2 - 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 2, \\ -2x_2 + 2 + x_2 - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок системи (2.50) має вигляд: $(x_1^*, x_2^*) = (2, 0)$.

2.2. Визначимо загальний розв'язок $(\bar{x}_1(t, C_1, C_2), \bar{x}_2(t, C_1, C_2))$ відповідної однорідної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2, \end{cases} \tag{2.55}$$

Розглянемо два підходи.

2.2.1. Побудуємо відповідне диференціальне рівняння другого порядку.

З першого рівняння системи одержимо:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dx_1}{dt} - 2\frac{dx_2}{dt}.$$

Виразимо функцію $x_2 = 0{,}5(x_1 - \dfrac{dx_1}{dt})$ з першого рівняння системи (2.55), підставивши це рівняння в друге рівняння однорідної системи, і одержимо:

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \frac{1}{2}(x_1 - \frac{dx_1}{dt}) = -\frac{1}{2}(x_1 - \frac{dx_1}{dt}).$$

Отже, диференціальне рівняння другого порядку має вигляд:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dx_1}{dt} - 2(-\frac{1}{2}(x_1 - \frac{dx_1}{dt})) = \frac{dx_1}{dt} + x_1 + 2\frac{dx_1}{dt},$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 3\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Характеристичні числа λ_1, λ_2 є дійсними числами і не дорівнюють одне одному. Тоді загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння, що розглядається, має вигляд (формула 2.37):

$$\bar{x}_1(t, C_1, C_2) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}. \qquad (2.56)$$

Знайдемо функцію $\bar{x}_2(t, C_1, C_2)$. З першого рівняння системи (2.56) $x_2 = 0{,}5(x_1 - \frac{dx_1}{dt})$. Диференціюючи функцію $\bar{x}_1(t, C_1, C_2)$, одержимо:

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = C_1(1+\sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2(1-\sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})t}.$$

Отже, функція $\bar{x}_2(t, C_1, C_2)$ має вигляд:

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(C_1(1+\sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2(1-\sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})t} - C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} - C_2 e^{(1-\sqrt{2})t})$$

$$= 0.5(C_1\sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} - C_2\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t}). \qquad (2.57)$$

2.2.2. Визначимо розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.57) безпосередньо. Складемо характеристичне рівняння системи

$$|A - \lambda E| = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отримуємо характеристичне рівняння (порівняйте з попереднім підходом!)

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Для визначення власних векторів $P^1 = (p_1^1, p_2^1)^T$, $P^2 = (p_1^2, p_2^2)^T$ побудуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}(1-\lambda_i)p_1^i - 2p_2^i = 0,\\ -1p_1^i + (1-\lambda_i)p_2^i = 0, \quad i = 1,2.\end{cases} \tag{2.58}$$

Підставимо у систему (2.58) значення $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$, тобто

$$\begin{cases}\sqrt{2}p_1^1 - 2p_2^1 = 0,\\ -p_1^1 + \sqrt{2}p_2^1 = 0.\end{cases}$$

Отже, $P^1 = \mu(1,\sqrt{2})^T$, де μ – довільне дійсне число.

Для значення $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$ $P^2 = \nu(1,-\sqrt{2})^T$, де ν – довільне дійсне число.

Таким чином, функції $\bar{x}_1(t,C_1,C_2)$, $\bar{x}_2(t,C_1,C_2)$ мають вигляд (порівняйте з (2.56), (2.57)):

$$\bar{x}_1(t,C_1,C_2) = C_1\mu e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2\nu e^{(1-\sqrt{2})t}.$$

$$\bar{x}_2(t,C_1,C_2) = C_1\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(1+\sqrt{2})t} - C_2\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(1-\sqrt{2})t}.$$

Отже, *загальний розв'язок* неоднорідної системи (2.51) лінійних диференціальних рівнянь першого порядку має вигляд:

$$x_1(t,C_1,C_2) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t} + 2, \tag{2.59}$$

$$x_2(t,C_1,C_2) = C_1\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(1+\sqrt{2})t} - C_2\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(1-\sqrt{2})t}.$$

2.3.3. Фазова площина, фазовий портрет

Аналогічно п. 2.1.3 загальний розв'язок системи (2.45) – це сукупність тривимірних інтегральних кривих у просторі Ox_1x_2t (рис. 2.7).

Інше геометричне тлумачення можна одержати, якщо відносити систему (2.45) не до осей x_1, x_2, t тривимірного простору Ox_1x_2t, а до осей x_1, x_2 площини Ox_1x_2, вважаючи t параметром. У цьому випадку система (2.45) визначає криву, рівняння якої можна одержати, виключивши з рівнянь системи параметр t.

Площина Ox_1x_2, яку ведено до розгляду, має назву *фазова площина*. Крива на фазовій площині є *фазовою траєкторією*, частина фазової площини, яка заповнена фазовими траєкторіями називається *фазовим портретом системи* (2.45), функції $x_1(t)$, $x_2(t)$ – *фазовими змінними*.

Відзначимо, що така інтерпретація істотно відрізняється від геометричної інтерпретації, описаної вище (див. визначення інтегральної кривої п. 2.1.3), її можна назвати кінематичною, так як в цій інтерпретації відповідно до кожного розв'язку ставиться рух точки вздовж кривої, а не крива в просторі.

Системи вигляду (2.42), (2.45) використовуються для опису еволюційних процесів. Точка фазового простору визначає стан системи у визначений момент часу. Прикладений до цієї точки вектор з координатами $(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt})$ задає швидкість зміни стану. Точка, в якій цей вектор перетвориться на нуль

$(\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0)$, називається *положенням рівноваги, особливою точкою* (у нашому поданні ще й частковим розв'язком) системи (2.42).

Можна сказати, що перше рівняння в формулі (2.45) задає горизонтальну складову швидкості руху точки у фазовій площині, а друге рівняння – вертикальну складову. Зрозуміло, що, якщо в деякій точці фазової площини $dx_1/dt > 0$, то функція $x_1(t)$ зростає, і розв'язок системи (2.45) рухається від цієї точки вправо, а якщо $dx_1/dt<0$, то вліво. Аналогічно, якщо $dx_2/dt>0$ (<0), то точка рухається вгору (вниз).

Порівняємо геометричну інтерпретацію системи (2.45) у просторі $Ox_1\,x_2\,t$ з інтерпретацією на фазовій площині Ox_1x_2:

а) на кожну траєкторію фазової площини проектується сукупність інтегральних кривих у просторі $Ox_1x_2\,t$. Ці криві виходять одна з одної заміною t на $t - C$ (рис. 2.7.а).

б) якщо точка (a, b) є станом рівноваги системи $P(a, b)=0$; $Q(a, b) = 0$, то інтегральна крива є прямою, яка рівнобіжна осі t. Ця пряма проектується на площину (x, y) у єдину точку (a, b).

в) якщо система має періодичний розв'язок з періодом α, то в просторі $Ox_1\,x_2\,t$ відповідна інтегральна крива являє собою спіраль з кроком α. Ця спіраль проектується на фазову площину в замкнуту криву (рис. 2.7.б).

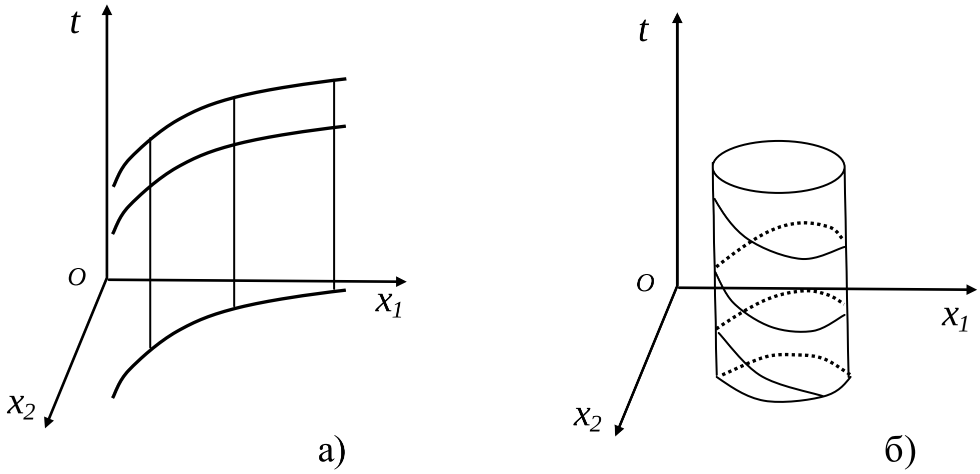


Рис. 2.7. Поведінка розв'язків системи диференціальних рівнянь у просторі Ox_1x_2t і на фазовій площині Ox_1x_2: а) випадок монотонної поведінки системи; б) випадок наявності періодичного розв'язку.

При проекції спіралі тривимірної інтегральної кривої на площину Ox_1t або Ox_2t одержимо синусоїдальну криву, що показує динаміку змінної $x_1(t)$ або $x_2(t)$.

2.3.4. Типи фазових портретів. Класифікація точок рівноваги

Розглянемо динамічну систему, що задається системою лінійних диференціальних рівнянь (2.45)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2\,, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2\,, \end{cases},$$

Нехай λ_1 і λ_2 – корені характеристичного рівняння виду (2.45) коефіцієнтів системи.

1. Якщо λ_1 і λ_2 *дійсні* ($\lambda_1, \lambda_2 \in R^1$), то:

1.1. Якщо λ_1 і λ_2 різних знаків, то фазовий портрет називається *сідлом* (рис. 2.8). Дві пари траєкторій проходять через стаціонарну точку, а інші виглядають так, як горизонталі на карті місцевості, котра є гірським перевалом. Саме такий тип фазового портрету системи (2.56) прикладу 2.5.

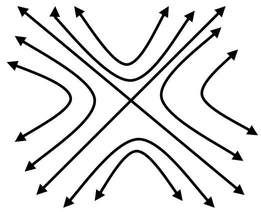


Рис. 2.8. Сідло

1.2. Якщо $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 > 0$, то фазовий портрет називається *нестійким вузлом*. Кожна фазова траєкторія примикає до особливої точки і з часом розбігається (рис 2.9). Саме таким є тип фазового портрету системи (2.54) прикладу 2.6.

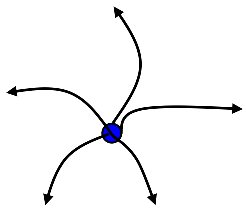


Рис. 2.9. Нестійкий вузол

1.3. Якщо $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 < 0$, то фазовий портрет називається *стійким вузлом*. Усі траєкторії проходять через стаціонарну точку і з часом до неї збігаються (рис. 2.10).

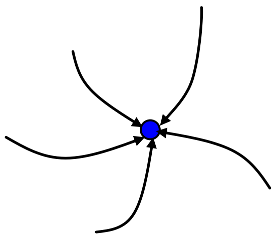


Рис.2.10. Стійкий вузол

2. Якщо λ_1 і λ_2 *комплексно-спряжені*: $\lambda_{1.2} = \alpha \pm i\beta$ (див. *зауваження 2.3*), то

2.1. Якщо $\alpha < 0$, то фазовий портрет називається *стійким фокусом*. Траєкторії асимптотично наближаються до особливої точки, навиваючись на неї у вигляді спіралей (рис. 2.11).

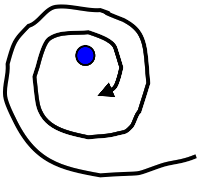


Рис. 2.11. Стійкий фокус

2.2. Якщо α > 0 (дійсна частина додатна), то фазовий портрет називається *нестійким фокусом* (рис. 2.12).

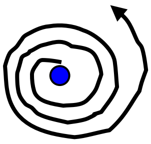


Рис. 2.12. Нестійкий фокус

2.3. Якщо $\alpha =0$, тобто характеристичні числа $\lambda_{1.2} = \pm\ i\beta$ мають тільки уявну частину, то фазовий портрет називається *граничним циклом* (рис. 2.13).

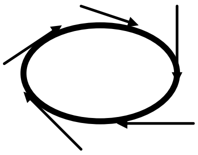


Рис. 2.13. Граничний цикл

Класифікація типів поведінки фазових кривих в околі особливої точки була здійснена великим французьким математиком і філософом Анрі Пуанкаре (1854—1912), який ввів також поняття *граничного циклу*, що відіграє найважливішу роль у різних додатках теорії диференціальних рівнянь.

Приклад 2.7. Побудувати фазовий портрет системи (2.54) (приклад 2.6.).

Розв'язання

Загальний розв'язок $(x(t), y(t))$ неоднорідної системи (2.56) має вигляд (2.59):

$$x_1(t,C_1,C_2) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t} + 2,$$
$$x_2(t,C_1,C_2) = C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{(1+\sqrt{2})t} - C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{(1-\sqrt{2})t}.$$

Розглянемо фазову площину *Oxy.* Координати точки рівноваги системи (2.54) на фазовій площині (рис. 2.15) є $(2,0)$.

Динаміку системи визначає загальний розв'язок $(\bar{x}_1(t,C_1,C_2), \bar{x}_2(t,C_1,C_2))$ однорідної системи (2.49):

$$\bar{x}_1(t,C_1,C_2) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t},$$
$$\bar{x}_2(t,C_1,C_2) = C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{(1+\sqrt{2})t} - C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{(1-\sqrt{2})t}.$$

Згідно з наведеною класифікацією – це *сідло.*

Оберемо для побудови траєкторії чотири різних набори констант (C_1,C_2), наприклад, $(C_1=2,\ C_2=2)$, $(C_1=2,\ C_2=-2)$, $(C_1=-2,\ C_2=2)$, $(C_1=-1,\ C_2=-1)$. Кожен з наборів C_1,C_2 визначає фазову траєкторію. Для подання характеру фазового портрету досить чотирьох наборів.

Для кожного з наборів констант C_1, C_2 будемо змінювати час t від 0 з кроком 0.05 і розраховувати значення $x_1(t), x_2(t)$ для кожного набору констант. Дані точки нанесемо на графік (рис. 2.14) з урахуванням положення точки рівноваги.

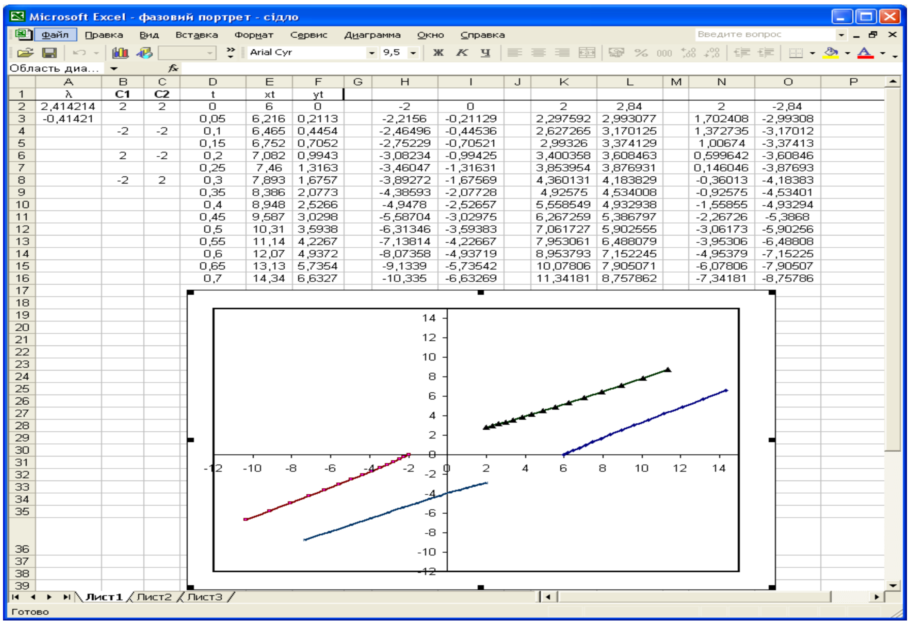


Рис. 2.14. Побудова фазового портрету системи (2.56) за допомогою програмного середовища Excel

Приклад 2.8. Побудувати фазовий портрет однорідного диференціального рівняння другого порядку вигляду: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$.

Характеристичне рівняння має вигляд: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$.

Корені даного характеристичного рівняння є такими: $\lambda_{1,2} = \{-1, -3\}$. Отже, фазовий портрет є *стійким вузлом*.

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y(t, C_1, C_2) = C_1e^{-t} - C_2e^{-3t}. \tag{2.60}$$

Похідна $\dfrac{dy}{dt}$ загального розв'язку є функцією $\dfrac{dy}{dt} = -C_1e^{-t} - 3C_2e^{-3t}$.

У даному випадку фазовими змінними є функції $(y, \dfrac{dy}{dt})$, тобто горизонтальна координатна вісь фазової площини – це вісь значень функції y (2.60), вертикальна вісь містить значення похідної $\dfrac{dy}{dt}$.

Для побудови фазового портрету фіксуємо значення постійних C_1 і C_2 (для першої фазової траєкторії C_1=1,3, C_2=1,2 і змінюємо t в певному інтервалі (у даному прикладі $t \in [0, 4]$). Цю операцію повторюємо для інших фіксованих значень C_1 і C_2 (рис. 2.15).

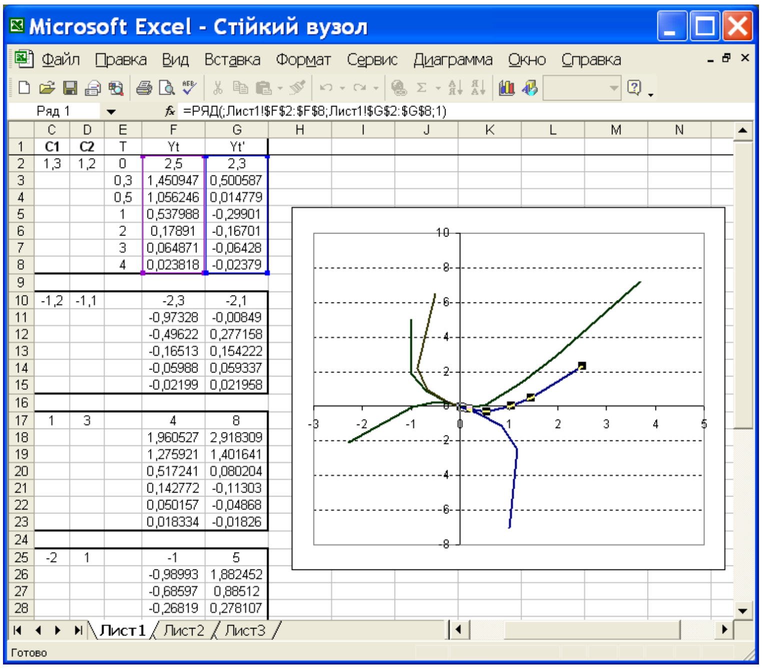


Рис. 2.15. Побудова в Excel фазового портрету "стійкий вузол"

2.4. Поняття про різницеві рівняння

У теорії різницевих рівнянь [10-11] передбачається, що показники економічного процесу, що досліджується, визначені в дискретні моменти часу t_1, t_2, ... t_i, ... Інтервал часу $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, як правило, передбачається постійним для будь-якого i, $i=1,\dots, n$....

Доцільність такого розгляду визначається вихідними даними про економічний процес, які часто вимірюються в дискретні моменти часу (офіційна статистика, періодичні опитування, переписи тощо). Інтервалом часу може бути п'ятирічка, рік, квартал, місяць, тиждень тощо.

Якщо інтервал часу стає нескінченно малим ($\Delta t_i \to 0$), то процес розглядається як неперервний і вивчається за допомогою теорії диференціальних рівнянь.

Поведінка системи в дискретному часі визначається за допомогою різницевого рівняння, яке пов'язує значення економічного показника y, що досліджується, у сусідні моменти часу, тобто y_{t+1} і y_t.

Різниця першого порядку має вигляд:

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t,$$

різниця другого порядку має вигляд

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t,$$

різниця n-го порядку –

$$\Delta^n y_t = \Delta^{n-1} y_{t+1} + \Delta^{n-1} y_t.$$

Визначення 2.2. Рівняння вигляду

$$F(n, y_t, y_{t+1}\, y_{t+2} \dots y_{t+n}) = 0, \qquad (2.64)$$

де n – фіксоване, а t – довільне натуральне число, y_t, y_{t+1} $y_{t+2} \dots y_{t+n}$ – члени деякої числової послідовності, називається *різницевим рівнянням n-го порядку.*

Розв'язати різницеве рівняння означає знайти всі послідовності $\{y_n\}$, що задовольняють рівнянню (2.64). Різницеві рівняння часто використовуються в моделях економічної динаміки з дискретним часом, а також для наближеного рішення диференціальних рівнянь.

Визначення 2.3. Різницеве рівняння вигляду

$$B_0 y_t + B_1 y_{t+1} + \ldots + B_n y_{t+n} = K \tag{2.65}$$

де $B_0, B_1, \ldots, B_k$ – деякі функції від t, називається *лінійним неоднорідним різницевим рівнянням n-го порядку.*

При $K = 0$ рівняння називають однорідним.

У випадку, коли коефіцієнти $B_0, B, \ldots, B_n$ є константами, методи розв'язання даного класу рівнянь багато в чому аналогічні методам розв'язання лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Продемонструємо це для різницевих рівнянь другого порядку:

$$y_{t+2} + p\,y_{t+1} + q y_t = K. \tag{2.66}$$

Аналогічно випадку для лінійних диференціальних рівнянь загальний розв'язок рівняння (2.66) визначається як сума часткового розв'язку y^* рівняння (2.66) та загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння (випадок $K=0$).

Для визначення загального розв'язку однорідного різницевого рівняння

$$y_{t+2} + p\,y_{t+1} + q y_t = 0,$$

що відповідає неоднорідному різницевому рівнянню (2.66), необхідно знайти розв'язки характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Після цього можуть виникнути три варіанти.

1. Обидва корені (λ_1 і λ_2) – дійсні і не дорівнюють один одному. Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$y_t = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t,$$

де C_1, і C_2 – довільні константи.

2. Обидва корені дійсні і дорівнюють один одному $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$, тому

$$y_t = (C_1 + tC_2)\lambda^t.$$

3. У випадку комплексно-спряжених коренів $\lambda_{12} = r\,(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$

$$y_t = r^t\,(C_1 \cos\varphi t + C_2 \sin\varphi t).$$

Приклад 2.8. Розв'язати рівняння

$y_{t+2} + 2\,y_{t+1} - q y_t = 64 * 5^t$.

Знайдемо частковий розв'язок цього рівняння. Скористаємося для цього методом невизначених коефіцієнтів. Будемо шукати частковий розв'язок у вигляді $y(t) = p5^t$. Підставляючи цей вираз у наше рівняння, одержимо:

$p\,(25 + 10 - 3) = 64$.

Отже, $p = 2$, тому $y(t) = 2$. Розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,$$

знаходимо корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y_t = 2 + C_1 + C_2(-3)^t.$$

Контрольні запитання:

1. Запишіть диференціальне рівняння в нормальній формі (формі Коші).
2. Дайте характеристику диференціальних рівнянь зі змінними, що розділяються.
3. Що таке еластичність функції?
4. Що таке автономні рівняння?
5. Подайте геометричний зміст розв'язків диференціального рівняння.
6. Дайте характеристику лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.
7. Як знайти частковий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння?
8. Як знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння?
9. Як знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння?
10. Дайте геометричну та математичну інтерпретацію точки рівноваги.
11. Дайте характеристику лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.
12. Чому дорівнює загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку?
13. Для чого застосовується характеристичне рівняння?
14. Які випадки розв'язків характеристичного рівняння можуть мати місце?
15. Дайте геометричну інтерпретацію комплексних чисел.
16. Як знайти частковий розв'язок y^* неоднорідного лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами?
17. Скільки початкових умов має задача Коші для диференціальних рівнянь другого порядку і які?
18. Покажіть еквівалентність системи двох диференціальних рівнянь першого порядку та диференціального рівняння другого порядку.
19. Як визначається положення рівноваги системи диференціальних рівнянь.
20. Дайте визначення фазової площини, фазової траєкторії та фазового портрету.
21. У чому відмінність фазової траєкторії та інтегральної кривої?
22. Класифікуйте фазовий портрет за типами.
23. Наведіть алгоритм побудови фазового портрету.
24. Які чинники визначають доцільність введення апарату різницевих рівнянь на розгляд?
25. Надайте визначення різниці першого, другого, n-го порядку.
26. Дайте характеристику лінійного неоднорідного різницевого рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

27. Визначте вигляд загального розв'язку однорідного різницевого рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами в залежності від значень характеристичних чисел.

2.5. Завдання для самостійної роботи

1. Розглянути систему (2.38) з матрицею коефіцієнтів A та побудувати для неї trace-determinant (Tr-Det) діаграму, яка дозволяє класифікувати точки рівноваги системи.

Зауваження 2.5. Tr-Det-діаграма будується на площині $O\,TrA\,DetA$ і починається з побудови параболи $DetA=\frac{1}{4}TrA^2$, пов'язаної з дискримінантом характеристичного рівняння системи диференціальних однорідних рівнянь (2.45).

2. Використовуючи програмне середовище Excel (або інше програмне середовище), побудувати програму розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (2.42):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases}$$

з початковою умовою $x_1(0)=0{,}25, x_2(0)=0{,}2$ на інтервалі $[0{,}1]$ методом Рунге-Кутта [12, 30], ітераційні формули яких подано нижче. Крок $h=0{,}01$.

Метод Рунге-Кутта для системи

$$x_1^{k+1} = x_1^k + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)\cdot\frac{h}{6};$$

$$x_2^{k+1} = x_2^k + (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4)\cdot\frac{h}{6};$$

$$m_1 = a_{11}x_1^k + a_{12}x_2^k + d_1;$$

$$q_1 = a_{21}x_1^k + a_{22}x_2^k + d_2;$$

$$m_2 = a_{11}(x_1^k + \frac{h}{2}m_1) + a_{12}(x_2^k + \frac{h}{2}q_1) + d_1;$$

$$q_2 = a_{21}(x_1^k + \frac{h}{2}m_1) + a_{22}(x_2^k + \frac{h}{2}q_1) + d_2,$$

$$m_3 = a_{11}(x_1^k + \frac{h}{2}m_2) + a_{12}(x_2^k + \frac{h}{2}q_2) + d_1,$$

$$q_3 = a_{21}(x_1^k + \frac{h}{2}m_2) + a_{22}(x_2^k + \frac{h}{2}q_2) + d_2;$$

$$m_4 = a_{11}(x_1^k + hm_3) + a_{12}(x_2^k + hq_3) + d_1;$$

$$q_4 = a_{21}(x_1^k + hm_3) + a_{22}(x_2^k + hq_3) + d_2.$$

Результат подати у вигляді таблиці, в якій містяться значення функції, отримані методом Ейлера та методом Рунге-Кутта. Порівняти отримані результати графічно.

– побудувати алгоритм визначення власних векторів матриці коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь (2.44, 2.47);

– для випадку наявності комплексно-спряжених характеристичних чисел $\lambda_{1.2} = \alpha \pm i\beta$ відновити алгоритм переходу комплексного вигляду загального розв'язку системи (2.44) до дійсного розв'язку.

3. Використовуючи програмне середовище Excel (або інше програмне середовище), побудувати програму розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, де $f(x) = 2y + e^x - x$, з початковою умовою $y(0)=0{,}25$ на інтервалі [$0,\ 1$] методами Ейлера та Рунге-Кутта [30], ітераційні формули яких подано нижче. Крок $h=0{,}01$.

Метод Рунге-Кутта

$$y_{k+1} = y_k + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)\cdot\frac{h}{6},$$

$$m_1 = f(x_k,\ y_k),$$

$$m_2 = f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + m_1\frac{h}{2}),$$

$$m_3 = f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + m_2\frac{h}{2}),$$

$$m_4 = f(x_k + h,\ y_k + m_3 h).$$

Метод Ейлера

$$y_{k+1} = y_k + h\cdot f(x_k, y_k),$$

$$x_k = x_0 + h\cdot k$$

Результат подати у вигляді таблиці, в якій містяться значення функції, отримані методом Ейлера та методом Рунге-Кутта. Порівняти отримані результати графічно.

4. Розглянути диференціальне рівняння

$$\frac{dp}{dt} = k(D(p) - S(p)),$$

яке моделює зв'язок між зміною ціни p і незадоволеним попитом $D(p) - S(p)$, де $D(p)$ і $S(p)$ – відповідно величини попиту та пропозиції при ціні p, $k > 0$. Припустимо, що попит та пропозиція задаються лінійними функціями:

$$D(p)=a - bp, \quad S(p)=m + np,$$

де a,b,n,m – деякі додатні числа.

4.1. Знайти загальний розв'язок рівняння Самуельсона.

4.2. Провести аналіз розв'язку та визначити діапазон асимптотичної рівноваги моделі.

4.3. Побудувати інтегральні криві рівняння Самуельсона.

5. Для моделі соціальної мобілізації в залежності від значень екзогенних параметрів (величини γ) можливі такі типи динаміки поведінки:

а) монотонна збіжність до стану рівноваги;
б) осцилююча збіжність до стану рівноваги;
в) монотонна розбіжність;
г) осцилююча розбіжність.

Варіанти а) і б) характеризують стійку систему: усі розв'язки монотонно або коливально збігаються до положення рівноваги незалежно від значення M_0, а варіанти в) і г) означають, що система є нестабільною.

Визначити діапазони значень параметра γ, які відповідають кожному з типів динаміки поведінки моделі.

2.6. Тести

1. Порядок диференціального рівняння визначається
a) найнижчим порядком похідної невідомої функції, яка входить до рівняння;
b) найвищим порядком похідної невідомої функції, яка входить до рівняння;
c) спеціальним позначенням;
d) в результаті розв'язку.

2. Процес розв'язання диференціального рівняння прийнято називати
a) диференціюванням рівняння;
b) визначенням порядку рівняння;
c) інтегруванням рівняння;
d) обчисленням рівняння.

3. Система двох диференціальних рівнянь першого порядку є:
a) еквівалентною одному диференціальному рівнянню другого порядку;
b) еквівалентно двом диференціальним рівнянням першого порядку;
c) еквівалентно двом диференціальним рівнянням другого порядку.

4. Стан, в якому об'єкт знаходиться за відсутності зовнішніх впливів – це:
a) пертурбація;
b) ізоляція;
c) рівновага;
d) відхилення.

5. Що не відбиває фазовий портрет:
a) Початковий стан системи
b) Напрямок еволюції системи
c) Швидкість еволюції системи
d) Кінцевий стан системи

6. Фазова точка – це:
a) Довільна точка фазового портрета
b) Довільна точка якої-небудь траєкторії на фазовому портреті

c) Точка, що відображає на фазовому портреті початковий стан системи

7. Що може змінитися при зміні початкових умов (вказати всі відповіді):
a) Положення стаціонарної точок на фазовому портреті
b) Траєкторія, що відбиває еволюцію системи
c) Положення траєкторій на фазовому портреті
d) Час досягнення стану рівноваги

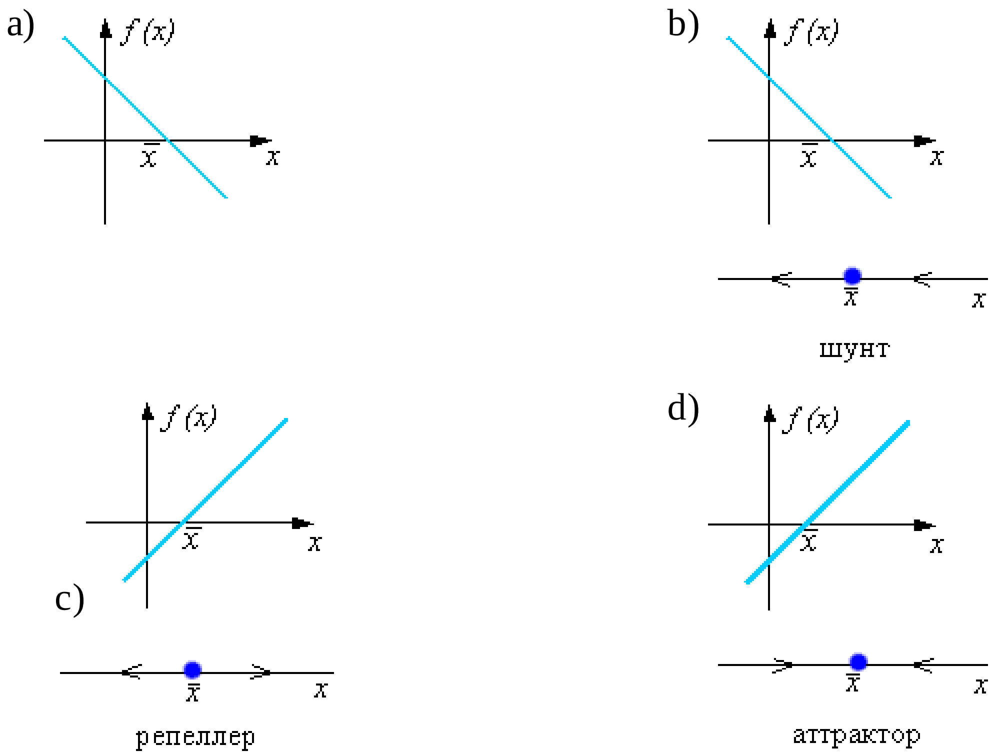
8. Математична модель процесу має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(x_0 - x\right) - kx.$$

Стан рівноваги (стаціонарна точка) визначається зі співвідношення:

$$\frac{1}{\tau}(x_0 - x) - kx = 0 \to \bar{x} = \frac{x_0}{1 + k_1\tau}.$$

Вибрати правильний розв'язок задачі визначення типу стаціонарної точки:



9. Математична модель процесу має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(x_0 - x\right) - k_1 x + k_2 bx.$$

При якому співвідношенні між константами в системі можливе встановлення стану рівноваги за умови, що величина b постійна й рівна 1 (*указати всі відповіді*):

a) $k_2 < k_1$ c) $k_2 < k_1 + \frac{1}{\tau}$ e) $k_2 \le k_1 + \frac{1}{\tau}$

b) $k_2 > k_1 + \frac{1}{\tau}$ d) $k_2 = k_1 + \frac{1}{\tau}$ f) $k_2 = k_1$

10. Математична модель процесу має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x, \; \frac{dy}{dt} = -k_2 y.$$

Вибрати правильний розв'язок задачі визначення типу стаціонарної точки $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0$:

a) $x(t) = ce^{-k_1 t}, \; y(t) = ce^{k_2 t}$
стаціонарна точка – сідло

b) $x(t) = c_1 e^{k_1 t}, \; y(t) = c_2 e^{k_2 t}$
стаціонарна точка – нестійкий вузол

c) $x(t) = c_1 e^{k_1 t}, \; y(t) = c_2 e^{-k_2 t}$
стаціонарна точка – сідло

d) $x(t) = c_1 e^{-k_1 t}, \; y(t) = c_2 e^{-k_2 t}$
стаціонарна точка – стійкий вузол

11. Математична модель процесу має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 ax, \; \frac{dx}{dt} = k_2 by.$$

Вибрати правильний розв'язок задачі визначення типу стаціонарної точки $\bar{x}_1 = 0, \; \bar{x}_2 = 0$:

a $x(t) = c_1 e^{-k_1 at}, \; y(t) = c_2 e^{k_2 bt}$
стаціонарна точка – сідло

b $x(t) = c_1 e^{k_1 at}, \; y(t) = c_2 e^{k_2 bt}$
стаціонарна точка – нестійкий вузол

c $x(t) = c_1 e^{k_1 at}, \; y(t) = c_2 e^{-k_2 bt}$
стаціонарна точка – сідло

d $x(t) = c_1 e^{-k_1 at}, \; y(t) = c_2 e^{-k_2 bt}$
стаціонарна точка – стійкий вузол

Відповіді до тестових завдань:

№ теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
відповідь	b	c	a	c	c	b	b, d	a	c	d	b

РОЗДІЛ 3. ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ

3.1. Модель Харрода-Домара. Коефіцієнт капіталомісткості приросту прибутку.
3.2. Динамічна модель В. Леонтьєва. Теорема Фробеніуса-Перрона. Повний приріст капіталомісткості.
3.3. Лінійні моделі попиту та пропозиції. Умови дії моделі.
3.4. Модель ринкової рівноваги Вальраса. Гіпотеза Вальраса та Маршалла.
3.5. Завдання для самостійної роботи.
3.6. Тести.

3.1. Модель Харрода-Домара

Як приклад динамічної моделі з безперервним часом, представленої лінійним диференціальним рівнянням, розглянемо модель макроекономічної динаміки, запропонованої Харродом і Домаром. Модель описує динаміку доходу $Y(t)$, який розглядається як сума споживання $C(t)$ і інвестицій $I(t)$. Економіка вважається закритою, тому чистий експорт рівний нулю і державні витрати не виділяються. Основна передумова моделі зростання – формула взаємозв'язку між інвестиціями і швидкістю росту доходу. У моделі передбачається, що швидкість росту доходу пропорційна інвестиціям

$$I(t) = B\frac{dY}{dt},$$

де B – коефіцієнт капіталоємкості приросту доходу, або коефіцієнт прирістноїкапіталоємкості. Зворотна йому величина $1/B$ називається приростноюкапіталовіддачею.

Тим самим, в модель фактично включаються наступні передумови:

- інвестиційний лаг дорівнює нулю: інвестиції миттєво перетворюються на приріст капіталу. Формально це означає, що $\Delta K = I(t)$, де $K(t)$ – безперервна функція приросту капіталу за часом;
- вибуття капіталу відсутнє;
- виробнича функція в моделі лінійна. Це витікає з пропорційності приросту доходу приросту капіталу;
  Лінійна виробнича функція

$$Y(t) = aL(t) + bK(t) + c$$

де$b = 1/B$, має таку властивість в тому випадку, якщо або $a = 0$, або $L(t) = const$.

- витрати праці постійні в часі, або випуск не залежить від витрат праці, оскільки праця не є дефіцитним ресурсом.
- модель не враховує технічного прогресу.

Ці передумови, звичайно, істотно огрублюють опис динаміки реальних макроекономічних процесів, роблять проблематичним застосування цієї моделі, наприклад, для прогнозування величини сукупного випуску, або доходу. У той же час, її відносна простота дозволяє більш глибоко вивчити взаємозв'язок динаміки інвестицій і зростання випуску, одержати точні формули траєкторій даних параметрів.

У цій моделі передбачається, що динаміка споживання *C(t)* задається екзогенно. Простий варіант моделі вийде, якщо вважати, що $C(t) \equiv 0$. Цей варіант абсолютно нереалістичний з практичної точки зору, проте в ньому всі ресурси прямують на інвестиції, внаслідок чого можуть бути визначені максимально можливі темпи зростання. В цьому випадку одержуємо

$$Y(t) = C(t) + I(t) = 0 + B\frac{dY}{dt} = BY'(t).$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Легко перевірити безпосереднім диференціюванням, що його рішення має вигляд:

$$Y(t) = Y(0)e^{(1/B)t}.$$

Безперервний темп приросту доходу $y(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)}$ в цьому випадку рівний *1/B*. Це максимально можливий технологічний темп приросту.

Хай тепер $C(t) = C$ постійно в часі. В цьому випадку одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$Y(t) = BY'(t) + C.$$

Його частковим рішенням є функція $y_r = C$, а загальним рішенням – сума загального рішення однорідного рівняння і знайденого часткового рішення

$$Y(t) = Ae^{(1/B)t} + C.$$

Константу інтегрування *A* знайдемо, підставивши в цю функцію задану початкову умову

$$Y(0) = Ae^{(1/B)0} + C = A + C,$$

звідки $A = Y(0) – C$. Значить, рішенням рівняння є функція

$$Y(t) = (Y(0) - C)e^{(1/B)t} + C.$$

Безперервний темп приросту доходу $y(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)}$ у цьому рішенні рівний $y(t) = \frac{1}{B} \times \left[1 - \frac{C}{Y(t)}\right]$. Він складає $\frac{1}{B} \times \left[1 - \frac{C(0)}{Y(0)}\right]$ у початковий момент часу (при $t = 0$)

і, зростаючи, прагне до *1/B* при $t \to \infty$, що зрозуміле, оскільки дохід росте, а постійний об'єм споживання складає все меншу його частку.

Величина $a(t) = \left[1 - \dfrac{C}{Y(t)}\right]$ – норма накопичення у момент часу *t*, і темп приросту доходу виявляється пропорційним цій величині, як і показнику прирістноїкапіталовіддачи*1/B*:

$$y(t) = \alpha(t)/B.$$

Отже, за інших рівних умов зростання норми накопичення пропорційно збільшує темпи приросту доходу. В той же час це знижує рівень поточного споживання, і для розв'язку проблеми узгодження конкурентних цілей збільшення темпів зростання і рівня поточного добробуту в модель звичайно включають елементи оптимізації. В цьому випадку розв'язується оптимізаційна задача на максимум загального об'єму споживання за кінцевий або нескінченний період часу. Для віддзеркалення переваги раніше отриманого результату в модель включається тимчасове дисконтування, при якому попередній результат враховується в критерії з великою «вагою».

Нарешті, розглянемо варіант моделі з показником споживання $C(t)$, що росте з постійним темпом *r:* $C(t) = C(0) \times e^{rt}$.

Диференціальне рівняння цієї моделі має вигляд:

$$Y(t) = BY'(t) + C(0) \times e^{rt}.$$

Рішення цього рівняння таке:

$$Y(t) = \left[Y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br}\right] \times e^{\frac{1}{B}t} + \left[\frac{C(0)}{1 - Br}\right] \times e^{rt}.$$

З аналізу формули ясно, що темп приросту споживання *r* повинен бути менше максимально можливого загального темпу приросту *1/B*, оскільки інакше споживання займатиме все велику і врешті-решт – переважну частину доходу, що зведе до нуля спочатку інвестиції, а потім і дохід. Ясно це з формули рішення моделі, оскільки у випадку $r > \dfrac{1}{B}$ коефіцієнт $\dfrac{1}{1 - Br}$ негативний, а e^{rt} росте швидше, ніж $e^{(1/B)t}$, отже, другий доданок за цих умов негативний і через деякий час «переважить» перший.

У рішенні даної моделі зростання при $r < \dfrac{1}{B}$ багато що залежить від співвідношення між *r*і $r_0 = \dfrac{a_0}{B}$ (у чисельнику стоїть норма накопичення в початковий момент часу $t = 0$: $a_0 = 1 - \dfrac{C(0)}{Y(0)}$). Якщо $r = r_0$, то темп приросту доходу рівний темпу приросту споживання, і рішенням є

$$Y(t) = Y(0) \times e^{(\alpha_0 / B)t}.$$

Норма накопичення $\alpha(t)$ в цьому випадку постійна в часі і рівна α_0, а темп приросту доходу пропорційний нормі накопичення і обернено пропорційний прирістноїкапіталоємкості. Саме ця модифікація моделі економічного зростання, в якій норма накопичення постійна, називається *моделлю Харрода - Домара*.

Якщо в даній моделі зростання $\frac{1}{B} > r > r_0$, то необхідний темп приросту споживання виявляється дуже високим для економіки. В цьому випадку коефіцієнт $\left[Y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br}\right]$, негативний, оскільки $\frac{1}{B} > r$, перший негативний доданок в рішенні «переважує» зрештою другий. Тому темп приросту доходу падає і стає з деякого моменту негативним. Через деякий час сам дохід стає рівним нулю, після чого модель втрачає економічне значення. Це аналогічно випадку $r \geq \frac{1}{B}$, хоча в даному випадку вже річ не в тому, що потрібний темп приросту споживання у принципі недосяжний за тривалий період. У цій ситуації дуже низькою виявляється початкова норма накопичення α_0.

Якщо $r < r_0$, то норма накопичення, а разом з нею і темп приросту доходу ростуть, причому останній наближається до $1/B$. Проте в цьому випадку відбувається накопичення ради накопичення, бо споживання росте заданим темпом r, а темп приросту доходу вдається збільшити за рахунок швидшого зростання інвестицій. Норма накопичення α_0 перевищує Br, і якщо виходити із задачі максимізації об'єму споживання, то ця норма дуже висока. Вищий її рівень вимагає збільшення інвестицій $I(0)$ за рахунок скорочення споживання $C(0)$у початковий момент, що при фіксованому темпі приросту споживання rобумовлює нижчий його рівень на всій траєкторії. В той же час потрібний темп приросту споживання $r < \frac{1}{B}$ можна підтримувати, як показано вище, при$\alpha_0 = Br$.

Таким чином, якщо вимагається підтримувати постійний темп приросту споживання r, не перевищуючий технологічного темпу, то для максимізації об'єму споживання за будь-який період потрібно встановити початкову норму накопичення $\alpha_0 = Br$. Тоді необхідний темп приросту споживання буде

$$r = \alpha_0 / B = y(0).$$

Приклад. Розглянемо варіанти траєкторій основних макроекономічних показників в моделі Харрода-Домара за різних умов темпу споживання.

Нехай динаміка споживання $C(t) = C(0) \times e^{rt}$,

а динаміка ВВП $Y(t) = \left[y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br}\right] \times e^{\frac{1}{B}t} + \left[\frac{C(0)}{1 - Br}\right] \times e^{rt}$.

Початкові умови $Y(0) = 1000$ і $C(0) = 200$.

Тоді норма споживання $a_0 = 1 - \frac{C(0)}{Y(0)} = 1 - \frac{200}{1000} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Коефіцієнт прирістноїкапіталоємкості$B = 2$.

Варіант а) – темп приросту споживання $r = 0{,}75$.

Траєкторія ВВП за заданих умов

$$Y(t) = \left[1000 - \frac{200}{1 - \frac{3}{2}}\right] \times e^{\frac{1}{2}t} + \frac{200}{1 - \frac{3}{2}} \times e^{\frac{3}{4}t}.$$

Знайдемо момент часу, коли $Y(t) = 0$. Розв'язуючи це рівняння, одержимо $1400 \times e^{\frac{1}{2}t} = 400 \times e^{\frac{3}{4}t}$ або $e^{\frac{1}{4}t} = 3{,}5$, де $t = 5{,}01105$.

Знайдемо момент часу, коли випуск продукції буде максимальним тобто $Y'(t) = 0$. Розв'язуючи рівняння $Y'(t) = 0$, одержимо

$$Y'(t) = 1400 \times \frac{1}{2} \times e^{\frac{1}{2}t} - 400 \times \frac{3}{4} \times e^{\frac{3}{4}t} = 0, \text{ або } 700 \times e^{\frac{1}{2}t} = 300 \times e^{\frac{3}{4}t}.$$

Таким чином, можна визначити момент часу, при якому рівень ВВП буде максимальним, $e^{\frac{1}{4}t} = 2{,}333$, або $t = 3{,}389$. Рівняння, що відображає динаміку інвестицій

$$I(t) = B \times Y'(t) = 2 \times (700 \times e^{\frac{1}{2}t} - 300 \times e^{\frac{3}{4}t}).$$

Момент часу, при якому інвестиції будуть рівні 0, тобто $I(t) = 0$, рівний $t = 3{,}389$. Траєкторії основних показників приведені на рис. 3.1.

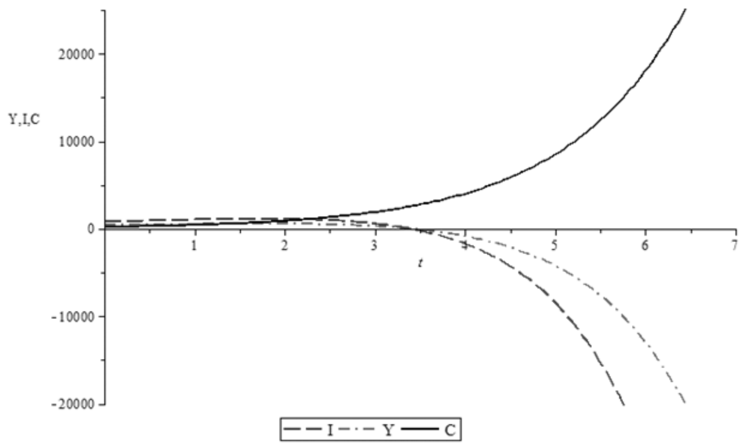


Рис. 3.1. Траєкторії функцій випуску продукції, інвестицій і споживання при значенні темпу приросту споживання $r = 0{,}75$.

Варіант б) –темп приросту споживання $r = 0{,}45$.

Таким чином, виконується умова $\frac{a_0}{B} < r < \frac{1}{B}$. Траєкторія ВВП за цих умов

$$Y(t) = \left[1000 - \frac{200}{1 - 2 \times 0,45}\right] \times e^{0,5t} + \frac{200}{1 - 2 \times 0,45} \times e^{0,45t}.$$

Знайдемо момент часу, коли $Y(t) = 0$, тобто

$$[1000 - \frac{200}{0,1}] \times e^{0,5t} + \frac{200}{0,1} \times e^{0,45t} = 0, \text{ або}$$

$$-1000 \times e^{0,5t} + 2000 \times e^{0,45t} = 0.$$

Тоді $e^{0,05t} = 2$ і $t = 13,86 \approx 14$.

Знайдемо момент часу, коли випуск продукції буде максимальним, тобто $Y'(t) = 0$.

Тоді

$$Y'(t) = -1000 \times 0,5 \times e^{0,5t} + 2000 \times 0,45 \times e^{0,45t} = 0, \text{ або}$$

$$-500 \times e^{0,5t} + 900 \times e^{0,45t} = 0.$$

В цьому випадку $e^{0,05t} = 1,8$ або $t = 11,75 \approx 12$. Траєкторії основних показників приведені на рис. 3.2. Як видно з малюнка і результатів розрахунку, період «існування» даної економічної системи за нових умов збільшився, проте темп приросту споживання все ще високий в порівнянні з оптимальним.

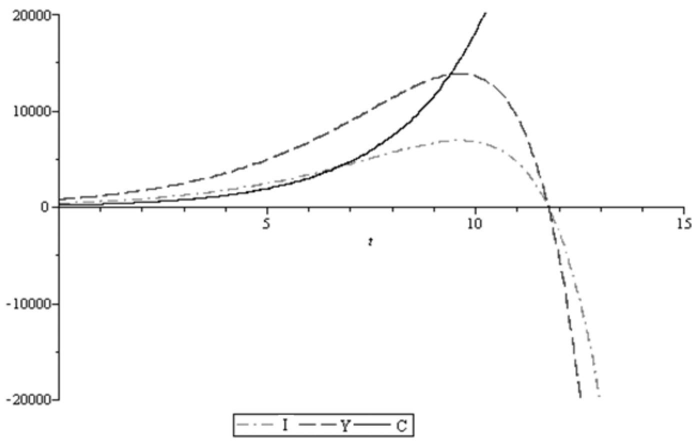


Рис. 3.2. Траєкторії функцій випуску продукції при $r = 0,45$

Варіант в) – темп приросту споживання $r = 0,4$.

Таким чином, темп приросту споживання співпадає з оптимальним, тобто

$$r = \frac{a_0}{B} = 0,4(a_0 = 0,8; B = 2).$$

Траєкторія випуску продукції буде відображена моделлю $Y'(t) = 100 \times e^{0,4t} \frac{1}{2}$.

Динаміка інвестицій – відповідно $I(t) = B \times Y'(t) = 2 \times 1000 \times 0,4 \times e^{0,4t}$,

а рівняння споживання виглядатиме як $C(t) = C(0) \times e^{rt} = 200e^{0,4t}$.

Траєкторії основних показників приведені на рис. 3.3.

Оскільки функції випуску, інвестицій і споживання безперервні в часі, то представляє інтерес порівняння накопичених (сумарних) за певний період часу показників Y^H, I^H, і C^H (значення певних інтегралів для представлених варіантів моделі а – в).

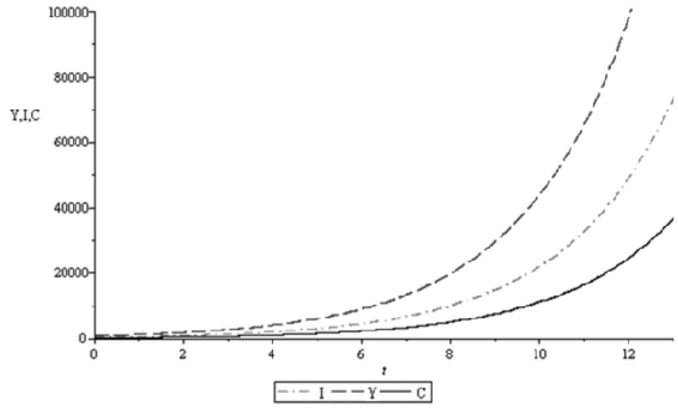


Рис. 3.3. Траєкторії функцій випуску продукції, інвестицій і споживання при значенні темпу приросту споживання $r = 0{,}4$

3.2. Динамічна модель Леонтьєва

Динамічна модель Леонтьєва є деталізованою моделлю зростання валового суспільного продукту і національного доходу. Базою для динамічної моделі В. Леонтьєва служить статична модель міжгалузевого балансу в грошовому виразі, яка відображає виробництво і розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використовування матеріальних і трудових ресурсів, створення і розподіл національного доходу (НД). Кожна галузь в балансі розглядається двічі – як споживач і як виробник. Це і визначає матричну структуру балансу. У балансі розглядаються як галузі, так і підгалузі. В окремих випадках баланс може включати до декількох сотень позицій.

У основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між накопиченням і приростом валового продукту.

При побудові динамічної моделі В. Леонтьєва, як і для моделі міжгалузевого балансу, робляться наступні припущення:

1) у кожній галузі (або підгалузі) є єдина технологія виробництва;
2) норми виробничих витрат не залежать від об'єму продукції, що випускається;
3) не допускається заміщення у виробництві одних видів продукції іншими.

При цих припущеннях величина міжгалузевого потоку доводиться пов’язаною з валовою продукцією галузі таким чином

$$x_{ij} = a_{ij} X_j;$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \qquad (3.1)$$

де a_{ij} – коефіцієнт прямих матеріальних витрат, за допомогою якого вимірюються технологічні зв'язки між галузями. Коефіцієнт a_{ij} показує, скільки одиниць продукції i-той галузі безпосередньо витрачається на випуск одиниці валової продукції j-той галузі. Так, при $i = j$ маємо коефіцієнт витрат власної продукції галузі на одиницю її валового випуску.

Всі коефіцієнти прямих матеріальних витрат утворюють квадратну матрицю $A_{n\times n}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right] \qquad (3.2)$$

Статична модель міжгалузевого балансу в матричній формі має вигляд:

$$X = AX + Y, \qquad (3.3)$$

де A – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат;
X – вектор-стовпець валових об'ємів випуску (ВОП);
Y – вектор-стовпець кінцевого продукту (НД).

У основі динамічної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між накопиченням і приростом валової продукції Цей взаємозв'язок реалізується за допомогою матриці капіталоємкості приростів виробництва. Крім того, вважається миттєвість перетворення капіталовкладень в приріст основних фондів і миттєвість віддачі цих фондів в об'єми виробництва (що, взагалі кажучи, невірно). Час вважається безперервним, що і визначає застосування диференціальних рівнянь.

Основне співвідношення моделі має вигляд

$$X(t) = AX(t) + B\frac{dX}{dt} + C(t) \qquad (3.4)$$

де $X(t)$ – вектор об'ємів валового випуску продукції по галузях у момент часу t;
dX/dt – вектор абсолютних приростів за малу одиницю часу;
A – матриця коефіцієнтів прямих витрат, включаючи витрати на відшкодування вибуття основних фондів;
$AX(t)$ – виробниче споживання, що забезпечує просте відтворення;
Y – матриця коефіцієнтів капіталоємкості приростів виробництва (b_{ij} – витрати виробничого накопичення i-го виду продукції на одиницю приросту j-го виду продукції);
$C(t)$ – вектор-стовпець, що характеризує споживання по галузях.

Рівняння моделі (3.4) записане у векторно-матричній формі щодо ВОП.

Щодо величин, що беруть участь в рівнянні (3.4), передбачається виконання наступних умов.

1. Матриця A продуктивна і нерозкладна.

Означення. Нехай $N=\{1,\dots n\}$ – множина всіх галузей. Підмножина галузей $S \in N$ *ізольована,* якщо $a_{ij} = 0$, при всіх $i \notin N$ і $j \in N$. Це означає, що галузі з множини S не потребують продукції, вироблюваної іншими галузями, навіть побічно.

Якщо в множині галузей існує ізольована підмножина, то за допомогою перестановок рядків і стовпців матрицю *А можна* привести до вигляду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Означення. Матриця *А* називається *нерозкладною,* якщо її не можна привести до вигляду (3.5) тільки перестановкою рядків і стовпців.

Одна з основних властивостей нерозкладних матриць описується теоремою Фробеніуса – Перону:

1) Нерозкладна матриця *А* має позитивне власне число $\lambda_A > 0$, яке перевершує по модулю всі інші її власні числа.
2) Власному числу λ_A відповідає єдиний (з точністю до ненульового множника) цілком позитивний власний вектор X_A .

Отже, матриця коефіцієнтів повних витрат строго позитивна:

$$(E - A)^{-1} > 0\,, \quad \det(B) \neq 0.$$

2. Матриці *А* і *В* постійні в часі.
3. Капіталовкладення (інвестиції) виступають єдиним джерелом зростання виробництва. Тобто, ні в одній галузі немає резервних виробничих потужностей.

При таких припущеннях, можуть бути тільки стани, для яких $X' \geq 0$ і що змістовно інтерпретуються в рамках даної моделі. Такі стани системи називатимемо *допустимими.* Траєкторії, що не виводять систему з області допустимих станів також називатимемо *допустимими.*

Використовуючи взаємозв'язок між ВОП і НД в статичній моделі

$$X(t) = (E - A)^{-1} Y(t),$$

де вектор $Y(t)$ характеризує галузеву структуру НД, одержимо рівняння моделі Леонтьєва щодо НД:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY}{dt} + C(t) \tag{3.6}$$

Позначимо $B(E - A)^{-1} = \bar{B}$. Коефіцієнт цієї матриці – $\tilde{b}_{ij}$ характеризує величину виробничого накопичення продукції *і-го* вигляду на одиницю приросту *j*-го елементу НД, а сама вона називається матрицею коефіцієнтів повної приростної капіталоємкості.

Для з'ясування можливостей системи проаналізуємо модель (3.6) при різних траєкторіях споживання.

Визначимо технологічні можливості системи, які визначаються параметрами *А* і *В*. Для цього покладемо $C(t) = 0$. В цьому випадку (3.6) прийме вигляд

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY}{dt}\ . \tag{3.7}$$

Вираз (3.7) – це система лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтам першого порядку. Загальне рішення цієї системи згідно теорії диференціальних рівнянь має вигляд

$$Y(t) = \sum_l d_l K_l e^{\left(\frac{1}{s_l}t\right)} \qquad (3.8)$$

де s_l – власні числа матриці повної приростної капіталоємкості;

K_l – відповідні їм власні вектори;

d_l – коефіцієнти, які визначаються з початкової умови ($Y(0) = \sum d_l K_l$).

Траєкторія, що виходить з $Y(0)$, є комбінацією експонент з різними темпами приросту ($1/s_l$). Отже, в загальному випадку розвиток по траєкторії $Y(t) = Y_0 e^{kt}$, тобто з єдиним для всіх галузей темпом, неможлив, і він відбувається з постійними структурними змінами. Проте існує певна схожість між рішенням макроекономічної моделі і рішенням структурної моделі. Ця схожість обумовлена наявністю у матриці коефіцієнтів повної приростної капіталоємкості власного числа Фробеніуса-Перону.

Унаслідок допущень моделі матриця $\tilde{B} = B(E - A)^{-1} > 0$, отже, у неї існує коріння Фробеніуса-Перону, s. Величина цього коріння знаходиться в межах:

$$\min_j \sum_i \tilde{b}_{ij} \le s \le \max_j \sum_i \tilde{b}_{ij} \ .$$

Величина $\tilde{b}_{ij} = \sum_i \tilde{b}_{ij}$ називається *повною* приростною капіталоємкістю j-тої *галузі.*

Можливі два випадки поведінки траєкторії (3.8).

У першому випадку в траєкторії (3.8) домінує (переважає) експонента з показником ступеня, який пов'язаний з корінням Фробеніуса-Перону. В цьому випадку з часом темп приросту кожного елементу НД починає наближатися до темпу, визначуваного даною експонентою, тобто $1/s$. Таким чином, на нескінченному періоді часу кожний з елементів НД починає розвиватися з темпом $1/s$. Таким чином, технологічний *темп приросту має* вигляд: $\rho = 1/s$. Структура НД прагне в тому разі до власного вектора, відповідного K_s (рис. 3.4).

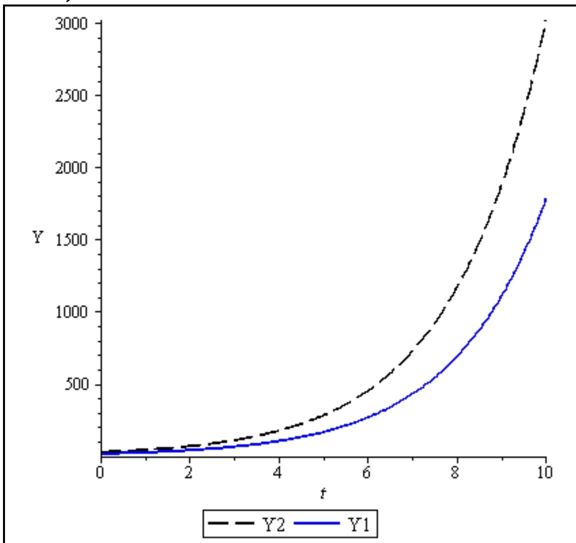


Рис. 3.4. Допустимі траєкторії розвитку

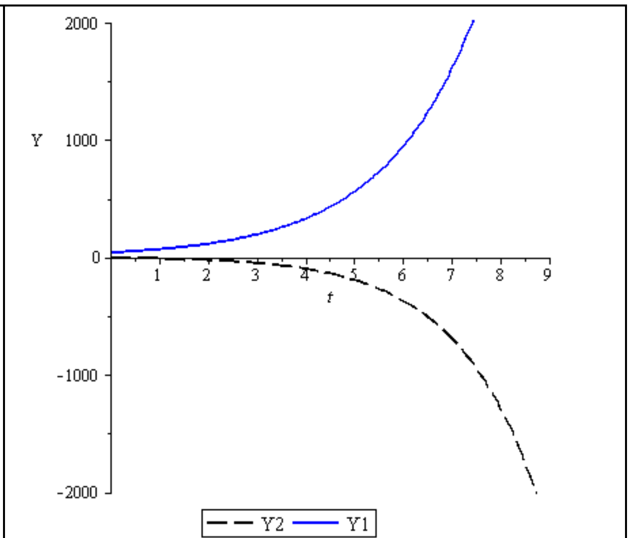


Рис. 3.5. Неприпустимі траєкторії розвитку

У другому випадку в (3.8) домінує експонента з показником ступеня, відмінним від $1/s$. Це відбувається, коли існує позитивне власне число, відмінне від s. Позначимо домінуючий показник $1/s_0$. В цьому випадку власний вектор, відповідний s_0, обов'язково має негативні компоненти і, оскільки $s_0 K_{S_0} = \tilde{B} K_{S_0} = B(E - A)^{-1} K_{S_0}$, стовпець $(E - A)^{-1} K_{S_0}$ також містить негативні компоненти. Враховуючи (3.8), запишемо $X(1)$ таким чином:

$$X(t) = \sum_l d_l (E - A)^{-1} K_l e^{\frac{1}{s_l} t}.$$

У останній рівності в правій частині присутні негативні компоненти, причому із збільшенням t вони збільшуються по абсолютній величині. Отже, з часом вони з'являться і в лівій частині рівності. Таким чином, траєкторія виходить в неприпустиму зону (рис. 3.5).

Зауваження. Траєкторія системи в першому випадку є допустимою, хоча початковий стан системи може бути і неприпустимим. І, навпаки, в другому випадку, хоча початковий стан системи є допустимим, траєкторія розвитку може виходити за межі допустимої області.

Приклад. Розглянемо умовний приклад для динамічної моделі В. Леонтьєва. Нехай економіка агрегована до двох галузей, відомі матриці прямих матеріальних витрат, прирістної капіталоємкості і початковий стан системи:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \ X(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}, Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Визначимо траєкторію розвитку системи. Для цього обчислимо матрицю повної прирістної капіталоємкості:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}19 & 0{,}34 \\ 0{,}34 & 1{,}53 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = B(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 1{,}64 \\ 0{,}73 & 0{,}78 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні числа цієї матриці, вирішуючи характеристичне рівняння

$$\left| E - \lambda \tilde{B} \right| = \lambda^2 - 2{,}03\lambda - 0{,}22 = 0$$

$$\lambda_1 = 2{,}14; \ \lambda_2 = -0{,}10$$

Отже, показники експонент в рішенні рівні

$$\rho = \frac{1}{\lambda_1} = 0{,}47, \ \frac{1}{\lambda_2} = -9{,}69.$$

Відповідні власні вектори з точністю до множника рівні

$$K_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}54 \end{pmatrix}, \ K_{S_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}83 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що траєкторія системи є допустимою, оскільки єдиний доданок з позитивним показником ступеня складається з позитивних компонент.

Визначимо, виходячи з початкових умов, коефіцієнти d_l:

$$d_1 K_1 + d_2 K_2 = Y(0) \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = 25 \\ 0{,}54 d_1 - 0{,}83 d_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 26{,}09 \\ d_2 = 1{,}09 \end{cases}$$

Остаточно траєкторія розвитку системи має вигляд

$$Y(t) = 26,09 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0,54 \end{pmatrix} e^{0,475t} - 1,09 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -0,83 \end{pmatrix} e^{-9,69t}$$

Графічно зміну структури ВОП можна представити так, як зображено на рис. 4. Похила виділена лінія відповідає структурі ВОП при нескінченному t: $(E - A)^{-1} K_{l_1}$.

Зауваження. Зміна структурних параметрів може привести до якісно іншого розвитку системи, хоча параметри макромоделі збережуться.

Дослідження моделі Леонтьєва дозволяє зробити наступний висновок: *на відміну від макроекономічної моделі, яка при нульовому споживанні завжди має допустиму траєкторію, траєкторія структурної моделі навіть при нульовому споживанні може бути неприпустимою унаслідок певних структурних параметрів.*

Нехай тепер екзогенно задана траєкторія споживання $C(t) = C_0 e^{rt}$. В цьому випадку рішення системи (3.4) є сумою загального рішення однорідної системи (3.8) і часткового рішення неоднорідної і має вигляд:

$$Y(0) = \sum_l d_l K_l e^{\frac{1}{s_t}t} + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0 e^{rt} \qquad (3.9)$$

де коефіцієнти d_1 визначаються виходячи з початкової умови:

$$Y(0) = \sum_l d_l K_l + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0$$

Матриця $(E - rB(E - A)^{-1})^{-1}$ є структурним аналогом коефіцієнта скалярної моделі

$$\frac{1}{1 - Br} = \frac{1}{1 - \left(\frac{br}{1 - a}\right)}.$$

З'ясуємо, чи можливе в моделі при заданій траєкторії споживання зростання без обмеження, іншими словами, чи існують обмеження на темп r. (У макроекономічній моделі обмеження було пов'язане з технологічним темпом і початковою нормою накопичення.).

Нехай в першому доданку домінує темп, відповідний корінню Фробеніуса – Перону: $\rho = 1/s$. Нехай $r > 1/s$. Тоді з часом другий доданок в (3.5) починає домінувати, оскільки перше тяжіє до темпу $1/s$. Отже, $Y(t)$ все більшою мірою починає визначатися вектором $(E - rB(E - A)^{-1})^{-1}$. Позначимо $B^* = rB(E - A)^{-1}$. Узагальнюючи умову продуктивності, забезпечувану теоремою Фробеніуса-Перону, для матриці B^* одержуємо

$$r < 1/s \qquad (3.10)$$

У даному випадку B^* непродуктивна. Оскільки $C_0 > 0$, то одержуємо, що вектор $(E - B^*)^{-1} C_0$ містить негативні компоненти. Це значить, що рано чи пізно в $Y(t)$ з'являться негативні компоненти і траєкторія вийде в неприпустиму із змістовної точки зору область.

Таким чином, за наявності екзогенно заданій траєкторії споживання вигляду $C(t) = C_0 e^{rt}$ у структурній моделі існування допустимої траєкторії визначається співвідношенням (3.10).

Якщо домінує експонента з темпом, не відповідним темпу Фробеніуса-Перону, то за наслідками аналізу при $C(t) = 0$ траєкторія все одно вийде в неприпустиму із змістовної точки зору область.

З'ясуємо, чи можливе в структурній моделі таке зростання, при якому всі становлячи елементи НД ростуть з однаковим темпом аналогічно тому, як це відбувається в макромоделі Харрода-Домара (тобто в моделі розвитку з постійною нормою накопичення і постійним темпом приросту).

Нехай споживання задане у вигляді $C(t) = C_0 e^{rt}$. У моделі (3.6) перший доданок є сумою експонент, що ростуть з різними темпами, тому єдиний темп зростання можливий тільки у випадку, якщо перший доданок тотожно рівний нулю. Це можливо тільки, якщо все $d_1 = 0$. Запишемо (3.6) у такому вигляді:

$$\sum_l d_l K_l = Y(0) - (E - r\tilde{B})^{-1} C_0 = 0.$$

Звідси одержуємо систему рівнянь щодо r:

$$(E - r\tilde{B})Y(0) = C_0 \qquad (3.11)$$

У загальному випадку ця система перевизначена. Таким чином, якщо відомий початковий заданий стан економіки Y_0, C_0 і задані технологічні параметри, то не завжди можливе зростання з постійним темпом всіх галузей. Проте можна задати r_0 і з системи (3.11) визначити C_0 так, щоб розвиток йшов із заданим темпом.

3.3. Лінійні моделі попиту і пропозиції

Розглянемо спочатку дискретну модель на прикладі павутиноподібної. Нехай ринок якого-небудь окремого товару характеризується функціями попиту і пропозиції: $D = D(P)$, $S = S(P)$.

Для існування рівноваги ціна повинна бути такою, щоб товар на ринку був розпроданий, або $D(P) = S(P)$.

Ціна рівноваги $\bar{P}$ задається цим рівнянням (яке може мати безліч рішень), а відповідний об'єм купівель-продажів, що позначається через $\bar{X}$, – наступним рівнянням:

$$\bar{X} = D(\bar{P}) = S(\bar{P}).$$

Динамічна модель виходить за наявності запізнювання попиту або пропозиції. Проста модель в дискретному аналізі включає незмінне запізнювання або *відставання* пропозиції на один інтервал:

$$D_t = D(P_t) \text{ і } S_t = S(P_{t-1}).$$

Це може трапитися, якщо для виробництва даного товару потрібен певний період часу, вибраний за інтервал. Дія моделі така: при заданому P_{t-1} попереднього періоду обсяг пропозиції на ринку в поточному періоді буде $S(P_{t-1})$ і величина P_t повинна встановитися так, щоб був куплений весь обсяг запропонованого товару. Іншими словами, P_t і обсяг купівель-продажів X_t характеризуються рівнянням:

$$X_t = D(P_t) = S(P_{t-1}).$$

Отже, знаючи початкову ціну P_0, за допомогою цих рівнянь ми можемо набути значення P_1 і X_1. Потім, використовуючи наявну ціну P_1 з відповідних рівнянь набудемо значення P_2 і X_2 і т.д. Загалом, зміна P_t характеризується різницевим рівнянням першого порядку (одноінтервальне відставання):

$$D(P_t) = S(P_{t-1}).$$

Рішення можна проілюструвати діаграмою, представленою на рис. 6, де D і S – відповідно криві попиту і пропозиції, а положення рівноваги (із значеннями $\bar{P}$ і $\bar{X}$) відповідає точці їх перетину Q. У динамічній моделі D має той же сенс, що і в статичній, але ордината кривої S показує обсяг пропозицій в даний період часу залежно від цін, що управляють ринком в попередній момент часу. Ціна в початковий момент часу рівна P_0.

Відповідна точка Q_0 на кривій S дає обсяг пропозиції в період 1. Весь цей запропонований обсяг товару розкуповується при ціні P_1, заданою точкою Q_1 на кривій D з тією ж ординатою (X_1), що і Q_0. У другий період часу рух відбувається спочатку по вертикалі від крапки Q_1 до точки на кривій S, що дає X_2, а потім по горизонталі – до точки Q_2 на кривій D. Остання точка характеризує P_2. Продовження цього процесу і дає графік павутини, показаний на рис. 3.6.

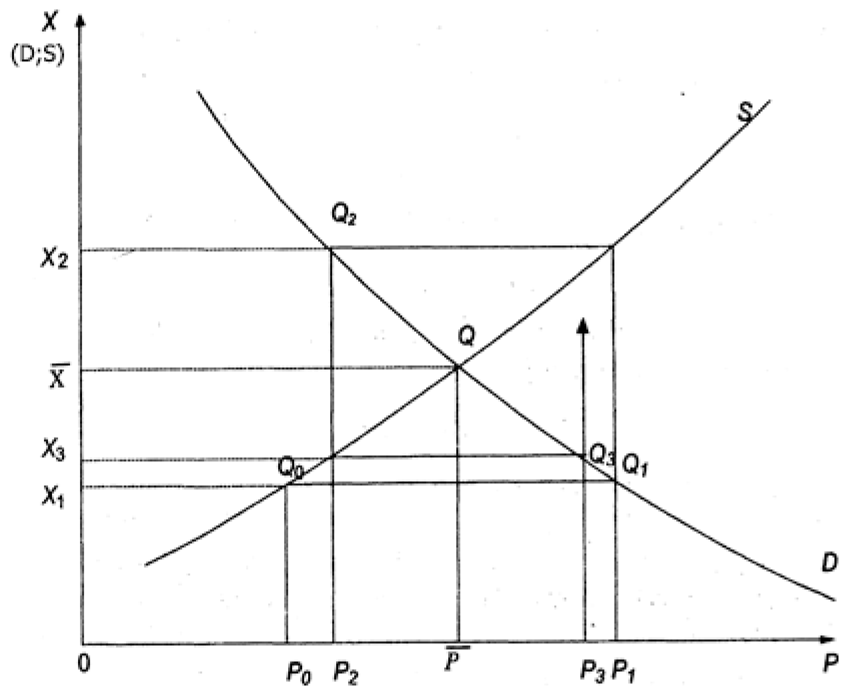


Рис. 3.6. Графічне рішення павутиноподібної моделі попиту і пропозиції.

Ціни і обсяги (купівель – продажів) в послідовні періоду часу є відповідно координатами точок Q_1, $Q_2,\ldots,Q_n$ на кривій попиту D. У даному випадку послідовність точок прагне до Q. При цьому точки по черзі розташовуються на лівій і правій стороні від Q. Отже, і значення ціни P_1 прагнуть до $\bar{P}$, розташовуючись по черзі по обидві сторони від $\bar{P}$. Так само йде справа і з об'ємами покупок-продажів X_t. Припустимо, що D йде вниз, а S – вгору. Тоді інтуїтивно ясно, що рух із затухаючими коливаннями виникне, якщо крива D в точці рівноваги Q опускається до осі абсцис OP крутіше (під великим кутом), ніж крива S. Вибуховий коливальний рух виникаємо у разі, коли крива D менш крута по відношенню до осі OP, ніж S (кут нахилу кривої D до осі OP менше кута нахилу S). При рівних кутах нахилу D і S виникають регулярні коливання, тобто, незгасаючі і невибухові.

Рішення можна одержати алгебраїчно для випадку лінійних функцій попиту і пропозиції:

$$D = \alpha + aP, \qquad S = \beta + bP.$$

Значення рівноваги $\bar{P}$ і $\bar{X}$ будуть задані рівняннями:

$$\bar{X} = a + a\bar{P} = b + b\bar{P},$$

тобто

$$\bar{P} = \frac{a - b}{b - a}, \ \bar{X} = \frac{ba - ab}{b - a} \qquad (3.12)$$

Дискретна динамічна модель задається рівнянням:

$$X_t = a + aP_t = b + b\bar{P}_{t-1.} \qquad (3.13)$$

Шукаємо спочатку рішення, що дає рівновагу. Для цього покладемо $P_t = \bar{P}$ і $X_t = \bar{X}$ Для всіх значень t.

$$\bar{X} = \alpha + a\bar{P} = \beta + b\bar{P}, \qquad (3.14)$$

Набуваємо ті ж значення $\bar{P}$ і $\bar{X}$, що і в (3.12). Отже, якщо в якому-небудь періоді існували ціни і об'єми, що забезпечують рівновагу, то в динамічній моделі (3.13) вони зберігаються і в подальших періодах. Статична рівновага узгоджується з цією моделлю. Віднімемо рівняння (3.14) з (3,13) і покладемо

$$p_t = P_t - \bar{P}, \ x_t = X_t - \bar{X}.$$

Тоді

$$x_t = ap_t = bp_{t-1}. \qquad (3.15)$$

Рівняння (3.15) аналогічні (3.13), за винятком того, що вони описують відхилення від рівнів рівноваги (тепер уже відомо, що такі існують). Обидва ці рівняння є різницевими рівняннями першого порядку. Покладемо $c = b/a$ і підставимо його в рівняння (3.15), так що різницеве рівняння відносне p_t буде: $p_t = cp_{t-1}$. При даному значенні p_0 у момент $t = 0$ рішення легко знаходиться шляхом ітерації:

$$p_t = p_0 c^t, P = \bar{P} + (P_0 - \bar{P})c^t.$$

Об'єми купівель-продажів в кожен період визначаються з рівняння (3.15). Звичайно крива попиту йде вниз ($a < 0$), а крива пропозиції – вгору $b > 0$, тобто $c = b/a < 0$. В цьому випадку покладемо $r = |c| = b/(-a)$, так що r буде позитивне. Тоді $p_t = p_0(k)r^t$ і послідовні значення p_t, при $t = 0, 1, 2,...$ будуть відповідно $p_0, - p_0 r, - p_0 r^2, - p_0 r^3, ...$

p_t приймає по черзі позитивні і негативні значення. Отже, чергуються і знаки p_t, які по черзі розташовуватимуться вище і нижче $\bar{P}$. Існує наступні три можливості:

1) $b > (-a)$ – кут нахилу $S(\text{к}OP)$ більше, ніж кут нахилу D. В цьому випадку $r > 1$, і ряд послідовних значень p_t є нескінченно зростаючим по абсолютній величині. Отже, $p \to \infty$, і має місце вибухове коливання (при чергуванні знаків);

2) $b = (-a)$ – кути нахилу D і S рівні. В цьому випадку $r = 1$, і ряд значень p_t просто складатиметься з чергування p_0 і $(-p_0)$. Тому p_t буде послідовне більше і менше P на одну і ту ж величину, рівну первинній розбіжності $(P_0 - \overline{P})$, тобто матиме місце регулярне коливання (з чергуванням знаків).

3) $b < (-a)$ – кут нахилу D (до OP) більше, ніж S. В цьому випадку $r < 1$, і послідовність p_t, зменшується по абсолютній величині. Значить, $P_t \to \overline{P}$ послідовно зліва і справа, тобто прагне із затухаючими коливаннями до рівня рівноваги.

У випадку (3), чим більше буде a по відношенню до b, тобто чим крутіше D порівняно з S, тим швидше затухатимуть коливання і тим швидше p_t прагнутиме до $\overline{P}$. Початкові збурення також роблять вплив на амплітуду коливання. Чим далі P_0 від $\overline{P}$, тим більше буде розмах коливань і тим більший проміжок часу, необхідний для їх припинення.

Слід зазначити, що випадок (2) з коливаннями, що продовжуються, настільки рідкісний, що його можна вважати майже тривіальним – на базі його не можна побудувати ніякій теорії циклу.

Проведемо аналіз випадку (3). Не дивлячись на можливе заперечення, що полягає у тому, що затухаючі коливання «нереальність», можна запропонувати дуже простий розвиток моделі (3) із затухаючими коливаннями, яке дозволяє представити рух P_t з коливаннями, що продовжуються, в часі. Для цього замість кривих попиту і пропозиції, незмінних в часі, візьмемо криві, які під впливом зовнішніх сил змінюються в часі або регулярно, або циклічно, або випадково, або абияк інакше. Тоді ще до припинення коливань, показаних на рис 6, яке-небудь зрушення в кривій D або S приведе до збурення і коливання з'являться знову. Наприклад, Q_0 могла знаходитися в точці рівноваги або поблизу неї до зрушення вгору кривою D до положення, показаного на рис. 6. Тоді коливання відбуватимуться вищеописаним чином, продовжуючись, скажімо, до точки Q_3, де коливальний рух буде порушений зрушенням вгору кривій S. Виникне, отже, коливальний рух з ще більшою амплітудою, який поступово припиниться до появи якогось нового збурення. Для лінійної моделі можливе алгебраїчне тлумачення у разі паралельного переміщення кривих попиту і пропозиції. Рівняння (3.13) тоді матиме вигляд:

$$X_t = a_t + aP_t = b_t + bP_{t-1},$$

де α_t, β_t характеризують зрушення в момент t = 0, 1, 2, 3, … . Різницевим рівнянням щодо ціни буде:

$$P_t = \frac{b}{a} P_{t-1} + \frac{b_t - a_t}{a} \tag{3.16}$$

Для вирішення рівняння (3.16) необхідно лише визначити різницю зміщень в часі попиту і пропозиції.

У безперервній моделі ціна є функція часу $P(t)$. Попит і пропозиція (потоки в одиницю часу) суть також функції часу. Попередня павутиноподібна модель враховувала запізнювання пропозиції. Цьому грубо відповідатиме передумова про зміну ціни на стороні попиту, а не пропозиції. Тоді одержимо модель, рівносильну моделі з безперервним запізнюванням пропозиції. Це запізнювання має просту показову форму. $D(t)$ залежить від P і dP/dt, а $S(t)$ – тільки від P. Модель діє, як і у попередньому випадку, а саме: у кожен момент ціна P встановлюється так, щоб попит повністю поглинав пропозицію, тобто $X(t)$ і $P(t)$ задовольняли рівнянню:

$$X = D\left(P, \frac{dP}{dt}\right) = S(p)$$

Якщо функції лінійні, то

$$X = a + aP + a_1 \frac{dP}{dt} = b + bP. \qquad (3.17)$$

Покладемо $P(t) = \bar{P}$ і $X(t) = \bar{X}$ для всіх t, тобто для сумісного положення рівноваги обох змінних:

$$\bar{X} = a + a\bar{P} = b + b\bar{P}. \qquad (3.18)$$

Віднімемо (3.18) з (3.17) і покладемо $p = P - \bar{P}$ і $x = X - \bar{X}$. Оскільки $dp / dt = dP / dt,$ то

$$x = ap + a_1 \frac{dp}{dt} bp. \qquad (3.19)$$

Рівняння (3.17) і (3.18) є диференціальними рівняннями першого порядку. Покладемо $c = \frac{b - a}{a_1}$.

Тоді диференціальне рівняння відносно $P(t)$ матиме вигляд:

$$\frac{dp}{dt} = cp\ .$$

Для вирішення помітимо, що $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} lnp\ .$

Тоді $\frac{d}{dt} lnp = c$, тобто, $lnp = const + ct,$

тобто $p = p_0 e^{ct}$, або $P = \bar{P} + (P_0 - \bar{P})e^{ct}.$

У звичайному випадку, якщо $a < 0, a_1 < 0, b > 0$, то $c < 0$ $a < 0$, де $c = \frac{b - a}{a_1}$. Отже, ціна $P(t)$ рухається в часі монотонно до $\bar{P}$ – ціні рівноваги, оскільки різниця $p \to 0$ подібно показовій функції e^{-t}. Менш звичний випадок, коли також $b < 0$. Але якщо тільки $-b < -a$, тобто кут нахилу D до осі OP в площині OPX більше, ніж кут нахилу S, то приходимо до того ж результату, що і в першому випадку. Диференціальне рівняння цієї моделі має менше рішень, ніж відповідне звичайно-різницеве рівняння, приведене вище.

Розглянуті павутиноподібна і безперервна моделі дуже прості і добре відомі. Вони є частково динамічними, оскільки встановлюють співвідношення на ринку тільки одного товару і враховують ціну лише його одного, а не ціни інших товарів і доходи. Проте, вони містять основні формулювання динаміки і дозволяють розкрити деякі найважливіші властивості, загальні для всіх динамічних моделей попиту і пропозиції. Перерахуємо ці особливості.

1. *Модель припускає деякі функціональні співвідношення.*

В даному випадку це – ринковий попит покупців і пропозиція продавців. Кожне з них представляє функцію ціни. Ці функції є по суті побудовами на основі минулого або очікуваного. Ціна або дана покупцям і продавцям ззовні, або передбачається ними. Попит представляється як планована або передбачувана величина покупок, пропозиція – як планована або передбачувана величина продажів, причому всі ці пропозиції приурочуються до початку проміжку часу t. Продавці чекають, що ціна буде такою ж, як і в попередній період P_{t-1} і відповідно припускають продати $S = S(P_{t-1})$. Покупці зважають лише на фактичну ціну і відповідно до цього планують свої покупки в розмірі $D_t(P_t)$.

2. *Форма функції також задана.* Задачу можемо спростити, розглядаючи окремий випадок при певній формі функції (наприклад, лінійної $D = \alpha + aP$), або ж узявши наближення до даної форми функції (наприклад, лінійну апроксимацію в обмеженій області біля точки рівноваги). Це можна здійснити за допомогою розкладання в ряд Тейлора функції попиту з малою різницею $P - \bar{P}$:

$$D(P) = D(\bar{P}) + D(\bar{P})(P - \bar{P}) = a + aP.$$

Прийнята в задачі лінійна (або будь-яка інша) форма повинна бути відповідною і бути або хорошою апроксимацією, або зручним спрощенням. Так, коефіцієнт a, позначений вище, може бути або коефіцієнтом при P в лінійній функції попиту, або нахилом прямої попиту в точці рівноваги. У останньому випадку він може приблизно відображати малі варіації P навколо $\bar{P}$.

3. *Необхідно точно визначити умови, при яких діє модель.* Це припускає перехід від очікуваних і планованих величин на основі минулого до реалізованих фактично. Необхідно точно визначити специфічну природу зв’язків між фактичними значеннями змінних і механізм переходу передбачуваних величин у фактичні. У даній моделі з рухом даного товару на одному ринку відносини, що фактично склалися, характеризуються рівністю покупок і продажів (X_t, за визначенням). Далі, в даному випадку перехід від очікуваних величин до фактичних здійснюється «методом рівноваги», де ціна і є «врівноважуючою» змінною. На початку періоду продавці чекають, що ціна буде P_{t-1} і пропонують для продажу продукцію S_t. Зміна запасів не

передбачається (хоча можливо, що товар є швидкопсувним), так що пропозиція повинна дорівнювати X_t (продажі = купівлям). В процесі встановлення ринкової рівноваги попит, отже, стає рівним пропозиції (= продажам = купівлям), оскільки ціна досягає такого рівня, при якому пропозиція повністю поглинається. Всі економічні очікування реалізуються. Виняток становить лише ціна P_{t-1}, яку чекали продавці. Вона не співпадає з реалізованою ціною P_t, управляючої ринком в даному періоді.

За допомогою дуже невеликої модифікації цієї дискретної моделі можна абсолютно змінити умови її дії, ввівши ступінчасту функцію (метод послідовного порушення рівноваги). У момент $t–1$ виробники випускають кількість товарів, відповідну домінуючій у цей момент ціні P_{t-1}. В кінці періоду цю масу товарів придбавають торговці, так що її можна продати протягом наступного періоду t (як S_t). На початку періоду t на основі всіх відомих на той момент даних торговці встановлюють ціни продажів P_{t-1}. Покупці тоді вирішують, скільки вони куплять за цими цінами D_t. У моделі передбачається, що торговці вгадують завжди правильно і встановлюють ціни на такому рівні, при якому вони можуть збути весь запас товарів:

$S_t = D_t$ = об'єм купівель-продажів.

У моделі необхідно передбачити і варіювання – як запобіжний засіб проти неправильних предугадаваній цін торговцями. Нехай встановлена ними ціна P_t така, що D_t перевершує кількість товарів, що продаються S_t. За наявності торгових запасів попит (рівний купівлям-продажам) можна покрити за рахунок їх зменшення. Пропозиція, що тоді очікувалася S_t буде менше фактичних продажів і різниця доведеться покрити за рахунок запасів. В результаті покупці реалізують свої плани (попит, що припустить = фактичним покупкам), але продавцям доведеться виробити несподівані вилучення запасів. З другого боку, якщо відсутні або малі запаси (наприклад, швидкопсувних товарів), то попит не вдасться задовольнити, і його вимушене скорочення зажадає обмеження споживання або інших подібних заходів. Тоді передбачуваний попит буде урізаний до величини фактичних покупок, і у покупців виникнуть незаплановані заощадження, продавці ж реалізують свої плани. У більшості моделей звичайно приймається, що плани покупок реалізуються (очікуваний попит рівний фактичним закупівлям), а можливий «розрив» компенсується вкладеннями. Таке припущення може бути розумним або зручним, але, як показує приведений приклад, воно, звичайно, є необхідним.

4. *Умова дії моделі, що задовольняється у фактичних ринкових відносинах, записується у вигляді рівняння з відповідною змінною.* В даному випадку цін ціна є такою врівноважуючою змінною. Задача полягає в тому, щоб позбавитися інших змінних (D_t, S_t) і звично фактичного значення (X_t) і зосередити найбільшу увагу на одній (P_t). Решта змінних (наприклад, X_t) можна знайти, коли скоро визначена найважливіша змінна (P_t). Рівняння павутиноподібної моделі є простою формою різницевого рівняння з одноінтервальним запізнюванням (P_t і P_{t-1} явно входять в рівняння). Шукається рішення цього рівняння. У разі рівноваги без запізнювання питання зводиться до знаходження одного або декількох значень P, сумісних з умовами рівноваги.

За наявності запізнювання в звичайно-різницевому рівнянні рішення припускає, що задані і визначені якісь початкові значення або умови, в даному випадку початкова ціна P_0. Рівняння характеризує дію моделі в кожен проміжок часу, але результат впродовж часу, узятого в цілому, залежить від існуючої початкової конфігурації, подібно тому, як опущена в автомат монета приводить його в дію. Модель може «стартувати» лише з якогось початкового положення. Економічно це означає, що зміну ціни в часі можна визначити, лише знаючи початкове порушення рівноваги або відхилення її від положення рівноваги. Той факт, що в даному прикладі вимагається знати лише одне початкове значення, є випадковим. Він є результатом існування тільки одноінтервального запізнювання, того, що відповідне звичайно-різницеве рівняння буде першого порядку. При багатократному або розподіленому запізнюванні звичайно-різницеве рівняння матиме вищий порядок і потрібно буде знати не одне, а декілька початкових значень.

5. Рішення різницевих рівнянь у ряді випадків може бути зведене до методики рішення і аналізу диференціальних рівнянь. Рішення істотно спрощується рекурсивній моделі. Це значить, що якщо задані всі змінні до (t – 1), то модель забезпечує і отримання одного за іншим значень змінних для інтервалу t. У даному випадку при заданих P_{t-1}, виходить спочатку $X_t = S_t$, а потім P_t.

При дослідженні рішень моделей попиту і пропозиції виникають питання, пов’язані з економічною інтерпретацією. Першим завжди виникає наступне питання: чи існує положення рівноваги, сумісне з рівнянням? Відповідь дається підстановкою в рівняння $P_t = \bar{P}$ для всіх t. В даному випадку таке $\bar{P}$ існує, і це є статичний рівень. У інших випадках такого $\bar{P}$ може не існувати. Застосовується і інший штучний прийом: визначаючи $\bar{P}$ прослідити не зміну первинної величини P_t, а її відхилення від положення рівноваги, $p_t = P_t - \bar{P}$. Це має економічний сенс, оскільки інтерес представляє саме відхилення від положення рівноваги. Математично якнайкращий спосіб такого перемикання зводиться до віднімання рівняння, що характеризує точку $\bar{P}$, з рівняння, що виражає P_t.

Модель зі всією очевидністю показує, що статика і динаміка тісно взаємозв’язані. Динамічна модель типу павутинової розглядає рухи навколо положення рівноваги або відхилення від нього. Проте стійке існування положення рівноваги (тобто одного разу досягнуте, воно зберігається постійно), сумісної з моделлю, зовсім не припускає, що за всяким відхиленням слідуватиме повернення в початкове статичне положення. Рух може віддалятися від початкового статичного положення або бути направленим до якогось іншого, відмінного від початкового. І, навпаки, питання про «стійкість» положення рівноваги в статичному випадку повинне і може розглядатися лише з погляду динамічної моделі. Положення рівноваги стійке, якщо початкове обурення породжує поворотний динамічний рух до положення рівноваги, а не убік від нього і не до якого-небудь іншого положення.

Безперервна модель має, загалом, ті ж властивості, відрізняючись головним чином в акцентуванні або в деталях. Функції моделі представляють попит і пропозицію залежно від ціни і швидкості зміни останньої. Припущення і плани покупців і продавців представляються тими, що безперервно пристосовуються в часі до руху цін. Ці очікування, щоб бути сумісними, повинні бути ланками одного ланцюга. Виражаючи співвідношення очікуваних величин попиту і пропозиції модель діє знову-таки по методу наближення до положення рівноваги. Ринкові сили безперервно змінюють ціни так, щоб пропозиція була повністю реалізована. Ціна є змінною, що забезпечує рівновагу, змінюється від одного моменту до іншого для підтримки рівності попиту і пропозиції, будучи загальною для покупок і продажів (потоків у відповідний момент часу). Основна відмінність полягає в інтерпретації моделі з погляду рішень покупців і продавців. У дискретному аналізі одиницею часу був вибраний інтервал ухвалення рішень або перегляду планів, характерною межею була відмінність між очікуваннями (намірами) і їх здійсненням (реалізаціями). Все це загалом зникає в безперервній моделі, оскільки передбачається, що ухвалення рішень, перегляд їх і пристосування до обстановки, що змінилася, відбувається безперервно. Проте багато властивостей дискретної моделі можна ввести і в безперервну, наприклад запізнювання або зміни запасів.

З математичної точки зору безперервна модель веде до диференціального рівняння щодо будь-якої змінної (в даному випадку $P(t)$) а не до звичайно-різницевого.

3.4. Модель ринкової рівноваги Вальраса. Гіпотеза Вальраса та Маршалла

3.4.1. Рівноважна ціна та рівноважний об'єм

Взаємодія попиту й пропозиції породжує рівноважну ціну й рівноважний об'єм або ринкову рівновага. *Ринкова рівновага* – це положення на ринку, при якому попит на товар рівний його пропозиції.

Сумістивши лінії попиту та пропозиції на одному графіку (рис. 3.7), покупцеві й продавцеві вигідно робити угоди лише в зоні, що розташована під кривою попиту (D), але над кривою пропозиції (S). Дана зона демонструє всі можливі на даному ринку ситуації обміну. Це і є ринок одночасно як продавців, так і покупців. Будь-яка точка, що належить даному простору, може виражати угоду купівлі-продажу. Причому всі точки, крім однієї, у цій зоні характеризують неоптимальні умови обміну, тобто такі умови, які більше вигідні для однієї зі сторін торговельної угоди. І лише точка E, яка лежить на перетині попиту та пропозиції, ілюструє ситуацію, максимально вигідну як для продавця, так і для покупця одночасно. Дана точка E на перетинанні попиту та пропозиції називається точкою рівноваги. Точка P_E - ціна, при якій попит та пропозиція перебувають у рівновазі в результаті дії ринкових конкурентних сил. Точка Q_E – величина товарної маси, при якій попит та пропозиція перебувають у рівновазі в результаті дії ринкових конкурентних сил.

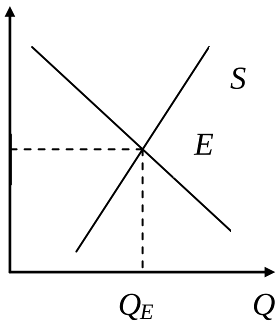


Рис. 3.7. Ринкова рівновага

Рівноважна ціна є одним з механізмів установлення ринкової рівноваги. Рівноважна ціна – це ціна, при якій об'єм попиту дорівнює об'єму пропозиції, інакше кажучи, це єдина ціна, відповідна до умови:

$$P_E = P_D = P_S \tag{3.20}$$

При даній ціні на ринку встановлюється й рівноважна кількість пропонованих на ринку товарів:

$$Q_E = Q_D = Q_S \tag{3.21}$$

Рівноважна ціна виконує найважливіші функції:

- інформаційну – її величина служить орієнтиром для всіх суб'єктів ринку;
- нормуючу – вона нормує розподіл товарів, даючи сигнал споживачеві про те, чи доступний йому даний товар і на який об'єм пропозиції товару він може розраховувати при даному рівні доходу. Одночасно вона впливає на виробника, показуючи, чи зможе він окупити свої витрати або йому слід утриматися від виробництва. Тим самим нормується попит виробника на ресурси;
- стимулюючу – вона змушує виробника розширювати або скорочувати виробництво, міняти технологію й асортименти, щоб витрати «уклалися» у ціну й залишився ще якийсь прибуток.

З вище сказаного неявно передбачалися наступні допущення:

- на ринку окремого товару рівновага існує;
- рівновага існує тільки при єдиній комбінації значень ціни й об'єму.

Однак можна привести приклади, у яких ці допущення порушуються:

- об'єм пропозиції й об'єм попиту не рівні між собою при будь-якому ненегативному значенні ціни;
- існує більш ніж одна комбінація ціна-об'єм, при якому досягається рівновага на ринку.

Розглянемо існування рівноваги на ринку. Воно можливо, якщо є одна або більш невід’ємних цін, при яких об'єми попиту та пропозиції рівні й невід’ємні. При графічному зображенні це означає, що рівновага буде існувати, якщо лінія попиту та пропозиції мають, принаймні, одну загальну точку.

На рис.3.8 зображено дві ситуації, у яких лінії попиту та пропозиції не мають загальних точок. На рис. 3.8.а об'єм пропозиції перевищує об'єм попиту при будь-якій невід’ємній ціні. На рис.3.8.б ціна попиту менше ціни пропозиції при будь-якому невід’ємному об'ємі випуску, а сума грошей, яку споживачі готові заплатити за даний товар недостатня, щоб компенсувати витрати на його виробництво. Виробництво такого товару технологічно цілком можливо, але економічно недоцільно.

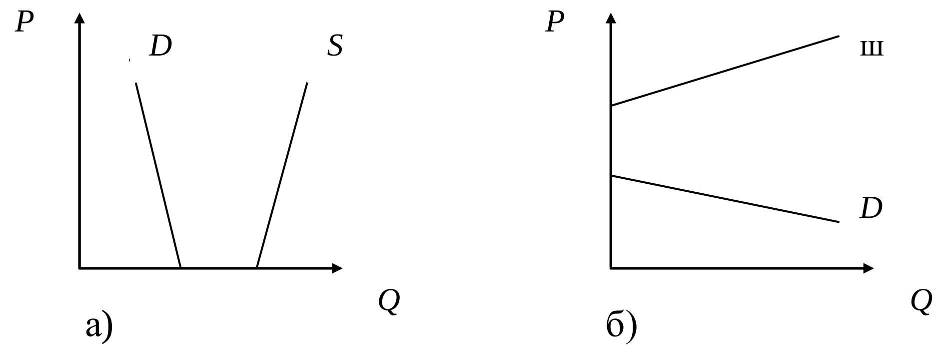


Рис. 3.8
а) Об'єм пропозиції перевищує об'єм попиту при будь-якій невід’ємній ціні;
б) ціна пропозиції перевищує ціну попиту при будь-якому невід’ємному об'ємі.

На рис. 3.9.а лінія попиту має нормальний вигляд, тобто характерний невід’ємний нахил. У той же час лінія пропозиції міняє знак нахилу при росту ціни, що приводить до існування двох положень рівноваги – у точках E_1 і E_2.

На рис. 3.9.б представлений випадок, коли криві попиту та пропозиції збігаються у відрізку *NM*. Рівновага на ринку досягається при будь-якій ціні в діапазоні від P_1 до P_2 і рівноважному об'ємі Q_E. Зміна ціни в зазначеному діапазоні недостатньо чутлива, щоб викликати в споживачів зміну об'єму попиту, а у виробників – зміну об'єму пропозиції.

На рис. 3.9.в криві попиту та пропозиції також мають загальний відрізок: у цьому випадку рівновага встановлюється при будь-якому об'ємі в інтервалі від Q_1 до Q_2 і рівноважній ціні P_E. Зміна об'єму в цьому інтервалі не викликає зміни ціни попиту й рівної їй ціни пропозиції.

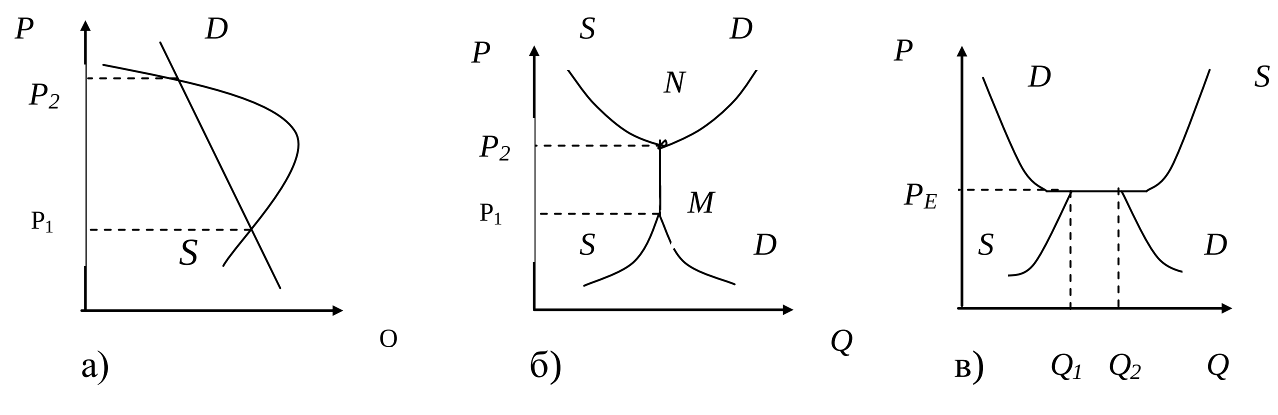


Рис. 3.9. Неєдиність рівноваги: а) лінія попиту та пропозиції мають дві загальні точки; б) лінія попиту та пропозиції мають загальний відрізок; в) рівновага встановлюється при будь-якому об'ємі в інтервалі від Q_1 до Q_2

3.4.2 Стійкість рівноваги

Стійка рівновага досягається тоді, коли відхилення цін попиту від цін пропозиції поступово погашається, прямуючи до рівноважної ціни P_E, а об'єм пропозиції адаптується до об'єму попиту. У точці рівноваги ціна попиту збігається із ціною пропозиції ($P_D = P_S$) і об'єм попиту дорівнює об'єму пропозиції ($Q_D = Q_S$). Рівновага може бути стійкою і нестійкою, локальною і глобальною. Стійка рівновага, у свою чергу, буває абсолютною і відносною. Відкладемо на осі абсцис час *T*, а на осі ординат ціну *P*. Коли відхилення від рівноважної ціни (наприклад, P_1,P_2) поступово вирівнюються на рівні P_E, на ринку складається стійка рівновага. Абсолютна рівновага має місце у випадку встановлення єдиної рівноважної ціни (рис. 3.10 а), відносне – при невеликих відхиленнях від неї (рис.3.10 б).

Якщо рівновага досягається лише в певних межах коливання ціни, то говорять про локальну стійкість. Але при цьому рис. а) стійкість досягається лише в інтервалі від P_2 до P_3. Якщо ж рівновага встановлюється при будь-яких відхиленнях цін від рівноважної ціни рис. 3.4 б), то стійкість носить глобальний характер.

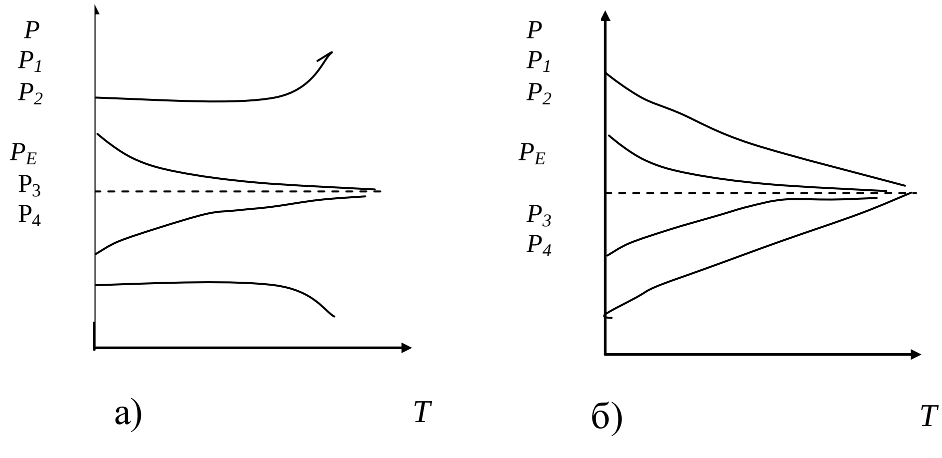


Рис. 3.10. а) Локальна стійкість рівноваги; б) глобальна стійкість рівноваги

Аналіз ринкової рівноваги з погляду його стійкості вимагає певного представлення про той механізм, за допомогою якого встановлюється рівновага на ринку. Існує два основних підходи до дослідження встановлення рівноважної ціни: Л. Вальраса й А. Маршалла..

3.4.3. Модель ринкової рівноваги за А. Маршаллом

Головним у підході А.Маршалла є різниця цін P_1 і P_2. А. Маршалл виходить із того, що продавці, насамперед, реагують на різницю ціни попиту й ціни пропозиції. Чим більше цей розрив, тим більше стимулів для росту (або скорочення) пропозиції. Збільшення (або скорочення) об'єму пропозиції зменшує цю різницю й тим самим сприяє досягненню рівноважної ціни. Згідно з версією А.Маршалла, домінуючою силою у формуванні ринкової кон'юнктури завжди є підприємці. Ціль Маршалла − покласти в основу теорії цінності закон попиту та пропозиції, що він і називав «фундаментальною симетрією». Це має на увазі залежність між витратами виробництва й виробленою кількістю блага, джерелом якої є «закон непропорційних продуктивностей», що є необхідною умовою узгодженості теорії Маршалла.

Рівновага по А. Маршаллу (рис. 3.11) опирається на різницю цін попиту та пропозиції, викликану відхиленням фактичного об'єму пропозиції від рівноважного.

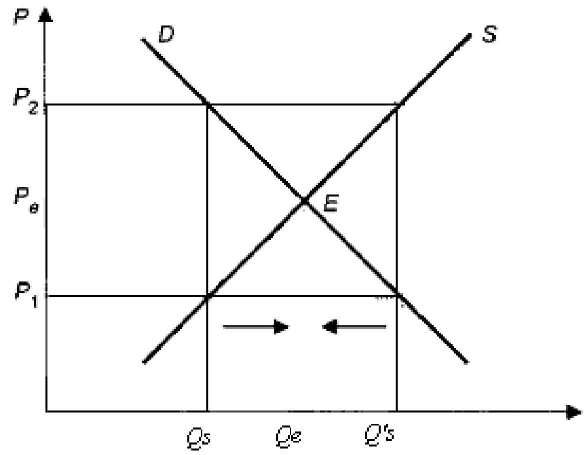


Рис. 3.11. Рівновага по А. Маршаллу

Якщо об'єм пропозиції Q_s менше рівноважного Q_c ($Q_s < Q_e$), ціна попиту P_2 виявиться вище ціни пропозиції P_1 ($P_2 > P_1$). Це спонукає продавців збільшити об'єм пропозиції товарів на ринку. Напроти, при перевищенні рівноважного об'єму пропозиції ($Q'_s > Q_e$) ціна попиту P_1 буде менше ціни пропозиції P_2 ($P_1 < P_2$), що змусить продавців зменшити пропозицію товарів до об'єму, при якому він урівноважується з об'ємом попиту й буде рівний Q_e. При рівноважному об'ємі ціна попиту збігається із ціною пропозиції $P_1 = P_2 = P_e$.

Отже, якщо ринкова ціна не дорівнює рівноважній, то дії покупців і продавців рухають її в напрямку до рівноважної. Якщо ж об'єм пропозиції не дорівнює рівноважному, то, орієнтуючись на ціну попиту, продавці збільшують або зменшують об'єми пропозиції до рівноважного рівня, при якому встановлюється й рівноважна ціна.

Функція (модель) попиту й пропозиції А. Маршалла має вигляд:

$$P_d = f(Q); P_S = f(Q), \qquad (3.22)$$

а умовою рівноваги є рівність $P_d = P_s$.

3.4.4. Модель ринкової рівноваги за Л. Вальрасом

Запропонована Л. Вальрасом модель за формою є макроекономічною, однак по змісту заснована на мікроекономічних показниках окремих виробників, що характеризують поведінку на ринку, і споживачів товарів. Модель Вальраса заснована на використанні рівноважних цін, які забезпечують рівність попиту та пропозиції. Допустимо, що в результаті дії якихось ринкових сил ціна відхилилася від рівноважного рівня убік підвищення. Така ситуація приводить до виникнення надлишку товару, тобто при певному рівні цін частина продавців не зможе продати свій товар. Найбільш діючим способом виходу з такого положення для продавців буде зниження ціни, що збільшить кількість продажів, оскільки за зменшеною ціною покупці пред'являть більший попит. Зрозуміло, що процес зниження цін і паралельного росту продажів буде тривати доти, поки не встановиться рівноважна ціна, по якій продавці зможуть реалізувати весь пропонований товар, і в них зникне стимул до подальшого зниження цін. При протилежній ситуації, тобто коли відхилення цін від їхнього рівноважного рівня відбувається убік зниження, і в результаті об'єм попиту перевищує об'єм пропозиції, і утворюється дефіцит товару, по більш низькій ціні всім споживачам товару не вистачить, продавці скористаються ситуацією й будуть його продавати за ціною більш високою. Так буде тривати доти, поки не буде досягнута рівновага між попитом та пропозицією.

Головним у підході Л. Вальраса є різниця в об'ємах попиту та пропозиції (рис. 3.12). Якщо ринкова ціна $P_1 > P_E$, то величина пропозиції більше величини попиту $Q_S^1 > Q_D^1$, на ринку – надлишок пропозиції (при ціні P_1), надлишок дорівнює $Q_S^1 - Q_D^1$. У результаті конкуренції продавців відбувається зниження ціни P_E і надлишок зникає. Якщо ринкова ціна $P_2 > P_E$, то величина попиту більше величини пропозиції $Q_D^2 > Q_S^2$, на ринку надлишок попиту (при ціні P_2), тобто дефіцит рівний $Q_D^2 - Q_S^2$. У результаті конкуренції покупців відбувається підвищення ціни до P_E і дефіцит зникає.

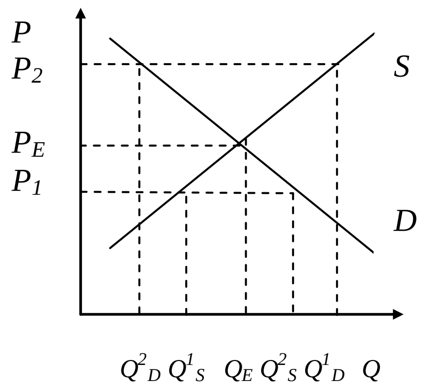


Рис. 3.12 Ринкова рівновага по Л.Вальрасу

Функція (модель) попиту та пропозиції Л. Вальраса має вигляд:

$$Q_d=f(P), Q_s=f(P), \tag{3.23}$$

а умовою рівноваги є рівність $Q_d=Q_s$.

Звичайно, модель Л. Вальраса дещо ідеалізувала дійсність. У ній передбачаэться, що споживачі знають свої функції попиту та пропозиції, технічні коефіцієнти й багато інших даних. Модель загальної рівноваги виходить зі здыйсненої конкуренції, що припускає ідеальну мобільність усіх ресурсів, повну поінформованість учасників, абсолютизує стан рівноваги, тоді як у реальній дійсності набагато частіше зустрічаються диспропорції й дисбаланси. До того ж вона статична, тому що не враховує науково-технічного прогресу, факторів невизначеності в економіці, інституціональних умов розвитку.

Більше того, Л. Вальрас ішов від моделі до реальної дійсності, а не навпаки. Однак цю модель можна спрощувати й ускладнювати шляхом включення нових змінних, які можуть задаватися як ендогенно, так і екзогенно, відбивати як економічні процеси і явища, так і інституціональні умови функціонування ринкової економіки.

Економічні процеси протікають у часі. Моделі, що їх описують, діляться на два класи: динамічні й статичні. Динамічними звичайно називають моделі, що безпосередньо враховують фактор часу. У цих моделях усі змінні є функціями часу, які в силу цього самі стають важливою змінною.

Позначивши час через t, можена представити процес досягнення рівноваги по Л. Вальрасу рівнянням

$$\frac{dP}{dt}=h\left[Q^D(P)-Q^S(P)\right]=h\Delta Q^D(P), h>0\,, \tag{2.24}$$

де $\Delta Q^D(P)$ – надлишок попиту при ціні P. Очевидно, що при $\Delta Q^D(P)>0$ ринкова ціна підвищується, $\Delta Q^D(P)<0$ падає, при $\Delta Q^D(P)=0$ умова рівноваги по Л. Вальрасу виконується.

Таким чином, коливання цін (механізм Л. Вальраса) сприяють установленню рівноваги в короткому інтервалі. Справа в тому, що, коли товари вже зроблені в певній кількості, підігнати об’єм пропозиції до розмірів попиту можна лише зміною цін.

3.4.5. Причини й механізми зміщень ринкової рівноваги

Зміни в ринковій рівновазі відбуваються внаслідок змін нецінових факторів.

Реакція ринку на зміну попиту D наведено на рис. 3.13.а. Припустимо, що об'єм пропозиції зростає. Виходить, зростає попит на даний товар. Дефіцит $Q_{E1}Q_{E2}$ продукту Q при ціні P_{E1} підвищить ціну до $P_{E2,}$ у результаті чого встановиться нова рівновага в точці E_2

Реакція ринку на зміну пропозиції наведено рис.3.13.б. Припустимо, що в результаті застосування нових технологій скоротилися витрати виробництва у виробників і як наслідок, зросла пропозиція товару Q на ринку. Надлишок E_1 в пропозиції товару Q при ціні P_{E1} викличе падіння ціни до P_{E2}. В результаті встановиться нова рівновага в точці E_2. Розміри зміни ціни при зміні галузевого попиту (пропозиції) залежать від величини зміщення лінії D (S) і нахилу графіків D і S.

При одночасному русі попиту та пропозиції (якщо зростає дохід споживачів і скорочуються витрати у виробників) можливо ціна рівноваги PE і не зміниться, але рівноважний об'єм продажів неодмінно збільшиться (рис. 3.13.в).

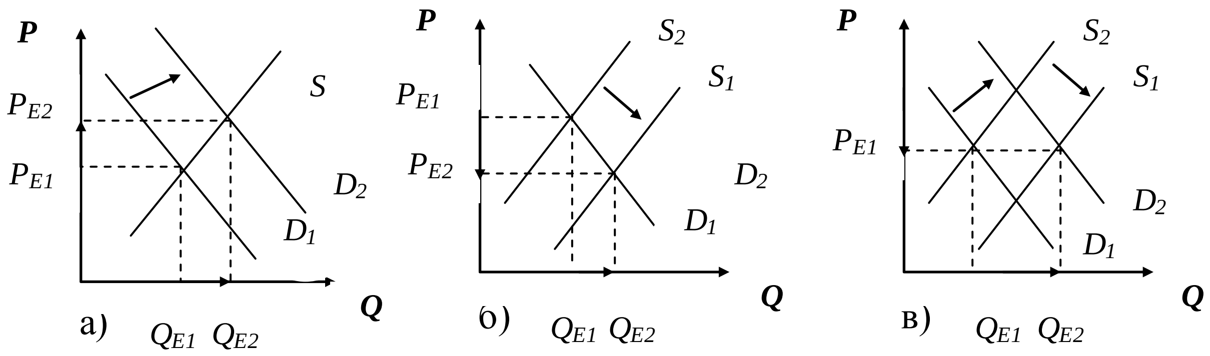


Рис. 3.13. Ринкова рівновага а) при зростанні попиту; б) при зростанні пропозиції; в) при одночасній і односпрямованій зміні попиту та пропозиції.

3.4.6. Рівновага в короткостроковому й довгостроковому періодах

Розглянемо статистичні моделі ринкової рівноваги, у яких фактор часу не враховується явно. Можна проілюструвати динамічні процеси методом порівняльної статики, при якому зміщення показане відповідним переміщенням лінії попиту або пропозиції.

Таке зміщення показано на рис. 3.14, де лінії попиту та пропозиції мають нормальний (відповідно від'ємний і додатний нахил). На рис. 3.14.а зміщення лінії попиту приводить до зростання рівноважної ціни з P_1 до P_2 при одночасному збільшенні рівноважних об'ємів з Q_1 до Q_2. На рис. 3.14.б зміщення лінії пропозиції вліво веде до підвищення рівноважної ціни при одночасному скороченні рівноважного об'єму.

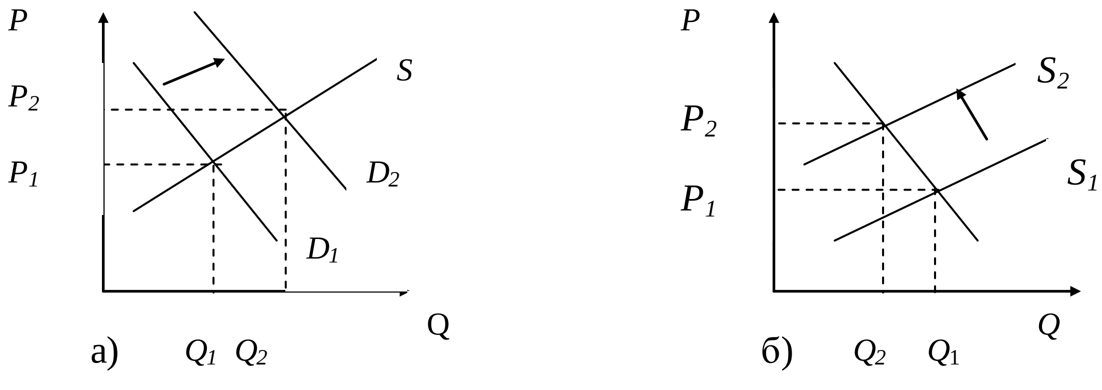


Рис. 3.14. Зміщення рівноваги

Протягом короткого періоду незмінними вважаються виробничі потужності підприємства, але їх використання, а виходить, і об'єм продукції можуть змінюватися за рахунок зміни об'єму застосування змінних факторів. Ці зміни, однак, не можуть виходити за межі технічної виробничої потужності.

У короткостроковому періоді крива пропозиції також складається із двох сегментів (рис. 3.15). Перший, що має додатний нахил, що обмежений по осі абсцис точкою, що відповідає виробничій потужності Q_K. Друга ділянка кривої пропозиції представлена вертикальним відрізком, що вказує на неможливість вийти в умовах короткого періоду за межі, обмежені наявною виробничою потужністю. Саме до цієї границі рівноважний об'єм і ціна визначаються перетином кривих попиту та пропозиції, а за її межами, як і в миттєвому періоді, ціна визначається попитом, тоді як об'єм пропозиції – розміром виробничих потужностей.

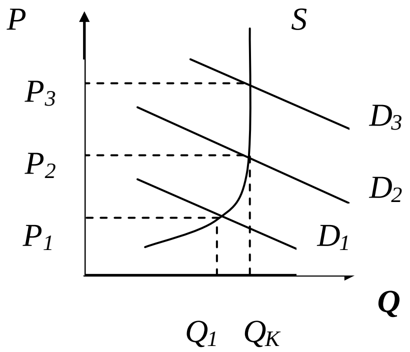


Рис 3.15. Рівновага в короткостроковому періоді

У довготривалому періоді виробник може не тільки варіювати інтенсивність використання виробничих потужностей, але й змінювати їхні розміри, а виходить, і масштаби виробництва. На рис. 3.16 представлено три ситуації, можливі в довготривалому періоді. У першому випадку, коли зміна масштабу виробництва відбувається при незмінних витратах, зростання рівноважного об'єму відбувається без зміни рівноважної ціни. У другому, коли зміна масштабу виробництва відбувається при зростаючих витратах, зростання рівноважного об'єму супроводжується зниженням рівноважної ціни.

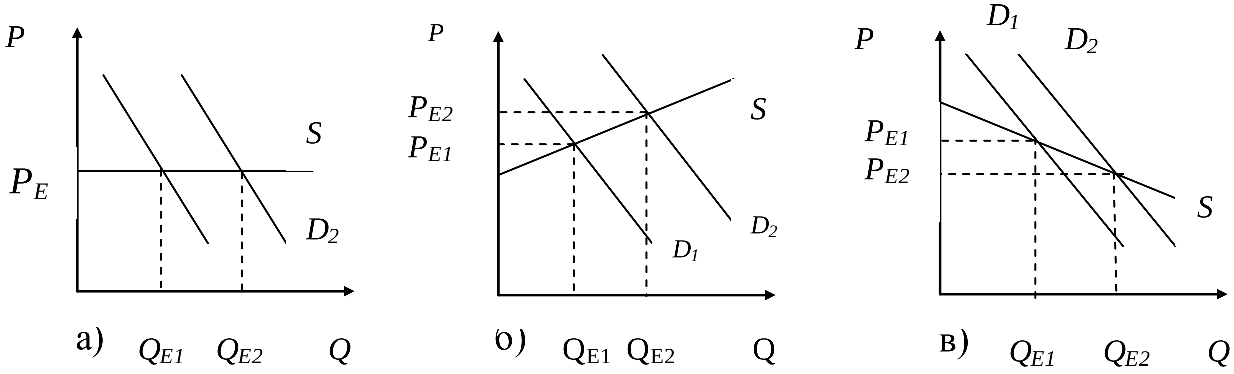


Рис. 3.16. Рівновага в довготривалому періоді. а) при незмінних витратах; б) при зростаючих витратах; в) при витратах, що знижуються

На рис. 3.17 показано адаптацію пропозиції до попиту, що змінився, у довготривалому періоді. Тут S_0 – крива пропозиції, а D_0 – крива попиту в короткостроковому періоді. Як видно, попит та пропозиція збалансована при ціні P_0 на рівні повного використання виробничої потужності Q_K.

Наприклад, що попит раптово зріс і представленій тепер кривій D_1, що лежить правіше кривої D_0, оскільки резерв потужності відсутній, нова рівновага досягається винятково за рахунок підвищення ціни до P_1 при збереженні колишнього об'єму продажів Q_K. У довготривалому періоді масштаб виробництва збільшується за рахунок введення нових потужностей і крива пропозиції зміщається в положення S_1. Нова рівновага досягається при ціні P_2, більш вищій, ніж P_0, але нижче, ніж P_1, і обсязі виробництва Q_2, більшому, ніж Q_K.

Відмінність ситуацій рівноваги, представлених на рис. 3.18. важливо при оцінці рівнів цін на різних ринках.

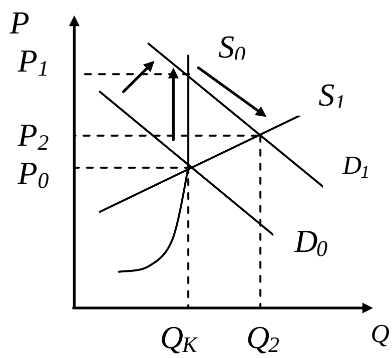


Рис. 3.18. Перехід від короткострокового довготривалого періоду

Таким чином, для аналізу стійкості ринкової рівноваги можуть застосовуватися різні динамічні моделі, причому ці моделі приводять до різних умов стійкості.

Контрольні запитання:

1. Пояснити модель Харрода-Домара.
2. Проаналізувати варіанти траєкторій основних макроекономічних показників в моделі Харрода-Домара за різних умов темпу споживання.
3. У чому полягає сутність коефіцієнта капіталомісткості приросту прибутку?
4. Які основні параметри динамічної моделі В. Леонтьєва?
5. Які основні положення теореми Фробеніуса-Перрона?
6. Рокрийте сутність повного приросту капіталомісткості.

7. Які умови дії лінійних моделей попиту та пропозиції?
8. У чому полягає модель ринкової рівноваги Вальраса?
9. У чому полягає модель ринкової рівноваги Маршалла?
10. Розкрийте сутність рівноваги в короткостроковому й довгостроковому періодах

3.5. Завдання для самостійної роботи

Приклади розв'язку задач

Задача 3.1. Прибуток двох фірм, що конкурують на ринку одного товару, відповідно дорівнюють: $\Pi_i (X_1, X_2) = [9 - (X_1 + X_2)]X_i$, $i = 1, 2$;

ціна товару: $p(X_1, X_2) = 15 - (X_1 + X_{2\,2})$,

де X_1, X_2 – обсяги випуску продукції фірми.

• Визначити оптимальний обсяг випуску продукції кожної фірми.

• Якою буде стратегія першої фірми відносно стратегії другої фірми: X$=\frac{9-X_1}{3/2}$?

• Показати яким буде спільний випуск за умови об'єднання цих фірм (утворення монополії).

• Визначити, який із варіантів буде привабливішим для споживача продукції та чому?

Розв'язання. Обчислюємо випуск продукції першої фірми, що максимізує її прибуток:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial X_1} = 9 - 2X_1 - X_2 - X_1\left(\frac{dX_2}{dX_1}\right) = 9 - 2X_1 - X_2 - X_1\left(-\frac{1}{3/2}\right) = 9 - X_2 - \frac{4}{3}X_1 = 0.$$

Звідси стратегія першої фірми

$$X_1^* = \frac{9 - X_2}{4/3},$$

а оптимальний обсяг випуску продукції знайдемо, розв'язавши рівняння

$$X_1^* = \frac{9 - \frac{9 - X_1^*}{3/2}}{4/3} = \frac{9 + 2X_1^*}{4}.$$

Отже, оптимальний випуск першої фірми $X_1^* = \frac{9}{2}$, відповідно другої фірми – $X_2^* = 3$.

За таких стратегій перша фірма отримає прибуток $\Pi_1^* = \frac{27}{4}$, а друга – $\Pi_2^* = \frac{9}{2}$, ціна $p = \frac{15}{2}$, а загальний випуск $X = \frac{15}{2}$.

У разі утворення монополії спільний прибуток фірм $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ можна подати у вигляді функції від спільного випуску $X = X_1 + X_2$:

$\Pi(X) = [9 - X]X.$

Знайдемо спільний випуск фірм, що максимізує спільний прибуток

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 9 - 2X = 0.$$

Звідси оптимальний випуск $X^* = \frac{9}{2}$, ціна $p = \frac{21}{2}$, прибуток $П^* = \frac{81}{4}$.

Як бачимо, перший варіант кращий для споживачів, оскільки ціна продукції менша, а випуск більший. Другий варіант кращий для фірм, оскільки вони мають більший прибуток.

Задача 3.2. Переваги споживача задано функцією корисності

$$U(x_1, x_2) = 20\sqrt{x_1}, x_2,$$

Його дохід становить M = 400 грош. од., ціни товарів відповідно – p_1, p_2. Побудувати функцію попиту споживача.

Розв'язання:

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2\ \lambda) = U(x_1, x_2) - \lambda\,(p_1x_1 + p_2x_2 - M)$$

Або

$$L(x_1, x_2\ \lambda) = 20\sqrt{x_1}, x_2 - \lambda\,(p_1x_1 + p_2x_2 - 400).$$

Необхідні умови локального екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 10\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 10\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = p_1x_1 + p_2x_2 - 400 = 0.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10\dfrac{\sqrt{x_2}}{p_1\sqrt{x_1}} = \lambda, \\ 10\dfrac{\sqrt{x_1}}{p_2\sqrt{x_2}} = \lambda, \\ \mathrm{p}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{p}_2\mathrm{x}_2 = 400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{p_1}{p_2} = x_1, \\ 10\dfrac{\sqrt{x_1}}{p_2\sqrt{x_2}} = \lambda, \\ \mathrm{p}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{p}_2\dfrac{p_1}{p_2}\mathrm{x}_1 = 400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{p_1}{p_2} = x_1, \\ p_1x_1 = 200, \\ 10\dfrac{\sqrt{x_1}}{p_2\sqrt{x_2}} = \lambda; \end{cases}$$

Оскільки $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} < 0, \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} < 0$, то точка екстремуму буде точкою максимуму, а отже, отримаємо функцію попиту споживача:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{200}{p_1}, \\ x_2^* = \dfrac{200}{p_2} \end{cases}$$

Задачі для самостійного розв'язку

Задача 3.3.

Динаміку доходу підприємства на початок дослідження становить 2500 грошових одиниць, початкова динаміка споживання встановлена на рівні 500 грошових одиниць, основні фонди фірми характеризуються незмінним коефіцієнтом прирістної капіталоємності рівним 2. Споживання фірми піддається опису експоненційної залежності із фіксованим темпом 0,45.

- Реалізуючи модель Харрода-Домара визначте:
  - динаміку доходу,
  - функції споживання та інвестицій.
- Розв'язок представте графічно, із обгрунтуванням отриманих результатів.
- Визначте часові точки екстремуму динаміки доходу, та точки в яких динаміка рівна 0.
- Як себе поведе динаміка доходу, якщо темп споживання зменшиться до 0,4.

Задача 3.4.

Динаміку доходу підприємства на початок дослідження становить 3200 грошових одиниць, початкова динаміка споживання встановлена на рівні 800 грошових одиниць, основні фонди фірми характеризуються незмінним коефіцієнтом приростної капіталоємності рівним 4. Споживання фірми піддається опису експоненційної залежності із фіксованим темпом 0,1875.
• Реалізуючи модель Харрода-Домара визначте: динаміку інвестування для забезпечення вказаного споживання і доходу.
• Розв'язок представте графічно, із обгрунтуванням отриманих результатів.
• На прикладі моделі дайте відповідь на питання: як впливають на динаміку доходу його початкові значення та початкові значення рівня споживання.

3.6. Тести

1. У моделі Харрода-Домара чистий експорт
   a) Дорівнює нулю
   b) Від'ємна величина
   c) Залежить від швидкості зростання доходу
   d) Залежить від обсягу інвестицій

2. У моделі Харрода-Домара зростання норми накопичення
   a) пропорційно збільшує обсяги державних витрат
   b) зменшує темпи зростання обсягів інвестицій
   c) ні на що не впливає
   d) пропорційно збільшує темпи приросту доходу

3. У моделі Харрода-Домара
   a) норма накопичення постійна
   b) норма накопичення змінна
   c) норма накопичення дорівнює приросту капіталоємності

4. У динамічній моделі Леонтьєва кожна галузь в балансі розглядається
   a) як споживач
   b) як виробник
   c) як споживач і як виробник

5. Точка перетину кривої попиту і кривої пропозиції має назву
   a) точкою нульових витрат
   b) точкою рівноваги
   c) точкою максимальних заощаджень
   d) точкою максимальних витрат

6. Лінійна динамічна модель Харрода-Домара описує:
   a) динаміку споживання
   b) динаміку інвестицій
   c) динаміку доходу

d) динаміку приросту капіталовіддачі

7. Припущеннями лінійної динамічної моделі Харрода-Домара не є твердження:
   a) інвестиційна затримка рівна нулю, інвестиції миттєво переходять у приріст капіталу
   b) вибуття капіталу відсутнє
   c) коефіцієнт капіталоємності приросту доходу є змінною величиною
   d) затрати праці незмінні в часі

8. Для лінійної динамічної моделі Харрода-Домара у випадку нульового споживання, максимальним темпом приросту доходу є:
   a) $Y(t) = Y(0)e^{(1/B)t}$
   b) *Y(0)*
   c) *1/B*
   d) *B*
   e) *ln(Y(0))*

9. Для лінійної динамічної моделі Харрода-Домара у випадку усталеного споживання, ріст норми накопичення призводить до:
   a) збільшення темпу приросту доходу
   b) зменшення темпу приросту доходу
   c) не впливає на темп приросту доходу
   d) збільшення рівня споживання

10. Для лінійної динамічної моделі Харрода-Домара у випадку експоненційного росту споживання оптимальним темпом її росту буде:
    a) відношення норми накопичення в початковий момент часу до коефіцієнта капіталоємності приросту доходу
    b) добутку норми накопичення в початковий момент часу до коефіцієнта капіталоємності приросту доходу
    c) відношення коефіцієнта капіталоємності приросту доходу до норми накопичення в початковий момент часу
    d) суми норми накопичення в початковий момент часу та коефіцієнта капіталоємності приросту доходу

11. Розрахуйте норму накопичення в початковий момент часу якщо початкова динаміка доходу рівна 1000, початкова величина споживання 200:
    a) 1
    b) 0,9
    c) 1,2
    d) 0,8

12. Дохід розрахований лінійною динамічною моделлю Харрода-Домара у випадку експоненційного росту споживання із темпом меншим за відношення норми накопичення в початковий момент часу до коефіцієнта капіталоємності приросту доходу:
   a) буде постійно зростати у часі
   b) буде постійно спадати у часі
   c) залишиться незмінним

Відповіді до тестових завдань:

№ теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
відповідь	a	b	a	c	b	c	c	a	a	a	d	a

РОЗДІЛ 4. РІВНОВАГА ТА НЕРІВНОВАГА, СТІЙКІСТЬ ТА НЕСТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІКИ

РОЗДІЛ 4. РІВНОВАГА ТА НЕРІВНОВАГА, СТІЙКІСТЬ ТА НЕСТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІКИ

4.1. Рівновага та стійкість динамічних систем

Економічна динаміка, що вивчає поведінку складних динамічних систем в економіці, не може обійти увагою такий важливий напрям, як стійкість і рівновага систем. Теорія стійкості зобов'язана своїм виникненням працям А. Пуанкаре і А. М. Ляпунова. У сучасних теоріях рівновазі в соціально-економічних системах надається особливе значення, пов'язане з поняттям справедливості, відсутністю соціальних потрясінь і т.д. В цьому розділі ми розглянемо спочатку деякі інтуїтивні обґрунтування понять «рівновага» і «стійкість», а потім їх формальне означення.

Всяка динамічна система у будь-який момент часу характеризується своїм станом і напрямом руху. Система скоює рух або під впливом внутрішніх спонукальних причин, або в результаті впливу на неї зовнішнього середовища. Принципово різними є причини, що обумовлюють її рух, як в початковий момент часу, так і в подальші моменти.

Із станом системи пов'язане поняття рівноваги. Під *рівновагою* розуміється стан, що зберігається скільки завгодно довго за відсутності зовнішніх дій. Таким чином, *рівноважний стан системи* – це такий її стан, з якого система не вийде під дією тільки внутрішніх причин (іншими словами, немає таких внутрішніх сил, які б прагнули і були в змозі змінити стан рівноваги). Очевидний приклад – рівновага на ринку деякого товару, рівновага політичних сил в суспільстві. Напрям руху системи задається нульовим вектором, тобто рух відсутній.

Якщо система не перебуває в стані рівноваги, то вона вчиняє ненульовий рух під впливом внутрішніх причин. При цьому можливо, звичайно, і зовнішній вплив на систему, проте першопричиною зміни її стану є саме внутрішні умови її існування. Наприклад, система, що випускає на ринок нову продукцію, не знаходиться в стані рівноваги, оскільки всі умови її існування і зусилля якраз і направлені на зміну існуючого положення. А ось виробничо-економічна система, продукція якої знаходиться у стадії насиченого попиту, швидше знаходиться в стані рівноваги, оскільки об'єм випуску її не змінюється до тих пір, поки не буде ухвалене відповідне рішення. В даному випадку ухвалення рішення про випуск нової продукції або модифікації старої є по відношенню у виробничій системі зовнішнім елементом, що генерується управляючою системою.

Під впливом зовнішніх дій рівновага може бути порушене, і система перейде в інший стан. В цьому випадку в дію вступає друга характеристика динамічної системи – поведінка. Залежно від будови системи, властивостей її і становлячи її елементів поведінка може істотно розрізнятися. Принципово різними виявляються два варіанти розвитку подій після того, як на систему зробило деякий збурюючий вплив зовнішнє середовище: повернення в початковий стан (може бути при нескінченному періоді розгляду) і подальше видалення від початкового стану. Ці можливості описуються поняттям стійкості.

Під *стійкістю* розуміється здатність системи повертатися в рівноважний стан у випадку, якщо вона була виведена з нього. У такому разі стан рівноваги називається стійким. Другому варіанту відповідає нестійкість стану і системи.

Таким чином, в заданий момент часу система може знаходитися в стані рівноваги, і у такому разі часто говорять про рівноважну систему, або знаходитися в стані нерівноваги (не рівноважна система). У свою чергу рівновага може бути стійкою і нестійкою і, відповідно, розділяють стійкі і нестійкі системи.

Поняття стійкості застосовується також і по відношенню до руху системи, а саме – як властивість системи мало відхилятися від заданої траєкторії руху при малих збурюючих впливах з боку зовнішнього середовища. У цьому значенні можна говорити про динамічну стійкість.

Нарешті, поведінка системи також може бути схильна до деяких змін в часі. Цій можливості відповідає поняття стаціонарності. *Стаціонарність* є властивістю поведінки, процесів, що відбуваються в системі, і означає, що характер (закон) функціонування системи не змінюється з часом. Так, функціонування виробничо-економічної системи можна вважати стаціонарним, якщо технології виробництва не змінюються протягом даного періоду. В цьому випадку систему можна описати за допомогою економіко-статистичних моделей. Якщо ж відбувається зміна технологій виробництва, то закон функціонування міняється, наприклад, змінюються величини нормативної продуктивності ресурсів, і попередній закон функціонування виявляється недійсним. У перехідний період систему вже не можна описати за допомогою статистичних моделей, а слід привертати могутніші математичні інструменти. По аналогії з поняттями рівноваги і стійкості системи часто говорять про стаціонарні і нестаціонарні системи. У стаціонарній системі всі процеси, що відбуваються, стаціонарні, а в нестаціонарній існує хоча б один нестаціонарний процес.

Отже, слід розрізняти, до якої характеристики системи відносяться різні поняття. *Рівновага є властивістю стану, стійкість – властивістю системи, а стаціонарність – властивістю процесів, що відбуваються в системі.*

У літературі часто згадується поняття «стабільність». При цьому в різних джерелах під цим поняттям маються на увазі різні властивості. Слід помітити, що в іноземній літературі використовується єдиний термін – *stability* – стійкість, стабільність. Тому існування двох різних термінів в російськомовній (україномовної) літературі пояснюється швидше витратами перекладу, ніж дійсним розмежуванням цих понять. Виправданням існування цього терміну є те, що він, як правило, використовується як якісна, а не кількісна характеристика процесів, що відбуваються в системі. *Стабільність* означає поступальний, еволюційний шлях розвитку системи на противагу революційному, вибуховому.

Складність і відвертість економічних систем пояснюють той факт, що рівновага і стійкість на практиці зустрічаються достатньо рідко. Проте ці поняття мають важливе значення для економічної теорії і дозволяють досліджувати внутрішні властивості систем.

Слід також помітити, що нелінійність в економічних системах породжує ускладнені варіанти рівноваги і стійкості, про що піде мова в подальших розділах.

4.2. Формальне представлення стійкості динамічних систем.

4.2.1. Поняття стаціонарної точки

Розглянемо автономні системи, тобто системи, праві частини яких не залежать від часу.

Розглянемо систему двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2); \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t=0) = \varphi_1(0), \\ x_2(t=0) = \varphi_2(0). \end{cases} \tag{4.1}$$

Стаціонарними (*особливими* або *нерухливими*) називаються точки, положення яких на фазовому портреті із часом не змінюється. Їх визначають, дорівнюючи праві частини системи рівнянь (4.1) нулю, тобто:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \rightarrow \overline{x_1}, \overline{x_2}.$$

Для випадку $n = 1$:

$$\dot{x}_1 = f(x_1); \; f(x_1) = 0 \rightarrow \overline{x_1}.$$

Для випадку $n = 3$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3); \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \to \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}. \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

Навіщо потрібні знання про нерухливі точки? Коли ми моделюємо соціально-економічний об'єкт, то розумно очікувати хоча б якісного збігу математичної моделі з поведінкою реальної системи, зокрема, – щоб обидві системи мали однакове число стаціонарних точок (їх називають також станами рівноваги) і щоб поведінка реальної й модельної систем збігалася в околиці положень рівноваги.

Для цієї мети досить знати фазовий портрет відповідної математичної моделі, тип стаціонарних точок (стійкість, нестійкість).

4.2.2. Стійкість стаціонарних точок

Фазовий портрет в околиці довільної стаціонарної точки належить одному й тільки одному із трьох типів точок: асимптотично стійкої, нейтрально стійкої або нестійкої.

Визначення. Стаціонарна точка $\overline{x}$ системи $\dot{x} = f(x)$ називається **стійкою** (або **аттрактором**), якщо для будь-якої околиці *N* точки $\overline{x}$ існує деяка менша околиця цієї точки *N′∈ N,* така, що будь-яка траєкторія, що проходить через *N′*, залишається в *N* при зростанні *t*.

Визначення. Стаціонарна точка $\overline{x}$ системи $\dot{x} = f(x)$ називається асимптотично **стійкою**, якщо вона стійка, і крім того існує така околиця *N* точки $\overline{x}$, де будь-яка траєкторія, що проходить через *N*, прагне до $\overline{x}$ при $t \to \infty$.

Будь-яка асимптотично стійка стаціонарна точка є стійкою. Але не кожна стійка стаціонарна точка є асимптотично стійкою.

Визначення. Стаціонарна точка $\overline{x}$ системи $\dot{x} = f(x)$, яка стійка, але не асимптотично стійка, називається **нейтрально стійкою**.

Визначення. Стаціонарна точка $\overline{x}$ системи $\dot{x} = f(x)$, яка не є стійкою, називається **нестійкою**.

Це значить, що існує така околиця *N* стаціонарної точки, що для будь-якої околиці *N′∈ N* є принаймні одна траєкторія, яка проходить через *N′* і не залишається в *N*.

4.3 Методи дослідження лінійних систем

4.3.1. Перший метод Ляпунова

Перший метод Ляпунова дозволяє визначити, не вирішуючи систему рівнянь, тип стаціонарної точки і її стійкість.

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} dx_1 / dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ dx_2 / dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t=0) = \varphi_1, \\ x_2(t=0) = \varphi_2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Розв'язок системи рівнянь (8.1) представимо у вигляді:

$$x_1 = c_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = c_2 e^{\lambda t} \tag{4.3}$$

Підставимо (4.3) у вихідну систему рівнянь (4.2) і одержимо:

$$c_1\lambda e^{\lambda t}=a_{11}c_1e^{\lambda t}+a_{12}c_2e^{\lambda t},\quad c_2\lambda e^{\lambda t}=a_{21}c_1e^{\lambda t}+a_{22}c_2e^{\lambda t}$$

або після скорочення

$$c_1\lambda=a_{11}c+a_{12}c_2,\qquad c_2\lambda=a_{21}c_1+a_{22}c_2. \tag{4.4}$$

У матричній формі запис рівнянь (4.4) виглядає в такий спосіб:

$$(A-\lambda E)C=0. \tag{4.5}$$

Для того щоб система (4.5) мала нетривіальні розв'язки $C\neq 0$, необхідно, щоб

$$\det|A-\lambda E|=0$$

тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{4.6}$$

Власні числа λ_i матриці A визначають із умови (4.6). Розкриваючи детермінант, одержимо квадратичне рівняння відносно λ, називане **характеристичним**:

$$\lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0. \tag{4.7}$$

Отже, вихідна система (4.2) допускає розв'язку:

$$x_1=c_{11}e^{\lambda_1 t}+c_{12}e^{\lambda_2 t},\quad x_2=c_{21}e^{\lambda_1 t}+c_{22}e^{\lambda_2 t}.$$

За значенням власних чисел матриці A можна визначити тип точки й тип її стійкості. Існують три можливості поведінки власних чисел, що відповідають трьом видам стійкості стаціонарних точок:

1) якщо λ_1,λ_2 мають дійсні негативні частини, то стаціонарна точка асимптотично стійка;
2) якщо хоча б один з коренів λ_i має позитивну дійсну частину, то стаціонарна точка нестійка;
3) якщо корені чисто уявні або один з коренів має нульову дійсну частину, а дійсна частина іншого – від'ємна, то стаціонарна точка нейтрально стійка.

4.3.2. Класифікація стаціонарних точок на площині

Для визначення типу стаціонарної точки розглянемо рівняння (4.7) більш докладно. Уведемо позначення:

$$a_{11}+a_{22}=T,\quad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\Delta.$$

Тоді квадратичне рівняння (4.7) прийме вид

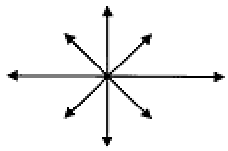
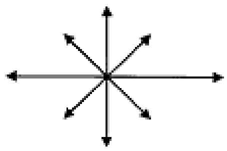
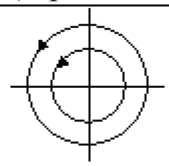
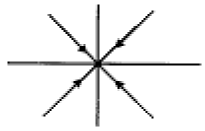
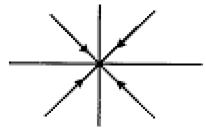
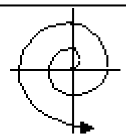
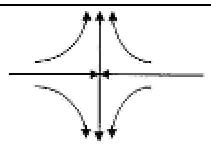
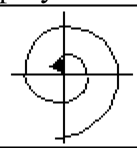
$$\lambda^2-\lambda T+\Delta=0 \tag{4.8}$$

і буде мати коріння

$$\lambda_{1,2}=\frac{T\pm\sqrt{T^2-4\Delta T}}{2}.$$

Аналіз корінь рівняння (4.8) дозволяє класифікувати стаціонарні точки залежно від значень коефіцієнтів матриці A, не прибігаючи до розв'язку системи рівнянь. Класифікація стаціонарних точок представлена в таблиці 4.1.

Табл. 4.1

	Дискримінант рівняння		
	$T^2-4\Delta>0$	$T^2-4\Delta=0$	$T^2-4\Delta<0$
Параметри рівняння	*Δ > 0, T > 0*	*T > 0*	*Δ > 0, T = 0*
Тип стійкості стаціонарної точки	Нестійкий вузол	Нестійкий вузол	Центр (коріння чисто уявне)
Фазовий портрет			
Параметри рівняння	*Δ > 0, T < 0*	*T < 0*	*T > 0*
Тип стійкості стаціонарної точки	Стійкий вузол	Стійкий вузол	Нестійкий фокус
Фазовий портрет			
Параметри рівняння	*Δ < 0*		*T < 0*
Тип стійкості стаціонарної точки	сідло		стійкий фокус
Фазовий портрет			

Отже, якщо коріння характеристичного рівняння (4.8):

а) дійсні й одного знака, то стаціонарна точка – вузол, причому

$\lambda_1<0,\quad \lambda_2<0$ – *стійкий вузол,*

$\lambda_1>0,\quad \lambda_2>0$ – *нестійкий вузол,*

б) дійсні й різних знаків, то стаціонарна точка – сідло;

в) комплексно-сполучені, то стаціонарна точка – фокус, причому

$\lambda_{1,2}=a\pm bi,\ a<0$ – *стійкий фокус,*

$\lambda_{1,2}=a\pm bi,\ a>0$ – *нестійкий фокус,*

г) чисто уявні, то стаціонарна точка – центр.

4.3.3. Приклад аналізу процесу з використанням першого методу Ляпунова

Математична модель процесу має вигляд:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\tau}(x_0-x)-k_1x,\qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\tau}y+k_1x+k_2y.$$

Визначимо стаціонарний стан процесу й тип цього стану. Стаціонарну точку знаходимо з умови:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(x_0 - x) - k_1 x = 0 \\ -\frac{1}{\tau} y + k_1 x + k_2 y = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{x} = \frac{x_0}{1+k_1\tau}, \quad \bar{y} = \frac{k_1 \tau x_0}{(1+k_1\tau)(1-k_2\tau)}.$$

Запишемо характеристичне рівняння для моделі процесу й визначимо його коріння:

$$\begin{vmatrix} \left[-\left(\frac{1}{\tau}+k_1\right)-\lambda\right] & 0 \\ k_1 & \left[-\left(\frac{1}{\tau}-k_2\right)-\lambda\right] \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = -\left(\frac{1}{\tau}+k_1\right),\ \lambda_2 = \left(k_2 - \frac{1}{\tau}\right).$$

λ_1 завжди негативно;

знак λ_2 залежить від співвідношення k_2 *та* $1/\tau$ в такий спосіб:

при $k_2 < 1/\tau,\ \lambda_2 < 0$ стаціонарний стан є стійким вузлом;

при $k_2 > 1/\tau,\ \lambda_2 > 0$ стаціонарний стан є седлом і є нестійким.

Нестійкість процесів такого типу пророкує метод функцій Ляпунова.

4.3.4. Визначення типу стаціонарних точок для систем *n*-го порядку

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь *n-го* порядку. У якісній теорії диференціальних рівнянь формулюються наступні теореми:

Теорема 1. Якщо все коріння характеристичного рівняння системи $\det|A - \lambda E| = 0$ мало від'ємні дійсні частини, то стаціонарна точка асимптотично стійка.

Теорема 2. Якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння системи має додатну дійсну частину, то стаціонарна точка нестійка по Ляпунову.

Теорема 3. Якщо характеристичне рівняння системи має просте коріння з нульовою дійсною частиною або просте чисто уявне коріння, або простий нульовий корінь і просте чисто уявне коріння, а все інше коріння (якщо вони є) мають від'ємні дійсні частини, то стаціонарна точка стійка по Ляпунову (нейтральна стійкість).

Легко бачити, що розглянуті раніше можливості поведінки коренів характеристичного рівняння для випадку *n* = 2 є частковими випадками даних теорем.

4.3.5. Дослідження стійкості лінійних динамічних систем. Критерії Раусса-Гурвіца та Льенара-Шипара.

Для дослідження стійкості лінійної динамічної системи можна скористатися двома методами: прямим і непрямим. Прямий метод передбачає одержання перехідного процесу експериментальним шляхом, що вимагає великих витрат часу на проведення експерименту. Непрямі методи дозволяють судити про стійкість системи без експериментального визначення перехідних процесів. Такими методами є алгебраїчні критерії стійкості Гурвіца й Льєнара-Шипара.

Критерій Гурвіца: для стійкості лінійної динамічної системи необхідно й достатньо, щоб при додатних коефіцієнтах рівняння системи головні діагональні мінори визначника Гурвіца були додатні.
Визначник Гурвіца має вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Правило складання визначника Гурвіца:

- по головній діагоналі записуємо елементи, починаючи з a_{n-1} і закінчуючи a_0;
- нижче від головної діагоналі записуємо елементи з послідовно зростаючими індексами;
- вище від головної діагоналі записуємо елементи з послідовно спадаючими індексами;
- якщо число індексу перевищує n або менше нуля, у матриці ставляться нулі.

Характеристичне рівняння $\det|A-\lambda E|=0$ для системи *n-го* порядку має вигляд:

$$\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \ldots + A_{n-2}\lambda^2 + A_{n-1}\lambda + A_n = 0. \qquad (4.9)$$

З коефіцієнтів характеристичного рівняння (4.9) складемо матрицю, називану матрицею Раусса-Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_5 & A_4 & A_3 & A_2 & A_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_n & A_{n-1} & A_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

Для того щоб усе коріння характеристичного багаточлена (4.9) мали строго відє’мні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці Раусса-Гурвіца, складеної з коефіцієнтів характеристичного багаточлена, були строго додатні:

$$\Delta_1 > 0,\ \ \Delta_2 > 0, \ldots,\ \ \Delta_n > 0.$$

Критерій Раусса-Гурвіца є критерієм асимптотичної стійкості для лінійних систем.

Критерій Льенара-Шипара: якщо всі коефіцієнти характеристичного рівняння лінійної динамічної системи додатні, то для її стійкості достатньо додатності всіх головних мінорів визначника Гурвіца з парними або з непарними індексами.

Розглянемо випадок $n = 2$. Для багаточлена (4.9) побудуємо матрицю Раусса-Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & 1 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

Критерій Раусса-Гурвіца визначає умови, відповідні до стійкого фокуса або стійкого вузла:

$$\begin{cases} \Delta_1 = A_1 > 0 \\ \Delta_2 = A_1 A_2 > 0 \end{cases} \rightarrow \quad T < 0,\ \Delta > 0.$$

Розглянемо випадок $n = 3$. Характеристичний багаточлен має вигляд:

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0. \qquad (4.10)$$

Запишемо матрицю Раусса-Гурвіца

$$\begin{pmatrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

Тоді умови критерію асимптотичної стійкості виглядають у такий спосіб:

$$\Delta_1 = A_1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 1 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix} = A_1 A_2 - A_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} = A_3 \begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ A_3 & A_2 \end{vmatrix} = A_3\Delta_2 > 0 \Rightarrow A_3 > 0$$

або

$$A_1 A_2 - A_3 > 0,\ \ A_1 > 0,\ \ A_3 > 0. \qquad (4.11)$$

Задача.

Динамічна система описується рівнянням:

5y''' + 9y'' + 7y' + 6y = 9x' + 4x

Визначити стійкість динамічної системи за допомогою алгебраїчних критерієв Гурвіца й Льєнара-Шипара.

Розв'язок:

1. Під стійкістю системи розуміють властивість системи вертатися до первісного стану після припинення зовнішнього збурювання. Математично це описується однорідним диференціальним рівнянням:

5y''' + 9y'' + 7y' + 6y = 0

або в загальному виді:

$a_n y''' + a_{n-1} y'' + a_{n-2} y' + a_{n-3} y = 0,$

де $a_n = 5;$ $a_{n-1} = 9;$ $a_{n-2} = 7;$ $a_{n-3} = 6.$

2. Складаємо визначник Гурвіца:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}, n = 3.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

3. Обчислюємо головні мінори визначника Гурвіца:

$$\Delta_1 = 9 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = 33 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix} = 6*(-1)^{3+3}*\Delta_2 = 198 > 0$$

4. Динамічна система стійка, оскільки коефіцієнти диференціального рівняння додатні й визначники, складені як головні мінори матриці Гурвіца, теж додатні.
5. Визначимо стійкість системи за допомогою критерію Льєнара-Шипара. Система стійка, оскільки коефіцієнти диференціального рівняння додатні, й визначники з непарними індексами, складені як головні мінори матриці Гурвіца, теж додатні.

4.3.6. Детальний аналіз типу стаціонарної точки для системи 3-го порядку

Для більш детального аналізу стайіонарної точки для випадку n = 3 необхідно знати знак вираження:

$$\Omega = -A_1^2 A_2^2 + 4A_1^3 A_3 + 4A_2^3 - 18A_1 A_2 A_3 + 27A_3^2.$$

Залежно від знака Ω характеристичне рівняння (4.10) має або три дійсні корені, або один дійсний і два комплексні сполучені (див. таблицю 4.2).

Табл. 4.2

Умови	Тип коренів характеристичного багаточлена	Тип стаціонарної точки
$\Omega < 0,\ A_1 > 0,\ A_3 < 0,$ $A_1 A_2 - A_3 < 0$	усі корені додатні	нестійкий вузол
$\Omega < 0,\ A_1 > 0,\ A_3 > 0,$ $A_1 A_2 - A_3 > 0$	усі корені від'ємні; умови співпадають з умовами асимптотичної стійкості (4.11)	стійкий вузол

$\Omega > 0,\ \ A_1 > 0,\ \ A_3 < 0,$ $A_1A_2 - A_3 < 0$	Дійсні частини коренів додатні	нестійкий фокус
$\Omega > 0,\ \ A_1 > 0,\ \ A_3 > 0,$ $A_1A_2 - A_3 > 0$	Дійсні частини коренів від'ємні; умови співпадають з умовами асимптотичної стійкості (4.11)	стійкий фокус
$\Omega < 0,\ \ A_1 > 0,\ \ A_3 > 0,$ $A_1A_2 - A_3 < 0$	корені дійсні, але їх знаки не співпадають	сідло
$\Omega < 0,\ \ A_1 > 0,\ \ A_3 < 0,$ $A_1A_2 - A_3 > 0$		
$\Omega < 0,\ \ A_1 < 0,\ \ A_3 < 0,$		
$\Omega > 0,\ \ A_1 \geq 0,\ \ A_3 > 0,$ $A_1A_2 - A_3 < 0$	Один з коренів дійсний, а два інших – комплексно сполучені, причому знаки їх дійсних частин протилежні знаку дійсного кореня	сідло-фокус
$\Omega > 0,\ \ A_1 \leq 0,\ \ A_3 > 0$		
$\Omega > 0,\ \ A_1 > 0,\ \ A_3 < 0,$ $A_1A_2 - A_3 > 0$		
$\Omega > 0,\ \ A_1 < 0,\ \ A_3 < 0$		

Стаціонарна точка сідло-фокус (див. рис.4.1) має сепаратрисну поверхню, на якій фазові траєкторії розташовані так само, як в околиці фокуса на фазовій площині двовимірних систем. Причому, для сепаратрисної площини стан стійкий, для інших площин – нестійкий.

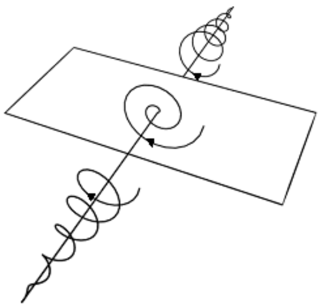


Рис. 4.1. Стаціонарна точка сідло-фокус та її сепаратрисна поверхня.

4.3.7. Приклад аналізу динамічної системи з використанням критерію Раусса-Гурвіца

Математична модель динамічної системи має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau}(x_0 - x) - k_1 x,\ \ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau} y + k_1 x - k_2 y,\ \ \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\tau} z + k_2 y - k_3 z.$$

Визначимо стаціонарний стан системи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(x_0 - x) - k_1 x = 0 \\ -\dfrac{1}{\tau} y + k_1 x - k_2 y = 0 \\ -\dfrac{1}{\tau} z + k_2 y - k_3 z = 0 \end{cases} \to \quad \bar{x} = \frac{x^0}{1+\tau k_1}, \bar{y} = \frac{\tau k_1 x_0}{(1+\tau k_1)(1+\tau k_2)}, \quad \bar{z} = \frac{\tau^2 k_1 k_2 x_0}{(1+\tau k_1)(1+\tau k_2)(1+\tau k_3)}.$$

Побудуємо характеристичний багаточлен $\det|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{pmatrix} -\left(\dfrac{1}{\tau}+k_1\right)-\lambda & 0 & 0 \\ k_1 & -\left(\dfrac{1}{\tau}+k_2\right)-\lambda & 0 \\ 0 & k_2 & -\left(\dfrac{1}{\tau}+k_3\right)-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{1}{\tau}+k_1\right)+\lambda\right]*\left[\left(\frac{1}{\tau}+k_2\right)+\lambda\right]*\left[\left(\frac{1}{\tau}+k_3\right)+\lambda\right] = 0.$$

Визначимо власні числа матриці A:

$$\lambda_1 = -\left(\frac{1}{\tau}+k_1\right), \lambda_2 = -\left(\frac{1}{\tau}+k_2\right), \lambda_3 = -\left(\frac{1}{\tau}+k_3\right).$$

Очевидно, що стаціонарний стан є стійким вузлом. Підтвердимо його асимптотичну стійкість за допомогою критерію Раусса-Гурвіца.

Уведемо позначення:

$$a = \frac{1}{\tau}+k_1, \; b = \frac{1}{\tau}+k_2, \; c = \frac{1}{\tau}+k_3.$$

Тоді характеристичний багаточлен приймає вид:

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0,$$

де $\quad A_1 = a+b+c, \; A_2 = ab+ac+bc, \; A_3 = abc.$

Оскільки $\quad a > 0, b > 0, c > 0,$ то

$$A_1 > 0, \; A_3 > 0, \; A_1A_2 - A_3 = (a+b+c)(ab+ac+bc) - abc > 0.$$

Таким чином, умова Раусса-Гурвіца виконується, і розглянута система є асимптотично стійкою.

4.4. **Нестійкість і нелінійність динамічних систем**

Протягом останніх десятиліть спостерігається підвищення інтересу до нелінійних динамічних моделей у всіх наукових областях (математика, хімія, фізика і т. д.). Відкриття того, що прості нелінійні моделі можуть демонструвати складну і хаотичну динаміку, підштовхнуло також деяких економістів до того, щоб зацікавитися цією областю. Фактично в літературі є багато прикладів нелінійних економічних моделей, які демонструють хаотичну динаміку. Проте в літературі немає стандартного визначення хаосу. Тому можна лише перерахувати типові характерні риси цього явища.

Нелінійність. Якщо процес лінійний, він не може бути хаотичним.

Детермінізм. У основі явища хаосу лежать детерміновані, а не вірогідності правила, яким слідує кожен майбутній стан системи.

Чутливість до початкових умов. Мала зміна в початковому стані системи може провести до радикально відмінної поведінки і іншого кінцевого стану. Ця властивість має на увазі, що дві траєкторії, що починаються в двох різних, але близьких точках, з часом розбігаються експоненціально. Ця критична залежність від початкових умов, і те, що експериментальні початкові умови ніколи не відомі повністю, роблять ці системи внутрішньо непередбачуваними. *Стійка нерегулярність.* Прихований порядок, що включає велику або нескінченну кількість нестійких періодичних проявів, характеризує хаотичне явище. Цей прихований порядок формує інфраструктуру системи: хаотичний (дивний) аттрактор. Динаміка в хаотичному аттракторі ергодична. Це має на увазі, що протягом своєї еволюції система опиняється в невеликій околиці кожної точки на кожній з нестійких періодичних траєкторій, що знаходяться в межах хаотичного аттрактора. Довгостроковий прогноз, але не управління, здебільшого неможливе. Через чутливість до початкових умов, які можуть бути відомі тільки з кінцевим ступенем точності. Не дивлячись на труднощі управління хаотичними системами, багато дослідників займаються пошуком методів і засобів управління ними. Управління нелінійними системами може насправді виявитися легше, ніж управління лінійними, оскільки можливо лише за допомогою невеликого поштовху викликати велику зміну в системі (за рахунок чутливості до початкових умов). Фактично, керовані хаотичні системи володіють перевагою гнучкості: будь-яка з безлічі різних траєкторій може бути стабілізована невеликим управлінням, і можливо перемкнути систему з однієї періодичної траєкторії на іншу за допомогою дуже невеликої корекції її параметрів, без різкої зміни конфігурації системи або створення додаткових перешкод. Отже, це багатство можливої поведінки (нескінченних нестійких траєкторій) в хаотичних системах може бути використане для розширення уявлень про динамічну в системі таким чином, який неможливий, якщо еволюція системи не є хаотичний. Це означає (якщо ми хочемо розглянути економічні додатки хаосу), що невеликі зміни в економічній політиці можуть мати великі наслідки для суспільного добробуту. Отже, і в економіці управління динамічною періодичною системою є важливою задачею завдяки природі економічних коефіцієнтів, що змінюється в часі. Зокрема, управління динамічними системами і переклад їх від хаотичного і непередбачуваного до періодичної і передбаченої поведінки є інтенсивною областю дослідження протягом останніх років.

Розглянемо засоби виявлення стабілізації нестійких періодичних траєкторій (НПТ).

Траєкторії, які граничать з нестійкою періодичною траєкторією, розходяться від неї і є нестійкими. Через нестійкість динамічної системи їх нелегко знайти. Хоча періодичні орбіти відкривають підхід до розуміння хаотичної динаміки, довелося докласти багато зусиль, щоб розробити методи виявлення цих траєкторій, не дивлячись на їх нестабільність як в тимчасових рядах, так і в системах, що вивчаються, і відрізнити їх від стохастичної поведінки.

Аналіз повторень.

У економіці є численні роботи — як теоретичні, так і емпіричні — щодо виявлення складної або хаотичної поведінки. Беручи до уваги, що стандартні методи, наприклад спектральний аналіз або функції автокореляції, не можуть розрізнити, чи згенерував часовий ряд детермінованим або стохастичним механізмом, цих складних засоби виявляється недосить, щоб забезпечувати надійні результати. Фактично, тест вимірювання кореляції, метричний підхід, розроблений Grassberqer і Procaccia, широко використовується в природних науках, і звично разом із зв'язаними процедурами, наприклад обчисленням показника Ляпунова, але його застосування до економічних даних було проблематичним. Реалізація цих алгоритмів пов'язана із специфічними вимогами як, наприклад, розширена безліч даних, яка не завжди доступна в експерименті, стаціонарність досліджуваних даних, тоді як багато тимчасових рядів нелінійне або не поводиться як гауссови.

Таким чином, застосування метричного підходу до порівняно невеликих зашумленних даних, які типові в економіці, дуже сумнівно. Щоб уникнути цих труднощів метричного підходу, був розроблений новий метод для виявлення детермінованого хаосу, названий *топологічним* (Mindlinetal., 1990, 1991;Tufillaroetal.).

Топологічний метод має декілька важливих переваг перед метричним методом:

1. Може застосовуватися до порівняно невеликих набором даних, які, наприклад, типові в економіці і фінансах.

2. Стійкий до шуму.

3. Оскільки топологічний аналіз підтримує тимчасове впорядкування даних, він здатний забезпечити додаткову інформацію про основну систему, що генерує хаотичну поведінку.

4. Можлива реконструкція дивного аттрактора.

Крім того, виявлення інваріантів топологічним методом дозволяє визначати моделі, що пояснюють дані, а послідовна топологічна класифікація хаотичних множин є перспективним кроком в розробці моделей, пророчих. Доведення нелінійних систем.

Аналіз повторень є прикладом топологічного методу і може представити корисну методологію виявлення нестаціонарної хаотичної поведінки і біфукації в тимчасових рядах.

Спочатку цей метод використовувався для виявлення повернень (циклів) і нестаціонарності тимчасових рядів, потім аналіз повторень був застосований до дослідження хаотичних систем, оскільки ј повернення в поведінці — одна з найважливіших характеристик Р. хаотичних систем.

За допомогою *графіка повторень* (ГП) можливо знайти кореляцію в даних, яку неможливо знайти в початковому тимчасовому ряду. Цей метод не вимагає яких-небудь припущень про стаціонарність тимчасового ряду, припущень про основні рівняння руху і розподіленої поведінки. Він достатньо нечутливий до шуму, а графік повторень для динамічної системи зберігає інваріанти її динаміки. Він виявляється особливо корисним для випадків, в яких обмежена доступність даних і може бути порівнянний по ефективності з класичними методами аналізу хаотичних даних, особливо через свою здатність знаходити біфукацию. Аналіз повторень особливо придатний для дослідження економічних тимчасових рядів, для яких характерні шуми, недолік даних, і які представляють результати діяльності багатовимірних систем.

Графік повторень - це двовимірне представлення траєкторії. Він формується двовимірною $M \times M$ матрицею, де М- кількість входжень векторів $Y(i)$, одержаних при затримці вхідного сигналу. У матриці величина елементу з координатами (i, j)-це евклідова відстань між векторамии $Y(i)$ і $Y(j)$. У цій матриці горизонтальна вісь представляє індекс часу $Y(i)$, а вертикальна — зрушення за часоми $Y(j)$. У елементі масиву (i, j) точка проставляється, якщо $Y(i)$ достатньо близько до $Y(j)$; близькість між $Y(i)$ и $Y(j)$ виражається співвідношенням

$$\| Y(i) - Y(j) \| \leq d$$

де d — задане число.

Є два типи графіків повторень: пороговий (також відомий як матриця повторення) і безпороговий. Порогові графіки ГП симетричні щодо основної діагоналі. Крапки в цьому масиві розфарбовані згідно відстані між векторами. Звичайно, темний колір показує великі відстані, а світлий — короткі. Якщо текстура в межах такого блоку гомогенна, можна прийняти гіпотезу про стаціонарність даного сигналу протягом відповідного періоду часу; нестаціонарні системи викликають зміни в розподілі точок повторення на графіку, які відображаються світлішими областями.

Аналіз повторень використовується також для виявлення нестійких періодичних траєкторій в хаотичних тимчасових рядах. Bradley і Mantilla (2001) наводять приклад додатку ГП для послідовного аналізу хаотичного тимчасового ряду. Образи, що повторюються, формують блоки в графіку. Ці блоки відображають інтервали часу, коли траєкторія рухається уподовж або біля відповідного НПТ.

Метод графіка повторень не знайшов значної популярності, оскільки його графічний результат нелегко інтерпретувати. Zbilut J. P. запропонував метод статистичної квантифікації ГП — квантфікаційний аналіз повторень (КАП). Він визначає міру діагональних сегментів в графіках повторення. Ці заходи є показниками повторення, детермінізму, середньої довжини діагональних структур, ентропії і напряму.

Для того, щоб знайти НПТ, ми повинні створити графік повторень для траєкторії хаотичного аттрактора, проаналізувати структуру повторень, використати також квантифікацію ГП і інформацію, витягнуту з повторень, щоб індексуватися траєкторію і знайти відповідні значення змінних стану.

Крім того, ГП представляє корисний спосіб порівняння двох хаотичних систем. Наприклад, якщо ГП для двох траєкторій мають різну побудову блоків, вони не можуть відповідати одній і тій же системі, навпаки, ідентична блокова структура ГП визначає ідентичну динаміку. Аналіз повторень є корисним засобом для визначення нестійких періодичних траєкторій в хаотичних тимчасових рядах даних і біфуркаціоної поведінки, а також для встановлення виду динаміки системи. Розглянемо основи *теорії Флоке (Floquet)*.

Для виявлення нестійкої і хаотичної поведінки систем, для яких відома нелінійна динамічна модель, використовується теорія Флоке, що розширює теорію стійкості Ляпунова.

Управління системою, періодичною в часі, є складною задачею через природу коефіцієнтів, що змінюється в часі. Основна проблема полягає у тому, що власні значення періодичної матриці, що змінюються в часі, не визначають стійкість системи, і стандартні методи теорії управління не можуть застосовуватися безпосередньо.

Отже, один з можливих методів рішення таких проблем полягає в створенні еквівалентних, інваріантних в часі систем, придатних для застосування стандартних методів. Система, F інваріантна в часі, може бути одержана при використовуванні перетворення Ляпунова - Флоке $(L-F)$. Теорія Флоке відома зараз як теорія Флоке - Ляпунова, яка перетворює лінійну частину періодичного квазілінійного рівняння в інваріантну в часі форму, що зберігає початкові динамічні характеристики системи.

Стійкість системи визначається власними векторами матриці переходу, так що якщо речовинна частина всіх множників Флоке негативна, рішення стійке, тоді як позитивні показники указують на нестабільність.

Пропоновані методи повинні забезпечити корисний інструментарій для спрощення лінійних і нелінійних періодичних систем.. Оскільки методи аналізу і управління для систем, що не змінюються в часі, розроблені достатньо добре, тепер стане можливим використовувати ці методи і для періодичних в часі систем.

Цей метод широко використовується для оцінки стійкості систем малої розмірності з періодичними коефіцієнтами. Для систем, які характеризуються великим числом ступенів свободи, пропонується новий метод, що включає аналіз Флоке для оцінки домінуючих власних значень матриці переходу, використовуючи алгоритм Арнольді (Arnoldi), без явного обчислення цієї матриці. Цей метод значно більш ефективний в обчислювальному відношенні, ніж класичний і ідеально підходить для систем з великим числом ступенів свободи.

Теорія Флоке може бути використана для аналізу біфуркації поведінки, що забезпечує засіб вивчення динамічних механізмів, які можуть змінити структурну стійкість системи, коли деякий параметр поволі змінюємося з часом.

Розглянемо систему лінійних, однорідних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами:

$$x' = G(t)x \tag{4.12}$$

де $G(t)$ - дійсна $m \times m$ матрична функція, $t \in R$;

х- вектор-стовпець розмірності m.

$G(t)$ - періодична функція з мінімальним періодом Т.

Розглянемо довільну множину m рішень системи (1), лінійно незалежних для будь-якого $t \in R$:

$$x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t).$$

Матриця $X(t)$, складена із стовпців $x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)$ називається *фундаментальною матрицею.*

Якщо $X(0) = E$, де E - одинична $m \times m$ матриця, то $X(t)$ називається *головною фундаментальною матрицею.*

Матриця

$$F = X(T) \tag{4.13}$$

називається *матрицею переходу Флоке,* або *монодромною матрицею.*

Власні значення матриці F називають *характеристичними множниками системи (2)*, або *мультиплікаторами системи.*

Властивості мультиплікаторів системи ґрунтуються на наступній теоремі:

Число 1 є мультиплікатором системи (1) в тому і лише в тому випадку, якщо існує таке рішення $x(t)$*, не рівне тотожне нулю на всій дійсній осі, що*

$$x(t+T) = \lambda x(t)\,,\ t \in R \tag{4.14}$$

З теореми, зокрема, витікає, що

1) система (4.1) має періодичне рішення в тому і лише тому випадку, якщо 1 є її мультиплікатором;

2) всі рішення системи є періодичними, якщо матриця переходу Флоке дорівнює одиничній: $\Phi(T) = E$.

Типи біфуркації визначається залежно від способу, яким мультиплікатори Флоке покидають одиничне коло. Принципово різними є три випадки:

а)якщо мультиплікатор Флоке залишає одиничне коло через +1, ми одержуємо транскритичну, симетрично розривну біфуркацію або циклічну складку;

б) якщо мультиплікатор Флоке проходить через -1, відбувається подвоєння періоду біфуркаціє (перекинута біфуркація);

в)якщо комплексно зв'язані мультиплікатори Флоке залишають одиничне коло уздовж уявної осі, то має місце вторинна біфуркація Хопфа (Hopf).

Обчислення матриці переходу Флоке зіставляє всі стани системи в даний момент з тими ж станами на один період пізніше. Розмір цієї матриці переходу рівний загальному числу станів системи.

Аналіз характеристичних множників дозволяє визначити стійкість рішень системи (4.1). Найближчі до уявної осі з будь-якої сторони власні значення виконують важливу роль і називаються провідними власними значеннями. Фактично, якщо всі характеристичні множники розташовані в одиничному колі на комплексній площині, то всі рішення збігаються до нуля. Якщо який-небудь з характеристичних множників знаходиться за межами одиничного кола, то існує необмежене рішення. Якщо всі множники знаходяться всередині або на одиничному колі, то умови стійкості визначаються відмінністю між і геометричної кратністю алгебри множників, розташованих на одиничному крузі. Алгебраїчна кратність власного значення — це його кратність як рішення характеристичного рівняння, а геометрична кратність — це розмірність підпростору, визначуваного лінійно незалежними власними векторами, відповідними даному власному значенню. Геометрична кратність власного значення завжди не більше його алгебраїчної кратності.

Теорія Флоке активно використовується для дослідження моделей економічної динаміки, зокрема, моделі Хикса і ін.

Розглянемо тепер *можливості об'єднання* описаних вище двох інструментів у області аналізу тимчасових рядів.

Основна ідея такого об'єднання була виказана Auerbachetal. Мета полягала в тому, щоб:

а)витягувати всі періодичні траєкторії в експериментальному хаотичному тимчасовому ряду і обчислити їх стійкість за допомогою показника Ляпунова;

б)ця інформація може бути використана для того, щоб описати важливі властивості загальних хаотичних множин. Передбачалося, що тимчасові ряди достатньо великі, щоб можна було виділити нестійкі періодичні орбіти з безлічі хаотичних спостережень порядку n, залежно від об'єму доступних даних. Після локалізації періодичних орбіт методами, схожими на графік повторень, для обчислення власних значень і власних векторів для кожної точки періодичного циклу використовувалася матриця Якобі.

Об'єднання аналізу повторень і теорії Флоке дозволяє подолати деякий недолік цього методу.

Фактично, для даного тимчасового ряду ми могли б використовувати аналіз повторень, щоб знайти хаотичну поведінку, зокрема, локалізувати нестійкі орбіти і біфуркацію. Як сказано вище, виявлення періодичних орбіт в експериментальних даних — центральний момент у області управління хаосом. Крім того, нестійкі періодичні орбіти, що входять до складу хаотичного аттрактора, є основними для розуміння хаотичної динаміки. Нестійкість, характерна для цих траєкторій, утрудняє їх виявлення. Інструментальні засоби розпізнавання НПТ в тимчасових рядах дотепер не розроблені.

Використовуючи графік повторень, ми можемо виділити періодичні траєкторії з даного тимчасового ряду, і тепер необхідно обчислити їх стійкість. Це важливий момент, оскільки властивості стійкості НПТ визначають, яким чином траєкторії переміщаються уподовж і біля аттрактора. Питання стійкості може бути вирішений з використанням теорії Флоке. Обчислюючи власні значення і власні вектори матриці, ми можемо визначити стійкість періодичної орбіти.

Однією з цікавих проблем є *управління хаосом.*

Термін «управління хаосом» був введений Е. Ott, З. Grebogi і J. Yorke в опублікованій ними в журналі PhysicalReviewLetters (1990 р.) статті «Управління хаосом». Ключовим елементом цієї статті була демонстрація того, що значущої зміни в поведінці хаотичної системи можна досягти за допомогою невеликої, найдрібнішої корекції параметрів системи і, зокрема, ця корекція може бути зроблена без впливу на властивості системи. Після виходу цієї статті управління хаотичними системами привернуло підвищену увагу дослідників з інших областей.

В цілому методи управління хаосом можуть бути розділені на два основні класи:

1)замкнутий цикл, або методи зворотного зв'язку;

2)відкритий цикл, або методи без зворотного зв'язку, де дії залежать від інформації про стан. Ідея цього методу в тому, до щоб змінювати поведінку нелінійних систем, прикладаючи правильно вибрану вхідну функцію.

Далі можна розділити методи на дискретні і безперервні в *часі*, а також методи, в яких дії додаються до параметрів і до динамічних змінних відповідно.

Розглянемо *методи замкнутого циклу (із зворотним зв'язком).* Цей клас включає ті методи, які вибирають дію, засновану на знанні про стан системи, і орієнтовані на управління заданою динамікою. Серед них ми можемо розглянути так званий випадково пропорційний зворотний зв'язок (OGY) і метод, запропонований Pyragas, в якому застосовується затриманий зворотний зв'язок з однією із змінних системи. Всі ці методи є модально незалежними в тому значенні, що знання про систему, необхідне, для вибору дії може бути одержане за допомогою простого спостереження за системою протягом деякого прийнятного часу навчання.

Метод OGY ґрунтується на визначенні періодичної траєкторії і застосуванні невеликих дій до параметрів системи, щоб стабілізувати нестійкі стани або нестійкі періодичні траєкторії. Хоча ці дії додається тільки тоді, коли система близька до бажаної періодичної траєкторії і доступний єдиний часовий ряд, використовування його для стабілізації обший стійкій періодичній траєкторії (НПТ) вимагає наявності точної інформації про цільову траєкторію. Отже, цей метод неадекватний для нестаціонарних систем або задач вибору мети. Цей метод вимагає, крім того, первинно великих змін параметрів і обмежений при стабілізації нестійких періодичних фіксованих точок сідла. Хоча метод OGY добре зрозумілий з теоретичної точки зору, експериментальна реалізація його серйозно обмежується тим, що всі величини, необхідні для обчислення значень параметрів управління системою, безпосередньо не задаються в експериментальній послідовності даних, і щоб виконувати управління, необхідно застосувати складний аналіз даних. У протилежність методу OGY метод управління хаосом, запропонований Pyragas, може легко бути застосований до експериментальних систем, де рівняння руху невідомі. Основна ідея методу Pyragas полягає в простому використовуванні затриманого стану як елементу зворотного зв'язку. Перевага цього методу у тому, що він не вимагає повної інформації про цільову НПТ; але в ньому використовується постійна затримка часу в блоці зворотного зв'язку.

Розглянемо *методи відкритого циклу (без зворотного зв'язку).*

Цей клас включає ті стратегії, в яких розглядаються ефекти зовнішніх дій (незалежно від знань про фактичний динамічний стан) на еволюцію системи. Періодичні або стохастичні дії розглядаються як причина корінних змін в динаміці хаотичної системи, що приводять, кінець кінцем, до стабілізації деякої періодичної поведінки. Ці підходи, проте, в загальному випадку обмежені тим, що їх дія не є цілеорієнтірованим, тобто кінцевий періодичний стан не може бути визначене управляючою системою. Критичні моменти для всіх таких методів управління хаосом наступні:

а)припущення про те, що хаос істотно залежимо від малих змін в поточному стані і, отже, стан системи непередбачуваний в довгому періоді, також має на увазі, що поведінка системи може бути змінене використовуванням невеликих обурень;

б) хаотична множина, в якому знаходиться траєкторія хаотичного процесу, може містити в собі багато нестійких періодичних траєкторій, так що, на відміну від лінійної системи, в якій заданий параметр припускає тільки один тип руху, в нелінійній системі одночасно можливе багато різних напрямів еволюції;

в)через ергодичності траєкторія відвідує околицю кожної періодичних траєкторій (орбіт), що формують аттрактор.

Управління хаотичними системами має на увазі стабілізацію нестійких періодичних траєкторій. Основна ідея полягає в очікуванні природного підходу хаотичної траєкторії до бажаної періодичної поведінки, і коли траєкторія наближається до цієї бажаної періодичної траєкторії, вставленої в аттрактор, необхідно надати невеликі дії для стабілізації такої орбіти. Цей підхід використовує ідею про те, що критична чутливість хаотичної системи до зміни в своїх початкових умовах може бути, фактично, дуже бажаної в практичних експериментальних ситуаціях. Представимо *різні економічні додатки теорії хаосу.*

Історично економісти використовували лінійні рівняння, щоб моделювати економічні явища, оскільки з ними достатньо легко поводитися і вони звичайно дають єдине рішення. У міру того, як математичні і статистичні інструментальні засоби, використовувані економістами, ставали складнішими, стало неможливо ігнорувати той факт, що багато важливих і цікавих явищ не піддаються такій лінійній обробці. Отже, управління, принаймні, деякими економічними процесами стає одній з найважливіших і значніших задач, що зустрічаються економістам. Важливі явища, для яких лінійні моделі не підходять, включають депресії і періоди підйому, спалахи цін на фондовій біржі і відповідні крахи, стійкі зсуви валютного курсу, регулярні і нерегулярні ділові цикли. Отже, фахівці в економічній теорії звертаються до дослідження нелінійної динаміки і, по можливості, інструментів теорії хаосу, щоб моделювати ці і інші явища.

Фактично недавно з'явилися деякі додатки хаосу в методах управління економічними системами, розглядаючи розпізнавання і управління циклічними явищами і оцінку складної динаміки як засоби, наприклад, виявлення ділового циклу, сезонних змін в метеорології і варіації популяцій в екології. Приклади додатків: Holystetat. розробили прикладний метод Ott Greboqi-Yorke для моделювання поведінки двох конкуруючих фірм; Kopel показав, використовуючи просту модель ринкової динаміки, що розвивається, як хаотична поведінка може управлятися невеликою зміною параметра, який доступний ЛПР, і як фірми можуть поліпшити своє функціонування, використовуючи метод цільового управління. Xuetal. розробив метод виявлення траєкторій типа НПТ в хаотичному тимчасовому ряду моделі ділового циклу Kaldor. Kaas довів, що в межах макроекономічної не рівноважної моделі, стійкі і прості адаптивні політики не здатні стабілізувати ефективні стійкі стани і приводять до періодичних або нерегулярних коливань для великої множини параметрів управління. Додаток методів управління до хаотичних динамічних систем показує, що уряд може, у принципі, стабілізувати нестійку рівновагу Вальраса протягом короткого часу, змінюючи податкові показники або державні витрати.

Лінійні моделі стають в корінні невірними, вводячи в оману, перекошуючи розуміння економіки. У цьому контексті хаос є радикальною зміною перспективи розвитку економічної науки, оскільки не тільки здатний пояснювати нерегулярну динамічну поведінку, яка характеризує економічні явища, але також забезпечує корисний засіб для стабілізації нелінійних динамічних систем. Дійсно, багато нелінійних динамічних систем, навіть якщо вони показують дуже нерегулярну поведінку, фактично піддаються стабілізації, ніж істотно відрізняються від системи з нерегулярністю, залежною винятково від стохастичних обурень. Хаотичні системи показують безперервну залежність від параметрів, а управління ними полягає в невеликих змінах в цих параметрах, які ведуть до змін в динамічних властивостях моделі. Деякі з цих параметрів представляють правила економічної теорії, як, наприклад, ставка оподаткування, темп фінансового зростання (приріст) або державні витрати, і встановлюються фахівцями в цій області. Отже, уряд має значно вплив на динамічні результати.

Використовуючи такі фундаментальні характеристики хаотичних систем, як чутливість до початкових умов і наявність нестійких траєкторій, уряд може добитися результатів лише невеликим втручанням. Отже, фахівці в політиці, які хочуть добитися якнайкращого результату в зростанні зайнятості, зростанні добробуту, не можуть використовувати економічні моделі, засновані на лінійності і припущенні простоти традиційних економічних моделей. Втручання політики, навпаки, повинне бути засноване на міркуваннях про те, що економіка є складною системою. Звичайно, це має на увазі використовування типових інструментальних засобів дослідження складних систем.

З цієї точки зору аналіз повторень і теорія Флоке є корисними інструментами аналізу і управління складною системою. Крім того, в аналізі тимчасових рядів запропонована методологія, комбіноване використовування цих інструментальних засобів дозволяє долати труднощі прикладного використовування традиційних інструментів, а також деяких відоміших складних способів, як, наприклад, показник Ляпунова. Фактично, наприклад, аналіз повторень виявляється особливо корисним для випадків, в яких обмежений доступ до даних, для виявлення нестійких періодичних траєкторій, оскільки він зберігає незмінність динаміки. Теорія Флоке забезпечує засіб вивчення динамічних механізмів, які можуть змінити структурну стійкість системи, коли деякий параметр поволі змінюється з часом. Тоді як інші методи можуть бути використані для: систем, де періодичні коефіцієнти можуть бути виражені залежно від невеликого параметра, техніка перетворення Ляпунова — Флоке не має такого обмеження, і, отже, вона може бути застосована і до загальної періодичної системи.

Контрольні питання:

1. Дати означення рівноваги динамічних систем.
2. Охарактеризуйте стаціонарність та не стаціонарність систем.
3. Охарактеризуйте стійкість динамічних систем.
4. Формальне представлення стійкості динамічних систем.
5. Дати поняття асимптотичної стійкості за теорією Ляпунова.
6. Класифікація станів рівноваги динамічних систем.
7. Що таке стохастична стійкість, екс-потенційна стійкість, нестійкість динамічних систем**?**
6**.** Обумовте поняття ймовірнісна потенційна стійкість динамічних систем.

Завдання для самостійної роботи

Тести:

1. Які пари власних чисел не можуть бути коренями характеристичного багаточлена 2-го порядку (*вказати всі відповіді*):

a	$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$		$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = i$	d
b	$\lambda_1 = -i, \lambda_2 = 2_i$		$\lambda_1 = 5i, \lambda_2 = -5i$	e
c	$\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = -1+i$		$\lambda_1 = 2+3i, \lambda_2 = 2-3i$	f

2. Математична модель динамічної системи має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau}(x_0 - x) - k_1 x, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau} y + k_1 x - k_2 y.$$

Стаціонарний стан системи визначається рівняннями:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}\left(x_0 - x\right) - k_1 x = 0 \\ -\frac{1}{\tau} y + k_1 x - k_2 y = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{x} = \frac{x_0}{1 + k_1 \tau}, \quad \bar{y} = \frac{k_1 \tau x_0}{\left(1 + k_1 \tau\right)\left(1 + k_2 \tau\right)}.$$

Вибрати правильний розв'язок задачі визначення типу стаціонарної точки:

a		b
$\begin{vmatrix} \left[-\left(\frac{1}{\tau} + k_1\right) - \lambda\right] & 0 \\ k_1 & \left[-\left(\frac{1}{\tau} + k_2\right) - \lambda\right] \end{vmatrix} = 0$		$\begin{vmatrix} \left[-\left(\frac{1}{\tau} - k_1\right) - \lambda\right] & 0 \\ k_1 & \left[-\left(\frac{1}{\tau} + k_2\right) - \lambda\right] \end{vmatrix} = 0$
$\lambda_1 = -\left(\frac{1}{\tau} + k_1\right), \lambda_2 = -\left(\frac{1}{\tau} + k_2\right)$		$\lambda_1 = -\left(\frac{1}{\tau} - k_1\right), \ \lambda_2 = -\left(\frac{1}{\tau} + k_2\right),$

стійкий вузол		при $k_1\tau<1$ – стійкий вузол; при $k_1\tau>1$ – сідло
c		d
$\begin{vmatrix} \left[\left(\dfrac{1}{\tau}+k_1\right)-\lambda\right] & 0 \\ k_1 & \left[-\left(\dfrac{1}{\tau}+k_2\right)-\lambda\right] \end{vmatrix}=0$		$\begin{vmatrix} \left[-\left(\dfrac{1}{\tau}+k_1\right)-\lambda\right] & 0 \\ 0 & \left[-\left(\dfrac{1}{\tau}+k_2\right)-\lambda\right] \end{vmatrix}=0$
$\lambda_1=\left(\dfrac{1}{\tau}+k_1\right),\ \lambda_2=\left(\dfrac{1}{\tau}+k_2\right).$		$\lambda_1=-\left(\dfrac{1}{\tau}+k_1\right),\ \lambda_2=-\left(\dfrac{1}{\tau}+k_2\right).$
нестійкий вузол		стійкий вузол

3. Взаємодія двох видів X и Y описується математичної моделлю:
$\dot{x}=ax-dy,\quad \dot{y}=by-c;\quad a>0,\ \ b>0,\ \ c>0,\ \ d>0,$
де ax характеризує природній приріст популяції X,
dy – загибель X за рахунок взаємодії з видом Y,
by – приріст популяції Y,
c – загибель Y з постійною швидкістю.
Стаціонарна точка системи:
$\overline{x}=dc/ba,\ \overline{y}=c/b.$

Вибрати правильний розв'язок задачі визначення типу стаціонарної точки:

a		b
$\begin{vmatrix} a-\lambda & -d \\ -c & b-\lambda \end{vmatrix}=0$		$\begin{vmatrix} a-\lambda & -d \\ b & -\lambda \end{vmatrix}=0$
$\lambda_{1,2}=\dfrac{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2+4cd}}{2}$		$\lambda_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4cd}}{2}$
при $ab>cd$ - нестійкий вузол при $ab<cd$ - сідло		при $a\ge 2\sqrt{bd}$ - нестійкий вузол при $a<2\sqrt{bd}$ - нестійкий фокус
c		d
$\begin{vmatrix} a-\lambda & -d \\ 0 & b-\lambda \end{vmatrix}=0$		$\begin{vmatrix} a-\lambda & -d \\ 0 & b-\lambda \end{vmatrix}=0$
$\lambda_1=a,\ \lambda_2=b$		$\lambda_1=-a,\ \lambda_2=-b$
нестійкий вузол		стійкий вузол

4. Визначити, якому типу стаціонарної точки відповідають значення власних чисел, отриманих при дослідженні деякої тривимірної системи.
Власні числа:

1) $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-5,$ – ?
2) $\lambda_1=-3,\ \lambda_2=-2+3i,\ \lambda_3=-2-3i,$ – ?
3) $\lambda_1=5,\ \lambda_2=11,\ \lambda_3=8,$ – ?
4) $\lambda_1=7,\ \lambda_2=-1+2i,\ \lambda_3=-1-2i,$ – ?

Варіанти відповідей:

a) стійкий вузол
b) нестійкий вузол
c) стійкий фокус
d) нестійкий фокус
e) сідло
f) сідло-фокус

5. Математична модель динамічної системи має вигляд:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\tau}(x_0-x)-k_1x, \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\tau}y+k_1x-k_2y.$$

Визначити, якій із представлених нижче систем якісно еквівалентна дана система:

a	b
$\frac{dx}{dt}=-5y,\ \frac{dy}{dt}=-3x+2$	$\frac{dx}{dt}=-2y,\ \frac{dy}{dt}=8x+2$
c	d
$\frac{dx}{dt}=2x+2y,\ \frac{dy}{dt}=-x+2y$	$\frac{dx}{dt}=-2x-y,\ \frac{dy}{dt}=x-2y$

Відповіді до тестових завдань:

1	2	3	4-1	4-2	4-3	4-4	5
b, c, d	a	c	e	c	a	f	d

РОЗДІЛ 5 НЕЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

5.1. Моделі економічних циклів Гудвіна

Перейдемо тепер до складніших, нелінійних, моделей, що описують виникнення циклічних коливань в економічному розвитку. Починаючи з простої моделі, запропонованої Гудвіном, будемо послідовно її ускладнювати, враховуючи всю більшу кількість чинників.

Будемо вважати, що у будь-який момент часу t економіка має в своєму розпорядженні основний капітал K, який включає заводи, устаткування і т.д. Його об'єм міняється з швидкістю, рівною відношенню справжніх капіталовкладень до загального зносу за даний період часу. Джерелом економічного доходу є об'єм виробництва Y і споживання C. Ці величини зв'язані між собою відносинами

$$C = \alpha Y + \beta \tag{5.1}$$

$$Y = C + \frac{dK}{dt} \tag{5.2}$$

де α і β – дійсні константи, такі, що $\alpha < 0$, $\beta < 0$.

З рівняння (5.1) видно, що між об'ємом виробництва і споживанням існує лінійна залежність. Рівняння (5.2) означає, що вся продукція, що випускається, або споживається, або йде на розширення виробництва. Припустимо далі, що основним капіталом K управляють так, щоб підтримувати його на рівні, пропорційному об'єму виробництва. Якщо R – бажаний рівень основного капіталу Y момент часу t, то

$$R = \gamma Y \tag{5.3}$$

де γ – деякий параметр.

Представимо перший варіант моделі. З рівнянь (5.1) і (5.2) витікає, що

$$Y - \alpha Y = \beta + \frac{dK}{dt} \tag{5.4}$$

звідки

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}\left(\beta + \frac{dK}{dt}\right) \tag{5.5}$$

Із співвідношення (5.5) видно, що періодична поведінку величини Y (або K) може виникнути як наслідок коливань в капіталовкладенні K. У свою чергу, ці коливання виникають з прагнення зрівняти величини K і R (бажаний рівень основного капіталу). Нехай проводиться екстремальна політика капіталовкладень:

$$\frac{dK}{dt} = \begin{cases} K_1 > 0, & \text{якщо } K < R, \\ 0, & \text{якщо } K = R, \\ -K_2, & \text{якщо } K > R. \end{cases} \tag{5.6}$$

де K_1 і K_2 не залежать від часу t.

Розглянемо суть формули (5.6). Якщо основний капітал менше бажаного рівня, то умова (5.6) відповідає максимальному рівню капіталовкладень (перша умова в (5.6). Якщо ж бажаний рівень перевищений, то капіталовкладення нульові, а основний капітал амортизується з швидкістю K_2 (третя умова (5.6). Розумно допустити, що при максимальному рівні капіталовкладень швидкість, з якою можуть будуватися нові підприємства більше швидкості амортизації і старіння, тобто

$$K_1 > K_2 \tag{5.7}$$

З рівнянь (5.3) – (5.6) витікає, що

$$R = \begin{cases} R_1 = \gamma \dfrac{\beta + K_1}{1-\alpha}, & \text{якщо } K < R, \\ R_0 = \gamma \dfrac{\beta}{1-\alpha}, & \text{якщо } K = R, \\ R_2 = \gamma \dfrac{\beta - K_2}{1-\alpha}, & \text{якщо } K > R. \end{cases} \tag{5.8}$$

Нехай $R_2 < K < R_1$, так що при $t = 0$ виконується $R = R_1$. Тоді рівень капіталовкладень рівний $K_1 > 0$, величина K росте, а Y залишається постійною (рис. 5.1) до тих пір, поки не досягається рівність $K = R_1$. Тоді R приймає значення R_0, оскільки $K = R$. Тепер $K = R_1 > R = R_0$, і величина R миттєво стає рівною R_2. Таким чином, K миттєво міняється від величини K_1 до $-K_2$ а R – від R_1 до R_2. У той же самий момент, згідно формулі (5.5), різко падає об'єм виробництва. Тепер K спадає до величини R_2. Аналогічні міркування показують, що R при цьому стає рівним R_1, так що $K = R_2 < R = R_1$, і величина K знову стає рівною K_1. Основний капітал K знову зростає до R_1, і цикл замикається. Таким чином, обидві величини – K і Y – здійснюють коливання, як показано на рис. 5.1.

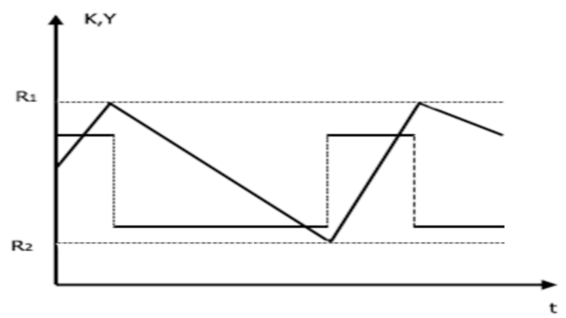


Рис. 5.1. Коливання величин K і Y у часі для політики капіталовкладень «стій – руш».

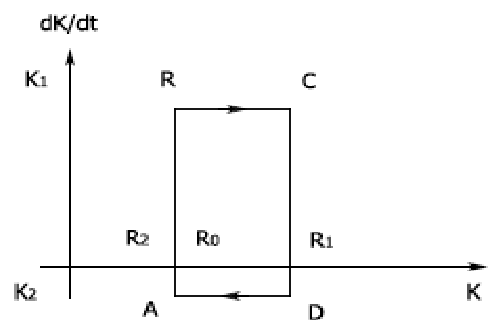


Рис. 5.2. Представлення стану економіки на фазовій площині

Розглянемо поведінку моделі на фазовій площині (K, K'), представленої на рис. 5.2. Рух відбувається по прямолінійних відрізках BC і DA, де $K = K_1$, і

$K = -K_2$ відповідно. Скачки від A до B і від C до D відповідають розривам функції Y, показаним на рис. 1.

Описана модель добре відображає економічний цикл. Під час періодів капіталовкладення об'єм виробництва високий і економіка знаходиться в періоді підйому. Коли ж капіталовкладення відсутні, об'єм виробництва падає, і економіка знаходиться в стані депресії. Проте у розглянутої моделі є багато недоліків. Так, стрибки в капіталовкладенні і миттєва реакція на них з боку об'єму виробництва Y (див. формулу (5.5)) не відповідають дійсності. Крім того, з умови $K_1 > K_2$ витікає, що періоди спаду значно перевищують періоди підйому, чого в реальності не спостерігається. Більш того, в моделі відсутнє загальне зростання економіки, оскільки об'єм виробництва, основний капітал і інші показники періодично приймають колишні значення.

Приведемо другий варіант моделі. Модифікуємо модель, враховуючи такі чинники:

1) вплив капіталовкладень на зростання об'єму виробництва;
2) відсутність стрибкоподібних змін в капіталовкладенні.

Для обліку першого чинника змінимо рівняння (5.5) так, щоб у функції Y не було стрибків навіть у тому випадку, коли величина K їх має. Це можна зробити, замінивши рівняння (5.5) на

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}\left(\beta + \frac{dK}{dt} - \varepsilon\frac{dY}{dt}\right), \tag{5.9}$$

де ε – деяка позитивна константа.

Зрозуміло, що новий доданок в (5.9) породжує затримку в реакції функції Y на зміну K. З рівняння (5.9) знаходимо:

$$\varepsilon\frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = (\beta + K_1), \qquad \text{якщо } K < R \tag{5.10}$$

$$\varepsilon\frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = (\beta - K_2), \qquad \text{якщо } K > R \tag{5.11}$$

Припустимо, що у момент часу $t = t_1$ депресія закінчується і відбувається миттєвий перехід від (5.11) до рівняння (5.10). Тоді залежність величини Y від часу t для фази підйому матиме вигляд

$$Y(t) = \frac{\beta + K_1}{1-\alpha}\left(1 - e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)}\right) + Y(t_1)e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)} \tag{5.12}$$

З рішення (5.12) видно, що величина Y не зростає миттєво до значення $(\beta + K_1) / (1-\alpha)$, а прагне до нього при $t \to \infty$. Помітимо, що час, який потрібен для того, щоб функція $Y(t)$ із заданою точністю стала рівній цій величині, цілком залежить від параметра ε. Аналогічним чином, рівняння (5.11) згладжує стрибкоподібне падіння $Y(t)$ (див. рис. 5.1) в кінці періоду підйому. Ліквідуємо тепер розриви в капіталовкладенні, тобто «пом'якшимо» раптовий перехід від $K = K_1$ до $K = -K_2$ (і навпаки), виникаючий, коли K стає рівним R.

Розглянемо ту частину капіталовкладень, яка виникає із зміною об'єму виробництва. Зміни в капіталовкладенні відбувається тому, що ми хочемо підтримувати основний капітал на рівні бажаного капіталу. Зміна величини Y викликає зміну R, що, у свою чергу, вабить зміну K. Ясно, що якби нам вдалося підтримувати $K = \gamma Y$, то виконувалося б і співвідношення $K = R$. Але такого бути не може, оскільки рівність не може виконуватися при всіх значеннях t, оскільки величина K має верхню межу K_1 і нижню межу ($-K_2$). Тому ми припустимо, що $K = \psi(Y)$. Вид функції $\psi(Y)$ зображений на рис. 3.

Як видно з малюнка, вимушені капіталовкладення $\psi(Y)$ близькі до ідеального рівня γY для малих величин Y, а при великих $|Y|$ вони обмежені величинами K_1 до ($-K_2$). Відмітимо, що функція $\psi(Y) - \varepsilon Y$ немонотонна (тобто має «горби») і схожа на кубічну параболу. Коли капіталовкладення досягають свого максимального значення, основний капітал перестає задовольняти вимозі $K = \gamma Y$.

Це означає, що K треба вибрати у вигляді

$$\frac{dK}{dt} = L + \psi\left(\frac{dY}{dt}\right), \tag{5.13}$$

де $\psi(Y)$ – індуковані капіталовкладення, викликані зміною об'єму виробництва, L – вплив інших капіталовкладень.

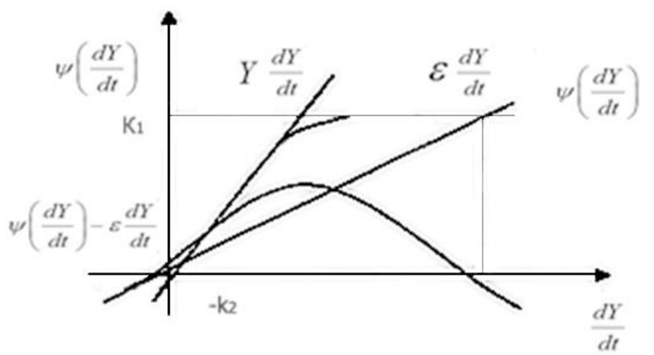


Рис. 5.3. Вимушені капіталовкладення $\psi(Y)$

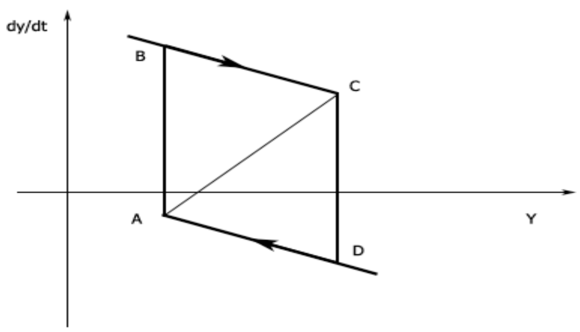


Рис. 5.4. Поведінка другої моделі на фазовій площині

Тоді рівняння (5.9) треба замінити на

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}\left(\beta + L + \psi\left(\frac{dY}{dt}\right) - \varepsilon\frac{dY}{dt}\right). \tag{5.14}$$

Щоб одержати графік функції Y' залежно від Y, потрібно зсунути функцію $\psi(Y) - \varepsilon Y$, зображену на рис. 5.3, на величину $\beta + L$ і розділити на ($1 - \alpha$). Якщо величина $\beta + L$ достатньо велика, то вийде графік, подібний приведеному на рис. 5.4.

Ця крива, разом з пропозицією про скачки, повністю описує поведінку другої моделі. Точки, відповідні всім можливим станам моделі, лежать на цій кривій, і знак показує, зростає або спадає величина Y. Таким чином, рух точки, що визначає стан системи, повинен відбуватися в напрямках, вказаних стрілками.

Точка (β + L; 0) є, отже, нестійкою нерухомою точкою системи. З точок C і A по аналогії з рис. 2 повинні відбуватися скачки. Припустивши, що скачки відбуваються з A у B і із C в D, одержимо коливання релаксації для Y.

Тепер розглянемо третій варіант моделі. Врахуємо тепер запізнювання реальних капіталовкладень щодо ухвалення рішення про їх необхідність. Це означає, що індуковані вкладення у момент часу t насправді залежать не від $Y(t)$, а від $Y(t-v)$, де v – запізнювання.

Тоді замість рівняння (5.14) треба писати:

$$\varepsilon\frac{dY}{dt}+(1-\alpha)Y-\psi\left(\frac{dY(t-v)}{dt}\right)=\beta+L\,. \tag{5.15}$$

Якщо ввести $\tau = t - v$ то з (5.15) одержимо

$$\varepsilon\frac{dY(\tau+v)}{d\tau}+(1-\alpha)Y(\tau+v)-\psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right)=\beta+L\,. \tag{5.16}$$

Розкладемо ліву частину рівняння (5.16) по ступенях v і збережемо лише члени першого порядку по v. Тоді знаходимо:

$$\varepsilon\frac{dY(\tau)}{d\tau}+\varepsilon v\frac{d^2Y(\tau)}{d\tau^2}+(1-\alpha)\left(Y(\tau)+v\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right)-\psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right)=\beta+L\,. \tag{5.17}$$

Або

$$.\ \varepsilon v\frac{d^2Y(\tau)}{d\tau^2}+\left[\varepsilon+(1-\alpha)v\right]\frac{dY(\tau)}{d\tau}+(1-\alpha)Y(\tau)-\psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right)=\beta+L\,. \tag{5.18}$$

Якщо вважати, що $\beta + L = const$ і ввести

$$y=\frac{Y-(\beta+L)}{1-\alpha}, \tag{5.19}$$

то (5.18) можна переписати у вигляді:

$$\varepsilon v\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2}+\left[\varepsilon+(1-\alpha)v\right]\frac{dy(\tau)}{d\tau}-\psi\left(\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)+(1-\alpha)y(\tau)=0\,. \tag{5.20}$$

Введемо нові залежну і незалежну змінні співвідношеннями

$$x=y\sqrt{\frac{1-\alpha}{\varepsilon v}} \tag{5.21}$$

і

$$t=\tau\sqrt{\frac{1-\alpha}{\varepsilon v}} \tag{5.22}$$

Тоді замість (5.20) маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\chi\left(\frac{dx}{dt}\right)+x=0, \qquad (5.23)$$

де

$$\chi\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)\varepsilon\nu}}\left\{\left[\varepsilon+(1-\alpha)\nu\right]\frac{dx}{dt}-\psi\left(\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right)\right\}. \qquad (5.24)$$

Якщо $[\varepsilon + (1 - \alpha)\, v] < \gamma$, то функція $\chi(x)$ схожа на кубічну параболу, а (5.23) – рівняння типу рівняння Релея.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\left[1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]+x=0, \qquad (5.25)$$

І у нього є стійкий граничний цикл, тобто мають місце автоколивання.

5.2. Динаміка корисності споживчих благ

З представленої нижче моделіураховується вплив виробничих циклів на динаміку корисності споживчих благ. Нехай відома сукупність споживчих благ x_j, $j = 1,.., m$, які здобуваються й споживаються економічним суб'єктом. В відповідності з теорією суб'єктивної корисності, стратегія споживання цього блага залежить від функції його корисності $U = U(X)$, (X – вектор споживчих благ); вид і форма кривої функції корисності визначає динаміку споживання $X(t)$, де t – час. Оскільки споживання змінюється в часі, то маємо $U = Y[X(t)]$, тобто функція корисності споживчих благ залежить від часу опосередковано — через динаміку їхніх обсягів. Даний методологічний прийом, який дозволяє зв'язати величину функції корисності, досить важливий і цікавий, тому що, незважаючи на те, що в економічній теорії властивості статичної функції корисності $U \sim U(X)$ досить добре вивчені (як правило, такі залежності виражаються логарифмічними й степеневими функціями), закономірності зміни динамічної функції корисності $U= U(t)$ дотепер практично не розглядалися. Таким чином, залежність $U= U[X(t)]$ дозволяє «динамізувати» подальші побудови.

З урахуванням сегментованості товарного ринку й множинності споживчих благ, агрегатна функція корисності U може бути представлена у вигляді адитивної функції корисності:

$$U=\sum_{j=1}^{m}p_jU_j(x_j(t)), \qquad (5.26)$$

де U_j – частинна корисність споживчого j-го блага;
p_j – вагові коефіцієнти, які задають шкалу відносної значимості розглянутих благ.

В подальшому без втрати ступеня спільності для проведеного аналізу будемо розглядати лише два споживчих блага: i та 1. Такий прийом цілком правомірний, тому що будь-який набір благ може поєднуватися в невелике число групових благ.

Виходячи зі сказаного, можна записати наступні умови першого й другого порядку для функції корисності:

$$\begin{cases} C = p_i A_i x_i + p_l G \\ D = p_i \left[A_i \ddot{x}_i + B_i (\dot{x}_i)^2 \right] + p_l R_l \end{cases} \tag{5.27}$$

де $A_i = dU_i / dx_i$; $B_i = d^2U_i / dx^2$; $G_1 = dU_l/dt$;
$R_1 = d^2U_l/dt^2$; $C = dU/dt$; $D = d^2U/dt^2$.

Зрозуміло, що в загальному випадку величини A_i, B_i, G_1, R_1, C, D залежать від часу. Таким чином, система (5.27) дозволяє визначити стратегію споживача $x_i(t)$ при заданих часових траєкторіях $A_i(t)$, $B_i(t)$, $G_l(t)$, $R_l(t)$, $C(t)$, $D(t)$. Причому $A_i(t)$ і $B_i(t)$відбивають динаміку смаків і переваг споживача в часі, $G_1(t)$ і $R_l(t)$ фіксують швидкість і прискорення, з якими споживач припускає нарощувати (зменшувати) корисність від володіння благом X_1, а $C(t)$ і $D(t)$ характеризують швидкісні властивості росту агрегатної функції корисності.

5.3. Вплив флуктуацій на динаміку споживчих благ. Закони Госсена. Траєкторія попиту. Теореми Столпера-Самуельсона

Проведемо подальший аналіз моделей динаміки споживчих благ і розглянемо гранично загальний багатомірний випадок, коли кількість споживчих благ (факторів) дорівнює m. Тоді функція корисності $U= U(X)$, де $X= (x_1,\ldots, x_m)$ і умови першого і другого порядку виглядають наступним чином:

$$C = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \,, \tag{5.28}$$

$$D = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} b_{js} x_j x_s \,, \tag{5.29}$$

де $a_j = dU/dx_j$,
$b_{js} = d^2U/dx_j dx_s$;
j і s – індекси споживаних благ (виробничих факторів).

Перший закон Госсена – закон насичення потреб: зі збільшенням кількості даного блага гранична корисність його зменшується, а за умови повного задоволення потреб споживача вона дорівнюватиме нулю. Строгою формою першого закону Госсена у сучасній теорії споживання є опуклість відношення переваги.

Другий закон Госсена: оптимальна структура споживання (попиту) досягається за умов рівності відношення граничних корисностей до цін для усіх благ, що споживаються:

$$\frac{\partial U / \partial x_i}{p_i} = \frac{\partial U / \partial x_j}{p_j} \forall (i, j) \,,$$

де U – функція корисності,
x_i – кількість i-го товару чи послуги,
p_i – ціна i-го товару чи послуги.

Другий закон Госсена полягає в тому, що споживач повинен розподілити свій дохід на покупку товарів так, щоб остання одиниця доходу яка буде витрачена на покупку товару принесла максимальне задоволення споживачеві.

Уподобання споживача.

Перед споживачем постійно стоїть вибір, який з товарів є кращий і який з них приноситиме йому максимальну корисність. Весь цей вибір можна спростувати за допомогою графічного зображення двох товарів на графіку.

За допомогою кривої байдужості можна зробити різні комбінації вибору товару, які б приносили максимальне задоволення.

Крива індеферентності (або крива байдужості) – показує нам комбінацію двох товарів з однаковою кількістю задоволення, яке отримує споживач і ставить його у стан невизначеності.

Вибір двох товарів, залежить від корисності, яку вони приносять споживачеві. Крива байдужості є спадною, адже вона показує обернену залежність двох товарів, які приносять споживачеві користь. Кожна точка відображає різні комбінації вибору товарів, але взагальному користь від кожного товару є однакова.

Також криві індеферентності мають свої властивості:

1. Криві індеферентності ніколи не перетинаються.
2. Криві індеферентності є завжи спадними.
3. Криві індеферентності розміщені так, що є увігнутими до початку координат.
4. Чим дальше криві індеферентності розміщені від початку координат, тим більший рівень корисності вона характеризує для споживача.

Важливою ознакою споживача є те, що він має схильність до заміни одного товару на інший (це притому, що якість його не буде гіршою від попереднього).

Траєкторія попиту. Теореми Столпера-Самуельсона.

Зменшення обсягу фактору є наслідком зниження відносної ціни товару, у виробництві якого використовується даний фактор, зниження зайнятості та зменшення заробітної плати призводить до того, що ціна фактора зменшується (рис. 5.5). Графічно зображено зазначену залежність як циклічний процес, у якому діють чотири фактори: відносна ціна товару, обсяг фактора, зайнятість у галузі, заробітна плата.

Теорема Столпера-Самуельсона – збільшення відносної ціни певного товару зумовлює збільшення ціни фактора, що використовується у виробництві даного товару більш інтенсивно, і зменшення ціни фактора, що використовується у виробництві даного товару, – менш інтенсивно (див. рис. 5.6)

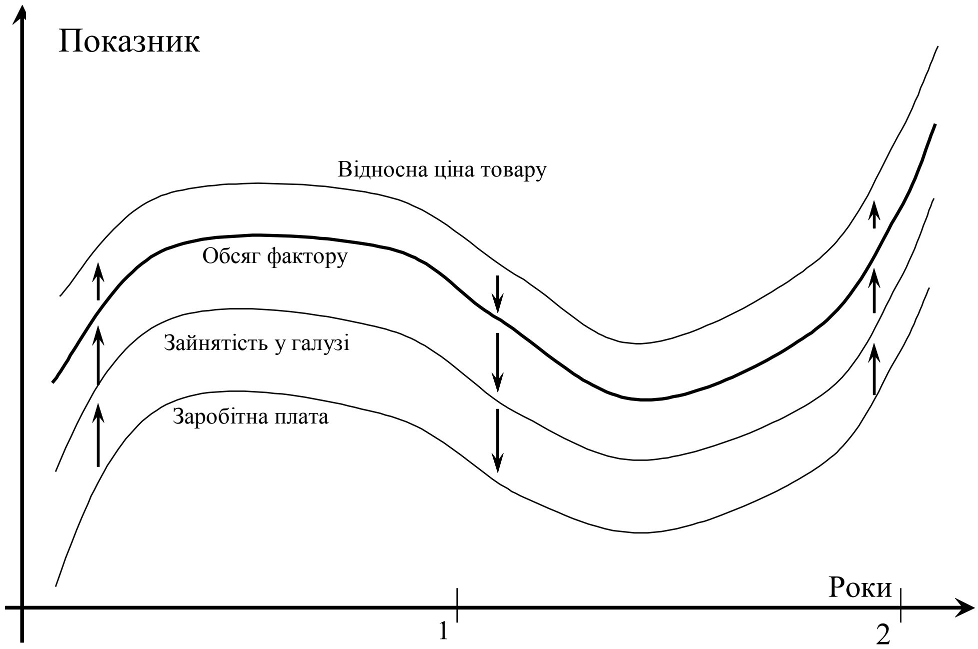


Рис. 5.5. Модель впливу відносної ціни, заробітної плати, зайнятості на розвиток фактору виробництва

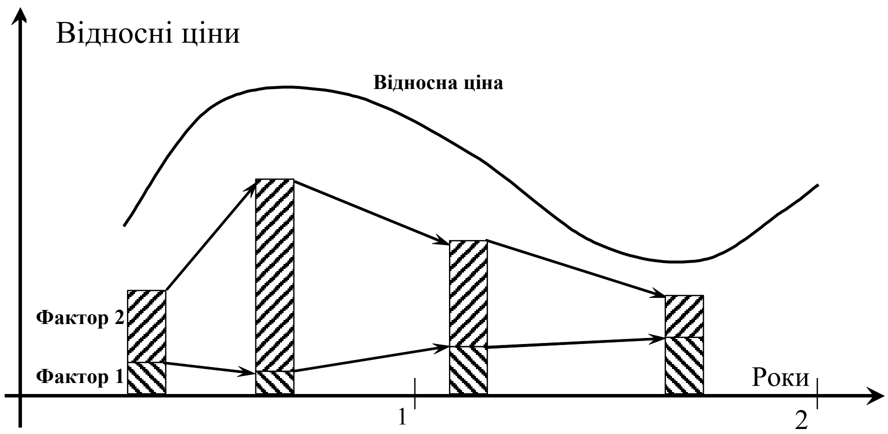


Рис. 5.6. Графічне тлумачення теореми Столпера-Самуельсона

Контрольні запитання:

1. Пояснити модель економічних циклів Гудвіна.
2. Охарактеризувати динаміку корисності споживчих благ.
3. Дати пояснення ортодоксальної теорії корисності.
4. Траєкторія попиту. Теорема Стоплера-Самуєльсона.
5. Вплив флуктуацій на динаміку споживчих благ.
6. Застосування законів Госсена.

Завдання для самостійної роботи:

Задача 1.

Проводиться аналіз діяльності підприємства, з метою вивчення можливості та доцільності управління величиною основного капіталу за допомогою зміни рівня виробництва. При дослідженні діяльності підприємства встановлено, що основний капітал в початковий момент часу перебуває на рівні 3590 тис. грн., інвестиційна динаміка росту капіталу 28 тис. грн./місяць і швидкість амортизації (зносу основних засобів) становить 2,9 тис. грн./місяць. Основним капіталом заплановано керувати таким чином, щоб підтримувати його на рівні пропорційному 0,78 об'єму виробництва.

• Реалізуючи модель економічних циклів Гудвіна (при величинах коефіцієнтів дійсних контрастів (коефіцієнтів рівняння споживання): $A = 0{,}65$, $B = 2598$ тис. грн.) зробіть висновок, як вплине:

– зменшення інвестиційної динаміки росту основного капіталу у два рази на частоту коливання його величини;

– зростання швидкості амортизації(зносу основних засобів) у три рази на частоту коливання величини основного капіталу.

Задача 2.

Проводиться аналіз діяльності підприємства, з метою вивчення можливості та доцільності управління величиною основного капіталу за допомогою зміни рівня виробництва. При дослідженні діяльності підприємства встановлено, що основний капітал в початковий момент часу перебуває на рівні 3570 тис. грн., інвестиційна динаміка росту капіталу 31 тис. грн./місяць і швидкість амортизації (зносу основних засобів) становить 3,6 тис. грн./місяць. Основним капіталом заплановано керувати таким чином, щоб підтримувати його на рівні пропорційному 0,6 об'єму виробництва.

• Реалізуючи модель економічних циклів Гудвіна (при величинах коефіцієнтів дійсних контрастів (коефіцієнтів рівняння споживання): $A = 0{,}65$, $B = 1025$ тис. грн.)

– Розрахуйте три бажані рівні основного капіталу та відповідні рівні виробництва при яких динаміка основного капіталу буде поводити себе згідно вище встановленого плану.

– Побудуйте графічну залежність величини основного капіталу та встановлюваного рівня виробництва від часу (час у межах 1..24 місяці).

– Зробіть висновок про величину основного капіталу на кінець першого року моделювання.

Задача 3.

Проводиться аналіз діяльності підприємства, з метою вивчення можливості та доцільності управління величиною основного капіталу за допомогою зміни рівня виробництва. Для досліджуваного підприємтсва є змога підтримувати інвестиційну динаміка росту капіталу в межах 31 тис. грн./місяць. При аналізі діяльності підприємства встановлено, що основний капітал в початковий момент часу перебував на рівні 2591 тис. грн. Основні засоби характризуються швидкістю амортизації 1,9 тис. грн./місяць. Менеджери підприємства ставлять за мету керувати основним капіталом таким чином, щоб підтримувати його на рівні пропорційному 0,91 об'єму виробництва. В довільному програмно-аналітичному середовищі реалізуйте модель економічних циклів Гудвіна (для якої відомі величини коефіцієнтів дійсних контрастів(коефіцієнти рівняння споживання): A = 0,55 та B = 1898 тис. грн.) та зробіть висновки:

– як вплине зменшення темпу інвестиційної динаміки росту основного капіталу у два рази на час (період) коливання його величини;
– та як вплине зменшення швидкості амортизації (зносу основних засобів) у чотири рази на частоту коливання величини основного капіталу.

Задача 4.

Проводиться аналіз діяльності підприємства, з метою вивчення можливості та доцільності управління величиною основного капіталу за допомогою зміни рівня виробництва. Для досліджуваного підприємтсва є змога підтримувати інвестиційну динаміка росту капіталу в межах 17 тис. грн./місяць. При аналізі діяльності підприємства встановлено, що основний капітал в початковий момент часу перебував на рівні 70258 тис. грн. Основні засоби характеризуються швидкістю амортизації 2,9 тис. грн./місяць. Менеджери підприємства ставлять за мету керувати основним капіталом таким чином, щоб підтримувати його на рівні пропорційному 0,91 об'єму виробництва.

• В довільному програмно-аналітичному середовищі реалізуйте модель економічних циклів Гудвіна (для якої відомі величини коефіцієнтів дійсних контрастів (коефіцієнти рівняння споживання): A = 0,65 та B = 2507 тис. грн.).
• Встановіть період коливань динаміки основного капіталу.
• Зробіть висновок, чи доцільно керувати капіталом за допомого зміни рівня виробництва, якщо прийнятним є період коливання: 1 рік.

Задача 5.

Для досліджуваного підприємтсва існує можливість підтримувати інвестиційну динаміку росту капіталу в межах 25 тис. грн./місяць. При аналізі діяльності підприємства встановлено, що основний капітал в початковий момент часу перебував на рівні 110258 тис. грн. Основні засоби характеризуються швидкістю амортизації 6,9 тис. грн./місяць. Менеджери підприємства ставлять за мету керувати основним капіталом таким чином, щоб підтримувати його на рівні пропорційному 0,83 об'єму виробництва. В довільному програмно-аналітичному середовищі реалізуйте модель економічних циклів Гудвіна (для якої відомі величини коефіцієнтів дійсних контрастів (коефіцієнти рівняння споживання): A = 0,7 та B = 41507 тис. грн.).

• Знайдіть величину інвестиційної динаміки росту капіталу при якій би величина періоду його коливань становила б 1 рік.
• Реалізацію моделі та розв'язок зобразіть графічно.

Тести

1. В першому варіанті моделі економічних циклів Гудвіна при встановленні бажаних рівнів основного капіталу (R)

$$R = \begin{cases} R_1 = \gamma \dfrac{\beta + K_1}{1-\alpha}, \ K < R \\ R_0 = \gamma \dfrac{\beta}{1-\alpha}, \ K = R \\ R_2 = \gamma \dfrac{\beta - K_2}{1-\alpha}, \ K > R \end{cases}$$

коефіцієнти політики капіталовкладень (K_1 та K_2) повинні задовольняти умову:

a) $K_1 > K_2$;
b) $K_1 < K_2$;
c) $K_1 = K_2$;
d) $K_1 < 0$, $K_2 > 0$.

2. В першому варіанті моделі економічних циклів Гудвіна основний капітал у часі зазнає:

a) стрибкоподібного періодичного зростання і спадання;
b) лінійного періодичного зростання і спадання;
c) залишається без змін;
d) зростає із фіксованим темпом.

3. В першому варіанті моделі економічних циклів Гудвіна рівень виробництва у часі зазнає:

a) стрибкоподібного періодичного зростання і спадання;
b) лінійного періодичного зростання і спадання;
c) залишається без змін;
d) зростає із фіксованим темпом.

4. Вкажіть неіснуючий недолік першого варіанту моделі економічних циклів Гудвіна:

a) стрибки у об'ємі виробництва і миттєва реакція капіталовкладень не відповідає дійсності
b) періоди спаду не перевищують значно періоди підйому
c) в моделі не передбачений ріст економіки
d) об'єм виробництва не залежить від споживання

5. У припущеннях першого варіанту моделі економічних циклів Гудвіна заданих двома залежностями (C – споживання, Y – об'єм виробництва, K – основний капітал, t – час)

$$C = \alpha Y + \beta$$

$$Y = C + \frac{dK}{dt}$$

коефіцієнти дійсних контрастів повинні задовольняти умови:

a) $\alpha < 0$
b) $\alpha > 0$
c) $\beta < C$
d) $\beta > C$

6. У припущеннях другого варіанту моделі економічних циклів Гудвіна враховуються фактори:
   a) вплив капіталовкладень на ріст об'єму виробництва;
   b) відсутність стрибкоподібних змін в об'ємі виробництва;
   c) запізнення зміни стану основного капіталу, відносно прийняття рішення про їх необхідність;
   d) амортизаційні втрати основного капіталу.

7. Згідно першого закону Госсена:
   a) зі зменшенням кількості певного блага його гранична корисність збільшується
   b) зі збільшенням кількості певного блага його гранична корисність зменшується
   c) зі зменшенням кількості певного блага його гранична корисність залишається незмінною

8. Крива байдужості відображає:
   a) склад кошика з n товарів з однаковою кількістю задоволення, яке отримує споживач
   b) склад кошика з n товарів з різною кількістю задоволення, яке отримує споживач
   c) комбінацію з двох товарів з однаковою кількістю задоволення, яке отримує споживач

9. Кожна точка на кривій байдужості відображає:
   a) однакові комбінації вибору товарів, але в загальному користь від кожного товару є однакова
   b) різні комбінації вибору товарів, але в загальному користь від кожного товару є однакова
   c) різні комбінації вибору товарів, але в загальному користь від кожного товару є різна
   d) однакові комбінації вибору товарів, але в загальному користь від кожного товару є різна

10. Про що свідчить крива байдужості, яка розміщена далеко від початку координат:

a) про більший рівень корисності, який вона характеризує для споживача
b) про менший рівень корисності, який вона характеризує для споживача
c) це не впливає на загальний рівень корисності

11. Криві байдужості розміщені
a) так, що є випуклими відносно початку координат
b) так, що є увігнутими до початку координат
c) як прямі, розташовані паралельно до вісі ординат

Відповіді до тестових завдань:

№ теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
відповідь	a	b	a	b	a	a , b	b	a	b	a	a

РОЗДІЛ 6. НЕСТІЙКІСТЬ ТА НЕЛІНІЙНІСТЬ ЯК ДЖЕРЕЛО НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

6.1. Нестійкість і нелінійність динамічних систем.

Протягом останніх десятиліть спостерігається підвищення інтересу до нелінійних динамічних моделей у всіх наукових областях (математика, хімія, фізика і т. д.). Відкриття того, що прості нелінійні моделі можуть демонструвати складну і хаотичну динаміку, підштовхнуло також деяких економістів до того, щоб зацікавитися цією областю. Фактично в літературі є багато прикладів нелінійних економічних моделей, які демонструють хаотичну динаміку. Проте в літературі немає стандартного визначення хаосу. Тому можна лише перерахувати типові характерні риси цього явища.

Нелінійність. Якщо процес лінійний, він не може бути хаотичним.

Детермінізм. У основі явища хаосу лежать детерміновані, а не вірогідності правила, яким слідує кожен майбутній стан системи.

Чутливість до початкових умов. Мала зміна в початковому стані системи може провести до радикально відмінної поведінки і іншого кінцевого стану. Ця властивість має на увазі, що дві траєкторії, що починаються в двох різних, але близьких точках, з часом розбігаються експоненціально. Ця критична залежність від початкових умов, і те, що експериментальні початкові умови ніколи не відомі повністю, роблять ці системи внутрішньо непередбачуваними.

Стійка нерегулярність. Прихований порядок, що включає велику або нескінченну кількість нестійких періодичних проявів, характеризує хаотичне явище. Цей прихований порядок формує інфраструктуру системи: хаотичний (дивний) аттрактор. Динаміка в хаотичному аттракторі *ергодична*. Це має на увазі, що протягом своєї еволюції система опиняється в невеликій околиці кожної точки на кожній з нестійких періодичних траєкторій, що знаходяться в межах хаотичного аттрактора. Довгостроковий прогноз, але не управління, здебільшого неможливе через чутливість до початкових умов, які можуть бути відомі тільки з кінцевим ступенем точності. Не дивлячись на труднощі управління хаотичними системами, багато дослідників займаються пошуком методів і засобів управління ними. Управління нелінійними системами може насправді виявитися легше, ніж управління лінійними, оскільки можливо лише за допомогою невеликого поштовху викликати велику зміну в системі (за рахунок чутливості до початкових умов). Фактично, керовані хаотичні системи володіють перевагою *гнучкості*: будь-яка з безлічі різних траєкторій може бути стабілізована невеликим управлінням, і можливо перемкнути систему з однієї періодичної траєкторії на іншу за допомогою дуже невеликої корекції її параметрів, без різкої зміни конфігурації системи або створення додаткових перешкод. Отже, це багатство можливої поведінки (нескінченних нестійких траєкторій) в хаотичних системах може бути використане для розширення уявлень про динамічну систему таким чином, який неможливий, якщо еволюція системи не є хаотичною. Це означає (якщо ми хочемо розглянути економічні додатки хаосу), що невеликі зміни в економічній політиці можуть мати великі наслідки для суспільного добробуту.

Отже, і в економіці управління динамічною періодичною системою є важливою задачею завдяки природі економічних коефіцієнтів, що змінюється в часі. Зокрема, управління динамічними системами і переклад їх від хаотичного і непередбачуваного до періодичної і передбаченої поведінки є інтенсивною областю дослідження протягом останніх років.

6.2. Аналіз повторень

У економіці є численні роботи — як теоретичні, так і емпіричні — щодо виявлення складної або хаотичної поведінки. Беручи до уваги, що стандартні методи, наприклад спектральний аналіз або функції автокореляції, не можуть розрізнити, чи згенерував часовий ряд детермінованим або стохастичним механізмом, цих складних засоби виявляється недосить, щоб забезпечувати надійні результати. Фактично, тест вимірювання кореляції, метричний підхід, розроблений Grassberqer і Procaccia, широко використовується в природних науках, і звично разом із зв'язаними процедурами, наприклад обчисленням показника Ляпунова, але його застосування до економічних даних було проблематичним. Реалізація цих алгоритмів пов'язана із специфічними вимогами як, наприклад, розширена безліч даних, яка не завжди доступна в експерименті, стаціонарність досліджуваних даних, тоді як багато тимчасових рядів нелінійне або не поводиться як гауссови.

Таким чином, застосування метричного підходу до порівняно невеликих зашумленних даних, які типові в економіці, дуже сумнівно. Щоб уникнути цих труднощів метричного підходу, був розроблений новий метод для виявлення детермінованого хаосу, названий *топологічним* (Mindlinetal., 1990, 1991;Tufillaroetal.).

Топологічний метод має декілька важливих переваг перед метричним методом:

1. Може застосовуватися до порівняно невеликих набором даних, які, наприклад, типові в економіці і фінансах.

2. Стійкий до шуму.

3. Оскільки топологічний аналіз підтримує тимчасове впорядкування даних, він здатний забезпечити додаткову інформацію про основну систему, що генерує хаотичну поведінку.

4. Можлива реконструкція дивного аттрактора.

Крім того, виявлення інваріантів топологічним методом дозволяє визначати моделі, що пояснюють дані, а послідовна топологічна класифікація хаотичних множин є перспективним кроком в розробці моделей, пророчих. Доведення нелінійних систем.

Аналіз повторень є прикладом топологічного методу і може представити корисну методологію виявлення нестаціонарної хаотичної поведінки і біфукації в тимчасових рядах.

Спочатку цей метод використовувався для виявлення повернень (циклів) і нестаціонарності тимчасових рядів, потім аналіз повторень був застосований до дослідження хаотичних систем, оскільки j повернення в поведінці — одна з найважливіших характеристик Р. хаотичних систем.

За допомогою *графіка повторень* (ГП) можливо знайти кореляцію в даних, яку неможливо знайти в початковому тимчасовому ряду. Цей метод не вимагає яких-небудь припущень про стаціонарність тимчасового ряду, припущень про основні рівняння руху і розподіленої поведінки. Він достатньо нечутливий до шуму, а графік повторень для динамічної системи зберігає інваріанти її динаміки. Він виявляється особливо корисним для випадків, в яких обмежена доступність даних і може бути порівнянний по ефективності з класичними методами аналізу хаотичних даних, особливо через свою здатність знаходити біфукацию. Аналіз повторень особливо придатний для дослідження економічних тимчасових рядів, для яких характерні шуми, недолік даних, і які представляють результати діяльності багатовимірних систем.

Графік повторень - це двовимірне представлення траєкторії. Він формується двовимірною $M \times M$ матрицею, де М- кількість входжень векторів $Y(i)$, одержаних при затримці вхідного сигналу. У матриці величина елементу з координатами (i, j)-це евклідова відстань між векторамии $Y(i)$ і $Y(j)$. У цій матриці горизонтальна вісь представляє індекс часу $Y(i)$, а вертикальна — зрушення за часоми $Y(j)$. У елементі масиву (i, j) точка проставляється, якщо $Y(i)$ достатньо близько до $Y(j)$; близькість міжу $Y(i)$ и $Y(j)$ виражається співвідношенням

$$\| Y(i) - Y(j) \| \leq d$$

де d — задане число.

Є два типи графіків повторень: пороговий (також відомий як матриця повторення) і безпороговий. Порогові графіки ГП симетричні щодо основної діагоналі. Крапки в цьому масиві розфарбовані згідно відстані між векторами. Звичайно, темний колір показує великі відстані, а світлий — короткі. Якщо текстура в межах такого блоку гомогенна, можна прийняти гіпотезу про стаціонарність даного сигналу протягом відповідного періоду часу; нестаціонарні системи викликають зміни в розподілі точок повторення на графіку, які відображаються світлішими областями.

Аналіз повторень використовується також для виявлення нестійких періодичних траєкторій в хаотичних тимчасових рядах. Bradley і Mantilla (2001) наводять приклад додатку ГП для послідовного аналізу хаотичного тимчасового ряду. Образи, що повторюються, формують блоки в графіку. Ці блоки відображають інтервали часу, коли траєкторія рухається уподовж або біля відповідного НПТ.

Метод графіка повторень не знайшов значної популярності, оскільки його графічний результат нелегко інтерпретувати. Zbilut J. P. запропонував метод статистичної квантифікації ГП — квантфікаційний аналіз повторень (КАП). Він визначає міру діагональних сегментів в графіках повторення. Ці заходи є показниками повторення, детермінізму, середньої довжини діагональних структур, ентропії і напряму.

Для того, щоб знайти НПТ, ми повинні створити графік повторень для траєкторії хаотичного аттрактора, проаналізувати структуру повторень, використати також квантифікацію ГП і інформацію, витягнуту з повторень, щоб індексуватися траєкторію і знайти відповідні значення змінних стану.

Крім того, ГП представляє корисний спосіб порівняння двох хаотичних систем. Наприклад, якщо ГП для двох траєкторій мають різну побудову блоків, вони не можуть відповідати одній і тій же системі, навпаки, ідентична блокова структура ГП визначає ідентичну динаміку. Аналіз повторень є корисним засобом для визначення нестійких періодичних траєкторій в хаотичних тимчасових рядах даних і біфуркаціоної поведінки, а також для встановлення виду динаміки системи. Розглянемо основи *теорії Флоке (Floquet)*.

Для виявлення нестійкої і хаотичної поведінки систем, для яких відома нелінійна динамічна модель, використовується теорія Флоке, що розширює теорію стійкості Ляпунова.

Управління системою, періодичною в часі, є складною задачею через природу коефіцієнтів, що змінюється в часі. Основна проблема полягає у тому, що власні значення періодичної матриці, що змінюються в часі, не визначають стійкість системи, і стандартні методи теорії управління не можуть застосовуватися безпосередньо.

Отже, один з можливих методів рішення таких проблем полягає в створенні еквівалентних, інваріантних в часі систем, придатних для застосування стандартних методів. Система, F інваріантна в часі, може бути одержана при використовуванні перетворення Ляпунова - Флоке$(L-F)$. Теорія Флоке відома зараз як теорія Флоке - Ляпунова, яка перетворює лінійну частину періодичного квазілінійного рівняння в інваріантну в часі форму, що зберігає початкові динамічні характеристики системи.

Стійкість системи визначається власними векторами матриці переходу, так що якщо речовинна частина всіх множників Флоке негативна, рішення стійке, тоді як позитивні показники указують на нестабільність.

Пропоновані методи повинні забезпечити корисний інструментарій для спрощення лінійних і нелінійних періодичних систем.. Оскільки методи аналізу і управління для систем, що не змінюються в часі, розроблені достатньо добре, тепер стане можливим використовувати ці методи і для періодичних в часі систем.

Цей метод широко використовується для оцінки стійкості систем малої розмірності з періодичними коефіцієнтами. Для систем, які характеризуються великим числом ступенів свободи, пропонується новий метод, що включає аналіз Флоке для оцінки домінуючих власних значень матриці переходу, використовуючи алгоритм Арнольді, без явного обчислення цієї матриці. Цей метод значно більш ефективний в обчислювальному відношенні, ніж класичний і ідеально підходить для систем з великим числом ступенів свободи.

Теорія Флоке може бути використана для аналізу біфуркації поведінки, що забезпечує засіб вивчення динамічних механізмів, які можуть змінити структурну стійкість системи, коли деякий параметр поволі змінюємося з часом.

Розглянемо систему лінійних, однорідних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами:

$$x' = G(t)x \tag{6.1}$$

де $G(t)$ - дійсна $m \times m$ матрична функція, $t \in R$;

x- вектор-стовпець розмірності m.

$G(t)$ - періодична функція з мінімальним періодом T.

Розглянемо довільну множину m рішень системи (6.1), лінійно незалежних для будь-якого $t \in R$:

$$x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t).$$

Матриця $X(t)$, складена із стовпців $x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)$ називається *фундаментальною матрицею.*

Якщо $X(0) = E$, де E - одинична $m \times m$ матриця, то $X(t)$ називається *головною фундаментальною матрицею.*

Матриця

$$F = X(T) \tag{6.2}$$

називається *матрицею переходу Флоке,* або *монодромною матрицею.*

Власні значення матриці F називають *характеристичними множниками системи (2)*, або *мультиплікаторами системи.*

Властивості мультиплікаторів системи ґрунтуються на наступній теоремі:

Число 1 є мультиплікатором системи (1) в тому і лише в тому випадку, якщо існує таке рішення $x(t)$*, не рівне тотожне нулю на всій дійсній осі, що*

$$x(t+T) = \lambda x(t), \ t \in R \tag{6.3}$$

З теореми, зокрема, витікає, що

1) система (1) має періодичне рішення в тому і лише тому випадку, якщо 1 є її мультиплікатором;

2) всі рішення системи є періодичними, якщо матриця переходу Флоке дорівнює одиничній: $\Phi(T) = E$.

Типи біфуркації визначається залежно від способу, яким мультиплікатори Флоке покидають одиничне коло. Принципово різними є три випадки:

а)якщо мультиплікатор Флоке залишає одиничне коло через +1, ми одержуємо транскритичну, симетрично розривну біфуркацію або циклічну складку;

б) якщо мультиплікатор Флоке проходить через -1, відбувається подвоєння періоду біфуркацїє (перекинута біфуркація);

в)якщо комплексно зв'язані мультиплікатори Флоке залишають одиничне коло уздовж уявної осі, то має місце вторинна біфуркація Хопфа (Hopf).

Обчислення матриці переходу Флоке зіставляє всі стани системи в даний момент з тими ж станами на один період пізніше. Розмір цієї матриці переходу рівний загальному числу станів системи.

Аналіз характеристичних множників дозволяє визначити стійкість рішень системи (1). Найближчі до уявної осі з будь-якої сторони власні значення виконують важливу роль і називаються провідними власними значеннями. Фактично, якщо всі характеристичні множники розташовані в одиничному колі на комплексній площині, то всі рішення збігаються до нуля. Якщо який-небудь з характеристичних множників знаходиться за межами одиничного кола, то існує необмежене рішення. Якщо всі множники знаходяться всередині або на одиничному колі, то умови стійкості визначаються відмінністю між і геометричної кратністю алгебри множників, розташованих на одиничному крузі. Алгебраїчна кратність власного значення — це його кратність як рішення характеристичного рівняння, а геометрична кратність — це розмірність підпростору, визначуваного лінійно незалежними власними векторами, відповідними даному власному значенню. Геометрична кратність власного значення завжди не більше його алгебраїчної кратності.

Теорія Флоке активно використовується для дослідження моделей економічної динаміки, зокрема, моделі Хікса і ін.

Розглянемо тепер *можливості об'єднання* описаних вище двох інструментів у області аналізу тимчасових рядів.

Основна ідея такого об'єднання була виказана Auerbachetal. Мета полягала в тому, щоб:

а) витягувати всі періодичні траєкторії в експериментальному хаотичному тимчасовому ряду і обчислити їх стійкість за допомогою показника Ляпунова;

б) ця інформація може бути використана для того, щоб описати важливі властивості загальних хаотичних множин. Передбачалося, що тимчасові ряди достатньо великі, щоб можна було виділити нестійкі періодичні орбіти з безлічі хаотичних спостережень порядку n, залежно від об'єму доступних даних. Після локалізації періодичних орбіт методами, схожими на графік повторень, для обчислення власних значень і власних векторів для кожної точки періодичного циклу використовувалася матриця Якобі.

Об'єднання аналізу повторень і теорії Флоке дозволяє подолати деякий недолік цього методу.

Фактично, для даного тимчасового ряду ми могли б використовувати аналіз повторень, щоб знайти хаотичну поведінку, зокрема, локалізувати нестійкі орбіти і біфуркацію. Як сказано вище, виявлення періодичних орбіт в експериментальних даних — центральний момент у області управління хаосом. Крім того, нестійкі періодичні орбіти, що входять до складу хаотичного аттрактора, є основними для розуміння хаотичної динаміки. Нестійкість, характерна для цих траєкторій, утрудняє їх виявлення. Інструментальні засоби розпізнавання НПТ в тимчасових рядах дотепер не розроблені.

Використовуючи графік повторень, ми можемо виділити періодичні траєкторії з даного тимчасового ряду, і тепер необхідно обчислити їх стійкість. Це важливий момент, оскільки властивості стійкості НПТ визначають, яким чином траєкторії переміщаються уподовж і біля аттрактора. Питання стійкості може бути вирішений з використанням теорії Флоке. Обчислюючи власні значення і власні вектори матриці, ми можемо визначити стійкість періодичної орбіти.

6.3. Управління хаосом

Однією з цікавих проблем є *управління хаосом.*

Термін «управління хаосом» був введений E. Ott, З. Grebogi і J. Yorke в опублікованій ними в журналі PhysicalReviewLetters (1990 р.) статті «Управління хаосом». Ключовим елементом цієї статті була демонстрація того, що значущої зміни в поведінці хаотичної системи можна досягти за допомогою невеликої, найдрібнішої корекції параметрів системи і, зокрема, ця корекція може бути зроблена без впливу на властивості системи. Після виходу цієї статті управління хаотичними системами привернуло підвищену увагу дослідників з інших областей.

В цілому методи управління хаосом можуть бути розділені на два основні класи:

1) замкнутий цикл, або методи зворотного зв'язку;

2) відкритий цикл, або методи без зворотного зв'язку, де дії залежать від інформації про стан. Ідея цього методу в тому, до щоб змінювати поведінку нелінійних систем, прикладаючи правильно вибрану вхідну функцію.

Далі можна розділити методи на дискретні і безперервні в *часі,* а також методи, в яких дії додаються до параметрів і до динамічних змінних відповідно.

Розглянемо *методи замкнутого циклу (із зворотним зв'язком).* Цей клас включає ті методи, які вибирають дію, засновану на знанні про стан системи, і орієнтовані на управління заданою динамікою. Серед них ми можемо розглянути так званий випадково пропорційний зворотний зв'язок (OGY) і метод, запропонований Pyragas, в якому застосовується затриманий зворотний зв'язок з однією із змінних системи. Всі ці методи є модально незалежними в тому значенні, що знання про систему, необхідне, для вибору дії може бути одержане за допомогою простого спостереження за системою протягом деякого прийнятного часу навчання.

Метод OGY ґрунтується на визначенні періодичної траєкторії і застосуванні невеликих дій до параметрів системи, щоб стабілізувати нестійкі стани або нестійкі періодичні траєкторії. Хоча ці дії додається тільки тоді, коли система близька до бажаної періодичної траєкторії і доступний єдиний часовий ряд, використовування його для стабілізації обший стійкій періодичній траєкторії (НПТ) вимагає наявності точної інформації про цільову траєкторію. Отже, цей метод неадекватний для нестаціонарних систем або задач вибору мети. Цей метод вимагає, крім того, первинно великих змін параметрів і обмеженийпри стабілізації нестійких періодичних фіксованих точок сідла. Хоча метод OGY добре зрозумілий з теоретичної точки зору, експериментальна реалізація його серйозно обмежується тим, що всі величини, необхідні для обчислення значень параметрів управління системою, безпосередньо не задаються в експериментальній послідовності даних, і щоб виконувати управління, необхідно застосувати складний аналіз даних. У протилежність методу OGY метод управління хаосом, запропонований Pyragas, може легко бути застосований до експериментальних систем, де рівняння руху невідомі. Основна ідея методу Pyragas полягає в простому використовуванні затриманого стану як елементу зворотного зв'язку. Перевага цього методу у тому, що він не вимагає повної інформації про цільову НПТ; але в ньому використовується постійна затримка часу в блоці зворотного зв'язку.

Розглянемо *методи відкритого циклу (без зворотного зв'язку).*

Цей клас включає ті стратегії, в яких розглядаються ефекти зовнішніх дій (незалежно від знань про фактичний динамічний стан) на еволюцію системи. Періодичні або стохастичні дії розглядаються як причина корінних змін в динаміці хаотичної системи, що приводять, кінець кінцем, до стабілізації деякої періодичної поведінки. Ці підходи, проте, в загальному випадку обмежені тим, що їх дія не є цілеорієнтірованим, тобто кінцевий періодичний стан не може бути визначене управляючою системою. Критичні моменти для всіх таких методів управління хаосом наступні:

а)припущення про те, що хаос істотно залежимо від малих змін в поточному стані і, отже, стан системи непередбачуваний в довгому періоді, також має на увазі, що поведінка системи може бути змінене використовуванням невеликих обурень;

б) хаотична множина, в якому знаходиться траєкторія хаотичного процесу, може містити в собі багато нестійких періодичних траєкторій, так що, на відміну від лінійної системи, в якій заданий параметр припускає тільки один тип руху, в нелінійній системі одночасно можливе багато різних напрямів еволюції;

в) через ергодичності траєкторія відвідує околицю кожної періодичних траєкторій (орбіт), що формують аттрактор.

Управління хаотичними системами має на увазі стабілізацію нестійких періодичних траєкторій. Основна ідея полягає в очікуванні природного підходу хаотичної траєкторії до бажаної періодичної поведінки, і коли траєкторія наближається до цієї бажаної періодичної траєкторії, вставленої в аттрактор, необхідно надати невеликі дії для стабілізації такої орбіти. Цей підхід використовує ідею про те, що критична чутливість хаотичної системи до зміни в своїх початкових умовах може бути, фактично, дуже бажаної в практичних експериментальних ситуаціях. Представимо *різні економічні додатки теорії хаосу.*

Історично економісти використовували лінійні рівняння, щоб моделювати економічні явища, оскільки з ними достатньо легко поводитися і вони звичайно дають єдине рішення. У міру того, як математичні і статистичні інструментальні засоби, використовувані економістами, ставали складнішими, стало неможливо ігнорувати той факт, що багато важливих і цікавих явищ не піддаються такій лінійній обробці. Отже, управління, принаймні, деякими економічними процесами стає одній з найважливіших і значніших задач, що зустрічаються економістам. Важливі явища, для яких лінійні моделі не підходять, включають депресії і періоди підйому, спалахи цін на фондовій біржі і відповідні крахи, стійкі зсуви валютного курсу, регулярні і нерегулярні ділові цикли. Отже, фахівці в економічній теорії звертаються до дослідження нелінійної динаміки і, по можливості, інструментів теорії хаосу, щоб моделювати ці і інші явища.

Фактично недавно з'явилися деякі додатки хаосу в методах управління економічними системами, розглядаючи розпізнавання і управління циклічними явищами і оцінку складної динаміки як засоби, наприклад, виявлення ділового циклу, сезонних змін в метеорології і варіації популяцій в екології. Приклади додатків: Holystetat. розробили прикладний метод Ott Greboqi-Yorke для моделювання поведінки двох конкуруючих фірм; Kopel показав, використовуючи просту модель ринкової динаміки, що розвивається, як хаотична поведінка може управлятися невеликою зміною параметра, який доступний ЛПР, і як фірми можуть поліпшити своє функціонування, використовуючи метод цільового управління. Xuetal. розробив метод виявлення траєкторій типа НПТ в хаотичному тимчасовому ряду моделі ділового циклу Kaldor. Kaas довів, що в межах макроекономічної не рівноважної моделі, стійкі і прості адаптивні політики не здатні стабілізувати ефективні стійкі стани і приводять до періодичних або нерегулярних коливань для великої множини параметрів управління. Додаток методів управління до хаотичних динамічних систем показує, що уряд може, у принципі, стабілізувати нестійку рівновагу Вальраса протягом короткого часу, змінюючи податкові показники або державні витрати.

Лінійні моделі стають в корінні невірними, вводячи в оману, перекошуючи розуміння економіки. У цьому контексті хаос є радикальною зміною перспективи розвитку економічної науки, оскільки не тільки здатний пояснювати нерегулярну динамічну поведінку, яка характеризує економічні явища, але також забезпечує корисний засіб для стабілізації нелінійних динамічних систем. Дійсно, багато нелінійних динамічних систем, навіть якщо вони показують дуже нерегулярну поведінку, фактично піддаються стабілізації, ніж істотно відрізняються від системи з нерегулярністю, залежною виняткова від стохастичних обурень. Хаотичні системи показують безперервну залежність від параметрів, а управління ними полягає в невеликих змінах в цих параметрах, які ведуть до змін в динамічних властивостях моделі. Деякі з цих параметрів представляють правила економічної теорії, як, наприклад, ставка оподаткування, темп фінансового зростання (приріст) або державні витрати, і встановлюються фахівцями в цій області. Отже, уряд має значно вплив на динамічні результати.

Використовуючи такі фундаментальні характеристики хаотичних систем, як чутливість до початкових умов і наявність нестійких траєкторій, уряд може добитися результатів лише невеликим втручанням. Отже, фахівці в політиці, які хочуть добитися якнайкращого результату в зростанні зайнятості, зростанні добробуту, не можуть використовувати економічні моделі, засновані на лінійності і припущенні простоти традиційних економічних моделей. Втручання політики, навпаки, повинне бути засноване на міркуваннях про те, що економіка є складною системою. Звичайно, це має на увазі використовування типових інструментальних засобів дослідження складних систем.

З цієї точки зору аналіз повторень і теорія Флоке є корисними інструментами аналізу і управління складною системою. Крім того, в аналізі тимчасових рядів запропонована методологія, комбіноване використовування цих інструментальних засобів дозволяє долати труднощі прикладного використовування традиційних інструментів, а також деяких відоміших складних способів, як, наприклад, показник Ляпунова. Фактично, наприклад, аналіз повторень виявляється особливо корисним для випадків, в яких обмежений доступ до даних, для виявлення нестійких періодичних траєкторій, оскільки він зберігає незмінність динаміки. Теорія Флоке забезпечує засіб вивчення динамічних механізмів, які можуть змінити структурну стійкість системи, коли деякий параметр поволі змінюється з часом. Тоді як інші методи можуть бути використані для: систем, де періодичні коефіцієнти можуть бути виражені залежно від невеликого параметра, техніка перетворення Ляпунова — Флоке не має такого обмеження, і, отже, вона може бути застосована і до загальної періодичної системи.

6.4. Моделювання хаотичної динаміки в економіці

Сучасна економіка як складна система розвивається нерівномірно, їй притаманні як режими стійкого функціонування, так і режими хаотичної динаміки. Останнім часом економісти намагаються інтерпретувати хаотичні явища в економіці в термінах детермінованих систем, серед яких широко використовуються дискретні відображення, розглянуті в попередній темі. Так, логістичне відображення та його модифікації завдяки їхнім універсальним властивостям і здатності описувати процеси з доволі складною динамікою широко використовуються в побудові моделей економічної динаміки на макро- і мікрорівні. Розглянемо кілька прикладів використання цього відображення в економіці.

Приклад 1. Класичне логістичне відображення

$$x_{n+1} = \lambda x_n (N - x_n), \tag{6.4}$$

яке в біології використовується для аналізу зростання чисельності популяції, можна застосовувати під час дослідження динаміки зростання малих підприємств. Як було показано в попередній темі, за певних умов у такій системі виникає множина біфуркацій подвійного періоду, а при великих n у системі виникає хаос.

Або в моделі адаптації фірми в ринкових умовах [12] її стратегію можна описати логістичним рівнянням:

$$x_{t+1} = \lambda (x_t - L) x_n (1 - x_t / H) + x_t, \tag{6.5}$$

де x_t — рівень доходу фірми в момент часу t; λ — параметр, що залежить від тривалості виробничого циклу та характеризує певний спосіб виробництва; L — рівень прибутку, необхідний для того, щоб обсяги продажу в майбутньому забезпечили нормальний рівень прибутку; H — максимальний рівень прибутку. Можна показати, що рівняння (16.2) зводиться до класичного логістичного відображення, і тому при деяких значеннях параметрів ця модель описує хаотичне поводження системи.

Приклад 2. Процеси ціноутворення в павутиноподібній моделі фірми можна також розглядати за допомогою логістичного відображення. Оскільки залежність надлишкового попиту D на товар від його ціни P можна описати рівняннями:

$$H = \int p(q) \ln p(q) dq,$$

де q — кількість товару; H — функція корисності, то максимум функції корисності досягається при $p(q) = \exp\left(-r(q-q_0)^2\right)$. При великому q на ринку виникає хаос у поводженні цін. $p_{n+1} = D_\lambda(p_n) = \lambda p_n(1-p_n)$

Приклад 3. Аналогічну модель можна побудувати для інвестиційної динаміки. Зі зростанням інвестицій економіка наближається до інвестиційного бар'єру. Лаг між інноваціями та їх реалізацією зменшується. При цьому зменшується можливість апробування альтернатив і зростає загальна невизначеність. Орієнтація на поточну кон'юнктуру спричинює надлишок капіталу, зниження темпів виробництва та продуктивності, що може призвести до інвестиційної кризи на ринках капіталу. Логістичне відображення можна також використовувати в дослідженні критичних режимів та хаосу на фондових і валютних ринках [9].

Приклад 4. Розглянемо модель самоорганізації ринку праці, динаміка якої залежить від кількості зайнятих у галузі $N_1(t)$ у певний момент часу. Передбачається, що місткість ринку праці стала й дорівнює N, тоді $N - N_1(t)$ — кількість потенційних безробітних або кількість вільних робочих місць. Розглядаються ймовірність того, безробітний знайде роботу в проміжку часу $[t, t+1]$, яка залежить від кількості вільних робочих місць $W_1(t) = k_1(N - N_1(t))$, та ймовірність звільнення, що залежить від кількості вільних робочих місць $W_2(t) = k_2 N_1(t) + k_3(N - N_1(t))$. Вважається, що $k_1, k_2 > 0, k_3 < 0$. Тоді рівняння моделі має вигляд:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = W_1(t)(N - N_1(t)) - W_2(t)N_1(t). \qquad (6.6)$$

Можна показати, що існує лінійна заміна змінних, яка приводить рівняння (16.3) до класичного логістичного відображення (16.1).

Приклад 5. Деякі моделі мають форму, схожу на рівняння класичного логістичного відображення. Розглянемо, наприклад, макроекономічну модель зростання, запропоновану Хаавельмо [2]:

$$\frac{dN}{dt} = N\left(a - \frac{bN}{Y}\right), \qquad a, b > 0,$$

$$Y = AN^\alpha, \qquad A > 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

де N — чисельність населення; Y — реальний обсяг виробництва; a, b, A, α — константи. Після підставлення другого рівняння в перше дістанемо:

$$\frac{dN}{dt} = N\left(a - \frac{bN^{1-\alpha}}{A}\right).$$

Увівши дискретний час та замінивши похідні першими різницями, після заміни змінних запишемо:

$$x_{t+1} = (1 + a)x_t(1 - x_t^{1-\alpha}),$$

де нова змінна визначається співвідношенням

$$N_t = x_t\left(\frac{A(1 + a)}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Отже, можна побачити, що закон зростання являє собою узагальнення логістичного відображення.

Якщо взяти, скажімо, N = 1/2, то для a < 4 рівновага буде стійкою, тобто вона досягається будь-якою траєкторією, що починається в довільній точці. Але при 4 < a < 5,75 траєкторії не будуть рівноважними, а залишатимуться в області, обмеженій нулем та одиницею. Фактично тільки-но параметр a > 4, нестійка точка рівноваги розпадається на дві стійкі точки з періодом два, тобто відбуваються біфуркації подвійного періоду. При значеннях параметра, що перевищують 4,8, двоперіодичний цикл стає нестійким, і кожна двоперіодична точка розпадається на дві чотириперіодичні точки.

Зі зростанням a цей біфуркаційний процес триває, генеруючи невироджені орбіти періоду 2k (k = 2, …). Область, усередині якої зароджуються стійкі орбіти періоду k, які далі стають нестійкими та розпадаються на 2k-періодичні орбіти, обмежена значенням параметра $a_c \approx 5{,}54$ (точне його значення невідоме). Інтервал $a_c < a < 5{,}75$ називають областю хаосу.

У цьому підрозділі ми розглянули приклади застосування для моделювання хаотичної динаміки в економічних системах однієї з найпростіших нелінійних моделей — логістичного відображення. Зрозуміло, що для побудови адекватних моделей економічної динаміки часто доводиться застосовувати складніші моделі, наприклад багатовимірні відображення, системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Розглянуті приклади показують, що процеси, які описуються навіть простими нелінійними моделями, при деяких значеннях параметрів мають хаотичне поводження. Воно здається випадковим і може помилково пояснюватися дією неврахованих або випадкових факторів. Але в детермінованих нелінійних моделях хаос породжується саме нелінійністю. З цього випливає, що під час побудови моделей економічної динаміки введення теоретично обґрунтованих нелінійних залежностей поряд із використанням випадкових змінних дає змогу успішно пояснювати різноманітні економічні флуктуації.

6.5. Проблеми дослідження багатомірних систем

Ступінь подробиці моделювання досліджуваних об'єктів і процесів залежить від мети моделювання. Задача моделювання полягає в тому, щоб побудувати модель процесу, що містить можливо менше число змінних і довільних параметрів. У той же час така модель повинна правильно відбивати властивості процесу.

Переважна більшість моделей соціально-економічних систем містить більше двох змінних. Існують методи дослідження систем зі зниженням їх розмірності. Один із цих методів полягає в розгляді системи з погляду динамічної нерівномірності її складових. У багатьох випадках аналіз динаміки систем приводить до цілого набору часових масштабів (ієрархії часів), обумовлених відмінностями в кілька порядків між значеннями параметрів або змінних. У результаті значення одних змінних змінюються набагато швидше, чим значення інших, які в остаточному підсумку й будуть визначати стан системи в цей момент часу. Такі системи отримали назву *швидко-повільних* або різнотемпових систем.

Різнотемпова система — це динамічна система, у якій присутні процеси, що відбуваються в різних масштабах часу. Різнотемпові системи описують соціально-економічні явища й процеси, у яких поступове еволюційне нагромадження малих змін згодом приводить до стрибкоподібного переходу системи на новий динамічний режим.

Динаміка коливального процесу різнотемпових систем характерна наявністю ділянок двох типів: «повільної» зміни й швидких «стрибків» з одного стану на інше. Ван-дер-поль запропонував називати такі коливання *релаксаційними*.

Одним з найбільш ефективних методів дослідження різнотемпових систем є метод інтегральних різноманіть. Основи теорії інтегральних різноманіть були закладені в роботах Н. Н. Боголюбова і Ю. А. Митропольского. Під інтегральним різноманіттям тут розуміється гладка інваріантна поверхня диференціальної системи. Великий інтерес представляють інтегральні різноманіття меншої розмірності, чим розмірність вихідної моделі.

Інтегральні різноманіття розмірності повільної змінної називаються *повільними інтегральними різноманіттями*. Їхнє використання дозволяє:

- конструювати спрощені моделі досліджуваних процесів;
- знижувати розмірність досліджуваних моделей;
- позбутися від обчислювальної твердості шляхом переходу до «м'якого» моделювання.

При цьому більш прості моделі з високим ступенем точності відбивають поведінку вихідних моделей.

Облік тимчасової ієрархії процесів дозволяє скоротити число диференціальних рівнянь. «Зовсім повільні» змінні не міняються на протязі часу розглянутих процесів, і їх можна вважати постійними параметрами. Для «швидких» змінних можна замість диференціальних рівнянь записати алгебраїчні рівняння для їхніх стаціонарних значень, оскільки «швидкі» змінні досягають своїх стаціонарних значень практично миттєво в порівнянні з «повільними».Інший метод зниження розмірності систем полягає в дослідженні їх періодичної динаміки за допомогою відображень, що виникають на перетинах Пуанкаре.

6.6. Методи зниження розмірності систем

6.6.1. Метод редукції системи

6.6.1.1. Параметри порядку й принцип підпорядкування

Нехай є три групи змінних *x, y, z*:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y, z), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = F(x, y, z). \end{cases}$$

Змінні змінюються з різними характерними часами, причому $T_x << T_y << T_z$. Нехай ми спостерігаємо за змінною *y*, характерний час зміни якої – T_y. Тоді за час T_y «зовсім повільна» змінна *z* практично не буде змінюватися, і її можна вважати постійним параметром, позначимо його z^*.

Система диференціальних рівнянь із урахуванням цієї обставини буде містити два рівняння й може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y, z^*), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y, z^*). \end{cases}$$

Відзначимо, що z^* не є істинно стаціонарним значенням, «повільна» змінна *z* буде продовжувати мінятися й «вести» за собою більш швидкі змінні *x* і *y*. У цьому змісті повільна змінна є провідною, або «параметром порядку».

Розглянемо тепер рівняння для *x*. Ця «швидка» змінна змінюється значно швидше, чим *y*, і за час T_y встигне досягтися свого стаціонарного значення. Таким чином, для *x* можна ввести квазістаціонарне співвідношення (тобто диференціальне рівняння замінити алгебраїчним):

$$P(x, y, z^*) = 0, \qquad \text{або}$$

$$x = \bar{x}(y, z^*).$$

По суті це співвідношення відіграє роль рівняння стану. У таких випадках говорять, що змінні *x* підлеглі змінним *y* та *z*.

Таким чином, завдяки обліку ієрархії часів, вихідну систему із трьох диференціальних рівнянь вдається звести до одного диференціального рівнянню для змінної *y*:

$$\frac{dy}{dt} = Q(\bar{x}(y, z^*), y, z^*).$$

Такий метод називається методом редукції системи відповідно до ієрархії часів.

6.6.1.2. Теорема Тихонова

Математично строге обґрунтування застосування методу редукції системи відповідно до ієрархії часів і формулювання умов його застосовності дана в роботі А. Н. Тихонова (1952).

Розглянемо найпростіший випадок двох диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=\varphi(x,y),\ \frac{dy}{dt}=G(x,y). \tag{6.1}$$

Нехай y – повільна, а x – швидка змінна. Це означає, що відношення приростів Δy і Δx за короткий проміжок часу Δt багато менше одиниці:

$\Delta y/\Delta x<<1$.

Швидкість зміни x значно перевершує швидкість зміни y, тому праву частину першого рівняння можна записати у вигляді:

$\varphi(x,y)=AF(x,y),\ \ \textit{де}\ A>>1.$

Перше рівняння системи можна представити у вигляді:

$$\frac{dx}{dt}=AF(x,y).$$

Розділивши ліву й праву частину рівняння на A и позначивши $\varepsilon=1/A$, одержимо *повну* систему рівнянь, тотожну вихідної:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=AF(x,y),\ \frac{dy}{dt}=G(x,y), \tag{6.2}$$

де $\varepsilon<<1$ – *малий параметр.*

Якщо характер розв'язку не зміниться при устремлінні малого параметра ε до нуля (умови цієї обставини й становлять зміст теореми Тихонова), можна спрямувати ε до нуля й одержати для «швидкої» змінної x замість диференціального рівняння – алгебраїчне.

$$F(x,y)=0,\ \frac{dy}{dt}=G(x,y), \tag{6.3}$$

На відміну від повної така система називається *виродженою*. Фазовий портрет такої системи представлений на мал. 6.2.

Фазові траєкторії в будь-якій точці фазової площини за винятком ε-*околиці* кривій $F(x, y) = 0$ мають нахил, обумовлений рівнянням:

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon\frac{G(x,y)}{F(x,y)}\approx\varepsilon<<1,$$

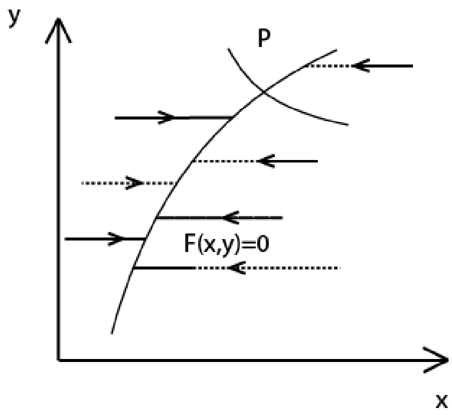


Рис.6.2. Фазовий портрет системи

тобто розташовані майже горизонтально. Це області швидких рухів, при яких уздовж фазової траєкторії $y = const$, а x швидко змінюється. Досягшись по одній з таких горизонталей *ε-околиці* кривій $F(x, y) = 0$ система потім буде рухатися по цій кривій.

Швидкість руху по горизонтальних ділянках траєкторії $dx/dt \approx 1/\varepsilon = A$ дуже велика в порівнянні зі швидкістю руху в околиці кривій $F(x, y) = 0$. Тому загальний час досягнення якогось стану на кривій $F(x,y)$ визначається лише характером руху уздовж цієї кривій, тобто залежить лише від початкових значень повільної змінної y і не залежить від початкових значень швидкої змінної x.

Відзначимо, що квазістаціонарні значення швидких змінних є функціями не остаточних стаціонарних значень повільних змінних, а лише їхніх миттєвих значень. У цьому змісті говорять про те, що швидка змінна «підлегла» повільної.

Теорема Тихонова встановлює умови редукції системи диференціальних рівнянь із малим параметром (умови заміни диференціальних рівнянь для швидких змінних – алгебраїчними).

Запишемо систему N рівнянь, частина з яких містить малий параметр ε перед похідною.

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx_p}{dt} = F_p(x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_N), & (6.4) \\ \dfrac{dx_q}{dt} = F_q(x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_N). & (6.5) \end{cases}$$

Назвемо систему (6.4) *приєднаною*, а систему (6.5) – *виродженною*.

Розв'язок *повної* системи (6.4-6.5) прагне до розв'язку *виродженної* системи (6.5) при $\varepsilon \to 0$, якщо виконуються наступні умови:

а) розв'язки повної й приєднаної системи єдині, а праві частини безперервні;

б) розв'язок $x_1 = \varphi(x_1, x_2, ..., x_N), ..., x_r = \varphi(x_1, x_2, ..., x_N)$ являє собою ізольований корінь алгебраїчної системи $F_p(x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_N) = 0, p = 1, ..., r$ (в околиці цього кореня немає інших корінь);

в) розв'язок $x_1, x_2, ..., x_r$ – стійка ізольована особлива точка приєднаної системи (6.4) при всіх значеннях $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_N$;

г) початкові умови $x_1^0, x_2^0, ..., x_r^0$ потрапляють в область впливу стійкої особливої точки приєднаної системи.

Число початкових умов виродженної системи менше, чим повної: початкові значення швидких змінних не використовуються у виродженної системи. Згідно з теоремою Тихонова, якщо виконується умова в), результат не залежить від початкових умов для змінних приєднаної системи.

Таким чином, необхідною умовою редукції є наявність малого параметра в рівняннях (6.4).

Становить інтерес система двох диференціальних рівнянь виду (6.2), у якій особлива точка розташована на нестійких галузях кривій $F(x, y) = 0$. Така система робить релаксаційні коливальні рухи.

Теорема Тихонова явно або неявно застосовується при дослідженні багатьох моделей фізичних, біологічних і соціально-економічних систем.

6.6.1.3. Використання методу редукції для аналізу системи

Розглядається система рівнянь, яка наведена в безрозмірному виді:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_2 x_2 + x_1^2 \end{cases} \tag{6.6}$$

Знайти стаціонарні стани системи (6.6), що реалізується на практиці.

Розв'язок:

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт k_1 дуже малий. Тоді якщо величини x_1 і x_2 малі (що дозволяє зневажити в першому наближенні квадратичним членом), то x_1 змінюється дуже повільно. Як видно з першого рівняння системи (6.6), приріст x_2 забезпечується членом x_1^2, а оскільки x_1 змінюється дуже повільно, можна чекати, що й приріст x_1^2 невеликий. Якщо коефіцієнт k_2 багато більше k_1, то величиною $\dot{x}_2$ можна зневажити в порівнянні з $k_2 x_2$. Уважаючись

$$\dot{x}_2 \approx 0,$$

з другого рівняння системи (6.6) одержимо вираження:

$$x_2 \approx x_1^2 / k_2.$$

У цьому випадку змінна x_2 підлегла змінної x_1, а змінна x_1 є параметром порядку. Тоді система рівнянь (6.6) зводиться до рівняння

$$\dot{x}_1 \approx k_1 x_1 - x_1^3 / k_2, \tag{6.7}$$

що має три стаціонарні точки:

$$\bar{x}_1^{(1)} = 0, \ \bar{x}_1^{(2)} = \sqrt{k_1 k_2}, \ \bar{x}_1^{(3)} = -\sqrt{k_1 k_2}.$$

Аналіз стаціонарних точок показує:

- стаціонарна точка $\bar{x}_1^{(1)} = 0$ рівняння (6.7), відповідна до стаціонарної точки $\bar{x}_1^{(1)} = 0, \ \bar{x}_2^{(1)} = 0$ вихідної двовимірної системи (6.6), є репеллером;
- стаціонарна точка $\bar{x}_1^{(2)} = \sqrt{k_1 k_2}$ рівняння (6.7), відповідна до стаціонарної точки $\bar{x}_1^{(2)} = \sqrt{k_1 k_2}, \ \bar{x}_2^{(2)} = k_1$ вихідної двовимірної системи (6.6), є аттрактором.

Отже, у нелінійній системі (6.6) на практиці реалізується стаціонарний стан

$\bar{x}_1 = \sqrt{k_1 k_2}, \; \bar{x}_2 = k_1.$

Таким чином, використовуючи принцип підпорядкування змінних, ми змогли зробити висновок про результати розв'язку двомірної системи на основі аналізу її одномірного аналога.

6.6.2. Метод відображення Пуанкаре і його властивості.

Крім принципу підпорядкування змінних існує ще один механізм дослідження періодичного руху зі зниженням порядку системи – метод перетинів Пуанкаре.

Нехай γ – замкнена траєкторія системи

$$\dot{x} = f(x). \tag{6.8}$$

Виберемо на цій траєкторії точку x_0 і проведемо через неї перетин Σ, що представляє собою малу частину площини, яка *трансверсально* (під ненульовим кутом) перетинає траєкторію γ у точці x_0 (див. рис. 6.1).

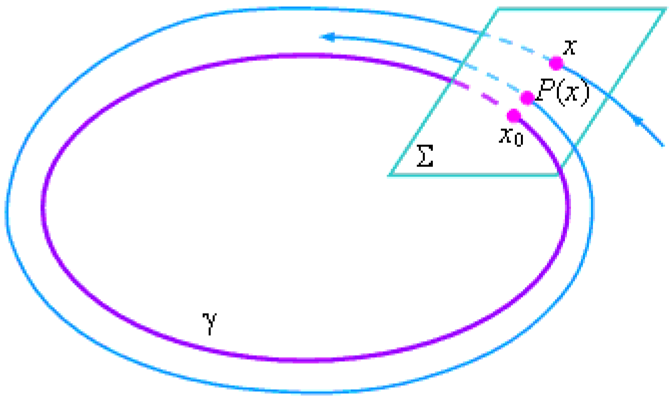


Рис. 6.1. Метод перетинів Пуанкаре.

Траєкторії системи (6.7), близькі до замкненої траєкторії, задають відображення P перетину Σ на себе в такий спосіб. Візьмемо на перетині Пуанкаре Σ точку x, через яку проходить траєкторія $\gamma(x)$. Позначимо $P(x)$ першу точку перетинання траєкторії $\gamma(x)$ з перетином Σ, яка випливає після x. Тим самим ми визначимо відображення $P: \Sigma \to \Sigma$, називане відображенням Пуанкаре, як замкнену траєкторію γ.

Метод дослідження систем за допомогою перетину Пуанкаре полягає у вивченні послідовності точок $\{xk\}$: $x_1, x_2, \ldots, xk$ перетинання поверхні Пуанкаре із траєкторіями. Послідовність $\{xk\}$ визначається за допомогою відображення P у такий спосіб:

$$x_2 = P(x_1);\; x_3 = P(x_2) = P\left[P(x_1)\right] = P^2(x_1);\; \ldots;\; x_{k+1} = P^k(x_1),$$

де символом $P^k(x)$ позначається k-я ітерація відображення P:

$$P^k = \underbrace{P\,P\,P \ldots P}_{k\ раз}.$$

Помітимо, що в такому разі динаміка системи виглядає як деяке рекурентне співвідношення з дискретним часом, оскільки інтервали часу між послідовними перетинаннями поверхні Σ траєкторією кінцеві:

$$x_{k+1} = P(x_k).$$

Властивості відображення Пуанкаре якісно визначають поведінку траєкторій системи поблизу замкненої траєкторії. Розглянемо кілька прикладів.

1. Якщо точка $\bar{x}$ є стаціонарною точкою відображення P:

$$\bar{x} = P(x),$$

це означає, що через неї проходить замкнена траєкторія $\gamma(\bar{x})$.

2. Якщо для послідовності точок $\{x_k\}$ відображення P виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty} P^k(x) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \bar{x},$$

то $\bar{x}$ є стійкою стаціонарною точкою відображення P, а замкнена траєкторія γ, відповідна до точки $\bar{x}$, – стійкою траєкторією. Таким чином, стійкому граничному циклу відповідає на перетині Пуанкаре стійка стаціонарна точка.

3. Нехай на перетині Пуанкаре існують дві точки, такі що

$$P(y_1) = y_2, \quad P(y_2) = y_1$$

і, отже,

$$P^2(y_1) = y_1, \quad P^2(y_2) = y_2.$$

У цьому випадку ми маємо справу із траєкторією, яка замикається тільки після двох обходів навколо траєкторії γ (Рис. 6.2 а). Таким чином, стаціонарним точкам другої ітерації відображення Пуанкаре відповідають замкнені траєкторії з двох обходів.

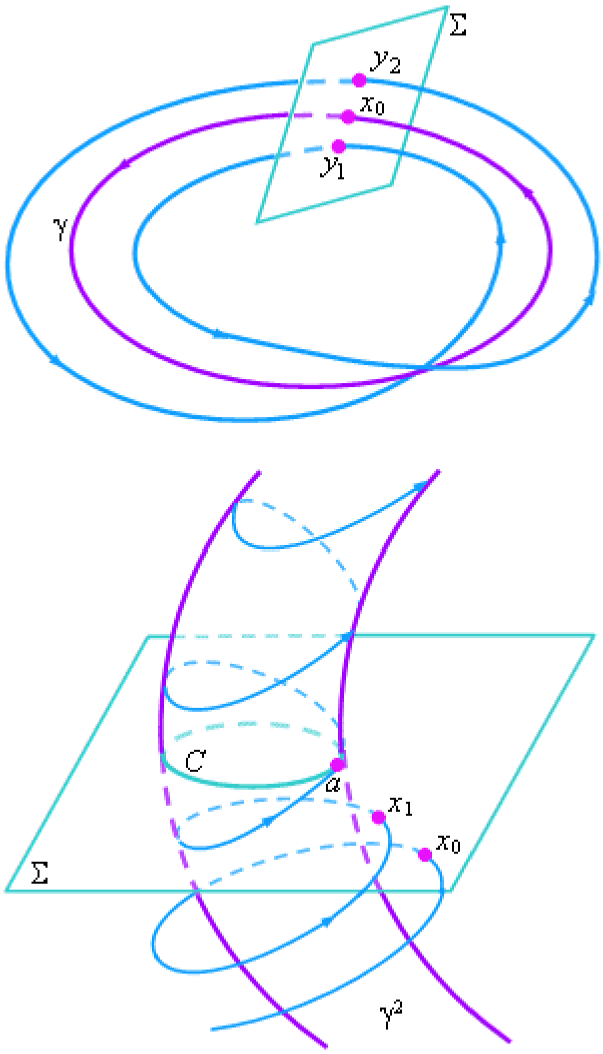


Рис. 6.2 а (угорі) та 6.2 б (внизу).

4. Нехай система (6.8) має аттрактор у вигляді двовимірного тора. Деяка траєкторія, прагнучи до поверхні тора γ^2, перетинає перетин Пуанкаре Σ у точкач x_0, x_1,...(Рис. 6.2 б). Надалі вона буде нескінченно навиватися на поверхню тора. При кожному проходженні через перетин Σ траєкторія буде давати точку перетинання типу a. Множина всіх таких точок утворюють на поверхні Пуанкаре замкнену криву C, яка є аттрактором, оскільки

послідовність перехідних точок у точкач x_0, x_1,… сходиться до цієї кривої.

5. За допомогою відображення Пуанкаре біфуркація замкненої траєкторії системи зводиться до біфуркації нерухливої точки цього відображення. Народженню або зникненню пари замкнених траєкторій відповідає народження або зникнення пари стаціонарних точок відображення Пуанкаре. Виникненню інваріантного тора близько замкненої траєкторії відповідає біфуркація стаціонарної точки відображення P у замкнену криву. Біфуркації подвоєння періоду відповідає біфуркація стаціонарної точки відображення P, при якій від неї відгалужується пара стаціонарних точок другої ітерації відображення P.

Контрольні запитання:

1. Якими ознаками проявляється нестійкість і нелінійність динамічних систем?
2. За якими ознаками визначається нелінійність динамічних систем?
3. Аналіз повтореньу економічній динаміці.
4. Динамічна модель управління хаосом: її характеристика.
5. Моделювання хаотичної динаміки в економіці.
6. Швидкі та повільні змінні в аналізі макроекономічної динаміки. Їх сутність і відмінності в означенні динамічних явищ та процесів..
7. У чому полягає застосування принципу підпорядкування при дослідженні соціально-економічних систем?

Завдання для самостійної роботи

Тести

1. Швидко-повільна система описується рівняннями:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon G(x, y, \varepsilon) \end{cases},$$

де $x \in R^l, y \in R^m,\ \varepsilon \in \mathrm{R},\ \varepsilon << 1.$

Тоді рівняння повільного руху системи мають такий вигляд …

a) $\ldots \begin{cases} 0 = F(x, y, 0) \\ \dfrac{dy}{d\tau} = G(x, y, 0) \end{cases},$ де $\tau = \varepsilon t$.

b) $\ldots \begin{cases} \dot{x} = F(x, y, \varepsilon) \\ 0 = G(x, y, 0) \end{cases}$

c) $\ldots \begin{cases} \dot{x} = F(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$

2. Нехай відображення Пуанкаре для системи $\dot{x} = F(x)$ задається січною поверхнею S, обумовленої співвідношенням $s(x) = 0$. Умови перетинання траєкторією системи поверхні S у точці x_0 мають вигляд….

a) $\left|\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^T x\right|_{x=x_0} \neq 0, \qquad F(x_0) = 0.$

b) $det\left\{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)\Big|_{x=x_0}\right\} \neq 0 \qquad s(x_0) = 0.$

c) $\left|\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^T F(x)\right|_{x=x_0} \neq 0, \quad s(x_0) = 0.$

3. Нехай функція $f\ (x)$ є неперервно дифференційованною. Тоді умови збіжності дискретного відображення Пуанкаре $x_{n+1} = f(x_n)$ до стаціонарної точки $x^* = f(x)$ мають вигляд …

a) … $\left|\left(\dfrac{df}{dx}\right)\right|_{x=x^*} < 1.$

b) … дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння $det\left\{\lambda E - \left(\dfrac{df}{dx}\right)\Big|_{x=x^*}\right\} = 0$ є від’ємними.

c) … усі корені характеристичного рівняння $det\left\{\lambda E - \left(\dfrac{df}{dx}\right)\Big|_{x=x^*}\right\} = 0$ знаходяться всередині одиничного кола.

4. Що буде зображувати відображення Пуанкаре при біфуркації народження двох циклів:

a) Поява напівстійкої стаціонарної точки (шунта) і наступна її трансформація в аттрактор.

b) Поява напівстійкої стаціонарної точки (шунта) і наступне роздвоєння її на аттрактор і репеллер.

c) Поява нестійкої стаціонарної точки (репеллера) і наступне відділення від неї двох аттракторів.

d) Поява стійкої стаціонарної точки (аттрактора) і наступне відділення від неї двох репеллерів.

Відповіді до тестових завдань:

№ теста	1	2	3	4
відповідь	c	c	a	b

РОЗДІЛ 7. ЕКОНОМІЧНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

7.1. Модель природного росту (зростання при постійному темпі)

Нехай *y(t)* – інтенсивність випуску продукції деякого підприємства (галузі). Нехай має місце аксіома про ненасичуваність споживача, тобто весь випущений підприємством товар буде проданий, а обсяг продажів не є настільки високим, щоб істотно вплинути на ціну товару *p*, яку будемо вважати фіксованою. Для збільшення інтенсивності випуску *y(t)*, необхідно, щоб чисті інвестиції *I(t)* (тобто різниця між загальним обсягом інвестицій і амортизаційними витратами) були більше нуля. У випадку $I(t) = 0$ загальні інвестиції лише покривають витрати на амортизацію, і рівень випуску продукції залишається незмінним. Випадок $I < 0$ приводить до зменшення основних фондів і, як наслідок, до зменшення рівня випуску продукції. Отже, швидкість збільшення інтенсивності випуску продукції є зростаючою функцією від *I*.

Нехай ця залежність є прямо пропорційною, тобто має місце *принцип акселерації*

$$y' = m\,I \;(m = const), \tag{7.1}$$

де 1/m – норма акселерації.

Нехай α – норма чистих інвестицій, тобто частина доходу *py*, що витрачається на чисті інвестиції, тоді

$I = \alpha p y.$

Звідси підставляючи вираз для *I* у (3.1), одержуємо

$$y' = m\alpha p y \quad \text{або} \quad y' = ky, \tag{7.2}$$

де $k = m\alpha p > 0 =$ const. Розділяючи змінні в рівнянні (7.2), маємо

$$\frac{dy}{y} = kdt.$$

Після інтегрування обох частин рівняння знаходимо

$ln\,|y| = k\,t + lnC.$

Загальний розв’язок рівняння (7.2) має вигляд:

$$y=Ce^{kt}. \qquad (7.3)$$

Якщо $y(t_0) = y_0$ то з (3.3) випливає, що $C = y_0\ e^{-kt_0}$, тобто

$$y = y_0\ e^{k(t-t_0)}. \qquad (7.4)$$

Рівняння (7.4) називається *рівнянням природного росту*. Цим рівнянням описуються також динаміка росту цін при постійному темпі інфляції, процеси радіоактивного розпаду і розмноження бактерій.

Інтегральна крива рівняння (7.2), що відповідає початковій умові $y(0) = 2$, представлена на рис. 7.1.

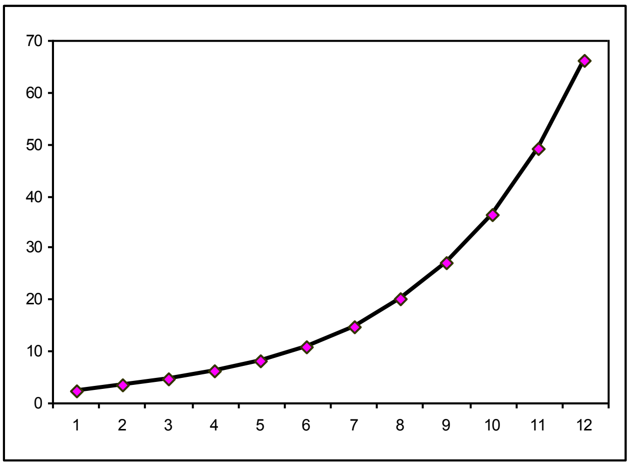


Рис. 7.1. Інтегральна крива рівняння моделі природного росту

Зауваження 7.1. Модель природного росту доцільно застосовувати на початкових етапах розвитку економічної системи протягом обмеженого проміжку часу, оскільки, як це випливає з рівняння (3.4)) з часом y може приймати які завгодно великі значення, що не може не позначитися на зміні ціни (яку у даній моделі ми вважали постійною).

7.2. Логістична крива

Розглянемо більш загальний випадок у порівнянні з попереднім пунктом. Нехай $p=p(y)$ – убутна функція, $\frac{dp}{dy}<0$, тобто зі збільшенням випуску відбувається насичення ринку і ціна зменшується.

Провівши викладення, аналогічні п.3.1., одержимо рівняння:

$$y'=kp(y)y, \qquad (7.5)$$

де $k= m\alpha p$.

Рівняння (7.5) являє собою автономне нелінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. Оскільки $k > 0, p > 0, y > 0$, то з (7.5) випливає, що $y(t)$ є зростаючою функцією ($y' > 0$).

Нехай, наприклад, $p(y) = b - ay$ ($a,\ b > 0$), тоді рівняння (7.5) приймає вигляд:

$$y' = k(b - ay)y. \qquad (7.6)$$

З (7.6) легко одержати значення стаціонарних точок функції y, тобто точок, де $y' = 0$. Отже, є дві стаціонарних точки: $y = 0$, та $y = b/a$.

Крім того, враховуючи, що $y'' = k y'(b - ay)$, визначимо знак другої похідної y''. Якщо $y > b/2a$, то $y'' < 0$, і $y'' > 0$ при $y > b/2a$ (рис. 7.2).

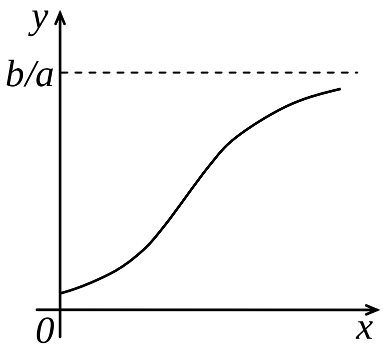


Рис. 7.2. Логістична крива

У даному випадку досить легко одержати і явний вираз для $y(t)$. Розділяючи змінні в рівнянні (7.7), знаходимо

$$\frac{dy}{y(b-ay)} = kdt, \quad \text{або} \quad \frac{dy}{b}\left(\frac{1}{y} + \frac{a}{b-ay}\right) = kdt.$$

Інтегруючи ліву та праву частини останнього співвідношення, маємо

$ln|y| - ln|b-ay| = kbt + lnC,$

тобто

$$\frac{y}{b-ay} = Ce^{kbt}.$$

Звідси одержимо, що

$$y = \frac{Cbe^{kbt}}{1+Cae^{kbt}}. \qquad (7.7)$$

Графік функції (7.7) називається логістичною кривою.

Логістична крива також описує деякі моделі поширення інформації, ефективність реклами, динаміку епідемій, процеси розмноження бактерій в обмеженому середовищі та ін.

Зауваження 7.2. З графіка логістичної кривої видно, що при малих t логістичний ріст схожий із природним ростом, однак при великих t характер росту міняється, темпи зростання сповільнюються і крива асимптотично наближається до прямої $y = b/a$. Ця пряма є стаціонарним розв’язком рівняння (73.7) і відповідає випадку $p(y) = 0$.

Зауваження 7.3. Більш реалістичною є модель, у якій швидкість зростання залежить не від доходу, а від прибутку. Нехай $C(y) = \alpha y + \beta$ – витрати, (α, β – постійні), тоді

$$\frac{dy}{dt} = k(p(y) - \alpha y - \beta) \tag{7.8}$$

Якщо $p(y) = b - ay$, то права частина рівняння (7.8) являє собою квадратний трьохчлен відносно y з від'ємним коефіцієнтом перед y^2:

$$\frac{dy}{dt} = -kay^2 + (b - \alpha)y - \beta. \tag{7.9}$$

Координати стаціонарної точки задовольняють квадратне рівняння

$$-kay^2 + (b - \alpha)y - \beta = 0. \tag{7.10}$$

Можливі три варіанти.

а) Дискримінант квадратного рівняння (7.10) $D < 0$. Отже, $y' < 0$. Витрати настільки великі, що це приводить до постійного падіння рівня виробництва і зрештою до банкрутства (рис. 7.3. а).

б) $D = 0$. У цьому випадку $y' \le 0$ і є один стаціонарний розв'язок. При цьому інтегральні криві, що задовольняють початковій умові $y(t_0) = y_0 > y^*$, будуть асимптотично наближатися до y^* на $+\infty$, а інтегральні криві, що задовольняють умові $y_0 < y^*$, будуть асимптотично наближатися до y^* на $-\infty$ (рис. 7.3.б).

в) $D > 0$. У цьому випадку існують два стаціонарних розв'язки $y = y_1$ $y = y_2$ $(0 < y_1 < y_2)$. При цьому $y' > 0$ при $y_1 < y < y_2$ і $y' < 0$ при $y_1 < y$ або $y > y_2$ (рис. 7.3. в).

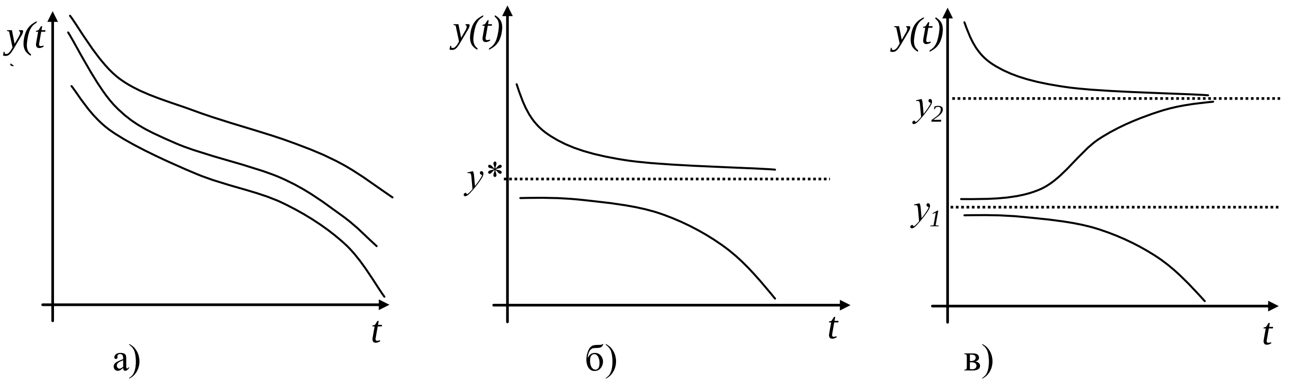


Рис. 7.3. Графічний аналіз моделі (3.9):
а) випадок банкрутства підприємства,
б) випадок однієї стаціонарної точки,
в) випадок двох стаціонарних точок.

Приклад 3.1. Модель прогнозування попиту на товари тривалого користування

За даними статистики кон'юнктури попит на деякі товари з часом зростає: спочатку повільно, потім швидко і, нарешті, сповільнюється в міру насичення.

Це значить, що швидкість збільшення попиту прямо пропорційна забезпеченості і насиченню товаром.

Для побудови моделі вводяться наступні позначення [31]:

t – поточний час;

y – забезпеченість товаром (питома вага родин або людей, що володіють даним товаром);

A – насиченість товаром (граничне значення забезпеченості товаром);

K – коефіцієнт пропорційності.

Тоді залежність забезпеченості від часу виражається диференціальним рівнянням

$$\frac{dy}{dt} = \text{Êó}(\text{À} - y) \qquad (7.11)$$

тобто швидкість збільшення забезпеченості $\frac{dy}{dt}$ пропорційна забезпеченості y і незабезпеченості $\text{À} - y$. Звідси випливає, що при малих і великих значеннях y швидкість збільшення забезпеченості $\frac{dy}{dt}$ буде малою.

Коефіцієнт K і насиченість A визначають у такий спосіб. Нехай є статистичні дані y_t за минулі роки t = 1,2, ... m. Диференціальне рівняння (7.10) перепишемо у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = KAy_t - KAy^2_t \qquad (7.12)$$

Приймаючи $\Delta t = 1$ і позначаючи $KA = b$, одержуємо:

$$\Delta y_t = by_t - ky_t^2. \qquad (7.13)$$

Для визначення b і K використовують метод найменших квадратів [7,8] по точках $t = 1, 2, ... m$, одержують залежність для

$$L = \sum_{t=1}^{m} (\Delta y_t - by_t + ky_t^2) \to min. \qquad (7.14)$$

За необхідною умовою наявності екстремуму похідні від L по b і K повинні дорівнювати нулеві [7,8], тобто

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 2\sum_{t=1}^{m} (\Delta y_t - by_t + ky_t^2)(-y_t) = 0, \qquad (7.15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = 2\sum_{t=1}^{m}(\Delta y_t - by_t + ky_t^2)y_t^2 = 0.$$

На основі (3.14) формуємо систему нормальних лінійних рівнянь

$$b\sum_{t=1}^{m} y_t^2 - k\sum_{t=1}^{m} y_t^3 = \sum_{t=1}^{m} y_t \Delta y_t ,$$

$$b\sum_{t=1}^{m} y_t^3 - k\sum_{t=1}^{m} y_t^4 = \sum_{t=1}^{m} y_t^2 \Delta y_t .$$

Розв'язуючи цю систему, визначаємо b і K, а потім знаходимо $A = b/K$. Для визначення y розв'язуємо рівняння

$$\frac{dy}{y(A-y)} = kdt.$$

і одержуємо розв'язок у вигляді логістичної функції

$$y = \frac{A}{(1+Ce^{-KAt})},$$

у якій A і K були раніше визначені за методом найменших квадратів.

Для визначення постійної інтегрування C можна у якості початкової умови покласти, щоб функція проходила через останню точку m, тобто виконувалася умова

$$y_m = \frac{A}{(1+Ce^{-KAm})}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно C, одержуємо

$$C = \frac{(A-y_m)e^{-KAm}}{y_m}.$$

Остаточна залежність попиту від часу приймає вид:

$$y = \frac{Ay_m}{y_m + (A-y_m)e^{-KA(t-m)}}.$$

Прогнози попиту одержують при підстановці в цю формулу значень $t > m$.

7.3. Модель Еванса

Модель Еванса – це модель встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару. Розглядається ринок одного товару, час вважається неперервним. Нехай $D(t)$, $S(t)$, $p(t)$ – відповідно попит, пропозиція і ціна цього товару в момент t. Попит та пропозиція вважаються лінійними функціями ціни, тобто $D(p) = a - bp$, $a, b > 0$ – попит з ростом ціни падає, а $S(p) = \alpha + \beta p$, $\alpha, \beta > 0$, – пропозиція з ростом ціни зростає. Природно вважати, що $a > \alpha$, тобто при нульовій ціні попит перевищує пропозицію (тобто товар є бажаним).

Основне припущення моделі полягає в тому, що ціна змінюється в залежності від співвідношень між попитом та пропозицією:

$$\Delta p = \gamma(d - s)\Delta t,$$

де $\gamma > 0$.

Отже, збільшення ціни прямо пропорційно перевищенню попиту над пропозицією і тривалості цього перевищення. Отже, одержуємо диференціальне рівняння $\frac{dp}{dt} = \gamma(d - s)$. Підставляючи в це рівняння лінійні залежності попиту та пропозиції від ціни, одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з початковою умовою (задача Коші):

$$\frac{dp}{dt} = \gamma((b + \beta)p - a + \alpha), \tag{7.17}$$
$$p(0) = p_0.$$

Загальний розв’язок даного рівняння є сума загального розв’язку відповідного однорідного рівняння

$$\frac{dp}{dt} + y(b - p\ ) = 0\,. \tag{7.17}$$

і якого-небудь часткового розв’язку неоднорідного рівняння (7.17).

Як частковий розв’язок неоднорідного рівняння (7.17) розглянемо стаціонарну точку даного рівняння

$$p^* = (a - \alpha)/(b + \beta) > 0.$$

Очевидно, $\frac{dp}{dt} > 0$ при $p^* > p$ і $\frac{dp}{dt} < 0$ при $p^* < p$.

Звідси випливає, що $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = p^*$. При $p_0 < p^*$ ціна збігається до p^* зростаючи, а при $p_0 > p^*$ – убуваючи. Сама ціна p^* є рівноважна ціна – при ній попит та пропозиція дорівнюють один одному:

$D(p) = S(p) \quad \to \quad a - bp = \alpha + \beta p \quad \to \quad p^* = (a - \alpha)/(b + p)$.

Рівноважна ціна може бути знайдена також графічно – як точка перетинання прямих попиту $D(p) = a - bp$ і пропозиції $S(p) = a + \alpha \cdot p$ (рис. 7.4).

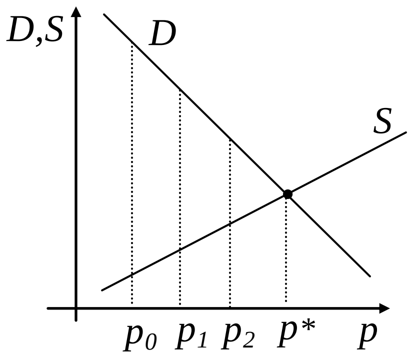


Рис. 7.4. Графік динаміки попиту і пропозиції за моделлю Еванса

Випишемо загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння (7.17) з урахуванням початкової умови:

$$ð(t) = p_0\, e^{-\gamma(b+\beta)t} + (a - \alpha)/(b - \beta)(1 - e^{-\gamma(b+\beta)t}) \tag{7.18}$$

або

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + p^*(1 - e^{-\gamma(b+\beta)t})\,.$$

Очевидно, $\lim\limits_{t \to \infty} ð(t) = ð^*$.

7.4. Неокласична модель росту (модель Солоу)

Дана модель ґрунтується на таких припущеннях: економіка розглядається як єдине ціле (без структурних підрозділів), виробляється єдиний універсальний продукт, що може споживатися як у невиробничій сфері, так і у виробничій; споживання продукту у виробничій сфері може розглядатися як інвестування.

Ця модель досить адекватно відбиває найважливіші макроекономічні аспекти, у тому числі і процес відтворення.

Стан економіки в моделі Солоу задається п'ятьма змінними: Y – національний доход (кінцевий продукт), K – обсяг капіталовкладень (виробничих фондів), L – величина витрат праці, I – інвестиції, C – невиробниче споживання.

Вважаємо, що ресурси (виробничі та невиробничі) використовуються повністю.

Частина національного доходу – фонд накопичення I – використовується на збільшення капіталу для розширення виробництва (інвестування). Інша частина утворює фонд споживання C і задовольняє суспільні потреби.

Річний кінцевий продукт є функцією виробничих фондів та праці:

$$Y = F(K, L). \tag{7.19}$$

Функція $F(K,L)$ задовольняє вимоги до виробничих функцій та вважається лінійно-однорідною: $(F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L))$, де $\lambda > 0$.

Властивість лінійної однорідності виражає ідею Сея про те, що доход від виробництва розподіляється пропорційно факторам виробництва, а коефіцієнтами пропорційності служать граничні продуктивності факторів.

Отже, $F(K, L)$ – виробнича функція. Нехай $y=f(k)$ – продуктивність праці:

$$y=f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(\frac{K}{L},1) = F(k,1), \tag{7.20}$$

де $k = \dfrac{K}{L}$ – фондоозброєність; $f'(k) > 0, f''(k) < 0$ (як наслідок з визначення виробничої функції).

Кінцевий продукт Y використовується на невиробниче споживання C та інвестиції I, тобто баланс виробництва і розподілу національного доходу має простий вигляд:

$Y=I + C$,

Нехай ρ (ρ = const $0 < \rho < 1$) – норма інвестицій (норма накопичення), тобто

$$I = \rho Y,$$

тоді

$$C=(1 - \rho)Y.$$

Нехай має місце природний приріст трудових ресурсів, тобто

$$L' = \alpha L \ (\alpha=const).$$

Розв'язуючи це диференціальне рівняння, одержуємо

$$L(t)=L_0\, e^{\alpha t},$$

де $L_0= L(0)$ – трудові ресурси на початку спостереження. Отже, робоча сила є зростаючою з заданим постійним темпом α.

Повинні виконуватися очевидні умови

$$I \geq 0, C \geq 0\,. \qquad (7.21)$$

Інвестиції використовуються на відновлення (амортизацію) основних фондів та на їх приріст, тобто

$$I= \beta K + \frac{dK}{dt},$$

де β – норма амортизації.

Отже,

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \beta K, \quad K(0)= K_0.$$

Отже, динамічна односекторна модель Солоу (найпростіша модель економічного росту) задається системою рівнянь:

$$C=(1-\rho)Y. \qquad (7.22)$$

$$Y = F(K, L), \qquad (7.23)$$

$$L(t)=L_0\, e^{\alpha t}, \qquad (7.24)$$

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \beta K, \quad K(0)= K_0. \qquad (7.25)$$

Похідна функції фондоозброєності k за часом має вигляд:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d(K/L)}{dt} = \frac{K'L-KL'}{L^2} = \frac{\rho Y - \beta K}{L} - \frac{K\alpha}{L} = \rho y - \beta k - \alpha k = \rho y - k(\beta + \alpha).$$

Отже,

$$\frac{dk}{dt} = \rho y - k(\beta + \alpha); \qquad (7.27)$$

$$k(0)=k_0=\frac{K_0}{L_0}.$$

Рівняння (7.27) називається *рівнянням неокласичного росту.*

Поведінка макропоказників моделі Солоу повністю визначається рівнянням (7.27) і динамікою (7.24) трудових ресурсів $L(t)=L_0 e^{\alpha t}$.

Рівняння (7.27) – це диференційне рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються, і початковою умовою (задача Коші), тому воно має єдиний розв'язок.

7.4.1. Дослідження стаціонарних траєкторій в моделі Солоу

Дослідимо стаціонарні траєкторії в моделі Солоу. Розглянемо стаціонарну траєкторію, тобто таку, на якій фондоозброєність k є постійною і дорівнює своєму початковому значенню: $k(t)$ = const = k_e.

Таке значення фондоозброєності називається *стаціонарним.* Звичайно, на стаціонарній траєкторії $dk/dt = 0$.

Розглянемо поведінку макропоказників *K, L, C, I, Y* на стаціонарній траєкторії.

Відповідно до рівняння (7.27), якщо

$$dk_e/dt=0,$$

то

$$\rho f(k) - k_e(\beta + \alpha)=0,$$

тобто k_e є розв'язком рівняння

$$\rho f(k) - k_e(\beta + \alpha)=0. \qquad (7.28)$$

Доведемо, що це рівняння має розв'язок.

Характеристики виробничої функції: $y=f(k)=F(k,1)$, $f'(k) > 0$, але $f'(k) \to 0$ при $k \to \infty$ (это випливає з вимог до виробничої функції – див. вище), отже $f(k)$ – зростаюча функція, але темп її росту сповільнюється. У той же час $k(\beta + \alpha)$ зростає з постійним темпом. Тобто, якщо $\rho f'(k_0) > (\beta + \alpha)$, то рівняння (7.28) має єдиний розв'язок k_e при $k > 0$ (рис. 7.5).

Отже, як поводяться параметри *K, L, C, I, Y* на стаціонарній траєкторії?

Оскільки $L(t)=L_0e^{\alpha t}$, а $k=\dfrac{K(t)}{L(t)}$, то $K(t) = kL(t) = kL_0e^{\alpha t}$; аналогічно $y(t)=f(k_e)L(t)=f(k_e)L_0e^{\alpha t}$. Далі, $C(t)=(1-\rho)f(k_e)$, $I(t)=\rho f(k_e)L_0e^{\alpha t}$.

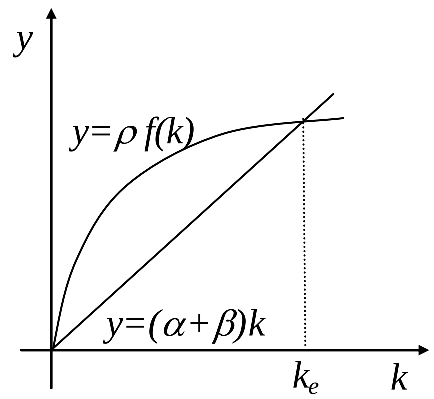


Рис. 7.5. Графічне розв'язання рівняння (7.27)

Зведемо все разом:

$$L(t)=L_0\, e^{\alpha t},$$
$$K(t) = k_eL(t) = k_eL_0e^{\alpha t},$$
$$Y(t)=f(k_e)L(t)=f(k_e)L_0e^{\alpha t},$$
$$C(t) = (1-\rho)f(k_e)\, L_0e^{\alpha t},$$
$$I(t)=\rho f(k_e)L_0e^{\alpha t}.$$

Отже, на стаціонарній траєкторії всі основні макропоказники зростають експоненційно, пропорційно трудовим ресурсам.

7.4.2. "Золоте правило" росту Солоу. Теорема про магістраль

Введемо додаткові змінні $\omega = C/L,\ i = I/L,$ що відносять величини C, I до одиниці робочої сили, що затрачується, отже частка накопичення національного доходу $\rho = I/Y = i/y$.

Спочатку розглянемо режими росту економіки з темпом $\upsilon=(\beta + \alpha)$. На цих режимах величина k постійна, і з (7.27) випливає, що

$$\rho f(k) = \upsilon k,$$

а

$$\omega = (1 - \rho) f(k) = f(k) - \upsilon k.$$

Режим, у якому фонд споживання на одиницю робочої сили максимальний, виділяється умовою $\frac{d\omega}{dk} = 0$, а з нього випливає, що $\frac{df(k)}{dk} = \upsilon$. На цьому режимі а $\omega = f(k) - k\frac{df(k)}{dk}$. Неважко переконатися, що

$$f(k) - x\ \frac{df(k)}{dk} = \frac{\partial F}{\partial L}\ .$$

Отже, пропорції суспільного відтворення, при яких фонд споживання на одиницю витраченої робочої сили (можна сказати, оплата одиниці робочої сили) максимальний, задаються умовою

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial F}{\partial L}\ .$$

рівності оплати робочої сили граничній продуктивності праці.

Це знамените "золоте правило зростання" Р.Солоу. Це правило можна інтерпретувати як рівновагу на ринку робочої сили.

З умови (7.7) випливає, що

$$F = \frac{\partial F}{\partial K}K + \frac{\partial F}{\partial L}L.$$

Отже, за золотим правилом зростання

$$\frac{\partial F}{\partial K}K = F - \omega L.$$

Це можна інтерпретувати в такий спосіб. Нехай як масштаб цін обрано ціну одиниці продукту. Тоді F виражає і вартість національного доходу. Величина ωL виражає частину вартості, розподіленої на оплату робочої сили. Тоді $F - \omega L$ виражає частину вартості, розподіленої на оплату капіталу, який використовується. Одиниця капіталу оцінюється нормою відсотка r. Отже, з "золотого правила росту" можна зробити висновок, що

$$r = \frac{\partial F}{\partial K},$$

тобто норма відсотка дорівнює граничній продуктивності капіталу. Отже, ринок капіталу теж знаходиться в рівновазі.

Процес суспільного відтворення, пропорції якого відповідають "золотому правилу росту", у математичній економіці називають *магістраллю*. Виникає наступна інтерпретація. Якщо вважати, що в економіці діють ринкові механізми регулювання, то в кожен момент часу на магістралі виконуються умови рівноваги на ринках. Еволюціонуючи на магістралі, економіка майже неперервно переходить з одного стану рівноваги в інше. Однак питання: чи можуть ринкові механізми регулювання зрушити структуру економіки до пропорцій росту по магістралі – залишається відкритим.

Головний результат теорії економічного росту називається *теоремою про магістралі.* На якісному рівні цей результат формулюється так: можна по-різному визначати критерій якості траєкторії росту економіки, але, на великих інтервалах часу оптимальний ріст практично збігається з магістраллю. Отже, магістраль можна вважати деякою "динамічною" характеристикою економічної системи, що відбиває ефективну структуру системи. Тільки залишається без відповіді питання: які механізми самоорганізації можуть створити в системі таку структуру?

7.5. Модель гонки озброєнь (модель Річардсона)

Розглянемо конфліктну ситуацію, у якій можуть виявитися дві сусідні країни, для визначеності названі країнами X і Y.

Позначимо через $x=x(t)$ витрати на озброєння країни X і через $y= y(t)$ витрати на озброєння країни Y у момент часу $t \geq 0$.

Припущення 1. Країна X озброюється, побоюючись потенційної погрози війни з боку країни Y, яка у свою чергу, знаючи про ріст витрат на озброєння країни X, також збільшує свої витрати на озброєння. Кожна країна змінює швидкість росту (або скорочення) озброєнь пропорційно рівню витрат іншої країни. У найпростішому випадку це можна описати так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x, \end{cases} \tag{7.29}$$

де α і β – додатні постійні.

Однак написані рівняння мають очевидний недолік — рівень озброєння нічим не лімітується. Тому праві частини цих рівнянь необхідно коректувати.

Припущення 2. Чим більше поточний рівень витрат країни на оборону, тим менше швидкість його росту. Це дозволяє внести в попередню систему наступні зміни:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha y - \gamma x, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - \delta y, \end{cases}$$

де γ і δ – додатні постійні.

Припущення 3. Кожна країна нарощує озброєння, керуючись своїми державними домаганнями і ворожістю до сусідньої країни, навіть якщо ця країна не загрожує існуванню даної. Позначимо відповідні претензії через a і b (a і b – додатні постійні). У випадку якщо постійні a і b від'ємні, їх можна назвати коефіцієнтами доброї волі.

Ґрунтуючись на всіх трьох припущеннях, у результаті одержуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\gamma x + \alpha y + a, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - \delta y + b. \end{cases} \tag{7.30}$$

Модель гонки озброєнь побудовано.

Система (7.30) – це лінійна неоднорідна система двох диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами. Крім того, ця динамічна система є автономною (час у явному виді в правій частині рівнянь системи не присутній).

Згідно з теоремою 1. (див п. 2.3.2) *загальний розв'язок* $(x(t), y(t))$ неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (3.27) є сума часткового розв'язку (x^*, y^*) цієї системи і загального розв'язку $(\bar{x}(t,C_1,C_2), \bar{y}(t,C_1,C_2))$ відповідної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\gamma x + \alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - \delta y. \end{cases} \tag{7.31}$$

При цьому, якщо відомі початкові умови $x_0 \geq 0$ і $y_0 \geq 0$ (початковий стан гонки озброєнь), то можна визначити розв'язок, що відповідає даним початковим умовам, тобто визначити довільні постійні C_1, C_2 у функціях $x(t)$ і $y(t)$.

Частинний розв'язок (x^*, y^*) системи (7.31) знаходять, припускаючи, що рівні витрат обох країн на озброєння не залежать від часу (є стаціонарними). Це означає, що

$$x'=0, \quad y'=0,$$

тобто частковий розв'язок (x^*, y^*) є розв'язком системи двох аналітичних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} -\gamma x^* + \alpha y^* + a = 0, \\ \beta x^* - \delta y^* + b = 0. \end{cases}$$

Координати точки рівноваги у даному випадку є такими:

$$x^* = \frac{a + \alpha y^*}{\gamma},$$

Динаміка гонки озброєнь визначається сукупністю значень екзогенних параметрів α, β, γ, δ, які, в свою чергу, утворюючи матрицю коефіцієнтів системи (7.30), визначають коефіцієнти характеристичного рівняння однорідної форми рівняння (7.30).

Характеристичне рівняння однорідної системи (7.31) має вигляд:

$$\lambda^2 - (\gamma + \delta)\lambda + (\gamma\delta - \alpha\beta) = 0 . \qquad (7.32)$$

Отже, характеристичні числа визначаються за формулою:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\gamma + \delta) \pm \sqrt{(\gamma + \delta)^2 - 4(\gamma\delta - \alpha\beta)}}{2} . \qquad (7.33)$$

Взагалі модель Ричардсона при $t \to \infty$ може демонструвати такі три випадки:

1. Нескінченна гонка озброєння: $x(t) \to \infty$, $y(t) \to \infty$;
2. Взаємне роззброювання: $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$;
3. Рівновага озброєнь: $x(t) \to x^*$, $y(t) \to y^*$, де y^* і $x^* > 0$.

Формально ці варіанти визначаються в залежності від величини дискримінанту $D = (\gamma + \delta)^2 - 4(\gamma\delta - \alpha\beta)$ квадратного рівняння (7.33).

На завершення процитуємо висловлення Т. Сааті про цю модель: "Модель представляється набагато більш переконливою, якщо замість озброєнь провести на ній вивчення проблем погрози, оскільки люди реагують на абсолютний рівень ворожості, що виявляється щодо іншими, і випробують почуття тривоги в ступені, пропорційному рівню ворожості, що вони випробують самі" [ ].

7.7. Модель «хижак – жертва»

Вище розповідалося про безперешкодне розмноження популяції у замкнутій системі. Однак у реальних обставинах популяція співіснує з іншими популяціями, знаходячись з ними в самих різних взаєминах.

Розглянемо антагоністичну пару *хижак – жертва* (це може бути пара рись – заєць і пара божа корівка – попелиця) і простежимо, як може змінюватися з часом чисельність обох взаємодіючих сторін.

Популяція жертви може існувати сама по собі, у той час як популяція хижака — тільки за рахунок жертви.

Позначимо чисельність популяції жертви через x, а чисельність популяції хижака через y.

Під час відсутності хижака жертва розмножується відповідно до рівняння

$$x' = \alpha x,\ \alpha > 0$$

а хижак під час відсутності жертви вимирає за законом

$$y' = -\beta y,\ \beta > 0$$

Хижак з'їдає тим більше жертви, чим її більше і чим більш численний він сам. Тому при наявності хижака чисельність жертви міняється за законом

$$x' = \alpha x - \gamma xy,\ \gamma > 0.$$

З'їдена кількість жертви сприяє розмноженню хижака, що можна записати так:

$$y' = -\beta y + \delta xy,\ \delta > 0.$$

Таким чином, ми одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \gamma xy, \\ y' = -\beta y + \delta xy, \end{cases} \qquad (7.34)$$

причому

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Модель *хижак - жертва* побудовано.

Це нелінійна динамічна модель, що задається системою двох нелінійних автономних диференціальних рівнянь першого порядку.

Система має дві точки рівноваги, координати яких визначаються як розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \alpha x - \gamma xy = 0, \\ \beta y + \delta xy = 0, \end{cases} \qquad (7.35)$$

або

$$x(\alpha - \gamma y) = 0, \qquad y(-\beta + \delta x) = 0.$$

Як і в попередній моделі, найбільший інтерес для нас представляє відмінна від нуля точка рівноваги (x^*, y^*)

$$x^* = \frac{\beta}{\delta}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\gamma}$$

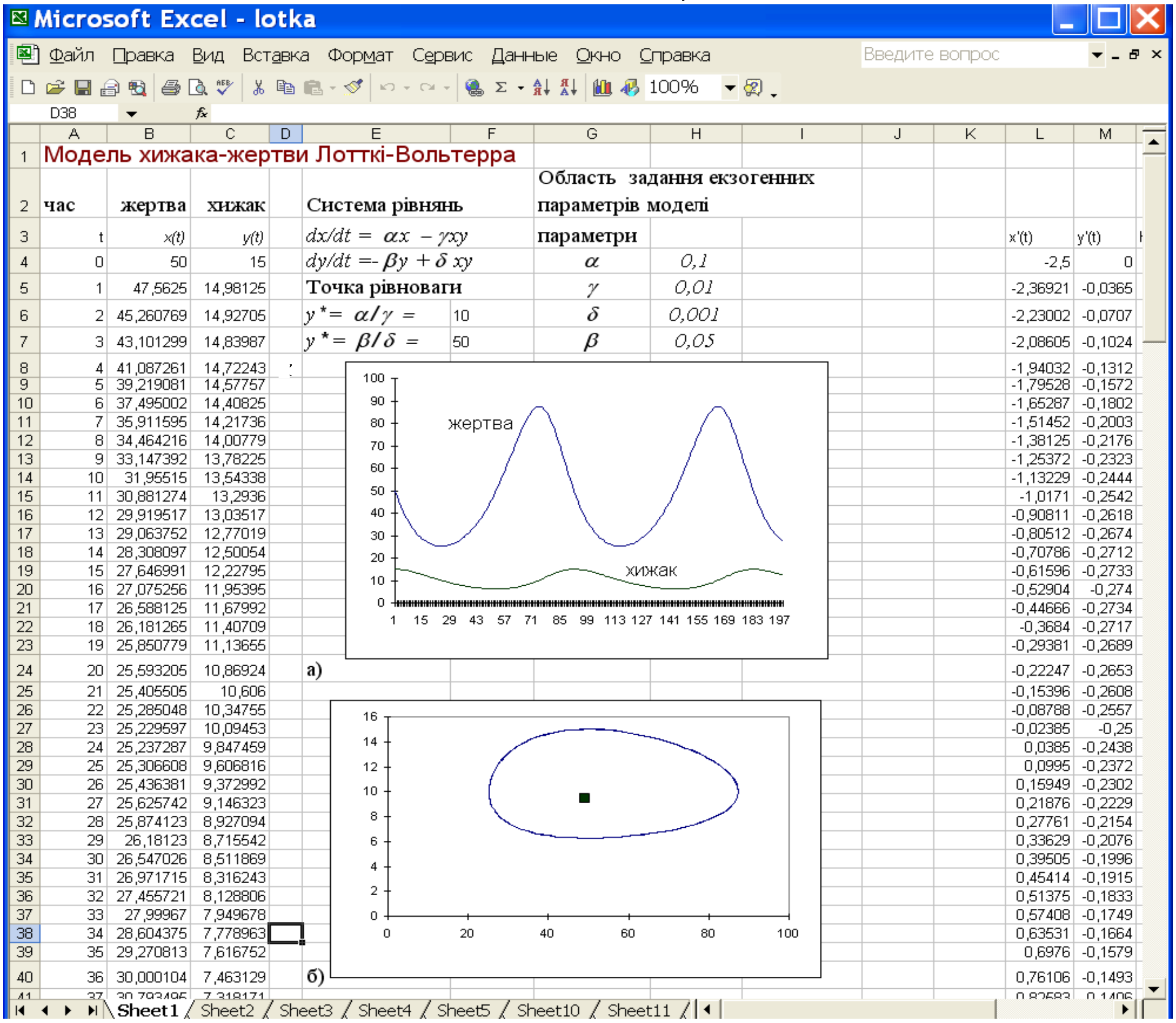


Рис. 7.5. Реалізація моделі хижак-жертва:

а) інтегральні криві функцій *x(t), y(t);*

б) фазовий портрет системи (7.34) – прямокутником позначено положення точки рівноваги

Приклад дослідження моделі у програмному середовищі Excel подано на рис. 7.5. За даною моделлю при визначених екзогенних змінних $\alpha=0.1$, $\gamma=0.01$, $\beta=0.05$, $\delta=0.001$ побудовано часові ряди значень функцій, які досліджуються, а саме *x(t)* – кількість жертви та *y(t)* – кількість хижака.

Координати точки рівноваги $(x^*,y^*)=(50,10)$.

Графічне подання результатів розрахунків виконано як у вигляді інтегральних кривих (рис. 7.5.а), так і у вигляді фазового портрету (рис.7.5.б)

7.7. Спрощена модель національної економіки

У спрощеній моделі національної економіки як основні змінні виступають: національний доход *W*, споживання *S* і державні витрати *E*. Нехай швидкість зміни національного доходу подається формулою

$$W' = \alpha \cdot W - \beta \cdot S, 0 < \alpha, \beta,$$

швидкість зміни споживання

$$S' = \gamma D, \quad \gamma > 0,$$

де $D -$ різниця між доходом і споживанням.

Нехай $W -$ загальний доход, а сумарне споживання дорівнює $S + E$, отже

$$D = W - S - E.$$

Підстановка в рівняння для S' дає $S' = \gamma(W - S - E)$. Передбачається, що урядові витрати постійні і дорівнюють $E=E_0$.

Тоді *спрощену математичну модель національної економіки*, що розглядається, можна подати як систему двох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} W' = \alpha \cdot W - \beta \cdot S, \\ S' = \gamma(W - S - E_0). \end{cases} \qquad (7.36)$$

Це лінійна динамічна система, що подається неоднорідною системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Розглянемо поведінку системи в часі.

Точку рівноваги системи знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} \alpha \cdot W - \beta \cdot S = 0, \\ \gamma(W - S - E_0) = 0. \end{cases} \qquad (7.37)$$

Точка рівноваги системи (стаціонарна точка, точка покою) має координати:

$$W^* = \frac{\beta E_0}{\beta - \alpha}, \; S^* = \frac{\alpha E_0}{\beta - \alpha}.$$

У реальній моделі значення *W*, *S* і E_0 не можуть бути від’ємними.

Отже, $\beta > \alpha$.

Матриця коефіцієнтів *A* однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} W' = \alpha \cdot W - \beta \cdot S, \\ S' = \gamma(W - S), \end{cases} \tag{7.38}$$

має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Визначимо слід і детермінант матриці A:

$$Tr(A) = \alpha - \gamma,$$

$$Det\,(A) = \gamma(\beta - \alpha).$$

Характеристичне рівняння однорідної системи (3.38) має вигляд:

$$\lambda^2 - (\alpha - \gamma)\lambda + \gamma(\beta - \alpha) = 0. \tag{7.39}$$

Характеристичні числа визначаються за формулою:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\alpha - \gamma) \pm \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 - 4\gamma(\beta - \alpha)}}{2} \tag{7.40}$$

Оскільки, як сказано вище, $\beta > \alpha$, то $det(A) > 0$, отже, точка рівноваги системи не може бути сідлом.

Якщо $\alpha > \gamma$, то $Tr(A) > 0$ і економічна система є нестійкою.

У випадку $\alpha < \gamma$ економічна система є стабільною.

Якщо $\alpha = \gamma$, атрактор є граничним циклом. У цьому випадку економіка осилюватиме.

7.8. Модель регулювання ціни Л. Вальраса

Для побудови динамічної моделі приймемо такі припущення:

Припущення 1. Ціна регулюється при надлишковому попиті відповідно до рівняння:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(D - S),\ \alpha > 0,$$

де $D = a + bp$ – функція попиту, $S = mN$ – функція пропозиції, p – ціна, N – кількість фірм у галузі промисловості, α – коефіцієнт швидкості регулювання.

Підставивши вирази для функцій попиту і пропозиції у рівняння, одержуємо:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(a + bp - mN). \tag{7.41}$$

Припущення 2. Кількість фірм на ринку задовольняє рівняння:

$$\frac{dN}{dt}\gamma(p - \bar{c}),\quad \gamma > 0, \tag{7.42}$$

де $\bar{c}$ – фіксовані середні витрати виробництва.

Кількість фірм N збільшується ($N > 0$), якщо ціна перевищує середні витрати (доходи додатні) і зменшується, якщо ціна менше середніх витрат (доходи від'ємні).

Рівняння (3.41) і (3.42) складають систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку *моделі Вальраса регулювання ціни*.

Запишемо модель (3.41-3.42) у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha b & -\alpha m \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha a \\ -\gamma c \end{bmatrix},$$

де $A = \begin{bmatrix} \alpha b & -\alpha m \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$ – матриця коефіцієнтів системи рівнянь моделі.

Проведемо дослідження динаміки поведінки моделі.

Визначник матриці коефіцієнтів системи $det\, A = \alpha m\gamma > 0$. Слід матриці коефіцієнтів $Tr(A) = \alpha b$.

Характеристичне рівняння системи (7.41-7.42)

$$\lambda^2 + \alpha b\lambda - \alpha m\gamma = 0.$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{-\alpha b \pm \sqrt{(\alpha b)^2 - 4\alpha m\gamma}}{2}.$$

Параметр $\alpha > 0$, отже, необхідною і достатньою умовою стабільності моделі є умова $\alpha b < 0$. Останнє означає, функція попиту повинна бути убутною.

Щоб визначити, чи будуть корені характеристичного рівняння дійсними або комплексними, підрахуємо величину *(TrA – 4det A)* – дискримінант характеристичного рівняння (7.40):

$TrA - 4det\, A = (\alpha b)^2 - 4(\alpha m\gamma)$.

У загальному випадку не можна визначитися, чи буде ця величина додатною або від'ємною. Це залежить від чисельних значень параметрів α, b, m, γ.

Таким чином, єдине, що можна сказати про динаміку моделі, що розглядається – кожний розв'язок системи збігається до стаціонарного тоді і тільки тоді, коли $b < 0$.

При цьому точка рівноваги системи є стійким вузлом або стійким фокусом у залежності від того, чи буде величина $\alpha^2 b^2 - 4\,\alpha m\gamma$ додатною або від'ємною.

7.9. Динамічна Кейнсіанська модель

Розглянемо найпростішу Кейнсіанську модель, у які національний доход y реагує на надлишковий попит на товар, тобто надлишок інвестицій I над заощадженнями S, а процентна ставка реагує на надлишок попиту на гроші $L(Y,r)$ над екзогенно визначеною пропозицією грошей M, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = h_1(I - S), \\ \dfrac{dr}{dt} = h_2\left[L(y,r) - M\right], \end{cases} \tag{7.43}$$

де

$I = I_0 - \alpha r$ – функція інвестування;

$S = S_p + S_g = s(y - T) + (T - G)$ – функції заощаджень;

S_p= приватним заощадженням = постійній частині $s(0 < s < 1)$ доходу, яким можна варіювати;

S_g= державним заощадженням = податок (T) мінус витрати (передбачаються заданими екзогенно);

h_i=додатним постійним швидкості регулювання $(^3 = l,2)$, $h_1 = h_2 = 1$ для простоти;

$L(Y,r)$ = діловому попитові (ky) і спекулятивному попитові ($-\beta r$);

M =экзогенно визначеній пропозиції грошей.

Усі коефіцієнти α, β, k – додатні постійні.

Після підстановки одержуємо неоднорідну автономну систему двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -sy - \alpha r + T(1 - s) - G + I_0, \\ \dfrac{dr}{dt} = ky - \beta r - M, \end{cases} \tag{7.44}$$

де $A = \begin{bmatrix} -s & -\alpha \\ k & -\beta \end{bmatrix}$ – матриця коефіцієнтів системи рівнянь моделі.

Слід матриці $tr(A) = -(\beta + s) < 0$, отже, модель стійка.

Визначник матриці A дорівнює $det(A) = s\beta + \alpha k > 0$.

Динаміка поведінки системи (7.44) визначається загальним розв’язком відповідної однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -sy - \alpha r, \\ \dfrac{dr}{dt} = ky - \beta r. \end{cases} \tag{7.45}$$

З характеристичного рівняння системи (7.45)

$$\lambda^2 + (s + \beta)\lambda + (s\beta + \alpha k) = 0 \tag{7.46}$$

одержуємо вираз для характеристичних чисел

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(s+\beta) \pm \sqrt{(s+\beta)^2 - 4(s\beta + \alpha k)}}{2}.$$

Обидва характеристичних числа однакового знака, обидва від'ємні (поясніть, чому!). Якщо $\Delta = (tr(A))^2 - 4det(A) > 0$, $(s-\beta)^2 > 4\alpha k$, маємо два дійсних різних корені рівняння (7.46); якщо $\Delta = 0$, тобто $(s-\beta)^2 = 4\alpha k$, рівняння (7.46) має один кратний корінь; якщо $\Delta < 0$, тобто $(s-\beta)^2 < 4\alpha k$, одержуємо , що рівняння (7.46) має комплексні корені.

В окремих випадках: а) $s = p$, тобто коли маргінальна схильність до заощаджень дорівнює коефіцієнту еластичності спекулятивного попиту на гроші, $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{4\alpha k}$, фазовий портрет є стійким фокусом; б) $\alpha = k$, тобто функція ділового попиту має той же кутовий коефіцієнт, що і функція інвестицій (за абсолютною величиною), $\lambda_{1,2} = -s \pm 2i\alpha$ і фазовим портретом системи знов є стійкий фокус.

Контрольні запитання:

1. Які реальні процеси задаються рівнянням природного росту?
2. Як можна формалізувати функцію ціни від інтенсивності випуску продукції?
3. Надайте характеристику диференціального рівняння, яке задає логістичну криву.
4. Яке призначення моделі Еванса?
5. Наведіть основне припущення моделі Еванса.
6. Що таке лінійно-однорідна функція? Надайте математичну та економічну характеристику.
7. Яке рівняння має назву рівняння неокласичного росту?
8. Яка траєкторія має назву стаціонарної в моделі Солоу?
9. Поясніть поведінку основних макропоказників на стаціонарній траєкторії в моделі Солоу.
10. Наведіть визначення ”золотого правила росту” Солоу.
11. Поясніть поняття магістралі.
12. Наведіть тлумачення теореми про магістраль.
13. Наведіть основні припущення моделі гонки озброєнь.
14. Надайте характеристику моделі гонки озброєнь.
15. Які випадки поведінки моделі Ричардсона мають місце при $t \to \infty$? Обґрунтуйте свої висновки аналізом значень характеристичних чисел (3.33).
16. Як залежіть поведінка моделі від значень коефіцієнтів a і b в моделі гонки озброєнь?
17. Наведіть характеристику моделі існування популяції в умовах співіснування з іншими популяціями.
18. Як визначити координати відмінної від нуля точки рівноваги системи у моделі хижак-жертва.

19. Поясніть залежність характеру динаміки поведінки економічної системи, яка задається спрощеною математичною моделлю національної економіки, від значень екзогенних змінних β, α, γ.

20. Поясніть необхідну і достатню умову стабільності моделі Вальраса регулювання ціни.

Завдання для самостійної роботи:

1. Відновіть процес визначення загального розв'язку однорідного диференціального рівняння (7.17) з урахуванням початкової умови.

2. Самостійно проинтегрировать рівняння (7.20) (при p(y) = b - ay) і одержати явні вираження для y.

3. Поясніть геометричну інтерпретацію динаміки моделі Еванса (рис..

4. Надати розв'язання рівняння (7.1) у подробицях.

5. Розробити програмну реалізацію моделі прогнозування попиту на товари тривалого користування за допомогою логістичної функції, яку подано у п. 7.2. (Приклад 7.1).

7. Конкретизуйте загальний випадок моделі Солоу, який розглянуто в п.3.4., стосовно виробничої функції Кобба-Дугласа

$F(K, L)=A\,K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, $A>0$, $0<\alpha<1$.

7. Сформулювати „золоте правило" економічного зростання для виробничої функції Кобба-Дугласа.

8. У спрощеній моделі національної економіки, описаній вище (п. 3.7)

$$\begin{cases} W' = \alpha \cdot W - \beta \cdot S, \\ S' = \gamma(W - S - E), \end{cases}$$

припустимо, що урядові витрати не постійні і задані рівнянням $E = E_0 + cW$, де $c > 0$.

8.1. Знайдіть точку рівноваги системи і покажіть, що в реальній моделі

$c< 1$ $\beta > \dfrac{\alpha}{1-c}$.

8.2. Покажіть, що точка рівноваги не є сідлом;

8.3. При яких умовах економіка буде стійкою?

8.4. Виберіть підходящі значення параметрів α, β, γ, c так, щоб точка рівноваги була стійким фокусом. Побудуйте фазовий портрет системи в випадку .

8. ДИСКРЕТНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ

8.1. Загальна економічна рівновага.
8.1.1. Функції попиту та пропозиції на ринку досконалої конкуренції.
8.1.2. Павутиноподібна модель. Умова стабільності моделі.
8.1.3. Поняття про теорію сподівань.
8.2. Ефект мультиплікатора.
8.2.1. Економічна теорія Дж. М. Кейнса і його послідовників.
8.2.2. Основні поняття, відомі з курсу макроекономіки.
8.2.3. Найпростіша динамічна модель з мультиплікатором.
8.2.4. Оподаткування.
8.2.5. Модель зовнішньої торгівлі.
8.2.6. Ефект мультиплікатора у відкритій економіці.
8.3. Теорія економічних циклів.
8.3.1. Модель взаємодії мультиплікатора і акселератора.
8.3.2. Модель Самуельсона-Хікса – модель мультиплікатора-акселератора.
8.3.3. Методика прогнозування динаміки ВВП на основі моделі Самуельсона-Хікса.
8.3.4. Модель Тевеса.

8.1. Загальна економічна рівновага

Економічна наука має справу з кількостями та цінами товарів або факторів виробництва. Товари і фактори виробництва купуються і продаються на ринках. Розглянемо ринок одного товару і тільки одне агрегування – об'єднання покупців (споживачів) в одну групу і продавців (виробників) в іншу.

Загальна економічна рівновага – це стан, при якому обсяг виробництва і пропорції обміну є такими, що на ринку досягнуто рівність між попитом та пропозицією, і при цьому жоден з учасників ринкових угод не зацікавлений змінювати свої обсяги покупок або продажів.

Для розуміння специфіки поточної господарської кон'юнктури і прийняття рішень про заходи економічної політики важливо виявити, чи є економічна рівновага стійкою (стабільною) або нестійкою.

Для стабільності стану рівноваги необхідно, щоб найменше відхилення системи від цього стану викликало до дії сили, що прагнуть відновити рівновагу. Це означає, що перевищення ціною рівноважного значення обов’язково породжує дію сил, які впливають на зниження ціни. Для умов досконалої конкуренції це означає, що ріст ціни веде до розширення пропозиції в порівнянні з попитом.

Отже, умова стабільності полягає в тому, що ріст ціни приводить до більшого розширення пропозиції в порівнянні з попитом, а падіння ціни - до більшого розширення попиту в порівнянні з пропозицією.

8.1.1. Функції попиту та пропозиції на ринку досконалої конкуренції

Розглянемо ринок благ, та припустимо, що на ринку є один вид товару, може змінюватися тільки його ціна, а всі інші фактори, від яких залежить попит на даний товар – ціни на інші товари, основні виробничі фонди, характер технології, що застосовується, податки і дотації, природнокліматичні умови – залишаються незмінними. Тоді функція пропозиції є залежністю пропозиції q від ціни p:

$$q = S(p). \tag{8.1}$$

Особливістю даної функції пропозиції є те, що для багатьох видів товарів вона монотонно зростає ($\frac{dS}{dp} > 0$). Ріст пропозиції при збільшенні ціни пояснюється тим, що збільшується оптимальний обсяг випуску товару підприємством при збільшенні його ціни, а так само тим, що для виробництва високорентабельного товару в галузь включаються нові підприємства. При цьому на площині qOp крива пропозиції задається рівнянням $p = MC(q)$ (MC – *marginal cost)* і являє собою геометричне місце точок мінімумів ліній постійного прибутку (лінія S на рис. 8.1).

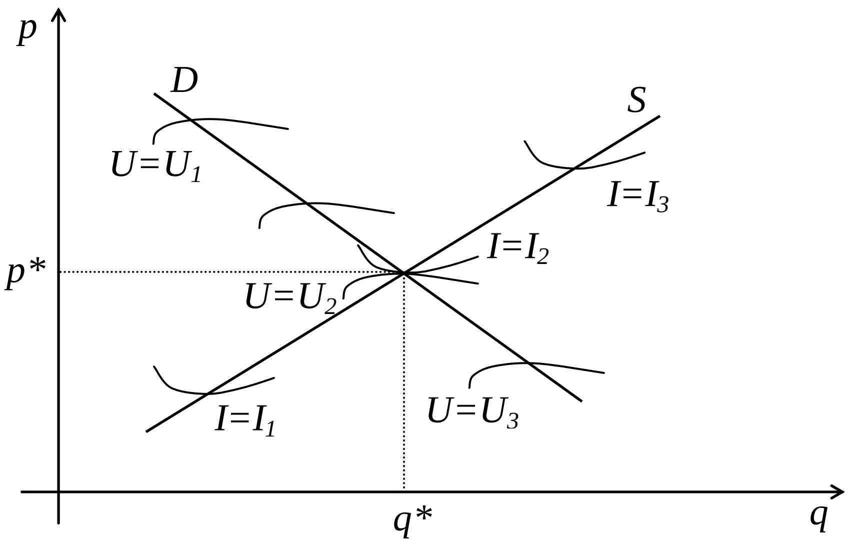


Рис. 8.1. Криві попиту та пропозиції, U – функція корисності, I – прибуток

Наступна функція, яка використовується – це функція попиту, що має вигляд:

$$q = D(p) \tag{8.2}$$

у випадку, коли споживач пред'являє попит на визначений товар, враховуючи свої переваги і бюджетні обмеження. Причому змінюється тільки ціна товару, а всі інші фактори, від яких залежить попит на нього (ціни інших товарів, грошовий доход, накопичені заощадження тощо), залишаються незмінними. Характерна риса цієї функції — її монотонне убування для багатьох видів товарів ($\frac{dD}{dp} < 0$), при цьому її графік (лінія D на рис. 8.1) є геометричним місцем точок на площині qOp, у яких ціна приймає максимально можливе значення на лініях постійної корисності.

Функції попиту та пропозиції є основними складовими моделі ринку товарів.

Перетинання графіків попиту та пропозиції відбувається в точці рівноваги (точка (q^*,p^*) на рис.8.1), а відповідна цій точці ціна $p = p^*$ називається *рівноважною.* Якщо ціна на ринку вище рівноважної, то пропозиція перевищує попит і виникає затоварення. У цій ситуації товаровиробники (продавці) багатьох видів товарів готові піти на зниження ціни з метою залучення більшого числа покупців. Отже, при значеннях ціни вище рівноважної відбувається тиск на неї убік зменшення.

Якщо ж ціна на ринку нижче рівноважної, то попит перевищує пропозицію, і товар стає дефіцитним. У цій ситуації частина покупців готова заплатити за товар більш високу ціну, але знизити ризик і з упевненістю придбати товар. Таким чином, при значеннях ціни нижче рівноважної відбувається тиск на ціну вбік збільшення. Ці дві тенденції приводять до того, що на ринках багатьох видів товарів, як правило, установлюється рівновага, при якій попит дорівнює пропозиції.

У силу властивостей кривих попиту та пропозиції рівноважний розв’язок є стійким у тому змісті, що в умовах строго фіксованої рівноважної ціни – $p = p^*$ – товаровиробник, максимізуючи прибуток, поставляє на ринок товар у кількості $S(p^*) = q^*$; одночасно споживач, прагнучи максимізувати корисність, пред'являє попит $D(p^*) = q^*$.

При встановленні рівноважної ціни на ринку досконалої конкуренції обсяг товарів, який пропонується товаровиробником і доставляє йому максимум прибутку за даною ціною, дорівнює попиту споживача.

Динамічні нерівноважні моделі ринку використовуються для аналізу поведінки змінних (ціна, попит, пропозиція) у часі у випадку, коли ціна в початковий момент відрізняється від рівноважної. При цьому процес установлення рівноважної ціни можна представити різними моделями при використанні функцій попиту (8.2) і пропозиції (8.1).

Розрізняють два підходи – неперервний, у якому динаміка цін описується диференціальним рівнянням (див. рівняння Еванса – п. 7.3.)

$$\frac{dp}{dt} = a(D(ð(-S(p)),$$

і дискретний, коли значення змінних на проміжку часу $[t,t+1)$ приймаються постійними. В останньому випадку послідовним інтервалам часу $[t,t+1)$ відповідають значення ціни p_t, попиту D_t і пропозиції S_t. У залежності від гіпотез, які використовуються, у дискретній моделі динаміки цін відбувається або запізнювання пропозиції – у цьому випадку приходимо до процесу

$$S(\eth_{t+1}) = D(\eth_t), \tag{8.3}$$

або запізнювання попиту – у цьому випадку одержуємо процес

$$D(\eth_{t+1}) = S(\eth_t). \tag{8.4}$$

Дискретні моделі вигляду (8.3), (8.4) становлять інтерес тому, що вони більш послідовно, ніж неперервні моделі, відбивають процедури прийняття рішень.

Проведемо аналіз можливості досягнення рівноваги між попитом та пропозицією, а також стійкості цін і обсягів товарів на ринку з досконалою конкуренцією, який описується кривими попиту та пропозиції при наявності запізнювання в часі пропозиції товару – гіпотеза (8.3).

8.1.2. Павутиноподібна модель. Умова стабільності моделі

Найпростішою ілюстрацією вищевикладеного положення служить динамічна павутиноподібна модель ринкової рівноваги, яка є однією з класичних економіко-математичних моделей.

Таку назву модель одержала завдяки геометричній інтерпретації – на площині qOp відповідний ітераційний процес подається у виді павутини, що "намотується" на криві попиту та пропозиції.

Павутиноподібна модель дозволяє досліджувати стійкість цін і обсягів товарів на ринку, який описується традиційними кривими попиту та пропозиції при наявності запізнювання в часі (лага) одного з процесів.

Ця динамічна модель була отримана зі статичної моделі попиту та пропозиції [22]. Отже, пропозиція S реагує на зміну ціни p з лагом в один період, у той час як попит D визначається ціною, і обидві ці залежності лінійні:

$$D_t = a + bp_t, \tag{8.5}$$

$$S_t = a_1 + b_1 p_{t-1}. \tag{8.6}$$

Виробники вважають, що ціна, установлена на початку поточного періоду, не змінюється протягом цього періоду і є основою для вибору обсягів виробництва в майбутньому періоді.

Таким чином, у функцію пропозиції вклинюється часовий лаг тривалістю в одну одиницю часу. Дійсно, рішення про обсяг виробництва приймається з урахуванням поточних цін, але виробничий цикл має визначену тривалість, і відповідна цьому рішенню пропозиція з'явиться на ринку по закінченню даного циклу.

Істотним припущенням моделі є очищення ринку. У кожному періоді ринок установлює таку ціну, при якій попит поглинає в точності весь обсяг пропозиції, тобто немає постачальників з нерозподіленим товаром і споживачів з незадоволеним попитом.

Балансове рівняння моделі має вигляд:

$$D_t = S_t. \tag{8.8}$$

Остаточно, з урахуванням (8.5), (8.6) модель (8.8) приймає вигляд

$$bp_t - b_1 p_{t-1} = a_1 - a . \qquad (8.8)$$

Рівняння (8.8) є лінійним різницевим неоднорідним рівнянням першого порядку з постійними коефіцієнтами. Методику розв’язання таких рівнянь подано в п. 2.4.

Як частинний розв’язок p^* різницевого неоднорідного рівняння (8.8) можна використовувати рівноважний розв’язок

$$p^* = (a_1 - a)/(b - b_1). \qquad (8.9)$$

Відповідне неоднорідному рівнянню (4.8) однорідне різницеве рівняння має вигляд

$$bp_t - b_1 p_{t-1} = 0 . \qquad (8.10)$$

Розв’язуючи характеристичне рівняння для рівняння (4.10)

$$b\lambda - b_1 = 0 ,$$

одержимо значення характеристичного числа

$$\lambda = b_1 / b .$$

Загальний розв’язок однорідного різницевого рівняння (8.10) має вигляд:

$$\overline{p}(t) = \tilde{N}(b_1/b)^t . \qquad (8.11)$$

У припущенні, що початкове значення ціни $\eth|_{t=0} = \eth_0$ є відомим, довільна постійна має значення $\tilde{N} = p_0 - p^*$.

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння (4.8) приймає вигляд:

$$\eth_t = (p_0 - p_e)(b_1/b)^t + p_e . \qquad (8.12)$$

Зазначимо ще раз, що частинний розв’язок (8.9) має економічну інтерпретацію *статичної ціни рівноваги.*

Загальний розв’язок однорідного різницевого рівняння (8.10) визначає динаміку розвитку економічної системи, тобто вигляд інтегральної кривої – характер поведінки ціни в часі – визначається саме рівнянням (8.11).

Суть павутиноподібної моделі полягає у такому:

а) Пропозиція реагує на ціни з деяким лагом (відставанням у часі), тобто поточна пропозиція S_t визначається ціною попереднього періоду p_{t-1}, а поточний попит D_t визначається ціною поточного періоду p_t.

б) Ціни кожного періоду p_t установлюються на такому рівні, щоб зрівняти попит та пропозицію, тобто на рівні, при якому $D_t = S_t$.

Умова стабільності моделі полягає в тому, що ріст ціни приводить до більшого розширення пропозиції в порівнянні з попитом, а падіння ціни – більшому розширенню попиту в порівнянні з пропозицією.

Звичайно, графік попиту D_t на площині qOp має від’ємний кутовий коефіцієнт відносно осі Op: $b < 0$, а пропозиція S_t – додатний кутовий коефіцієнт відносно осі Op: $b_1 > 0$.

Таким чином, $b_1/b < 0$, і ціна здійснюватиме рухи навколо свого рівноважного значення. Амплітуда цих періодичних коливань може бути зростаючою, постійною або зменшуватися (рис. 8.2), у залежності від співвідношення $|b_1| <=> |b|$ (символ <=> означає «менше, дорівнює, більше»), тобто в залежності від того, чи більше кутовий коефіцієнт прямої попиту $|b|$ ніж кутовий коефіцієнт прямої пропозиції $|b_1|$.

а) випадок стійкої рівноваги

б) випадок нестійкої рівноваги

а) випадок регулярних коливань

Таким чином, умова стабільності (умова, за якою ціна збігається до рівноважного значення), як видно зі співвідношення (8.11), для павутиноподібної моделі запишеться $|b_1/b| < 1$, тобто $|b_1| < |b|$.

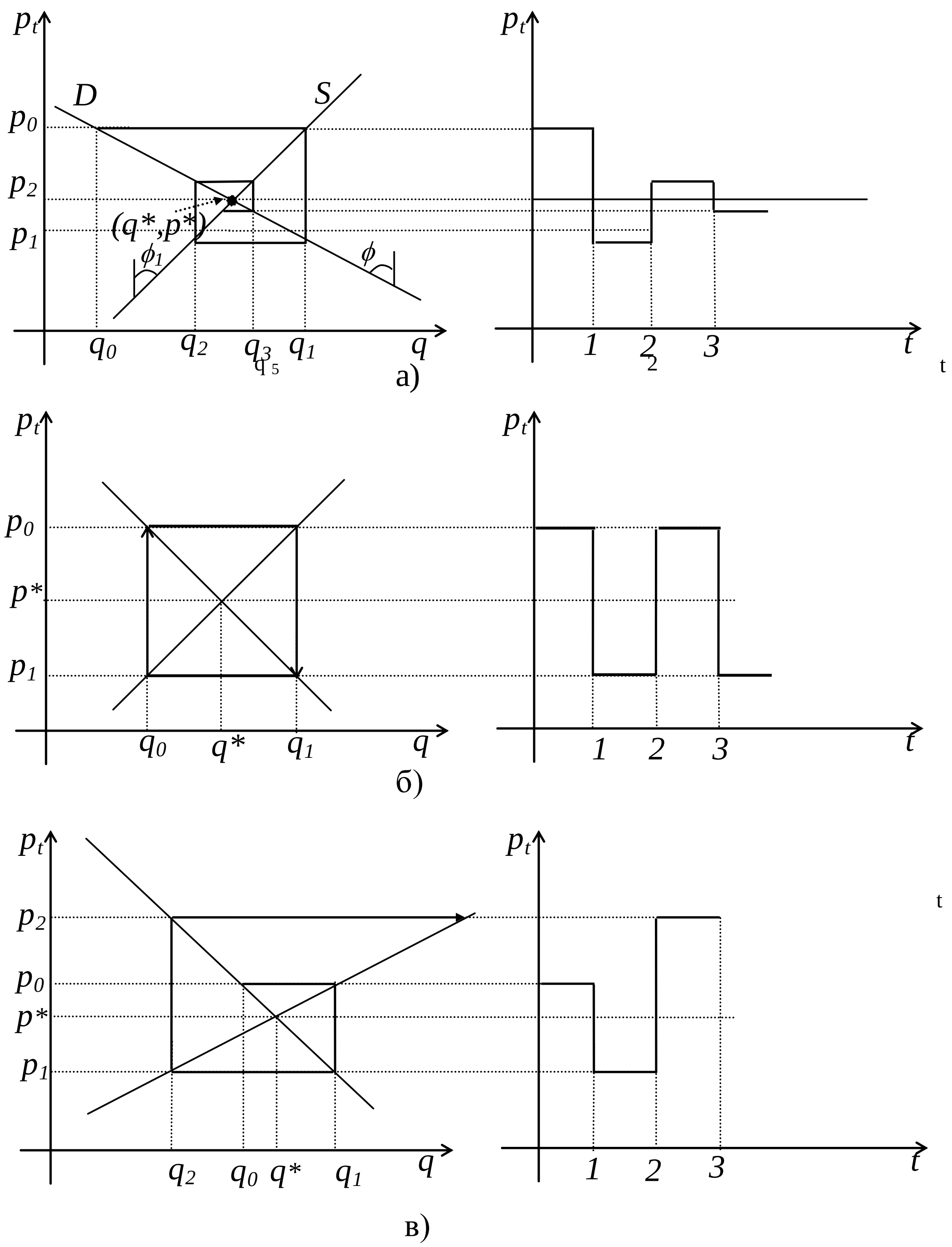


Рис. 8.2. Графік ринкової рівноваги павутиноподібної моделі

Теорема 8.3 (Про ринкову рівновагу в павутиноподібній моделі). У павутиноподібній моделі точка рівноваги є стабільною, якщо кутовий коефіцієнт нахилу кривої попиту більше, ніж кутовий коефіцієнт нахилу кривої пропозиції:

$$|b_1/b| < 1, \text{ тобто } |b_1| < |b|. \quad (8.13)$$

З економічної точки зору умова стабільності формулюється в такий спосіб: визначальним моментом для стійкості системи є менш сильна реакція, що згладжує, на зміну ціни тієї функції, що має часовий лаг (у даному випадку – функція пропозиції).

Під реакцією, що згладжує, мається на увазі еластичність функції. Якщо крива попиту має більшу еластичність, ніж крива пропозиції, то рівновага на такому ринку буде стійкою (рис. 8.2 а). Якщо крива попиту має меншу еластичність, ніж крива пропозиції, то рівновага на такому ринку буде нестійкою (рис.8.2 б). Нарешті, при однаковій еластичності кривих попиту та пропозиції ціни на ринку будуть регулярно коливатися з постійною амплітудою (рис.8.2 в).

Зауваження 8.1. Відмітимо, що кутові коефіцієнти b, b_1 прямих попиту D_t і пропозиції S_t чисельно дорівнюють відповідно $b = tg(\phi)$, $b_1 = tg(\phi_1)$, (рис. 8.2.а).

8.1.3. Поняття про теорію сподівань

Представлення суб'єктів ринку про майбутній рівень цін – *інфляційні сподівання* – входять у число найважливіших параметрів, що визначають поведінку цих суб'єктів.

Вважається, що значення сподівань зручніше формувати в самій моделі як ендогенні параметри.

У залежності від способу формування ендогенних сподівань останні поділяються на статичні, адаптивні і раціональні [14].

Найпростішим прикладом економічної моделі з ендогенними сподіваннями є розглянута вище «павутиноподібна» модель ціноутворення. Виробник, вирішуючи напередодні, яке кількість товару він виставить завтра на ринок, орієнтується на сформовану сьогодні ціну: $p_t^* = p_{t-1}$. Це значить, що очікувана продавцем у поточному періоді ціна наступного періоду дорівнює сьогоднішній ціні. Такий спосіб формування сподівань називається *статичним* сподіванням.

Співвідношення кутових коефіцієнтів графіків функцій попиту та пропозиції (рис. 8.2) задає характер процесу «павутиноподібного» ціноутворення, який може бути таким, що збігається, розбіжним або циклічним. При цьому виникає природне запитання: чому два останніх випадки не зустрічаються в реальному житті? Справа в тому, що в реальній економіці усі учаться на своїх помилках. Якщо виробник бачить, що обраний їм спосіб оцінки майбутньої ціни товару приносить йому усе більше збитків, він скорегує процедуру формування своїх сподівань. Цей факт знаходить втілення в концепції *адаптивних* сподівань, відповідно до якої очікувана виробником у періоді *[t–1]* ціна періоду *t* визначається за формулою:

$$p_t^* = p_{t-1}^* + \alpha(p_{t-1} - p_{t-1}^*) \quad 0 < \alpha < 1, \tag{8.14}$$

де α – коефіцієнт адаптації.

У концепції адаптивних сподівань передбачається, що при визначенні ціни періоду t у період $(t-1)$ виробник враховує свою помилку при попередньому прогнозі ціни (вираз в круглих дужках). При відсутності помилки $(p_{t-1}^* = p_{t-1})$, економічний суб'єкт і в майбутньому орієнтуватиметься на правильно визначену їм у минулому ціну. Якщо, наприклад, у понеділок виробник очікував, що у вівторок ціна буде дорівнює 5 грн., а насправді у вівторок вона виявилася 8 грн., і коефіцієнт адаптації α виробника дорівнює 0.5, то у вівторок він буде очікувати, що в середу ціна установиться на рівні 6 грн. Якби його прогноз виправдався, то і на середу він очікував би ціну 5 грн.

Використання адаптивних сподівань в цілому стабілізує модель. Традиційна павутиноподібна модель ринкової рівноваги (8.5 – 8.8) може бути представлена як окремий випадок більш загальної моделі вигляду:

$$D_t = a + bp_t, \tag{8.15}$$

$$S_t = a_1 + b_1 p_t^e$$

$$D_t = S_t$$

Різницеве рівняння моделі має вигляд:

$$p_t^* = p_{t-1}^* + \alpha(p_{t-1} - p_{t-1}^*) \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$bp_t - b_1\alpha p_{t-1} = b_1(p_{t-1}^* - \alpha p_{t-1}^*) + a_1 - a\ . \tag{8.16}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (8.8) дорівнює

$ð_t = C(b_1\alpha/b)^t + p_e$.

Умова стабільності:

$$| b_1\alpha | < | b |. \tag{8.18}$$

Абсолютне значення $|b_1\alpha|$ менше, ніж абсолютне значення $|b_1|$. Порівнявши (8.18) з теоремою 3 про ринкову рівновагу, одержимо такі результати:

1) Збіжність зберігається, її темп збільшується

$$| \frac{b_1\alpha}{b} | < | \frac{b_1}{b} | < 1\ ,$$

бо ряд значень $| \frac{b_1\alpha}{b} |^t$, $t=0,1,2,\ldots$ збігається до нуля швидше, ніж ряд

$$| \frac{b_1}{b} |^t, \ t=0,1,2,\ldots.$$

2) Періодичні коливання з постійною амплітудою стають згасаючими, тому що, якщо $|b_1|=|b|$, то

$$|b_1\alpha|<|b_1|.$$

3) Розбіжність може змінитися збіжністю, якщо параметр α істотно близький до нуля, тому що цілком імовірно, що

$|b_1\alpha|<|b_1|$, навіть якщо $|b_1|>|b|$.

Отримані результати показують, що введення в модель адаптивних сподівань робить її поведінку більш стабільною.

Хоча в концепції адаптивних сподівань «помилки вчать», у тих випадках, коли прогнозована величина монотонно збільшується (зменшується), сподівання суб'єктів будуть постійно нижче (вище) фактичних значень. До числа недоліків концепції адаптивних сподівань відноситься також і те, що при формуванні сподівання виробник спирається тільки на ту інформацію, яку використовував у минулому, не залучаючи дані, які додатково з'явилися на момент поточного прогнозу.

Незадоволеність концепцією адаптивних сподівань спонукала дослідників до розробки нової концепції – теорії *раціональних* сподівань. Відповідно до цієї концепції індивід прогнозує очікуване значення параметра, використовуючи стохастичну модель його формування і всю наявну в даний момент інформацію про фактори, що впливають на обумовлене значення. У такому випадку очікувана ціна з'являється у вигляді функції від усіх ціноутворюючих факторів:

$$p_t^* = p_{t-1}^*(x_i), \quad i=1,\ldots,n,$$

де x_i – ціноутворюючі фактори.

Модель раціональних сподівань не може бути цілком детермінованою, бо це прогнозна модель, але на відміну від адаптивних раціональні сподівання лише випадково можуть виявитися помилковими.

Розглянемо найпростішу модель прогнозу значення ціни відповідно до концепції раціональних сподівань:

$$1)\ D_t = a + bp_t + U_t;$$

$$2)\ S_t = a_1 + b_1 p_t^* + V_t;$$

$$3)\ p_t^* = p_{t-1}^*(x_i);$$

$$4)\ D_t = S_t.$$

Параметри U_t і V_t – це стохастичні змінні, що відбивають випадкові помилки в прогнозуванні обсягів попиту та пропозиції.

Перше рівняння вказує на те, що поточний попит на товар визначається його поточною ціною. Друге рівняння свідчить про те, що виробникам рішення про обсяг пропозиції приходиться приймати напередодні, тобто на основі очікуваної ціни. Третє рівняння говорить про те, що виробник будує свій прогноз відповідно до концепції раціональних сподівань. У розглянутому прикладі це означає, що йому відомі параметри

a, b, a_1, b_1, які визначають конкретний вид функцій попиту та пропозиції. Четверте рівняння констатує, що обсяги попиту та пропозиції повинні збігатися.

Однак у реальному житті нелегко формувати сподівання відповідно до концепції раціональних сподівань.

Побудова адекватної прогнозної моделі, збирання і обробка необхідної для прогнозу інформації, як правило, зв'язані зі значними витратами. При зіставленні цих витрат з користю від точного прогнозу очікуваних значень економічних показників для індивіда може виявитися раціональним не використовувати концепцію раціональних сподівань.

З цієї причини при моделюванні поведінки економічних суб'єктів поряд з раціональними сподіваннями використовують і адаптивні сподівання. Більш того, з метою спрощення часто коефіцієнт адаптації приймається рівним одиниці, і тоді виникає окремий випадок адаптивних сподівань – статичне сподівання.

8.2. Ефект мультиплікатора

8.2.1. Економічна теорія Дж. М. Кейнса і його послідовників

Світова економічна криза 1929-1933 р. визначила виникнення нових наукових досліджень, що не втрачають своєї актуальності й у наші дні, тому що основний їхній зміст – це значення державного регулювання економіки в ринковому господарстві. Саме тоді було започатковано два теоретичних напрямки, які націлені на рішення цієї проблеми. Один з них спирається на теорію Дж. М. Кейнса і його послідовників і називається кейнсіанським (кейнсіанство), а інший, що обґрунтовує альтернативні кейнсіанству концептуальні рішення, називається неоліберальним (неолібералізм).

Джон Мейнард Кейнс (1883-1946) – видатний вчений-економіст. Він вчився в не менш іменитого вченого, засновника Кембріджської школи економічної думки А. Маршалла. Але, усупереч сподіванням, не став його спадкоємцем і ледь не затьмарив славу свого вчителя.

За оцінками багатьох економістів, книга Дж. М. Кейнса ”Загальна теорія зайнятості, відсотка і грошей” (1936) з'явилася поворотним пунктом в економічній науці XX ст., оскільки вже в 30-і роки попереднього сторіччя ця фундаментальна праця стала теоретико-методологічною базою програм стабілізації економіки на рівні урядів у ряді держав Європи і в США і багато в чому визначає економічну політику цих країн і в цей час.

Дж. М. Кейнс став першим серед учених-економістів за всю парламентську історію Великої Британії, хто був визнаний англійською королевою гідним титулу лорда (У 1942 вчений був зведений у лицарство і визнаний гідним титулу лорда Кейнс-Тилтокського).

Головна ідея доктрини економічної політики Кейнса полягає в тому, що система ринкових економічних відносин не є досконалою і саморегульованою, і що максимально можливу зайнятість і економічний ріст може забезпечити тільки активне втручання держави в економіку.

Новаторство економічного навчання Дж. М. Кейнса в методологічному плані проявилося, по-перше, у наданні приоритету макроекономічного аналізу над мікроекономічним підходом, що зробило його основоположником макроекономіки як самостійного розділу економічної теорії, і, по-друге, в обґрунтуванні (виходячи з так званого «психологічного закону») концепції про ефективний попит, тобто потенційно можливий попит, який стимулюється державою. Спираючись на власну, «революційну» для того часу методологію дослідження, Дж.М. Кейнс на відміну від своїх попередників і всупереч економічним поглядам, що панували, говорив про необхідність недопущення за допомогою держави зменшення заробітної плати як основної умови ліквідації безробіття, а також про те, що споживання через психологічно обумовлену схильність людини до заощадження зростає набагато повільніше доходів.

По Кейнсу, психологічна схильність людини зберігати визначену частину доходу стримує збільшення доходу через скорочення обсягу капіталовкладень, від яких залежить перманентне одержання доходу. Величина граничної схильності людини до споживання є постійною і може обумовлювати стійке співвідношення між збільшенням інвестицій і рівнем доходу.

У методології дослідження Дж. М. Кейнса враховується важливий вплив на економічний ріст з боку неекономічних факторів, таких як: держава (яка стимулює споживчий попит на засоби виробництва і нові інвестиції) і психологія людей (що визначає ступінь усвідомлених взаємин суб'єктів, що хазяюють).

Разом з тим кейнсіанське вчення є певною мірою продовженням основних методологічних принципів неокласичного напрямку економічної думки, оскільки і сам Дж. М. Кейнс, і його послідовники (втім, як і неоліберали), керуючись ідеєю ”чистої економічної теорії”, виходять із пріоритетного значення в господарській політиці суспільства насамперед економічних факторів, визначаючи їхні кількісні показники і зв'язки між ними, як правило, на базі методів математичного і функціонального аналізу, економіко-математичного моделювання.

Дж. М. Кейнс не заперечував впливу меркантилістів* на створену їм концепцію державного регулювання економічних процесів. Як і меркантилісти, лорд Кейнс-Тилтокський:

- відстоюював збільшення маси грошей у країні (як засіб їхнього здешевлення і, відповідно, зниження ставок позичкового відсотка і заохочення інвестицій у виробництво);
- схвалював зростання цін (як спосіб, що стимулює розширення торгівлі і виробництва);
- визнавав, що недостатня кількість грошей у обігу служить причиною безробіття;
- виступав за національний (державний) характер економічної політики.

У революційній ”Загальній теорії” Дж.М. Кейнса чітко простежується думка про недоцільність надмірної ощадливості і накопичення і, навпаки, можливій користі усілякої витрати грошей, оскільки, як вважав учений, у першому випадку гроші, придбають неефективну ліквідну (грошову) форму, а в другому — можуть бути спрямовані на збільшення попиту і зайнятості. Він також різко й аргументовано критикував економістів, прихильних до догматичних постулатів ”закону ринків” Ж.-Б. Сея й інших суто «економічних» законів, називаючи їх представниками ”класичної школи”.

Дж. М. Кейнс одержав такий висновок: ”Психологія суспільства така, що з ростом сукупного реального доходу збільшується і сукупне споживання, однак не в такому ступіні, в якому зростає доход”. І в цьому його недвозначна теоретико-методологічна позиція, відповідно якій для виявлення причин неповної зайнятості і неповної реалізації, нерівноваженості економіки, а також для обґрунтування методів її зовнішнього (державного) регулювання ”психологія суспільства” має не менше значення, ніж ”закони економіки”.

Тим часом нарощування інвестицій і обумовлений цим ріст національного доходу і зайнятості населення може розглядатися як доцільний економічний ефект. Останній, що одержав в економічній літературі назву ефекту мультиплікатора, означає, що «збільшення інвестицій приводить до збільшення національного доходу суспільства, причому на величину більшу, ніж первісний ріст інвестицій». У специфічній розгадці механізму цього «ефекту» полягає відповідь на питання, чому в наукових дослідженнях Дж. М. Кейнса значну увагу приділено концепції мультиплікатора, який, за його словами, ввів в економічну теорію ще в 1931 р. Р. Ф. Кан.

Власний коефіцієнт Дж. М. Кейнс назвав ”мультиплікатором інвестицій”, який на відміну від мультиплікатора Р.Ф. Кана характеризує положення про те, що ”коли відбувається приріст загальної суми інвестицій, то доход збільшується на суму, яка в К разів перевершує приріст інвестицій”. Причина такого положення, підкреслює Дж. М. Кейнс, полягає у вже згадуваному ”психологічному законі”, у силу якого ”у міру того, як реальний доход зростає, суспільство прагне споживати його частину, яка постійно зменшується”.

Дж. М. Кейнс дійшов висновку про те, що ”принцип мультиплікатора дозволяє дати загальну відповідь на питання про те, яким чином коливання інвестицій, що складають відносно невелику частку національного доходу, здатні викликати такі коливання сукупної зайнятості і доходу, що характеризуються набагато більшою амплітудою”.

Але, за його переконанням, ”хоча в бідному суспільстві розміри мультиплікатора порівняно великі, вплив коливань у розмірах інвестицій на зайнятості виявиться багато сильніше у багатому суспільстві, тому що можна припустити, що саме в останньому поточні інвестиції складають набагато быльшу частку поточної продукції».

Отже, суть ефекту мультиплікатора дійсно проста. Проте тут можна привести красномовне висловлення М. Блауга про значення ефекту мультиплікатора. Він, зокрема, пише: ”Капіталісти, вчив нас Кейнс, можуть витягти себе зі скрутного положення за допомогою шнурків від власних черевиків, а саме через мультиплікатор. Вирішальним моментом при цьому є спонукання інвестувати”.

Кілька десятиліть потому, розділяючи ідеї Дж.М. Кейнса про "схильність людей до заощадження", Дж. К. Гелбрейт писав, що «ці доходи повинні бути інвестовані і, таким чином, витрачені (або компенсовані якимись іншими витратами). У противному випадку купівельна спроможність знижуватиметься. Товари будуть залишатися на полках, обсяг замовлень зменшиться, обсяг виробництва впаде, безробіття збільшиться. У результаті відбуватиметься спад».

Ефективність регулювання державою економічних процесів по Дж. М. Кейнсу, залежить від запровадження засобів (державні інвестиції) щодо повної зайнятості населення, зниження і фіксування норми відсотка. Він при цьому вважав, що державні інвестиції у випадку їхньої недостачі повинні гарантуватися випуском додаткових грошей, а можливий дефіцит бюджету запобігатиметься зростанням зайнятості і падінням норми відсотка. Інакше кажучи, за концепцією Дж. М. Кейнса, чим нижче норма позичкового відсотка, тим вище стимули до інвестицій, до росту рівня інвестиційного попиту, що у свою чергу розширює границі зайнятості, веде до подолання безробіття. При цьому вихідним для себе Кейнс вважав таке положення про кількісну теорію грошей, відповідно до якого в реальній дійсності "замість постійних цін при наявності невикористаних ресурсів і цін, що ростуть пропорційно кількості грошей в умовах повного використання ресурсів, ми практично маємо ціни, що поступово ростуть пропорційно збільшенню зайнятості факторів".

8.2.2. Основні поняття, відомі з курсу макроекономіки

Частиною сукупного попиту на блага є попит на інвестиції. Останні поділяються на індуковані й автономні [14].

Інвестиції називаються *індукованими,* якщо причиною їхнього здійснення є стійке збільшення попиту на блага.

Якщо при повному завантаженні виробничих потужностей, що використовуються з оптимальною інтенсивністю, зростає попит на блага, то в інтересах підприємців збільшити виробничі потужності.

Автономні інвестиції впроваджуються при фіксованому національному доході, тобто при заданому сукупному попиті на блага, і їхнє збільшення не є наслідком росту національного доходу. Це, насамперед, інвестиції в нову техніку і підвищення якості продукції.

Щоб визначити обсяг інвестицій, що забезпечує необхідне для задоволення попиту розширення виробничої бази, необхідно знати значення акселератора.

Акселератор – коефіцієнт приросту капіталоємності національного доходу. Акселератор показує, скільки одиниць додаткового капіталу потрібно для виробництва додаткової одиниці продукції

$$\aleph = \frac{\Delta K}{\Delta y}, \qquad (8.18)$$

де K – реальний обсяг капіталу, y – реальна величина національного доходу

Так, при даному акселераторі для збільшення виробництва з y_0 до y_1 необхідні індуковані інвестиції в розмірі

$$I^{ін} = \aleph(y_1 - y_0). \tag{8.19}$$

Мультиплікатор – коефіцієнт, що характеризує величину збільшення рівноважного національного доходу при збільшенні автономних (незалежних від величини національного доходу) витрат макроекономічних суб'єктів.

Нехай на ринку немає держави і закордону. Тоді рівновага на ринку благ має вигляд

$$y = \tilde{N}_{б}\ y + I \tag{8.20}$$

де $\tilde{N}_{б}$ – гранична (маргинальна) схильність до споживання.

Нехай також при існуючій ставці відсотка підприємці під впливом технічного прогресу вирішили збільшити обсяг інвестицій на *ΔI*. Щоб при зрослому попиті на інвестиції на ринку благ збереглася рівновага, пропозиція також повинна збільшитися на деяку величину *Δy,* обумовлену рівнянням

$$y + \Delta y = \tilde{N}_{б}\,(y + \Delta y) + I + \Delta I\,. \tag{8.21}$$

Віднімаючи з (4.21) (4.20), одержимо

$$\Delta y = \frac{1}{1 - C_y}\Delta I\,. \tag{8.22}$$

Співмножник $\frac{1}{1 - C_y}$ називається мультиплікатором автономних витрат. Оскільки $0 < \tilde{N}_{б} < 1$, то мультиплікатор більше одиниці. Отже, ріст автономних витрат збільшує національний доход більше, ніж на одиницю.

8.2.3. Найпростіша динамічна модель з мультиплікатором

8.2.3.1. В и п а д о к а в т о н о м н о г о і н в е с т у в а н н я. Згідно рівняння (8.21) в замкнутій економіці збільшення автономних інвестицій (або, в більш загальному випадку, автономних витрат) приводить до збільшення національного доходу відповідно до рівняння мультиплікатора (8.22)

$$\Delta y = \frac{1}{1 - C_y}\Delta I\,.$$

У цьому випадку, якщо первісне значення величини рівноважного доходу було y_0, нове значення точки рівноваги складе

$$y_0 + \frac{1}{1 - C_y}\Delta I\,.$$

Цей результат, однак не говорить нічого щодо руху від старої точки рівноваги до нової – невідомо, чи збігатиметься значення доходу до положення рівноваги. Тільки динамічна модель може дати відповідь на це питання.

Звичайним припущенням є те, що споживання залежить від доходу з лагом в один період, тобто

$$C_t = a + \tilde{N}_{б}\, y_{t-1}, \quad a \ge 0, \quad 0 < \tilde{N}_{б} < 1, \tag{8.23}$$

де a – автономне споживання.

Припустимо, що інвестиції цілком автономні, у початковий момент часу змінюються з I_0 до $I_0 + \Delta I$ (і зберігають цей рівень у всіх наступних періодах):

$$I_t = I_0 + \Delta I\,. \qquad (8.24)$$

Рівняння

$$Y_t = C_t + I_t \qquad (8.25)$$

замикає модель.

Підставляючи (8.24) і (8.23) у (8.25) одержимо наступне рівняння:

$$y_t - C_y y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I. \qquad (8.26)$$

Це лінійне різницеве неоднорідне рівняння першого порядку є *найпростішою динамічною моделлю з мультиплікатором*.

Загальним розв'язком рівняння (8.26) є сума часткового розв'язку y^* рівняння (8.26) і загального розв'язку $\bar{y}_t$ відповідного однорідного різницевого рівняння вигляду

$$y_t - C_y y_{t-1} = 0. \qquad (8.28)$$

Частковий розв'язок y^* неоднорідного рівняння визначається за умови:

$$y^* = y_t = y_{t-1},$$

після підстановки y^* у рівняння (4.26) одержуємо:

$$y^* = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - C_y}.$$

Визначимо загальний розв'язок $\bar{y}_t$ однорідного рівняння (8.28). Відповідне характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda - C_y = 0.$$

Корінь $\lambda = C_y$ – єдине власне число.

Отже, загальний розв'язок $\bar{y}_t$ має вигляд

$$\bar{y}_t = A(C_y)^t,$$

де A – довільна постійна.

Отже, загальний розв'язок рівняння (8.26) має вигляд:

$$y_t = A(C_y)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - C_y}.$$

Нове рівноважне значення доходу – $\frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - C_y}$ – і вихідне – $\frac{a + I_0}{1 - C_y}$ – розрізняються на величину $\frac{\Delta I}{1 - C_y}$. Оскільки $0 < Ñ_ó < 1$, значення $A(C_y)^t$ збігатиметься до нуля, а доход рухатиметься (монотонно) у напрямку до нового стану рівноваги.

8.2.3.2. Випадок частково автономного інвестування. Розглянемо інвестування, що є частково автономним і частково залежить від доходу (з лагом в один період) відповідно до граничної схильності до інвестування $h,\ 0 < h < 1$.

Формула (8.24) набуває вигляду:

$I_t = hy_{t-1} + I_0 + \Delta I$,

а рівняння (8.26) перетворюється у рівняння:

$$y_t - (C_y + h)y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I, \qquad (8.28)$$

яке є узагальненням *найпростішої динамічної моделі з мультиплікатором* на випадок частково автономного інвестування.

Загальний розв'язок рівняння (4.28) є сім'я функцій:

$$y_t = A(C_y + h)^t + (a + I_0 + \Delta I)/(1 - C_y - h), \qquad (8.29)$$

де A – довільна постійна.

Оскільки C_y і h додатні, інтегральні криві даного розв'язку є монотонними.

Умова стабільності: $C_y + h < 1$, тобто

$$h < 1 - C_y. \qquad (8.30)$$

Оскільки $(1 - C_y)$ – гранична схильність до заощадження (накопичення), умова (8.30) говорить про те, що гранична схильність до інвестування повинна бути менше граничної схильності до заощадження, щоб рівновага була стабільною. Відзначимо, умова (8.30) визначає додатність мультиплікатора $\frac{1}{1 - C_y - h}$, тобто $1 - C_y - h > 0$.

8.2.4. Оподаткування

Розглянемо удосконалення моделі мультиплікатора для замкненої економіки – модель з оподаткуванням.

Для спрощення задачі припустимо, що оподаткування є простою лінійною функцією доходу:

$T = T_a + \tau y, \quad 0 < \tau < 1$,

де τ – гранична схильність до оподаткування.

Споживання в цьому випадку – це функція чистого доходу y_d, котрий у нашій спрощеній моделі може бути обчислений як

$y_d = y - d - T + r$,

де d – рівень знецінення, r – трансферні платежі; ці параметри вважаються ендогенними.

Економіко-математична модель оподаткування має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&C_t = a + C_y y_{d,t-1}, \\
&I_t = hy_{t-1} + I_0 + \Delta I_0, \\
&T_t = T_0 + \tau Y_t, \\
&y_{d,t} = Y_t - d - T_t + r, \\
&y_t = C_t + I_t + G_t,
\end{aligned}
\qquad (8.31)
$$

де G_t – урядові витрати.

Простою підстановкою з наступним приведенням подібних одержуємо неоднорідне різницеве рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами

$$y_t - [C_y(1-\tau) + h] y_{t-1} = a - C_y T_a + I_0 + \Delta I_0 + G + br - bd. \qquad (4.32)$$

Загальний розв’язок рівняння (4.32) має вигляд:

$$y_t = A[C_y(1-\tau) + h]^t + \frac{a + I_0 + \Delta I_0 + G + C_y(-T_a + r - d)}{1 - C_y(1-\tau) - h}.$$

Оскільки величини $C_y(1-\tau)$ і h – додатні, динаміка системи є монотонною.

Мультиплікатор з оподатковуванням $\frac{1}{1 - C_y(1-\tau) - h}$ менше мультиплікатора без урахування оподатковування $\frac{1}{1 - C_y - h}$. Умова стабільності

$$h < 1 - C_y + b\tau, \qquad (8.33)$$

є менш строгою, ніж вираз (8.30), тому введення в модель функції оподаткування стабілізує модель.

8.2.5. Модель зовнішньої торгівлі

Як приклад подальшого розвитку мультиплікаторної моделі розглянемо мультиплікатор зовнішньої торгівлі.

Приймаємо імпорт як функцію доходу, а експорт передбачається цілком екзогенним. У відкритій економіці сукупна пропозиція визначається як сума національного продукту $\acute{o}$ і імпорту M; сукупний попит визначається як сума національного споживання C, національного інвестування I та експорту X. Балансовим співвідношенням є рівняння

$\acute{o} + M = C + I + X$ або $\acute{o} = C + I + X - M$.

У цьому випадку формальна модель виглядає таким чином:

$$
\begin{aligned}
&C_t = a + C_y \cdot y_{t-1}, \\
&I_t = h \cdot y_{t-1} + I_0 + \Delta I, \\
&X_t = X_0 + \Delta X, \\
&M_t = m \cdot y_{t-1} + M_0, \\
&y_t = C_t + I_t + X_t - M_t,
\end{aligned}
\qquad (8.34)
$$

де m – гранична схильність до імпорту (”втрати” від імпорту), $0 < m < 1$.

Підставляючи перші чотири функції в останнє – балансове – співвідношення, одержимо

$$y_t - (C_y + h - m)y_{t-1} = a + I_0 + X_0 - M_0 + \Delta I + \Delta X, \qquad (8.35)$$

загальний розв’язок якого має вигляд:

$$y_t = A(C_y + h - m)^t + \frac{a + I_0 + X_0 - M + \Delta I + \Delta X}{1 - b - h + m}, \qquad (8.36)$$

де A – невизначена постійна.

Відзначимо, що мультиплікатором є величина $\frac{1}{1 - C_y - h + m}$.

Сума $C_y + h$ очевидно більше m. Отже, умова стабільності має вигляд

$$C_y + h - m < 1 \text{ або } 1 - C_y - h + m > 0,$$

що гарантує додатність мультиплікатора $\frac{1}{1 - C_y - h + m}$.

Умову стабільності також можна подати у вигляді:

$$h < 1 - C_y + m, \qquad (8.38)$$

тобто гранична схильність до інвестування h повинна бути менше суми граничної схильності до накопичення (1-C_y) і граничної схильності до імпорту m.

Цікавий наслідок виникає при розгляді питання про повну збалансованість торгівлі. Припустимо, що спочатку торгівля збалансована (тобто $X = M$) і експорт автономно збільшується. Доход збільшується відповідно до мультиплікатора зовнішньої торгівлі, отже, збільшується імпорт, оскільки це зростаюча функція доходу. Чи буде (змушене) збільшення в імпорті цілком компенсувати (ендогенне) збільшення експорту?

Формально маємо:

$$\Delta I = \frac{1}{1 - C_y - h + m}\Delta X$$

і

$$\Delta M = m\Delta y = \frac{1}{1 - C_y - h + m} m\Delta X.$$

Отже, $\Delta M = \Delta X$ тільки в тому випадку, коли $h = 1 - C_y$.

8.2.6. Ефект мультиплікатора у відкритій економіці

Ступінь участі країни в міжнародній торгівлі товарами і послугами позначається на величині мультиплікатора. Для визначення величини мультиплікатора у відкритій економіці (мультиплікатора зовнішньої торгівлі), необхідно ввести в аналіз функцію чистого експорту. Припустимо, що експорт не залежить від величини національного доходу країни, а тільки від зростання доходів за кордоном. Збільшення експорту індукує вплив мультиплікатора на національний доход. Розглянемо дану гіпотезу докладніше.

У п. 8.2.4. розглядалася модель динаміки мультиплікатора з урахуванням зовнішньої торгівлі, у якій експорт побічно залежить від національного доходу.

Припустимо, що в країні (назвемо її “країна 1”) відбувається зміна доходу. Потім також змінюється обсяг імпорту, що залежить від доходу, і ця зміна також означає зміну експорту в “країну 1” для усього іншого світу (для простоти будемо вважати для іншої країни, назвемо її “країна 2”). Зміна обсягу експорту в “країні 2” приводить до зміни доходу, що у свою чергу змінює обсяг імпорту “країни 2” з “країни 1”. Це приводить до зміни обсягів експорту “країни 1” і так далі.

Цей ланцюжок подій відомий за назвою “зовнішньоторговельна віддача”, і мультиплікатор, який її враховує, називається *мультиплікатором із зовнішньоторговельною віддачею.* Для термінологічної зручності мультиплікатор, розглянутий у 8.2.2, будемо називати “мультиплікатором зовнішньої торгівлі без віддачі”.

Почнемо зі статичної моделі, що складається з наступних рівнянь:

Ці рівняння виражають відповідно функції споживання, функції інвестування, функції імпорту, той факт, що експорт однієї країни збігається з імпортом іншої країни, і визначення національного доходу в умовах відкритої економіки. I_0 і M_0 – автономні компоненти.

Країна 1	Країна 2
$C_1 = b_1 y_1,$	$C_2 = b_2 y_2,$
$I_1 = I_{01} + h_1 y_1,$	$I_2 = I_{02} + h_2 y_2,$
$M_1 = M_{01} + m_1 y_1,$	$M_2 = M_{02} + m_2 y_2,$
$X_1 = M_2,$	$X_2 = M_1,$
$y_1 = C_1 + I_1 + X_1 + M_1.$	$y_2 = C_2 + I_2 + X_2 + M_2.$

Підставляючи перші чотири рівняння у п'яте балансове для обох країн, одержуємо:

$$\begin{aligned} &(1 - b_1 - h_1 + m_1) y_1 - m_2 y_2 = I_{01} + M_{02} - M_{01}, \\ &- m_1 y_1 + (1 - b_2 - h_2 + m_2) y_2 = I_{02} + M_{01} - M_{02}. \end{aligned} \tag{8.38}$$

Розглянемо отримані вирази в динамічному аспекті. Припущення щодо моделі аналогічні п. 8.2.4, тобто в обох країнах функції C_t, I_t і M_t залежать від доходу y_{t-1} в попередньому часовому періоді.

Після звичайних підстановок як модель одержуємо систему неоднорідних різницевих рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} y_{1t} = (b_1 + h_1 - m_1) y_{1,t-1} + m_2 y_{2,t-1} + (I_{01} + M_{02} - M_{01}), \\ y_{2t} = m_1 y_{1,t-1} + (b_2 + h_2 - m_2) y_{2,t-1} + (I_{02} + M_{01} - M_{02}). \end{cases} \tag{8.39}$$

Частинний розв’язок системи (8.39) одержують у вигляді $y_{1t} = y_{1,t-1} = y_1^*$, $y_{2t} = y_{2,t-1} = y_2^*$, де y_1^*, y_2^* – постійні.

Підставляючи y_1^*, y_2^* у систему (8.39), одержуємо звичайну систему аналітичних рівнянь,

$$\begin{cases} y_1^* = (b_1 + h_1 - m_1)y_1^* + m_2 y_2^* + (I_{01} + M_{02} - M_{01}), \\ y_2^* = m_1 y_1^* + (b_2 + h_2 - m_2)y_2^* + (I_{02} + M_{01} - M_{02}). \end{cases}$$

розв'язок якої – y_1^*, y_2^* – збігається зі статичними точками рівноваги системи (8.39).

Динаміка системи визначається загальним розв'язком відповідної системи однорідних різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} y_{1t} = (b_1 + h_1 - m_1)y_{1,t-1} + m_2 y_{2,t-1}, \\ y_{2t} = m_1 y_{1,t-1} + (b_2 + h_2 - m_2)y_{2,t-1}. \end{cases} \tag{8.40}$$

Характеристичне рівняння для однорідної системи (4.40):

$$\begin{vmatrix} (b_1 + h_1 - m_1) - \lambda & m_2 \\ m_1 & (b_2 + h_2 - m_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{8.41}$$

Оскільки $b + h > m$, коефіцієнти системи додатні. Застосуємо умови стабільності. Необхідними і достатніми умовами стабільності є:

$$\begin{aligned} &1 - b_1 - h_1 + m_1 > 0, \\ &(1 - b_1 - h_1 + m_1)(1 - b_2 - h_2 + m_2) - m_1 m_2 > 0, \end{aligned} \tag{8.42}$$

Якщо необхідні тільки достатні умови, то одержимо

$$\begin{aligned} &b_1 + h_1 < 1, \\ &b_2 + h_2 < 1. \end{aligned} \tag{8.43}$$

Щоб оцінити економічний зміст цих висновків, необхідно згадати, що $b + h - m < 1$ – це умова стабільності для мультиплікатора зовнішньої торгівлі без віддачі, а $b + h < 1$ – умова стабільності для мультиплікатора закритої економіки. Таким чином, можна зробити наступні висновки:

- Необхідною умовою стабільності для мультиплікатора із зовнішньоторговельною віддачею є те, що мультиплікатори без зовнішньоторговельної віддачі обох країн стабільні.
- Достатнєю (але не необхідною) умовою стабільності мультиплікатора з зовнішньоторговельною віддачею є те, що для обох ізольованих країн мультиплікатор закритої економіки стабільний.
- Якщо для обох ізольованих країн мультиплікатор закритої економіки нестабільний, то мультиплікатор зовнішньої торгівлі з віддачею також нестабільний.
- Якщо у припущенні, що кожна країна передбачається ізольованою, виявиться, що в одній з них мультиплікатор закритої економіки стабільний, у той час як в іншій – ні, то мультиплікатор зовнішньої торгівлі з віддачею може бути як стабільним, так і нестабільним.

8.3. Теорія економічних циклів

Теорія економічних циклів сумісно з теорією економічного росту відноситься до теорій економічної динаміки, що пояснюють розвиток (рух) народного господарства.

Теорія циклу покликана пояснити причини коливань економічної активності суспільства в часі (хвилеподібна крива на рис. 4.3), а теорія росту досліджує фактори й умови стійкого росту як довгострокової тенденції в розвитку економіки (пряма лінія на рис. 8.3).

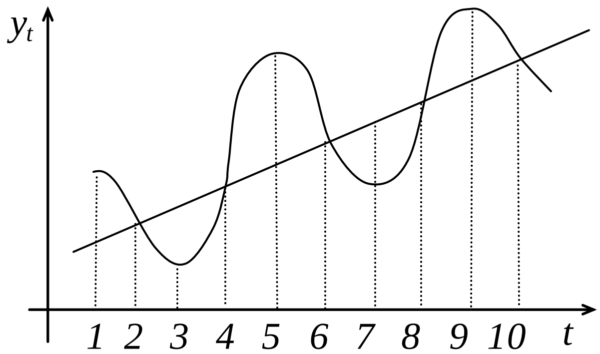


Рис. 8.3. Зміна економічної активності і фази економічного циклу

Напрямок і ступінь зміни показника або сукупності показників, що характеризують розвиток народного господарства, називається *економічною кон'юнктурою*. Тому теорію економічних циклів називають також теорією кон'юнктури.

Проміжок часу між двома однаковими станами економічної кон'юнктури називається *економічним циклом*. У структурі циклу виділяють *вищу (пік)* і *нижчу* точки активності і фази *спаду (рецесії)* і *підйому (експансії),* що розташовані між ними. Загальна тривалість циклу виміряється звичайно часом (у місяцях) між двома сусідніми вищими або двома сусідніми вищими крапками активності (5—9 або 3—8 на рис. 4.3). Відповідно тривалість спаду виміряється часом між вищою і наступною нижчою точками активності, а підйому — часом між нижчою і наступною вищою точками активності.

8.3.1. Модель взаємодії мультиплікатора і акселератора

Ця модель ґрунтується на кейнсіанській концепції загальної економічної Рівноваги і ілюструє вплив змін величини автономного попиту на економічну кон'юнктуру.

Як було встановлено вище (п. 8.2.1), при наявності резервних виробничих потужностей ріст автономного попиту на визначену величину збільшить національний доход на багаторазово більшу величину внаслідок ефекту мультиплікатора. Коли величина ефективного попиту перевищить наявні виробничі потужності, підприємці почнуть здійснювати індуковані інвестиції, обсяг яких визначається величиною акселератора. Індуковані інвестиції, стаючи складовою сукупного попиту, породжують черговий мультиплікаційний ефект, що знову збільшує ефективний попит і спонукає тим самим до нових індукованих інвестицій.

Повернеться економічна система до нового рівноважного стану чи ні, як розвертатиметься процес: монотонно або коливально – на ці питання дає відповідь модель мультиплікатора-акселератора.

8.3.2. Модель Самуельсона-Хікса – модель мультиплікатора-акселератора

Модель Самуельсона-Хікса містить у собі тільки ринок благ на тій підставі, що рівень цін, відносні ціни благ і ставка відсотка передбачаються незмінними. Відповідно до кейнсіанської концепції також передбачається, що обсяг пропозиції є досконало еластичним.

Обсяг споживання домашніх господарств у поточному періоді визначається величиною їхнього доходу в попередньому періоді:

$$C_t = C_a + \tilde{N}_{\acute{o}}\, y_{t-1}, \qquad (8.44)$$

де C_a – автономне споживання.

Підприємці здійснюють індуковані інвестиції після того, як переконалися в тому, що збільшення сукупного попиту є стійким. Тому, приймаючи рішення про обсяг індукованих інвестицій, вони орієнтуються на збільшення сукупного попиту (національного доходу) не в поточному, а в попередньому періоді:

$$I^{ін} = b + \aleph(y_{t-1} - y_{t-2}),$$

де b – автономні капіталовкладення.

При прийнятих припущеннях економіка буде знаходитися в стані рівноваги, якщо

$$y_t = \tilde{N}_{\acute{o}}\, y_{t-1} + \aleph(y_{t-1} - y_{t-2}) + A_t,$$

або

$$y_t = (C_{\acute{o}} + \aleph)y_{t-1} - \aleph\, y_{t-2} + A_t, \qquad (8.45)$$

де $A_t = \tilde{N}_{\grave{a}} + b$ – екзогенна величина автономного попиту.

Рівняння (8.45) є неоднорідним різницевим рівнянням другого порядку, що характеризує динаміку національного доходу в часі.

При фіксованій величині автономних витрат $(A_t = A = const)$ в економіці досягається довгострокова рівновага, коли обсяг національного доходу стабілізується на визначеному рівні y^*, тобто $y_t = y_{t-1} = y_{t-2} = y^*$, де n – число періодів з незмінною величиною автономних витрат.

З рівняння (8.45) випливає, що $y^* = \dfrac{A}{1 - C_y}$.

Розглянемо характер динаміки національного доходу, якщо після досягнення довгострокової рівноваги зміниться величина автономного попиту.

Для цього замінимо неоднорідне різницеве рівняння (8.45) однорідним.

Уведемо наступні позначення:

$$y_t - y^* = \Delta y_t.$$

Значення y_t і y^* задовольняють рівність (8.45), тому можна записати наступне однорідне різницеве рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\Delta y_t = (C_б + \aleph)\Delta y_{t-1} - \aleph\,\Delta y_{t-2}, \qquad (8.46)$$

або
$$\Delta y_t - (C_б + \aleph)\Delta y_{t-1} - \aleph\,\Delta y_{t-2} = 0.$$

Напрям зміни y_t визначається напрямом зміни Δy_t, тому що $y_t = y^* + \Delta y_t$.

Як зазначалось раніше, характер зміни Δy_t залежить від значення дискримінанта характеристичного рівняння однорідного рівняння (8.46). Оскільки в даному випадку дискримінант дорівнює $(C_б + \aleph)^2 - 4\aleph$, то динаміку національного доходу визначають значення граничної схильності до споживання $C_б$ або мультиплікатора $\dfrac{1}{1 - C_y}$ і акселератора $\aleph$.

Якщо $(C_б + \aleph)^2 - 4\aleph > 0$, то показник y_t змінюється монотонно; при $(C_б + \aleph)^2 - 4\aleph < 0$ зміна y_t відбувається коливально. Отже, графік функції $(C_б + \aleph)^2 = 4\aleph$, представлений на рис. 8.4, відокремлює множину сполучень $(\aleph, C_б)$, що забезпечують монотонну зміну y_t, від множини комбінацій значень $(\aleph, C_б)$, що приводять до коливань y_t.

Збігатиметься значення y_t до деякої скінченої величини або розбігатиметься у нескінченність, залежить від значення останнього члену характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - (C_б + \aleph)\lambda - \aleph = 0, \qquad (8.48)$$

Якщо $\aleph$ < 1, то рівновага установиться на визначеному рівні. При $\aleph$ > 1 раз порушена рівновага більше не відновиться. Коли $\aleph$ = 1, тоді значення y_t будуть коливатися з постійною амплітудою.

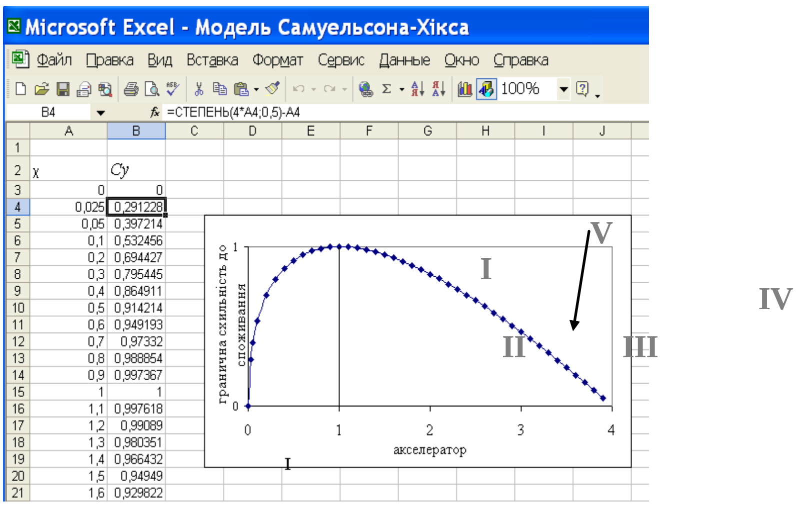


Рис.8.4. Розподіл значень $C_б$ і $\aleph$ у залежності від їхнього впливу на характер динаміки національного доходу при зміні автономного попиту

У результаті вся множина сполучень $(\aleph, C_б)$, виявилася розділеною на п'ять областей, як це показано на рис. 8.4.

Якщо значення $(\aleph, C_б)$ вказують на область І, то після порушення рівноваги в результаті зміни автономного попиту значення y_t монотонно збігатиметься до нового рівноважного рівня $y^* = \dfrac{A_0 + \Delta A}{1 - C_y}$ (рис. 8.5.а).

При значеннях $(\aleph, C_б)$ з області ІІ, національний доход досягне нового рівноважного рівня, пройшовши через загасаючі коливання (рис. 8.5.б).

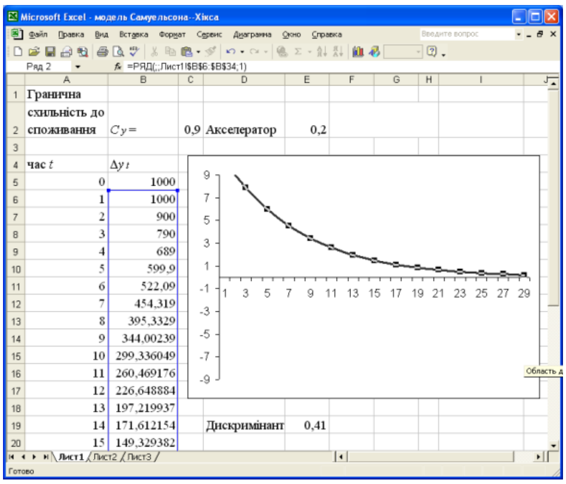
Сполучення значень $(\aleph, C_б)$ в області ІІІ (рис. 8.5.в), відповідають нестабільній рівновазі, динаміка y_t здобуває характеру вибухових коливань.

Комбінації значень $(\aleph, C_б)$ з області IV приводять до того, що після порушення рівноваги значення y_t монотонно спрямовуються в нескінченність (рис. 8.5г).

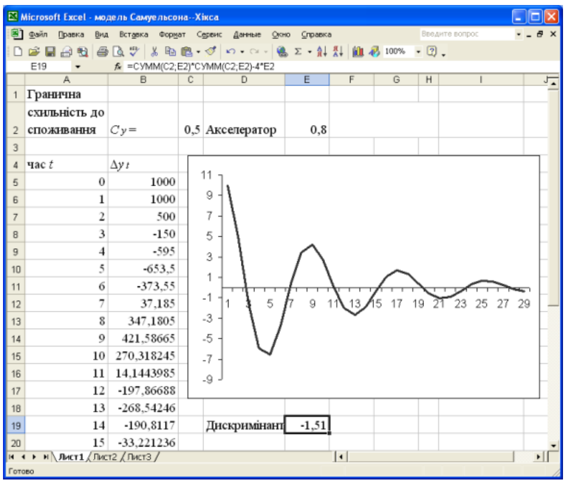
І нарешті, якщо акселератор дорівнює одиниці, то при будь-якому значенні граничної схильності до споживання у випадку порушення рівноваги виникають рівномірні незатухаючі коливання y_t (рис. 8.5.д).

У реальній економіці $C_б < 1$, а $\aleph > 1$, тобто це області ІІІ і IV. При таких сполученнях значень граничної схильності до споживання і акселератора рівновага нестійка, і при її порушенні в моделі y_t дуже швидко приймає неправдоподібні значення. Але величина національного доходу не може істотно перевищувати величину національного доходу повної зайнятості. Це обмежує амплітуду коливань обсягу національного доходу зверху. З іншого боку, обсяг індукованих інвестицій не може бути менше від'ємної величини амортизації, і це обмежує амплітуду коливання величини національного доходу знизу.

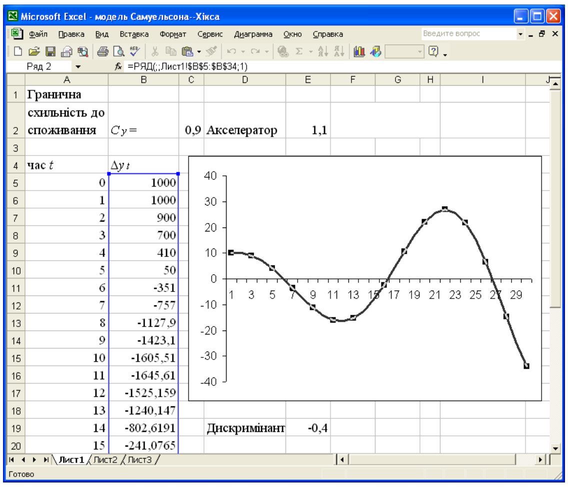
У таких умовах збільшення автономних інвестицій приводить до коливань величини національного доходу навіть при визначенні величин C_y і $\aleph$ в області IV.



а)

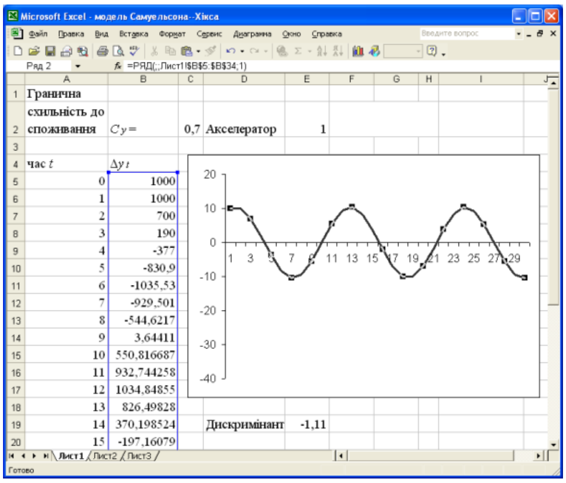


б)



в)

4



д)

Рис. 8.5. Варіанти динаміки національного доходу в моделі (4.46):

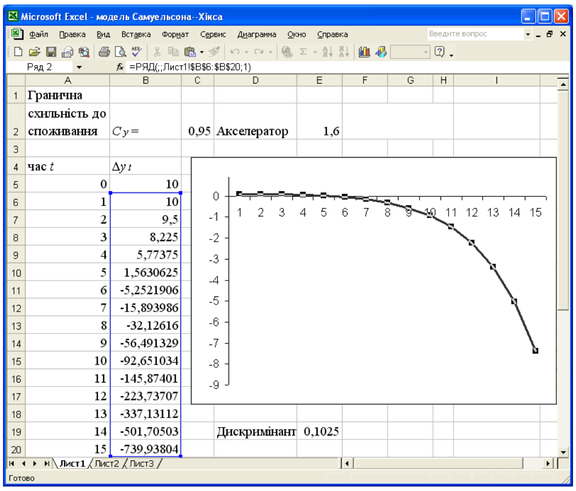
а) y_t монотонно збігається до нового рівноважного значення;

б) y_t коливально збігається до нового рівноважного значення;

в) y_t здобуває характер вибухових коливань;

г) значення y_t монотонно спрямовуються в нескінченність;

д) рівномірні незатухаючі коливання y_t



г)

8.3.3. Методика прогнозування динаміки ВВП на основі моделі Самуельсона-Хікса

8.3.3.1. Е к о н о м і ч н і а с п е к т и м о д е л і. Проблема побудови задовільних прогнозів динаміки валового внутрішнього продукту (ВВП) полягає у наступному. Місячні дані обсягів ВВП мають чітко виражену сезонну складову, а також визначену циклічність. Наявність річної сезонності зв'язана із сезонністю в галузях економіки, що виражається в падінні рівня ВВП січня поточного року до грудня минулого року з поступовим зростанням протягом наступного року. Сутність циклічного компонента визначається закономірностями спадів і підйомів економіки.

При прогнозуванні динаміки ВВП річну сезонність показників удається добре врахувати класичними статистичними методами, але циклічність – справа значно складніша. Якщо економіка, що знаходиться в стані рівноваги, починає під впливом яких-небудь факторів зростати, у дію вступає механізм мультиплікатора-акселератора (взаємного “підштовхування” інвестицій і доходів). Даний механізм, здавалося б, повинний забезпечити “вічне” процвітання. Але цього не відбувається: через визначений час підйом змінюється спадом, глибоким і тривалим, котрий, однак, не триває вічно, а рано чи пізно поступається місцем підйомові.

Розглянемо один з підходів до побудови прогнозного значення ВВП на основі рівняння Самуельсона-Хікса (п. 4.3.2, формула 4.45):

$$y_t = (C_y + \aleph)y_{t-1} - \aleph y_{t-2} + A_t,$$

яке можна переписати у вигляді:

$$y_t = C_y y_{t-1} + \aleph(y_{t-1} - y_{t-2}) + A_t. \qquad (8.48)$$

Основна статистична інформація – це місячні спостереження ВВП України із січня року $\grave{O}_1$ по грудень року $\grave{O}_2$ в порівняних цінах січня року $\grave{O}_1$. Рівень ВВП у січень року $\grave{O}_1$ приймають за 100%, тоді величини ВВП у місяцях, що залишилися, будуть виражені частинами від цієї величини.

Часовий ряд даних ВВП у приведених цінах необхідний тому, що звичайно ряд номінальних величин ВВП неухильно зростає, що очевидно, зв'язано з наявністю в статистичних даних елемента інфляції.

Очевидно, вихідний ряд місячних рівнів ВВП у порівнянних цінах містить усього кілька десятків спостережень, чого, узагалі говорячи, недостатньо, щоб робити надійні статистичні висновки. Тим більше, мало що можна сказати, вивчаючи річні обсяги величин. Тому трохи видозмінимо [34] рівняння Самуельсона-Хікса (4.48), а саме вважатимемо, що y_t – це не річний рівень ВВП, а місячний, і різниця $y_{t-1} - y_{t-2}$ розглядатиметься не як різниця між двома сусідніми роками величин ВВП, а як різниця між однойменними місяцями сусідніх років. Тоді рівняння Самуельсона-Хікса (4.48) запишеться в наступному вигляді

$$y_t = A + cy_{t-12} + v(y_{t-12} - y_{t-24}) + \varepsilon_t, \qquad (8.49)$$

де величини ε_t є помилками моделі, величина яких говорить про відповідність моделі реальним даним. Якщо величини ε_t не додати в рівняння (8.49), то воно, взагалі говорячи, не має змісту, тому що зазначене рівняння на наявних статистичних даних просто не виконується.

Надалі при дослідженні динаміки ВВП, буде зручно оперувати моделлю не у виді (8.49), а в інших еквівалентних формах.

Введемо в розгляд ряд парних різниць місячних рівнів ВВП у базисних цінах, що задається формулою

$\Delta_{t-12} = y_t - y_{t-12}$.

Тоді рівняння (8.49) можна переписати у вигляді

$$y_t = A + c y_{t-12} + v \Delta_{t-12} + \varepsilon_t . \qquad (8.50)$$

Якщо в рівнянні (8.50) розкрити дужки і привести подібні члени, то воно перепишеться як

$$y_t = A + c y_{t-12} - u_1 y_{t-12} - u_2 y_{t-24} + \varepsilon_t , \qquad (8.51)$$

де $u_1 = -(c + v), \quad u_2 = -v$.

З іншого боку, якщо з рівняння (8.52) виразити змінну y_{t-12} через ті, що залишилися, та згрупувати, одержуємо ще одне еквівалентне представлення співвідношення (8.51)

$$y_{t-12} = c_0 + \alpha_1 \Delta_t + \alpha_2 \Delta_{t-12} + \delta_t \qquad (8.52)$$

де $c_0 = \dfrac{A}{1-c}$, $\alpha_1 = -\dfrac{1}{1-c}$, $\alpha_2 = \dfrac{v}{1-c}$ і $\delta_t = \dfrac{\varepsilon_t}{1-c}$.

8.3.3.2. К о р о т к о с т р о к о в е п р о г н о з у в а н н я. Розв’язання задачі короткострокового прогнозування динаміки ВВП, тобто побудова прогнозу річної глибини, на основі рівняння (8.52) може полягати у використанні моделі множинної регресії.

Модель множинної лінійної регресії є добре відомою моделлю статистичного аналізу [6], зміст якої полягає в наступному. Передбачається, що залежність величини y від скінченої кількості факторів $x_1, x_2, \ldots, x_N$ є лінійною вигляду:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_N x_N + \varepsilon , \qquad (8.53)$$

де a_i – деякі коефіцієнти, а ε – помилка моделі.

Необхідно знайти оцінки $\hat{a}_i$ значень коефіцієнтів $a_i, i = 1, 2, \ldots, N$, на основі наявних рядів значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Найбільш відомим методом побудови таких оцінок є метод найменших квадратів [6,8]. Причому звичайно знаходять не тільки точкові значення (конкретні числа) параметрів a_i, але і визначають так звані довірчі інтервали.

Під *довірчим інтервалом* для параметра a_i, наприклад під 90%-ним довірчим інтервалом, розуміють такий числовий інтервал, про який можна сказати, що істинне значення параметра a_i належить цьому інтервалові з імовірністю 0,9. Чим такий інтервал ширше, тим гірше, чим він більш вузький, тим краще. Ширина довірчого інтервалу говорить про достатність (або недостатність) статистичних даних для одержання достовірних статистичних висновків. У літературі часто приводять такий емпіричний факт, що для одержання змістовних результатів необхідно мати вибірки, що спостерігаються, мінімум обсягу $4(N+1)$ спостережень.

Отже, рівняння (4.52) можна розглядати як рівняння множинної регресії, у якому величина y_t є залежною змінною, а величини y_{t-12}, Δ_{t-12} незалежними факторами. Розглядаючи з цього погляду рівняння (84.51 – 8.53), можна одержати методом найменших квадратів (МНК) точкові оцінки і довірчі інтервали для параметрів моделей. Алгоритм МНК викладений у багатьох книгах, наприклад, [5-9, 34].

Розглянемо економічну інтерпретацію оцінок параметрів. Оцінка величини автономного доходу $\hat{A}$ є величиною, нижче якої ВВП впасти ніколи не може. Оцінка $\hat{c}$ величини граничної схильності до споживання показує, що приблизно $\hat{c}$ доходу населення, який одержується, йде на споживання, тобто повертається в економіку.

Відзначимо, що оцінювання параметрів регресії і побудова довірчих інтервалів виконується в припущенні адекватності регресійного зв'язку даних, що спостерігаються. Перевірити дану гіпотезу можна за допомогою коефіцієнта детермінації R^2 (%) [5-8].

Прийнято вважати, що чим R^2 ближче до 100%, тим більш адекватною є регресійна модель.

Після того, як були отримані оцінки параметрів множинної регресії (8.52), можна побудувати прогноз ВВП річної глибини, тому що значення факторів у правій частині рівняння (8.52), відомі для t, які відповідають останнім 12 місяцям, а вони у свою чергу визначають значення y_t на рік уперед.

8.3.4. *Модель Тевеса*

Т. Тевес доповнив модель Самуельсона-Хікса моделлю грошового ринку [14], що взаємодіє з ринком благ через ставку відсотка i (процентний доход з суми, що розміщено у банку). У прийнятих позначеннях динамічна функція попиту на гроші в моделі Тевеса має вигляд:

$$L_t = L_y y_{t-1} + L_i i_{max} - L_i i_t,$$

де i_t – поточна ставка відсотка, $i_t \in [i_{min}, i_{max}]$, i_{min} і i_{max} – максимальна і мінімальна ставки відсотка відповідно,

$L_i i_{max} - L_i i_t = L_{майно}$ – попит на гроші, як на майно, тобто у вигляді цінних паперів ,

$L_i = \dfrac{dL_{майно}}{di}$ – гранична схильність до використання ліквідності як майна, що показує, на скільки збільшиться (зменшиться) попит на гроші як майно при зменшенні (збільшенні) ставки відсотка в інтервалі між i_{min} і i_{max};

$L_{сд} = L_y y_{t-1}$ – попит на гроші для угод.

Отже, у поточному періоді попит на гроші для угод залежить від доходу попереднього періоду, а попит на гроші для угод як майно – від поточної ставки відсотка.

Пропозиція грошей задана є екзогенною і дорівнює M. Тоді умова рівноваги на ринку грошей при заданому рівні цін $p = 1$ подається рівнянням.

$$M^{-} = L_y y_{t-1} - L_i i_t \tag{8.54}$$

де $M^{-} = M - L_i i_{max}$.

Вирішимо його відносно i_t:

$$i_t = \frac{L_y}{L_i} y_{t-1} - \frac{M^{-}}{L_i}. \tag{8.55}$$

Оскільки рівність (4.54) виконується для будь-якого t, то

$$i_{t-1} = \frac{L_y}{L_i} y_{t-2} - \frac{M^{-}}{L_i}. \tag{8.56}$$

У зв'язку з тим що в даній моделі ставка відсотка є функцією часу, із загальної суми автономного попиту потрібно виділити величину автономних інвестицій як функцію від ставки відсотка: $I_{авт} = I_i i_{t-1}$. Тому рівняння рівноваги на ринку благ приймає вигляд

$$y_t = C_y y_{t-1} + \aleph(y_{t-1} - y_{t-2}) - I_i i_{t-1} + A_t^{/}\ , \tag{8.58}$$

де $A_t^{/} = A_t + I_i i_{t-1}$.

Підставимо значення i_{t-1} з рівняння (8.55) у рівняння (8.58):

$$y_t = C_y y_{t-1} + \aleph(y_{t-1} - y_{t-2}) + I_i(\frac{M^{-}}{L_i} - \frac{L_y}{L_i} y_{t-2}) + A_t^{/}. \tag{8.58}$$

Після перетворень (8.58) одержимо

$$y_t = (C_t + \aleph) y_{t-1} - (\aleph + l) y_{t-2} + A_t^{//}, \tag{8.59}$$

де $l \equiv I_i L_y / L_i;\ A_t^{//} \equiv A_t^{/} + M^{-} I_i / L_i$.

Рівняння (8.59) є рівняння динаміки обсягу ефективного попиту. Як і рівняння (8.45), воно є неоднорідним різницевим рівнянням другого порядку і відрізняється від рівняння (8.45) тільки значенням коефіцієнта перед y_{t-2}. Тому динаміка обсягу ефективного попиту залежить від сполучення значень параметрів C_y і $\aleph + l$.

Графік функції

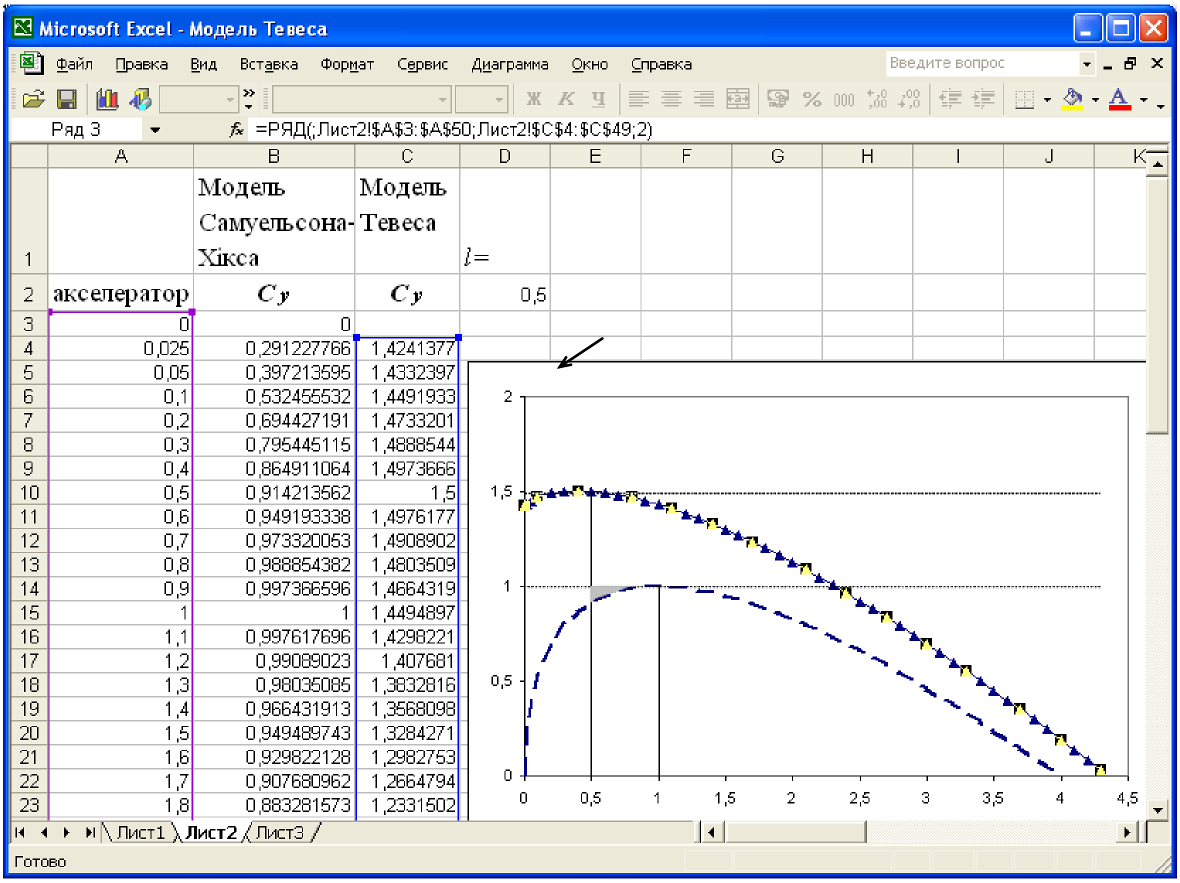
$$4(\aleph + l) = (C_y + \aleph)^2 \tag{8.60}$$

відокремлює множину парних сполучень $(\aleph + l, C_y)$, що приводять до монотонної зміни обсягу ефективного попиту y_t, від множини сполучень цих же параметрів, що обумовлюють коливання y_t.

Стабільність динамічної сукупної рівноваги на ринку благ, грошей і цінних паперів залежить від значення параметра $\aleph + l$.

Якщо $\aleph + l < 1$, то рівновага стійка, при $\aleph + l > 1$ після порушення рівноваги, вона не відновлюється, а при $\aleph + l = 1$ екзогенний поштовх у вигляді збільшення автономного попиту приведе до рівномірних незатухаючих коливань величини ефективного попиту в околі свого рівноважного значення.

При фіксованому значенні $l = 0.5$ розташування різних множин сполучень $(\aleph, C_y)$, що визначають характер динаміки величини ефективного попиту, показані на рис. 8.6.



	A	B	C
1		Модель Самуельсона-Хікса	Модель Тевеса
2	акселератор	C_y	C_y
3	0	0	
4	0,025	0,291227766	1,4241377
5	0,05	0,397213595	1,4332397
6	0,1	0,532455532	1,4491933
7	0,2	0,694427191	1,4733201
8	0,3	0,795445115	1,4888544
9	0,4	0,864911064	1,4973666
10	0,5	0,914213562	1,5
11	0,6	0,949193338	1,4976177
12	0,7	0,973320053	1,4908902
13	0,8	0,988854382	1,4803509
14	0,9	0,997366596	1,4664319
15	1	1	1,4494897
16	1,1	0,997617696	1,4298221
17	1,2	0,99089023	1,407681
18	1,3	0,98035085	1,3832816
19	1,4	0,966431913	1,3568098
20	1,5	0,949489743	1,3284271
21	1,6	0,929822128	1,2982753
22	1,7	0,907680962	1,2664794
23	1,8	0,883281573	1,2331502

Рис. 8.6. Розподіл значень $(\aleph, C_y)$ в залежності від впливу на характер динаміки y_t при зміні автономного попиту в моделі з грошовим ринком

Оскільки параметр $l > 0$, то крива (8.60) (рис. 8.6., неперервна лінія) розташовується вище аналогічної лінії в моделі Самуельсона-Хікса. У той же час через те, що гранична схильність до споживання C_y не більше одиниці, усі точки, що лежать вище лінії $C_y = 1$, не мають економічного змісту.

Як видно з рис. 8.6, із включенням у модель грошового ринку область стійкої рівноваги зменшується на заштриховану площу (на рис. 8.6. помічена стрілкою). Це зменшення тим більше, чим більше значення приймає параметр *l*. Отже, область стійкої рівноваги звужується при збільшенні як еластичності інвестицій за ставкою відсотка, так і еластичності попиту на гроші за реальним доходом; збільшення еластичності попиту на гроші за ставкою відсотка стримує звуження області стійкої рівноваги.

За допомогою моделі Тевеса можна показати можливості банківської системи в регулюванні кон'юнктурних коливань економічної активності.

Якщо, наприклад, Центральний банк при визначенні обсягу пропозиції грошей орієнтуватиметься на величину реального національного доходу попереднього періоду і поточну ставку відсотка, то динамічна функція пропозиції грошей прийме вигляд:

$\bar{M_t} = ay_{t-1} + bi_t$ при $0 < a < 1, b > 0$,

де a, b – параметри регулювання кількості грошей у обігу.

У цьому випадку рівновага на ринку грошей досягається при виконанні умови

$$ay_{t-1} + bi_t = L_y y_{t-1} - L_i i_t . \qquad (8.61)$$

Розв'язуючи рівняння (4.61) відносно i_t і враховуючи, що воно є вірним для всіх *t*, визначимо

$$i_{t-1} = \frac{L_y - a}{b + L_i} y_{t-2} .$$

Після підстановки цього значення i_{t-1} в рівняння (8.59) останнє приймає вигляд

$$y_t = (C_y + \aleph) y_{t-1} - (\aleph - h) y_{t-2} + A^{/} , \qquad (8.62)$$

де $h \equiv I_i(a - L_y)/(L_i + b)$.

Тепер крива, що розділяє області монотонної і коливальної зміни y_t, визначається формулою $C_y = -\aleph + 2\sqrt{\aleph - h}$.

Параметр *h* аналогічно параметру *l* визначає зрушення розділової лінії. Таким чином, за рахунок відповідного підбора регулюючих параметрів *a* і *b* Якщо, наприклад, *h* = 0.55, то області, що визначають характер зміни *yt* при порушенні сукупно] рівноваги на ринках благ і грошей, розміщуються так, як показано на рис. 8.7.

Центральний банк може зрушити області стійкої рівноваги таким чином, що в них виявляться комбінації C_y і $\aleph$, при яких $\aleph > 1$, що більше відповідає дійсності, ніж $\aleph < 1$.

. Таким чином, за рахунок відповідного підбора регулюючих параметрів *a* і *b* Центральний банк може змінити області стійкої рівноваги таким чином, що в них виявляться комбінації C_y і $\aleph$, при яких $\aleph > 1$, що більше відповідає дійсності, ніж $\aleph < 1$.

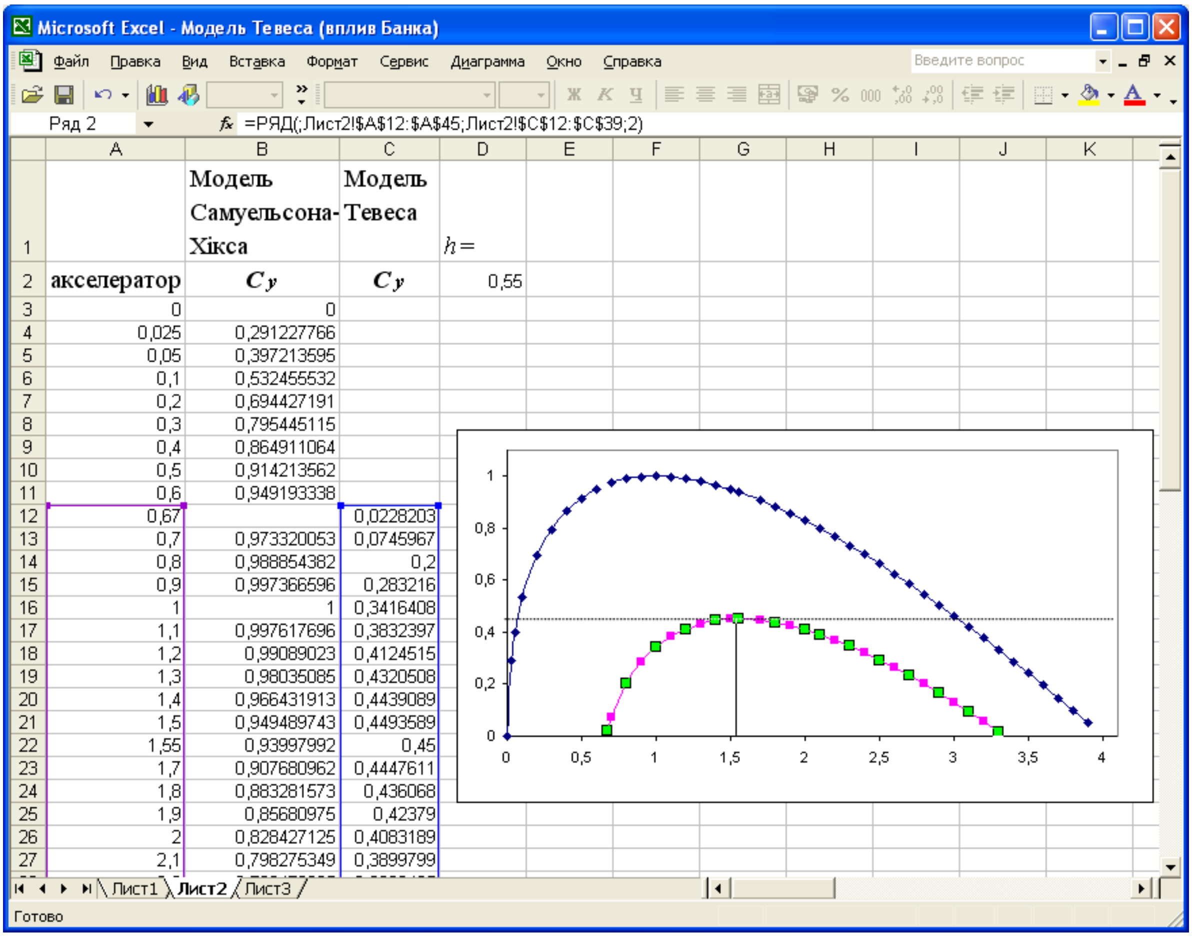
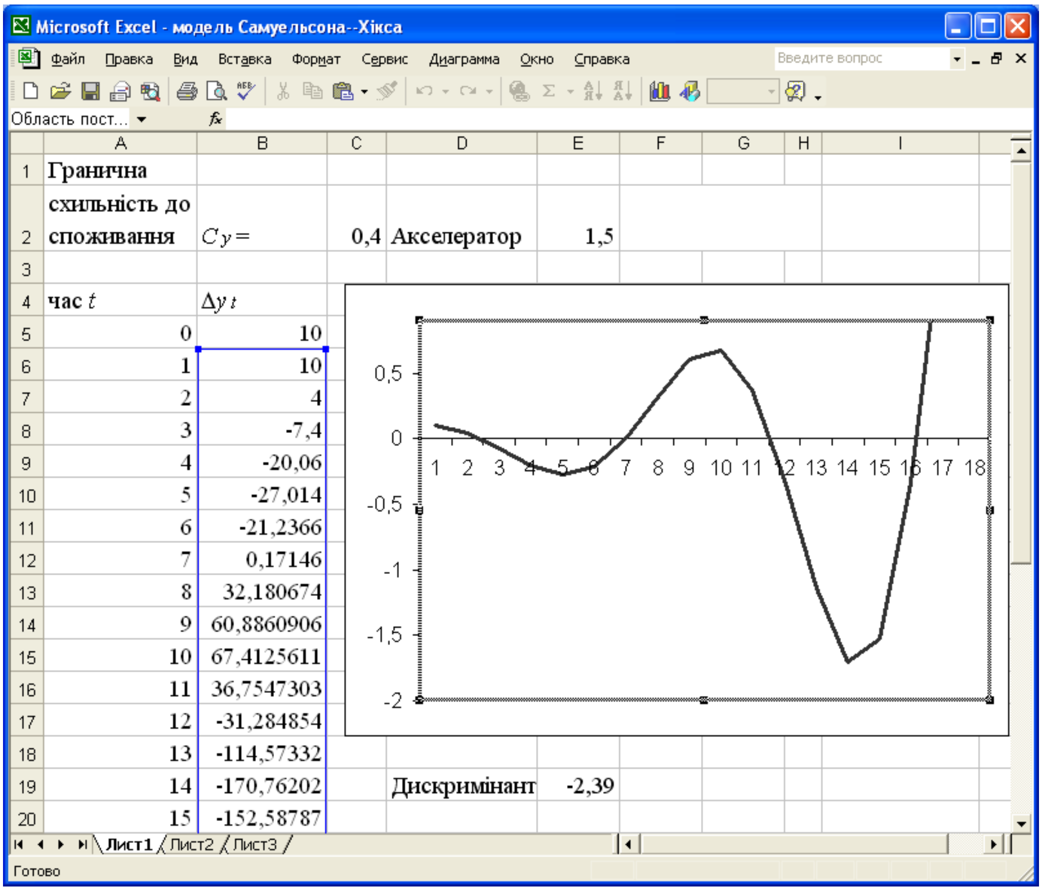


Рис. 8.7. Зрушення областей розподілу значень C_y і $\aleph$ за допомогою грошової політики Центрального банку

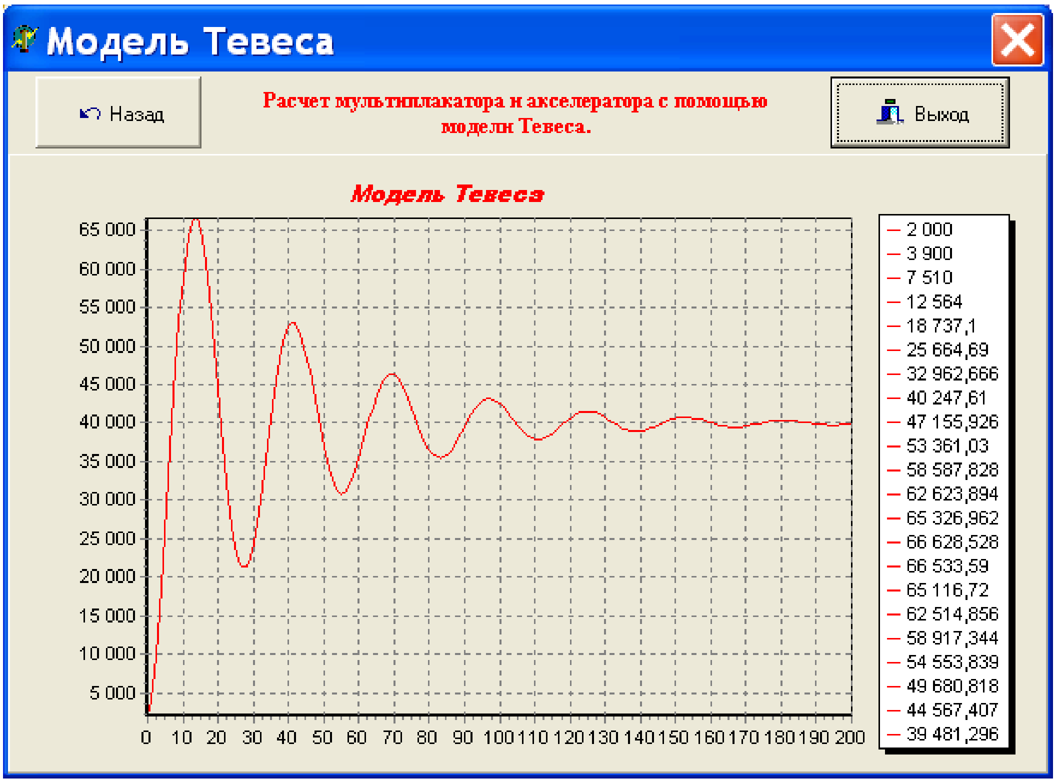
Наприклад, при значеннях C_y=0.4 і $\aleph$=1.5 в моделі Самуельсона-Хікса після збільшення автономних витрат виникають вибухові коливання значення національного доходу (рис. 8.8 а).

Якщо Центральний банк, з огляду на взаємодію ринку благ з ринком грошей, буде так здійснювати пропозицію грошей, що h = 0.55, то і при значеннях C_y=0.4 і $\aleph$=1.5 у випадку порушення динамічної рівноваги виникнуть не вибухові, а загасаючі коливання (рис. 8.8 б).

Однак треба мати на увазі, що одночасно зі зрушенням праворуч лінії, що відокремлює області нестійкої рівноваги від стійкої, донизу зрушується лінія, що відокремлює коливальні зміни національного доходу від монотонної зміни y_t. Отже, стійка рівновага виявляється можливою, якщо гранична схильність до споживання зменшується. Якщо h= 1, стійка рівновага можлива тільки при $C_y = 0$.



а)



б)

Рис. 8.8. - Перетворення вибухових коливань національного доходу в загасаючі за допомогою грошової політики:

а) динаміка моделі Самуельсона-Хікса після збільшення автономних витрат при заданих значеннях C_y і $\aleph$;

б) благотворний вплив Центрального банку на динаміку національного доходу у моделі Тевеса.

Контрольні запитання:

1. Надайте економічну інтерпретацію теореми про ринкову рівновагу в павутиноподібній моделі.
2. Надайте класифікацію ендогенних сподівань в залежності від способу формування.
3. Яким чином використання адаптивних сподівань стабілізує модель?
4. Наведіть найпростішу модель прогнозу значення ціни відповідно до концепції раціональних сподівань.
5. Розкрийте основну ідею доктрини економічної політики Кейнса.
6. Надайте визначення мультиплікатора інвестицій за Кейнсом.
7. У чому полягає суть ефекту мультиплікатора?
8. Поясніть різницю між індукованими і автономними інвестиціями.
9. Що таке акселератор?
10. Надайте визначення мультиплікатора автономних витрат.
11. Надайте характеристику найпростішої динамічної моделі з мультиплікатором автономних витрат в закритій економіці.
12. Порівняйте динамічну модель з мультиплікатором автономних витрат в закритій економіці та модель, де інвестування є частково автономним.
13. Надайте визначення мультиплікатора зовнішньої торгівлі.
14. У чому полягає удосконалення моделі мультиплікатора для закритої економіки в моделі з оподаткуванням.
15. Що таке мультиплікатор із зовнішньоторговельною віддачею?
16. Поясніть необхідні і достатні умови стабільності в моделі мультиплікатора із зовнішньоторговельною віддачею
17. Що таке економічний цикл?
18. Надайте характеристику основного рівняння моделі Самуельсона-Хікса з математичної і економічної точок зору.
19. Які екзогенні параметри впливають на динаміку поведінки моделі Самуельсона-Хікса?
20. Які типи динаміки поведінки моделі Самуельсона-Хікса розглядаються?
21. Надайте характеристику основних етапів методики прогнозування динаміки ВВП на основі моделі Самуельсона-Хікса.
22. У чому полягає удосконалення моделі Тевеса в порівнянні з моделлю Самуельсона-Хікса?
23. Надайте характеристику основного рівняння моделі Тевеса з математичної і економічної точок зору.
24. Як за допомогою моделі Тевеса можна показати можливості банківської системи в регулюванні кон'юнктурних коливань економічної активності?

Завдання для самостійної роботи:

1. У залежності від співвідношення кутових коефіцієнтів графіків функцій попиту та пропозиції (рис. 4.2.б,в) процес «павутиноподібного» ціноутворення може бути розбіжним або циклічним. Надайте геометричну інтерпретацію стабілізуючого впливу адаптивних сподівань на поведінку павутиноподібної моделі у даних нестандартних ситуаціях.

2. Розгляньте концепцію теорії раціональних сподівань (п.4.1.3.). У припущенні, що прогноз очікуваного значення рівноважної ціни буде точним, визначте це значення.

3. Запропонуйте дискретний аналог моделі Еванса і визначить загальний розв'язок побудованої задачі.

4. Розкрити відмінність засад економічного вчення Дж. М. Кейнса і представників неокласичної школи (Л.Вальрас, Дж.Б.Кларк, А.Маршалл).

5. Порівняти концептуальні положення теорії Дж. М. Кейнса та теорії неолібералізму.

6. Відновити процес розв'язання балансового рівняння моделі зовнішньої торгівлі (п. 8.2.4, формула 8.35).

7. Знайти загальний розв'язок різницевих рівнянь (8.39) моделі мультиплікатора з зовнішньоторговельною віддачею.

8. Розглянути дію супермультиплікатора Хікса, тобто розглянути модель взаємодії мультиплікатора-акселератора (8.42) у припущенні, що автономний попит збільшується з постійним річним темпом приросту x.

9. Відновити загальний розв'язок модели Тевеса.

10. Розглянути монетарну концепцію економічних циклів на прикладі моделі Лайдлера.

11. Використовуючи наявну статистичну інформацію, провести реалізацію основних етапів методики прогнозування динаміки ВВП України на основі моделі Самуельсона-Хікса.

РОЗДІЛ 9. СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ФІНАНСОВИХ ПРОЦЕСІВ

9.1. Моделювання банківської діяльності як сукупності стохастичних фінансових процесів.
9.2. Проста мультиплікативна стохастична модель динаміки фінансового ресурсу.
9.3. Рекурентні моделі динаміки фінансових ресурсів.
9.3.1. Багатоетапна динаміка на базі мультиплікативної стохастичної моделі.
9.3.2. Рекурентні динамічні моделі з урахуванням можливостей управління залученими засобами.
9.4. Стохастичне моделювання динаміки відносних збільшень ціни акції.
9.5 Моделювання динаміки накопичувального фінансового фонду в умовах невизначеності.

9.1. Основні поняття моделювання банківської діяльності як сукупності стохастичних фінансових процесів

Відомо, що як зовнішні умови, що супроводжують діяльності банку (фінансової фірми), так і процеси, що протікають усередині нього, є результатом складних і неоднозначних взаємодій величезної кількості факторів, причин, залежностей і закономірностей, більшість із яких має випадкову (імовірнісну) природу. Причина цього в тому, що робота банків значною мірою пов’язана із ризиком і невизначеністю. Досить добре зарекомендували себе в цій області методи, пов'язані з підходом до опису банку як сукупності стохастичних фінансових потоків.

Способи, за допомогою яких може бути описаний поточний стан банку або якого-небудь іншого фінансового інституту, досить різноманітні. Однак напевно, одним із самих логічно простих і природних буде його представлення за допомогою вектора стану або, як ще говорять, вектора характеристик:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Кількісний і якісний склад компонентів вектора x визначається ступенем деталізації представлення банку в моделі. Це може бути, наприклад, обсяг депозитів до запитання або ж обсяг конкретного внеску, що належить конкретній особі.

Фактично дана форма опису стану банку зі змістовної точки зору адекватна звичайному банківському балансу: компоненти вектора характеристик x можуть інтерпретуватися як звичайні статті балансу, а їх кількість і структура відповідають рівню його агрегованості (щоденний, що включає рахунки другого порядку, або укрупнений квартальний).

Конкретні значення кожної з компонентів x_j вектора стану визначаються вибором одиниць виміру для відповідного ресурсу (характеристики). Очевидно, що в переважній більшості випадків це грошові вимірювачі в тій або іншій валюті, але, у принципі, можливі й інші форми обліку. Для узагальнення допустимих способів вирахування значень компонент вектора станів x може бути введене поняття ресурсних одиниць. Інакше кажучи, стан окремого *j-го* ресурсу ототожнюється з деяким елементом множини невід'ємних дійсних чисел $R_+^n = [0, +\infty)$, геометричним образом якого є додатна піввісь дійсної прямої. Таким чином, стан банку в цілому може бути представлено деякою точкою невід'ємного ортанта n-*мірного* евклідового простору:

$$x \in R_+^n = \{x = (x_1, ..., x_j, ..., x_n) \big| x_j \in R_+^1\}.$$

Безліч усіх можливих (допустимих) точок (векторів) x утворює простір станів банку.

$$X = \{x\} \subset R_+^n.$$

На основі елементів вектора x, що представляють собою первинні характеристики стану банку, можуть бути отримані деякі похідні (вторинні) характеристики

$$y = (y_1, ..., y_i, ..., y_m) \in R^m.$$

Очевидно, що вектор похідних характеристик y при такому завданні являє собою функцію від вектора вихідних характеристик

$$y = f(x).$$

У якості типового прикладу вторинних характеристик стану банку може бути наведена система обов'язкових фінансових нормативів (коефіцієнтів), встановлених центральними банками або іншими регулюючими органами.

Для того щоб забезпечити в моделі облік фактора часу, слід задати деяку множину T, елементи якої $t \in T$ будемо називати моментами часу. Особливо підкреслюється високий рівень абстракції такого способу введення поняття «час», щодо якого існує й розвивається модельована система. Очевидно, що дане визначення охоплює в якості конкретних випадків як неперервний, так і дискретний час. Традиційно в якості моделі неперервного фізичного часу використовується безліч точок нескінченної одномірної дійсної числової осі R^1 з фіксованим початком відліку, а безліч усіх врахованих моментів часу T у цьому випадку являє собою деякий відрізок на цій осі (замкнений або відкритий):

$$T = [T_-, T_+] \text{ або } T = (T_-, T_+).$$

При заданні в моделі банку неперервного часу стан j-ої характеристики може розглядатися як значення функції $x_j(t)$, що визначена на множини T і приймає значення з множини R_+^1. Тоді графік $x_j(t)$ відіграє роль траєкторії зміни в часі *j-ої* характеристики. Відповідно стан банку в цілому є значення векторної функції від часу

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_j(t), \ldots, x_n(t)), \qquad (9.1)$$

а траєкторія системи $\{x(t)\}_{t \in T}$ являє собою деяку криву в n-вимірному просторі. Кожна точка такої траєкторії є елементом простору можливих станів банку X.

На основі описаних понять може бути визначений термін – «потік».

Потік – економічна величина, яка виміряється в русі з урахуванням часового інтервалу, що розглядається. Розмірність потоку – це обсяг, поділений на час. У той же час обсяг – величина, що характеризує значення якого-небудь показника на деякий фіксований момент часу.

Змістовна сторона поняття «потік» пов'язана з поняттям швидкості зміни стану системи. Якщо припустити, що функції $x_j(t)$, що задають траєкторії зміни характеристик стану банку, є «гладкими», тобто диференційовані у всіх точках проміжку $T = (T_-, T_+)$, то відповідні перші похідні

$$x_j^{'}(t) = \frac{dx_j(t)}{dt} \tag{9.2}$$

можуть бути інтерпретовані як швидкості зміни цих характеристик. Враховуючи, що $x_j(t)$ є ні чим іншим, як обсягом j-го ресурсу, виражених у деяких ресурсних одиницях (р.о.), то функція $\dot{x}_j(t) = x_j^{'}(t)$ являє собою ресурсний потік, що визначає в кожний момент часу t швидкість зміни величини ресурсу (j-ої компоненти стану банку) у ресурсних одиницях, поділених на одиниці виміру часу. Наприклад, у гривнях у день. При розгляді конкретного ресурсу ми одержуємо конкретні види потоків: фінансовий потік, грошовий потік, потік готівки й т.п.

Динаміка банку в цілому може бути описана за допомогою векторного ресурсного потоку

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_j(t), ..., \dot{x}_n(t)),$$

що задає вектор швидкостей зміни станів досліджуваного об'єкта в просторі R^n. При цьому значення окремої характеристики об'єкта (j-ої компоненти вектора стану) для будь-якого моменту часу $t \in (T_-, T_+)$ визначається за формулою

$$x_j(t) = \int_{T_-}^{t} \dot{x}_j(\tau) d\tau. \tag{9.3}$$

Із використанням поняття ресурсного потоку можна сформулювати модель, що базується на представленні банку як системи (вектора) первинних ресурсних потоків

$$x(t) = (x_1(t), ..., x_j(t), ..., x_n(t), \ t \in (T_-, T_+). \tag{9.4}$$

Модель (9.4) є альтернативою моделі (9.1), в основі якої лежить система (вектор) станів. Ґрунтуючись на (9.2) і (9.3), можна дійти висновку, що обоє способів формалізованого представлення банку при виконанні умов диференційованості функцій $x_j(t)$ будуть еквівалентними.

Наступний крок у процесі вдосконалювання розглянутого класу моделей пов'язаний з обліком у них факторів ризику й невизначеності.

Для опису невизначеності, що присутня у траєкторії станів, в яких може виявитися досліджуваний об'єкт, зручно скористатися термінологією теорії випадкових процесів. Під випадковим процесом (випадковою функцією часу, стохастичним процесом або імовірнісним процесом) розуміється функція $\tilde{x}(t)$, яка може мати ту або іншу конкретну реалізацію (траєкторію) з деякої фіксованої множини можливих траєкторій $X = \{x(t, \theta) | \theta \in \Theta\}$.

Узагальнюючи сказане, одержуємо, що в умовах невизначеності моделлю динаміки стану банку може бути векторний випадковий процес

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t),...,\tilde{x}_j(t),...,\tilde{x}_n(t),$$

кожний компонент $x_j(t)$ якого описує стохастичну динаміку j-ої характеристики (ресурсу) банку. За аналогією фактор невизначеності, присутній у системі ресурсних потоків банку, може бути описаний у формалізованому вигляді за допомогою векторного випадкового процесу

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (\dot{\tilde{x}}_1(t),...,\dot{\tilde{x}}_j(t),...,\dot{\tilde{x}}_n(t)), \quad t \in (T_-, T_+).$$

Одночасно відмітимо, що моделі, які ґрунтуються на завданні стохастичних процесів у загальному вигляді, мають винятково теоретичне значення й призначені лише для викладення на принциповому рівні ідей застосування відповідного математичного апарата. Дослідження, спрямовані на змістовний аналіз закономірностей роботи банків, так чи інакше повинні опиратися на передумови, що конкретизують тип і параметри використовуваних у них випадкових величин і функцій.

Розгляд моделей керування залученими ресурсами у фінансовій фірмі логічно почати з моделей, що носять описовий характер, тобто, що відбивають тенденції в поведінці величини того або іншого ресурсу безвідносно до свідомих керуючих впливів на неї. Очевидно, зміни таких величин є результатом впливу різних по своїй природі факторів, що носять як по силі, так і по природі свого прояву випадковий характер, що й визначає використання для відбиття процесу зміни обсягів фінансових ресурсів банку теорії оптимального керування й теорії випадкових процесів.

9.2. Проста мультиплікативна стохастична модель динаміки фінансового ресурсу

Дослідження моделей поведінки обсягів ресурсів фінансової фірми можна розглянути на простій стохастичній моделі для окремо взятого ресурсу. У якості спостережуваного ресурсу можуть виступати, як залучені засоби в цілому, так і депозити до запитання, термінові депозити і т.д.

В основі моделі лежить передумова про можливість відслідковувати обсяги досліджуваного ресурсу через дискретні рівновіддалені проміжки часу t. Позначимо через x_t – обсяг у момент часу t.

Припустимо, що перехід обсягу ресурсу від моменту часу $t = i - 1$ до моменту часу $t = i$ описується співвідношенням

$$x_i = \alpha_i \cdot x_{i-1}\ , \tag{9.5}$$

де $\alpha_i > 0$ – додатний коефіцієнт елементарного переходу від x_{i-1} до x_i, $i = 1,\dots, n$.

Тоді

$$x_n = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \alpha_i\ . \tag{9.6}$$

Ця формула може бути інтерпретована як *мультиплікативна модель ресурсу* на дискретному відрізку часу $[0, n]$.

Якщо спостережувані значення $\alpha_1,...,\alpha_n$ коефіцієнтів елементарних переходів інтерпретувати як значення відповідних випадкових величин $\tilde{\alpha}_1,...,\tilde{\alpha}_n$, то формула (9.6) дає наступну стохастичну мультиплікативну модель динаміки ресурсу на дискретному відрізку часу $[0, n]$:

$$\tilde{x}_n = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i , \tag{9.7}$$

де $\tilde{x}_n$ – випадкове значення величини ресурсу в момент часу $t = n$.

Припустимо, що всі випадкові коефіцієнти елементарних переходів незалежні, і кожний із цих коефіцієнтів має логарифмічно нормальний розподіл $\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu_i, \sigma_i)$. Іншими словами, передбачається, що натуральний логарифм випадкової величини $\tilde{\alpha}_i$ має нормальний розподіл з математичним очікуванням $M(\ln\tilde{\alpha}_i) = \mu_i$ і з дисперсією $D(\ln\tilde{\alpha}_i = \sigma_i^2$ $(\ln\tilde{\alpha}_i \in N(\mu_i, \sigma_i^2))$.

Знання щільності розподілу

$$f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) = \frac{1}{\alpha\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln\alpha - \mu_i)}{2\sigma_i^2}\right], \ \ \alpha > 0 , \tag{9.8}$$

випадкової величини $\tilde{\alpha}_i$ дозволяє знайти математичне очікування

$$m_i = M\tilde{\alpha}_i = \int_0^{+\infty} \alpha f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) d\alpha = \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right), \tag{9.9}$$

другий початковий момент

$$M\tilde{\alpha}_i^2 = \int_0^{+\infty} \alpha^2 f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) d\alpha = \exp(\mu_i + 2\sigma_i^2) \tag{9.10}$$

і дисперсію

$$s_i^2 = D\tilde{\alpha}_i^2 = M\tilde{\alpha}_i^2 - m_i^2 = \exp(2\mu_i + 2\sigma_i^2) - \exp(2\mu_i + \sigma_i^2) \tag{9.11}$$

випадкового коефіцієнта елементарного переходу.

Знайдемо тепер розподіл випадкового коефіцієнта

$$\tilde{\alpha}_{1,n} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \tag{9.12}$$

переходу від початкової величини ресурсу x_0 у момент часу $t = 0$ до випадкової величини x_n цього ресурсу в момент часу $t = n$. Очевидно, що випадковий коефіцієнт $\tilde{\alpha}_{1,n}$ має логарифмічно нормальний розподіл $(\tilde{\alpha}_{1,n} \in Ln(\mu, \sigma^2))$ з параметрами

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i , \tag{9.13}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \tag{9.14}$$

Звідси одержуємо математичне очікування

$$m_{1,n} = M\tilde{\alpha}_{1,n} = \exp[\sum_{i=1}^{n} \mu_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2], \tag{9.15}$$

другий початковий момент

$$M\tilde{\alpha}_{1,n}{}^2 = \exp[2\sum_{i=1}^{n}\mu_i + 2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2] \quad (9.14)$$

та дисперсію

$$s_{1,n}^2 = \exp[2\sum_{i=1}^{n}\mu_i + 2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2] - \exp[2\sum_{i=1}^{n}\mu_i + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2] \quad (9.15)$$

випадкового коефіцієнта $\tilde{\alpha}_{1,n}$ переходу від початкової величини ресурсу x_0 до випадкової величини x_n у момент часу $t = n$.

Оскільки випадкова величина x_n пов'язана з початковою величиною ресурсу формулою

$$x_n = x_0 \cdot \tilde{\alpha}_{1,n}, \quad (9.16)$$

остільки в якості прогнозу $\bar{x}_n$ величини ресурсу в момент часу $t = n$, що робиться в момент часу $t = 0$, можна використовувати математичне очікування

$$\bar{x}_n = M\tilde{x}_n = x_0 \cdot M\tilde{\alpha}_{1,n} = x_0 \cdot m_{1,n} \quad (9.17)$$

випадкової величини x_n. Точність такого прогнозу можна оцінити за допомогою стандартного відхилення

$$s_n = \sqrt{Dx_n} = x_0 \cdot \sqrt{D\tilde{\alpha}_{1,n}} = x_0 \cdot s_{1,n}, \quad (9.18)$$

яке можна використовувати при побудові довірчого інтервалу

$$[\tilde{x}_n - \gamma \cdot s_n, \overline{x_n} + \gamma \cdot s_n] \quad (9.19)$$

для можливих значень прогнозованої величини ресурсу в момент часу $t = n$. Коефіцієнт $\gamma > 0$ вибирається з тим розрахунками, щоб забезпечити задану ймовірність попадання значень випадкової величини ресурсу x_n в інтервал (9.19).

Якщо всі незалежні випадкові величини $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, ..., n$ мають один і той самий логарифмічно нормальний розподіл з параметрами μ, σ^2 $(\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu, \sigma^2))$, то з формул (9.15) − (9.18) отримуються прості вирази для прогнозного значення

$$\bar{x} = x_0 \cdot \exp\left(n\mu + \frac{n\sigma^2}{2}\right) \quad (9.20)$$

величини ресурсу на момент часу $t = n$ і для міри точності (стандартного відхилення)

$$s_n = x_0 \cdot [\exp(2n\mu + 2n\sigma^2) - \exp\left(2n\mu + n\sigma^2\right)]^{1/2} \quad (9.21)$$

цього прогнозу.

Для зазначеного випадку простої стохастичної мультиплікативної моделі динаміки ресурсу, коли всі коефіцієнти елементарних переходів незалежні й мають один і той самий логарифмічно нормальний розподіл, можна запропонувати наступну схему оцінювання параметрів μ, σ^2.

Нехай спостерігається ряд послідовних значень $x_0, x_1, ..., x_k$ величини ресурсу. Припускаючи, що всі ці значення додатнІ, обчислюємо ряд значень α_1, ..., α_n коефіцієнта елементарного переходу:

$$\alpha_i = \frac{x_i}{x_{i-1}}, i = 1:k. \tag{9.22}$$

Згідно моделі, ряд значень $\ln\alpha_i$, $i = 1:k$, можна розглядати як просту випадкову вибірку об'єму k з генеральної сукупності, що описується нормальним розподілом з математичним очікуванням μ і з дисперсією σ^2. Тому самостійною, незміщеною й ефективною оцінкою для параметра μ служить вибіркове математичне очікування

$$\overline{\mu} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln\alpha_i, \tag{9.23}$$

а самостійною та незміщеною оцінкою для параметра σ^2 − виправлена вибіркова дисперсія

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}[\ln\alpha_i - \overline{\mu}]^2. \tag{9.24}$$

Тепер, підставивши у формули (9.20), (9.21) оцінки $\overline{\mu}$, $\overline{\sigma^2}$ параметрів μ, σ^2 відповідно, одержуємо, згідно з методом моментів, шукані емпіричні формули для прогнозної величини $\breve{o}_{n\,n}$ ресурсу на момент часу $t = n$ і для точності (стандартного відхилення) $\breve{s}_n$ цього прогнозу:

$$\breve{o}_n = x_0 \cdot \exp\left[n\left(\overline{\mu} + \frac{\overline{\sigma}^2}{2}\right)\right], \tag{9.25}$$

$$\breve{s}_n = x_0 \cdot \left\{\exp\left[2n\left(\overline{\mu} + \overline{\sigma}^2\right)\right] - \exp\left[n\left(2\overline{\mu} + \overline{\sigma}^2\right)\right]\right\}^{1/2}. \tag{9.26}$$

У якості позитивної сторони стохастичної мультиплікативної моделі динаміки ресурсу слід зазначити можливість її застосування, як до різних видів фінансових ресурсів, так і до різних по масштабу часових інтервалів. У той же час, оскільки в даній моделі здійснюється тільки «пасивне» відстеження змін під впливом поточних тенденцій і умов, то значення прогнозних величин $\breve{x}_n$ і $\breve{s}_n$ будуть слушні при незмінності цих умов, тобто протягом деякого обмеженого періоду. До спірних сторін моделі, безумовно, слід віднести вимоги строгої додатності об'ємів ресурсу ($x_i > 0$) на кожному кроці. Однак для більшості реальних ситуацій виконання цього обмеження тим або іншим способом може бути забезпечене.

9.3. Рекурентні моделі динаміки фінансових ресурсів

При розгляданні рекурентної динамічної моделі відразу слід зазначити, що прибуток, одержуваний фірмою на окремих етапах, не може бути єдиним оцінювальним показником її діяльності – крім неї необхідно враховувати також і такі характеристики, як величина власних засобів (капіталу) фірми, темпи його зміни й т.п.

Уведемо позначення:

t – індекс періоду $(t \in \overline{1,T})$;

q_t – обсяг власних засобів фірми в *t-му* періоді;

x_t – обсяг залучених засобів в *t-му* періоді;

v – усереднена норма витрат на одиницю залучених засобів;

u – усереднена норма доходу на одиницю використовуваних засобів;

θ – частка власних засобів, перетворюваних в активи, тобто використовуваних для одержання доходу.

Тоді

$v \cdot x_t$ – витрати на залучення засобів в *t-му* періоді;

$u \cdot (\theta \cdot q_{t-1} + x_t)$ – дохід *t*-го періоду

і величина власних засобів визначається рекурентним співвідношенням

$$q_{t+1} = q_t + u \cdot (\theta \cdot q_t + x_{t+1}) - v \cdot x_t . \qquad (9.27)$$

Співвідношення (9.27) з математичної точки зору є лінійним різницевим рівнянням, для рішення якого може бути, зокрема, застосоване z-перетворення.

Нагадаємо, що z-перетворенням функції дискретного аргументу $f(k) = f_k$, $k = 0,1,\ldots$ називається функція:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} ,$$

визначена на деякій області комплексного аргументу z.

Приведемо вираз (9.27) до вигляду

$$q_{t+1} = (1 + u \cdot \theta) \cdot q_t + u \cdot x_{t+1} - v \cdot x_t \qquad (9.28)$$

або

$$q_{t+1} - \rho \cdot q_t = u \cdot x_{t+1} - v \cdot x_t , \qquad (9.29)$$

де

$$\rho = 1 + u \cdot \theta . \qquad (9.30)$$

Величину ρ можна інтерпретувати як норму нагромадження власних засобів банку (фінансової фірми) за один період.

9.3.1. Багатоетапна динаміка на базі мультиплікативної стохастичної моделі

Розглянемо відносно просту ситуацію. Будемо вважати, що обсяги залучених засобів по періодах є деяким зовнішнім фактором, динаміка якого може бути описана за допомогою мультиплікативної стохастичної моделі.

Тоді обсяг залучених засобів у період $t + 1$ можна представити як

$$x_{t+1} = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i , \qquad (9.31)$$

де коефіцієнти збільшення $\tilde{\alpha}_i$ – випадкові величини, розподілені за логарифмічно нормальним законом з параметрами μ_i й σ_i, причому передбачається, що μ_i залежать від v $\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu_i(v), \sigma_i))$. Тоді рівняння (9.29) набуває вигляду

$$q_{t+1} - \rho \cdot q_t = x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{i+1} - v) \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i \,. \tag{9.32}$$

Рішення даного рівняння можна знайти, використовуючи метод Дюамеля для *z*-перетворення. Із цією метою розглянемо допоміжне рівняння

$$g_{t+1} - \rho \cdot g_t = \delta_t, \quad g_0 = 0, \tag{9.33}$$

де

$$\delta_e = \begin{cases} 1, \text{ якщо } t = 0; \\ 0, \text{ якщо } t > 0. \end{cases} \tag{9.34}$$

Нехай $g_t \to G(z)$ і $\delta_t \to 1$ *z*-перетворення функцій g_t і δ_t. Тоді $g_{t+1} \to z \cdot G(z)$ та рівняння для (9.33) прийме вигляд

$$z \cdot G(z) - \rho \cdot G(z) = 1. \tag{9.35}$$

Отже,

$$G(z) = \frac{1}{z - \rho} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z - \rho}. \tag{9.36}$$

Оригіналом для $\dfrac{z}{z-\rho}$ служить послідовність ρ^t. Тому по відомих властивостях *z*-перетворення маємо

$$g_t = \begin{cases} 0, \text{ якщо } t = 0; \\ \rho^{t-1}, \text{якщо } t > 0. \end{cases} \tag{9.37}$$

Щоб привести рівняння (9.32) до нульової початкової умови, введемо нову змінну $h_t = q_t - q_0$. Якщо покласти

$$\tilde{A}_t = x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_t - v) \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i \,, \tag{9.38}$$

то рівняння для h_t матиме вигляд

$$h_{t+1} - \rho \cdot h_t = \tilde{A}_t + (\rho - 1) \cdot q_0. \tag{9.39}$$

Позначимо *H(z)* – *z*-перетворення h_t і *F(z)* – *z*-перетворення $\tilde{A}_t + (\rho - 1) \cdot q_0$. Тоді рівняння зображеня для рівняння (9.39) набуде вигляду

$$z \cdot H(z) - \rho \cdot H(z) = F(z). \tag{9.40}$$

Розглядаючи спільно рівняння (9.35) і (9.40), одержимо

$$H(z) = G(z) \cdot F(z). \tag{9.41}$$

Це означає, що послідовність h_t , що є оригіналом для *H(z),* може бути знайдена як згортка оригіналів g_t і $\tilde{A}_t + (\rho - 1) \cdot q_0$, тобто

$$h_t = \sum_{i=0}^{t} (\tilde{A}_i + (\rho - 1) \cdot q_0) \cdot g_{t-i} = \sum_{i=0}^{t-1} (\tilde{A}_i + (\rho - 1) \cdot q_0) \cdot \rho^{t-i-1} \,. \tag{9.42}$$

Після елементарних перетворень вираз (9.42) приймає вигляд

$$h_t = q_0 \cdot (\rho^t - 1) + \sum_{i=0}^{t-1} \tilde{A}_i \cdot \rho^{t-i-1}. \qquad (9.43)$$

Таким чином, знайдене рішення різницевого рівняння (9.32)

$$q_t = q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{t+1} - v) \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \left[(\prod_{j=1}^{i} \tilde{\alpha}_j) \cdot \rho^{t-i-1} \right]. \qquad (9.44)$$

У тому випадку, коли коефіцієнти елементарного переходу мають однаковий розподіл для всіх моментів $t\tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha}$, рішення (9.44) приймає вид

$$q_t = q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{t+1} - v) \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \left[\tilde{\alpha}^i \cdot \rho^{t-i-1} \right] = q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{t+1} - v) \cdot \frac{\tilde{\alpha}^t - \rho^t}{\tilde{\alpha}}. \qquad (9.45)$$

Використовуючи результати, отримані для стохастичних мультиплікативних моделей, прогноз величини залучених засобів на момент $t+1$ може бути виражений як

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{A}^t \cdot x_0, \qquad \bar{A} = \exp\left(\bar{\mu}_0 + \frac{\bar{\sigma}_0^2}{2} \right), \qquad (9.46)$$

де x_0 – обсяг залучених засобів на початковий момент часу; $\bar{\mu}_0$, $\bar{\sigma}_0$ – оцінки значень параметрів μ, σ відповідно.

У силу припущення про взаємну незалежність коефіцієнтів переходу α_t, замінивши їх у формулі (9.45) відповідними оцінками, одержимо вираз для прогнозування обсягу власних засобів на момент t

$$\bar{q}_t = q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot \frac{u \cdot \bar{A} - v}{\bar{A} - \rho} \cdot (A^t - \rho^t), \qquad (9.47)$$

де значення $\bar{A}$ може бути отримане з (9.46).

В окремому випадку, якщо $\rho = \bar{A}$, після розкриття невизначеності $\dfrac{\bar{A}^t - \rho^t}{\bar{A} - \rho}$ вираз (9.32) має більш компактну форму

$$\bar{q}_t = q_0 \cdot \bar{A}^t + x_0 \cdot (u \cdot \bar{A} - v) \cdot t \cdot \bar{A}^{t-1}. \qquad (9.48)$$

Формули (9.47) і (9.48) мають прозору економічну інтерпретацію – обсяг власних засобів фінансової фірми на момент часу *t* залежить, у рамках описаної моделі, від двох складових:

- $q_0 \cdot \rho^t$ – величини початкового капіталу з урахуванням проведеної політики нагромадження;
- $x_0 \cdot \dfrac{u \cdot \bar{A} - v}{\bar{A} - \rho} \cdot (A^t - \rho^t)$ – результатів діяльності по залученню засобів і одержанню доходів від їхнього активного використання.

9.3.2. Рекурентні динамічні моделі з урахуванням можливостей управління залученими засобами

Розглянемо більш складну ситуацію, у якій присутня залежність між витратами на залучення засобів і їх обсягів, тобто інакше кажучи, існує можливість керування кількістю залучених засобів x за рахунок зміни норми витрат v.

Припустимо, що залежність між ними може бути описана за допомогою функції виду

$$x = \varphi(v) = c \cdot (1 - (1 + \alpha \cdot v) \cdot \exp(-\alpha v)\,. \qquad (9.49)$$

Підставивши (9.49) в (9.27), одержимо

$$q_{t+1} = (1 + u \cdot \theta) \cdot q_t + (u - v) \cdot x\,, \qquad (9.50)$$

що, враховуючи (9.27) і позначивши

$$A = (u - v) \cdot x\,, \qquad (9.51)$$

можна записати у вигляді співвідношення

$$q_{t+1} - \rho \cdot q_t = A\,. \qquad (9.52)$$

Задамо z-перетворення $q_t \to Q(z)$. Тоді, використовуючи його властивість

$$f_{k+m} \to z^m (F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f_i \cdot z^{-i})\,, \qquad (9.53)$$

одержуємо

$$q_{t+1} \to z \cdot (Q(z) - q_0). \qquad (9.54)$$

Права частина (9.52) може бути представлена як добуток $A \cdot \eta_t$, де

$$\eta_t = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \qquad (9.55)$$

є функція, для якої існує стандартне (табличне) перетворення

$$\eta_t \to \frac{z}{z-1}\,, \qquad (9.56)$$

і відповідно

$$A \cdot \eta_t \to \frac{A \cdot z}{z-1}\,. \qquad (9.57)$$

На підставі (9.52), (9.54) і (9.57) можна одержати співвідношення

$$z \cdot (Q(z) - q_0) - \rho \cdot Q(z) = \frac{A \cdot z}{z-1} \qquad (9.58)$$

або

$$(z - \rho) \cdot Q(z) - z \cdot q_0 = \frac{A \cdot z}{z-1}\,. \qquad (9.59)$$

Проведемо перетворення

$$(z - \rho) \cdot Q(z) = \frac{A \cdot z}{z-1} + z \cdot q_0 = z \cdot \frac{A + z \cdot q_0 - q_0}{z-1} \qquad (9.60)$$

і одержимо

$$Q(z) = z \cdot \frac{A + z \cdot q_0 - q_0}{(z-1) \cdot (z - \rho)} \qquad (9.61)$$

або

$$\frac{Q(z)}{z} = \frac{A - q_0 + z \cdot q_0}{(z-1) \cdot (z - \rho)}\,. \qquad (9.62)$$

Дріб

$$\frac{A - q_0 + z \cdot q_0}{(z-1)\cdot(z-\rho)}$$

можна розкласти на суму елементарних дробів виду

$$\frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-\rho},$$

де значення коефіцієнтів a і b знаходяться за допомогою стандартних підстановок $z = 1$ і $z = \rho$ у вираз

$$A - q_0 + z \cdot q_0 = a \cdot (z-\rho) + b \cdot (z-1) \tag{9.63}$$

і відповідно рівні:

$$a = \frac{A}{1-\rho}; \qquad b = \frac{-A + q_0 - q_0 \cdot \rho}{1-\rho}. \tag{9.64}$$

Звідки маємо

$$\frac{Q(z)}{z} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-\rho} = \frac{A}{1-\rho} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{-A + q_0 - q_0 \cdot \rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{z-\rho} \tag{9.65}$$

або

$$Q(z) = \frac{A}{1-\rho} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{-A + q_0 - q_0 \cdot \rho}{1-\rho} \cdot \frac{z}{z-\rho}. \tag{9.66}$$

Використовуючи зворотні табличні перетворення

$$\frac{z}{z-1} \Rightarrow 1 \;\text{ і }\; \frac{z}{z-\rho} \Rightarrow \rho^t, \tag{9.67}$$

одержуємо

$$q_t = q_0 \cdot \rho^t + \frac{A}{\rho - 1} \cdot (\rho^t - 1), \tag{9.68}$$

де $A = c \cdot (1 - (1 + \alpha \cdot v) \cdot \exp(-\alpha v)) \cdot (u - v)$.

Економічна інтерпретація формули (9.68) у значній мірі аналогічна інтерпретації формул (9.47) і (9.48) – обсяг власних засобів фінансової фірми на момент часу t як і раніше визначається складовими, залежать від величини початкового капіталу $(q_0 \cdot \rho^t)$ й доходів від експлуатації залучених засобів

$$\left(\frac{A}{\rho - 1} \cdot (\rho^t - 1) \right).$$

9.4. Стохастичне моделювання динаміки відносних збільшень ціни акції

При описі вартості цінних паперів на фінансових ринках широко використовується модель геометричного броунівського руху. Згідно із цією моделлю, вартість активу S_t як функція часу t описується стохастичним диференціальним рівнянням виду

$$ds_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

де постійні μ та σ відповідно дрейф і волатильність; W_t - стандартний вінеровський процес.

Така модель не є змістовною і не враховує багато важливих особливостей ринку. Щоб урахувати різного роду спостережувані закономірності, були введені моделі зі стохастичною волатильністю, згідно з якими волатильність розглядається як випадкова змінна й у загальному випадку як функція $\sigma = \sigma(Y(t))$ деякого стохастичного процесу $Y(t)$.

Розглянемо стохастичний процес $R(t) = (S_{t+1} - S_t)/S_t$, що описує відносні збільшення цін акцій. Існує дуже багато моделей визначення його коефіцієнтів, наприклад метод моментів, метод найменших квадратів, метод максимальної правдоподібності, які шляхом деякої процедури варіювання параметрів досить добре відтворюють імовірнісні щільності цінових збільшень, або описують окремі спостережувані закономірності, однак зробити однозначний висновок про те, яка з моделей найбільш адекватна запропонованим емпіричним даним, не представляється можливим. Крім того, не ясно, чи здатна яка-небудь модель детермінувати весь спектр спостережуваних ефектів одночасно.

Розглянемо узагальнену модель Іто

$$dR_t = \mu(R,t)dt + \sigma(t)sW_t, \tag{9.69}$$

де на функції коефіцієнта дрейфу й дифузії висуваються стандартні умови

$$D(\mu(R,t)) < \infty, \quad t \to \infty,$$

$$\sigma(t) < \infty, \quad t \to \infty.$$

Тому доцільним є одержання оцінок коефіцієнтів моделі стохастичної волатильності безпосередньо з емпіричних даних, без залучення методу найменших квадратів або максимальної правдоподібності.

Для опису стохастичної динаміки візьмемо ціни акції компанії Лукоїл за період з 18.04.2008 по 17.04.2009, з інтервалами τ = 1 хв, 5 хв, 10 хв, 15 хв, 30 хв і 1 год, і пораховані відносні збільшення для всіх наборів даних. Як видно з рис. 9.1, щільність розподілу для R_i близька до нормальної. На рис. 9.1 суцільною лінією показана теоретична щільність розподілу, стовпці показують реальний розподіл.

Величини R_t будуть залежними випадковими величинами. Дана обставина істотна ускладнює процес економетричного аналізу, тому що робить необхідним розгляд спільної багатовимірної щільності розподілу $p_N(R_1, \tau_1; R_2, \tau_2; ...; R_N, \tau_N)$. Проте, при додаткових припущеннях відносно R_t, можна розглядати дані величини як незалежні.

Проте, при додаткових припущеннях відносно R_t вдається перейти до послідовності незалежних випадкових величин (ВВ).

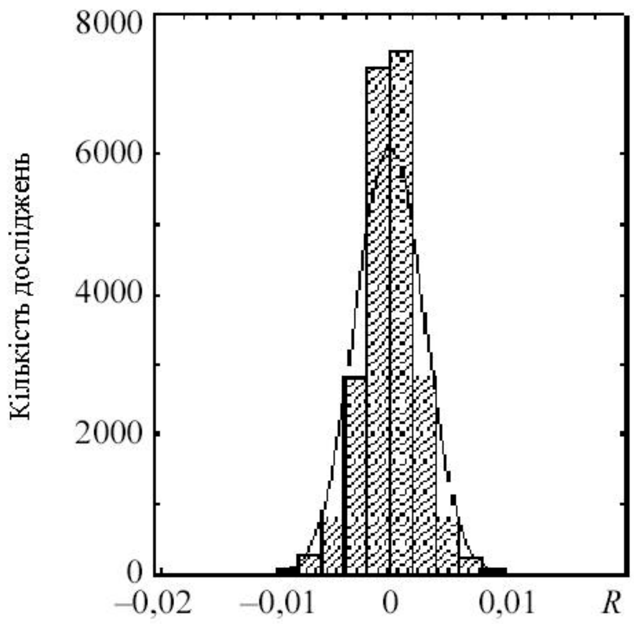


Рис. 9.1 Щільність розподілу відносних збільшень для τ=5 хв

Виберемо послідовність незалежних однаково розподілених ВВ $(\xi_t)_{t\geq 0}$, $E|\xi_t| < \infty$, таких, що

$$R_t = \xi_0 + \xi_1 + ... + \xi_t, \;\; R_0 = \xi_0, t > 0.$$

Вона буде мартингал-різницею на сімействі $F_t = \sigma\{\omega; \xi_1, ..., \xi_t\}$, тобто майже напевне виконана наступна рівність:

$$E(\xi_{t+1}|F_t) = 0\,.$$

Як наслідок, R_t буде мартингалом щодо цього сімейства σ-алгебр F_t. Тому для переходу до дослідження тільки незалежних збільшень досить знайти таку $(\xi_t)_{t\geq 0}$. Наприклад, у випадку існування умовного середнього $a = E(R_i|F_i)$ для процесу $(R_t)_{t\geq 0}$ останній представимо у вигляді процесу

$$R_t = a + \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \xi_{t-i}\,,$$

де $\zeta_i \in \Re$; $\sum_{i=}^{\infty} |\zeta_i| < \infty$; $a = E(R_i|F_i)$ - умовне середнє; $(\xi_t)_{t\geq 0} \sim N(0, \sigma_t^2)$ - послідовність незалежних, нормально розподілених випадкових величин тоді й тільки тоді, коли $\alpha + \beta < 1$. Тому всюди далі будемо припускати, що R_t незалежні, переходячи, при необхідності, до розгляду послідовності $(\xi_t)_{t\geq 0}$.

Стохастичний процес $R(\tau)$ повністю визначається нескінченним набором спільних щільностей $p_N(R_1, \tau_1; R_2, \tau_2; ...; R_N, \tau_N)$, що залежать від N змінних. Істотне спрощення виникає, якщо $R(\tau)$ є марковський процес. У цьому випадку N-точкова щільність розпадається на добуток умовних щільностей:

$$p(R_i, \tau_i | R_{i+1}, \tau_{i+1}) = \frac{p_2(R_i, \tau_i; R_{i+1}, \tau_{i+1})}{p_1(R_I, \tau_i)}$$

де $i = 1,2,...,N-1$ і $p(R_I, \tau_i | R_{i+1}, \tau_{i+1})$ позначає щільність умовної ймовірності реалізації значення R_i, за час τ_i при заданому значенні R_{i+1} за час τ_{i+1}. Будемо вважати, що $\tau_{i+1} > \tau_i$.

У випадку марковського процесу умовні щільності повинні задовольняти рівнянню Чепмена - Колмогорова

$$p(R_1, \tau_1 | R_2, \tau_2) = \int p(R_1, \tau_1 | R, \tau) p(R, \tau | R_2, \tau_2) dR, \tag{9.70}$$

де

$$p(R_1, \tau_1 | R_2, \tau_2) = \frac{p(R_1, \tau_1; R_2, \tau_2)}{p(R_2, \tau_2)} \tag{9.71}$$

Аналізуючи вихідні дані, легко знайти умовні щільності розподілу; проводячи чисельне інтегрування, можна одержати наступні результати, які представлені на рис. 9.2 і 9.3. З рис. 9.3 видно, що процес R − марковский випадковий процес.

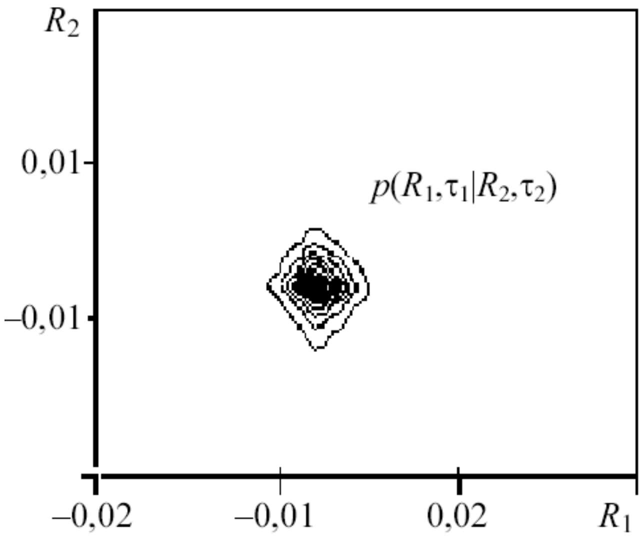


Рис. 9.2. Двовимірна щільність розподілу $p(R_1, \tau_1 | R_2, \tau_2)$), де τ_1= 10 хв, τ_2 = 15 хв

Таким чином, будемо вважати, що процес R описується рівнянням (9.54), де $\mu(R,t)$- коефіцієнт зносу, $\sigma(t)$- волатильність, а dW - збільшення для стандартного вінеровского процесу.

Коефіцієнт $\mu(R,t)$ знаходять як коефіцієнт $D_1(R,t)$ рівняння Фоккера-Планка, яке відповідає диференціальному рівнянню (9.69):

$$\frac{dp(R,t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} D_2(R,t) p(R,t) - \frac{\partial}{\partial R} D_1(R,t) p(R,t),$$

де $D_1(R,t) p(R,t) = \lim\limits_{\tau \to 0} \frac{1}{2} \int_R (R_1 - R_2) p(R_1, t + \Delta\tau | R_2, t) dR_1$.

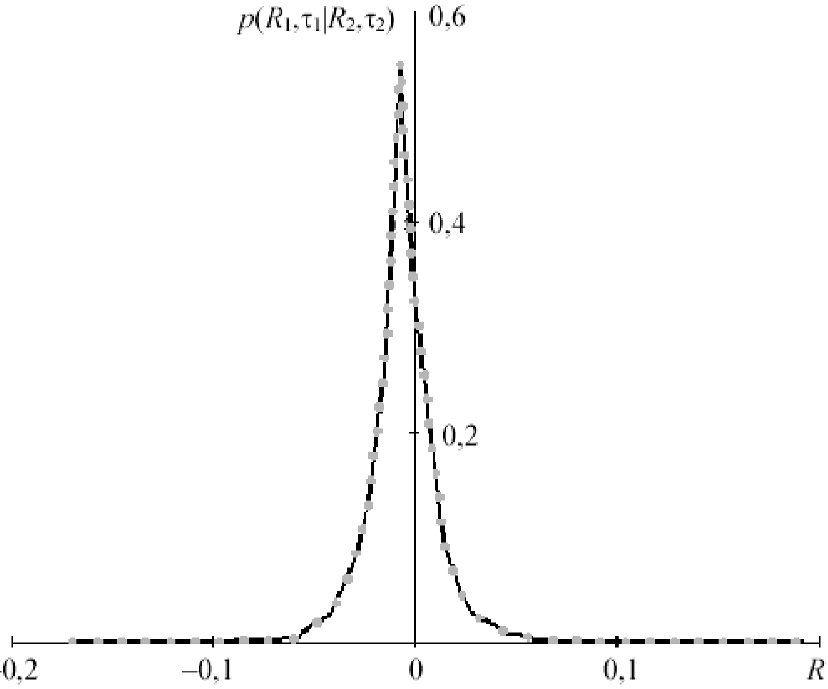


Рис. 9.3. Умовна щільність розподілу $p(R_1,\tau_1|R_2,\tau_2)$, R_1 = - 0,022. Суцільною лінією показана умовна щільність, обчислена по формулі (9.71), точками - по формулі (9.70)

Чисельні значення коефіцієнта $D_1(R,t)$ представлені на рис. 9.4, з якого видно, що коефіцієнт зносу лінійний.

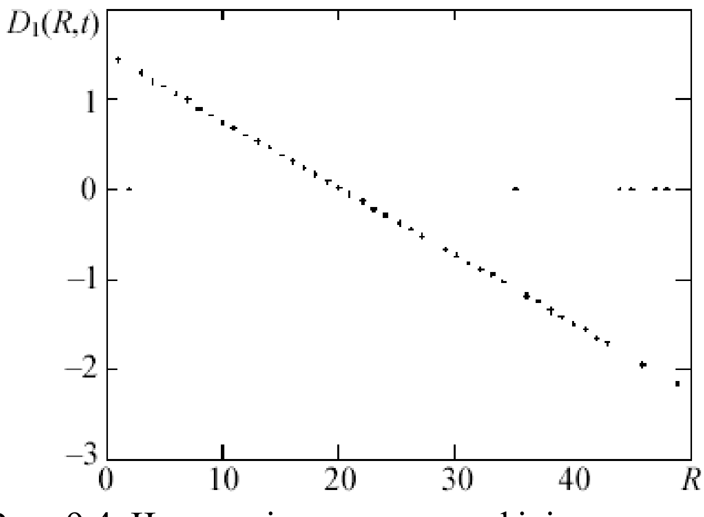


Рис. 9.4. Чисельні значення коефіцієнта зносу

Як не раз виявлялося на практиці, волатильність є стохастичним процесом, який описується наступним рівнянням:

$$d\sigma = \alpha(\sigma)dt + \beta(\sigma)dZ, \tag{9.72}$$

де $\alpha(\sigma)$ - коефіцієнт зносу для волатильності; $\beta(\sigma)$ - волатильність волатильності, а dZ - збільшення вінеровского випадкового процесу. Будемо вважатися процес $\sigma(t)$ стаціонарним, тому параметри рівняння (4) не залежать від часу.

Будемо шукати волатитльність волатильності у вигляді $v\sigma^{y}$, для цього зведемо ліву й праву частину (9.72) у квадрат і одержимо

$$(d\sigma)^2 = \beta^2(\sigma)dt,$$

тому що $(dZ)^2 = dt,\ (dt)^2 = 0,\ dt \cdot dZ = 0$. З наявних значень волатильності для всіх шести тимчасових серій знайдемо $(\Delta\sigma)^2$, а також середнє значення $M\left[(\Delta\sigma)^2\right]$. Таким чином, можна одержати наступну залежність:

$$M\left[(\Delta\sigma)^2\right] = \beta^2(\sigma)\Delta t.$$

Покладемо $\beta(\sigma) = v\sigma^{y}$, а також нагадаємо, що $\Delta t = \tau$. Потім, логарифмуючи, одержимо:

$$\ln(M\left[(\Delta\sigma)^2\right] = \ln(v^2\tau) + 2\gamma\ln(\sigma).$$

На основі лінійної регресійної моделі знаходимо

$$v = 6{,}178;\quad \gamma = 0{,}509,$$

результати представлені на рис. 9.5.

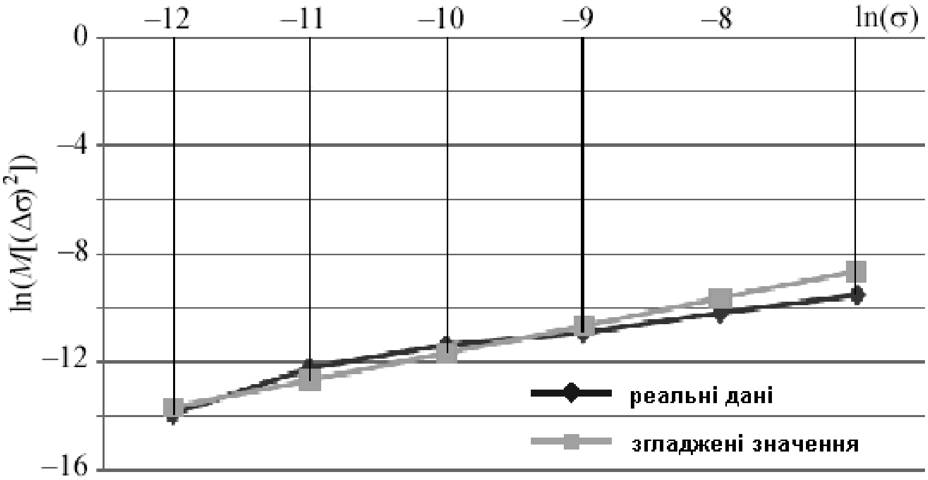


Рис. 9.5. Залежність $\ln(M\left[\Delta\sigma^2\right])$ від $\ln(\sigma)$

Таким чином, $\beta(\sigma) = v\sigma^{\gamma}$.

Щоб визначити $\beta(\sigma)$, розглянемо щільність імовірності $p(\sigma,t)$. Щільність цієї ймовірності визначає рівняння Фоккера-Планка

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1\partial^2}{2\partial\sigma}(ap). \tag{9.73}$$

Тепер припустимо, що нам відома щільність імовірності $p(\sigma,t)$ у стаціонарному стані, позначимо її $p_\infty(\sigma)$, тоді рівняння (9.73) перепишеться в такий спосіб:

$$0 = \frac{1\partial^2}{2\partial\sigma^2}(\beta^2 p_\infty) - \frac{\partial}{\partial\sigma}(ap_\infty). \tag{9.74}$$

Проінтегрувавши один раз рівняння (9.74), одержуємо вираження для коефіцієнта зносу волатильності

$$a(\sigma) = \frac{1}{2p_\infty}\frac{\partial}{\partial\sigma}(\beta^2 p_\infty).$$

Розподіл $p_\infty(\sigma)$, як видно з рис. 9.6, логнормальний. Тоді аналітичний вираз для даної щільності прийме вигляд:

$$p_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi a\sigma}} e^{\frac{\ln^2(\frac{\sigma}{\overline{\sigma}})}{2a^2}}. \qquad (9.75)$$

де $\ln\overline{\sigma}$ характеризує математичне очікування $\ln\sigma$, а a − дисперсію. Графіки, отримані для $a(\sigma)$, можна побачити на рис. 9.7.

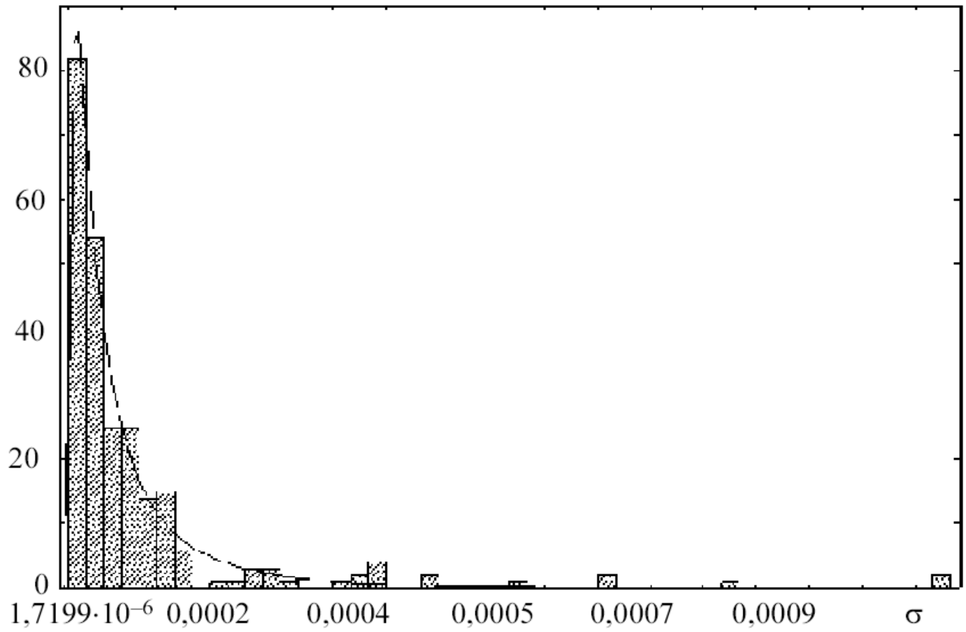


Рис. 9.6. Щільність розподілу волатильності (τ =15хв)

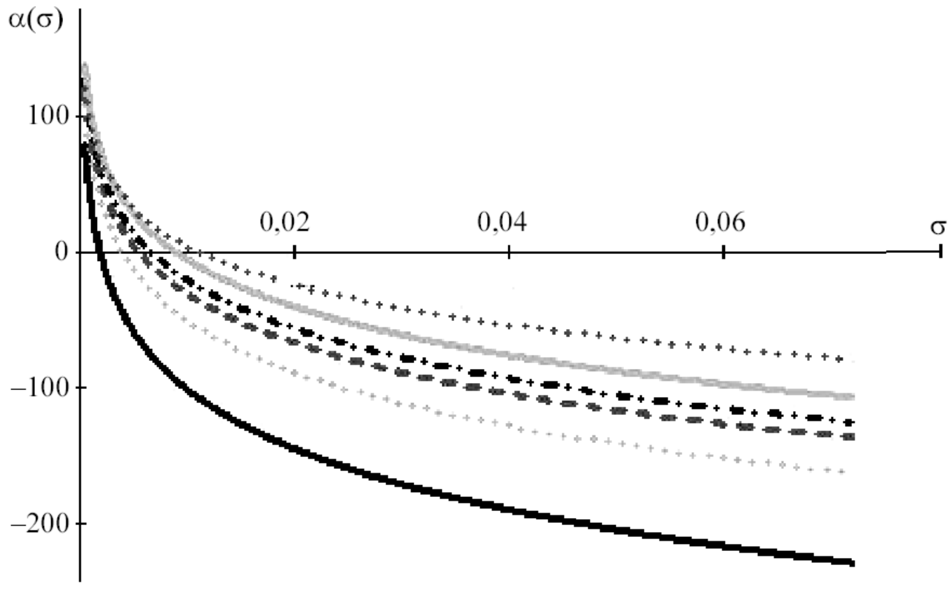


Рис. 9.7. Коефіцієнт зносу для волатильності. На графіку знизу-вгору представлені коефіцієнти зносу для τ = 1, 5, 10, 15, 30, 60 хв

У цей час знання про випадковий і детермінований характер процесів, що лежать в основі еволюції фінансових ринків, значною мірою обмежені. За умови, що відносні цінові збільшення R являють собою марковский процес на часовій шкалі t, було показано, що безпосередньо з емпіричних даних можуть бути отримані коефіцієнти узагальненого рівняння (9.69). Зокрема, були пораховані коефіцієнти α й β для процесу стохастичної волатильності, що дозволяє будувати короткострокові прогнози й довірчі інтервали для волатильності, які широко використовуються для оцінювання опціонів і прогнозування ціни активів.

9.5. Моделювання динаміки накопичувального фінансового фонду в умовах невизначеності

Під час економічної кризи ризики запозичення зростають, тому більша увага приділяється фінансовим інструментам, які є альтернативою запозиченням у якості інструмента фінансування інвестиційних проектів. Методика оптимального нагромадження фондів є досить пробленою для випадку постійного джерела фінансування. Проте є ряд обмежень, які в умовах економічної кризи є мало ймовірними й затрудняють практичне застосування.

По-перше, обмеження на сталість у часі джерела фінансування накопичувальних фондів в умовах економічної й фінансової кризи необґрунтовано. У цей час потужність джерел фінансування зменшилася в порівнянні з докризовим періодом, а в міру подолання кризи, вона може знову збільшитися. В умовах відносної стабільності можна вважати, що потужність джерела фінансування накопичувальних фондів $u(t)$ є кусочно-постійною функцією часу. В умовах нестабільності й невизначеності вкладення в накопичувальний фонд $u(t)$ є випадковою величиною, і тільки від математичного очікування $u(t)$ можна вимагати сталості.

По-друге, в умовах кризи рідко виконується вимога сталості процентних ставок, по яких нараховуються відсотки на кошти накопичувальних фондів. Накопичувальні фонди формуються на рахунках комерційних банків, які встановлюють розміри ставок самостійно й можуть їх змінювати залежно від економічної ситуації. Тому ставка відсотків $r(t)$ також є випадковою функцією.

Процес формування (нагромадження) фонду в рамках динамічних систем моделюється диференційним рівнянням, що містить у правій частині випадкові функції:

$$\dot{x}(t) = p(t)x(t) + u(t), \tag{9.75}$$

де $u(t)$ − інтенсивність вкладень у накопичувальний фонд, а $p(t)=\ln(1+r(t))$.

Якщо припустити, що $u(t)$ і $p(t)$ − випадкові функції, то потрібно враховувати їхню різну щодо часових інтервалів мінливість. Випадкова функція $p(t)$ є функцією ставки відсотків, яка визначається макроекономічною ситуацією й змінюється, головним чином, через інфляцію, як і ставка рефінансування. Її мінливість навіть в умовах кризи не велика, і при розгляді короткострокових фінансових операцій може, у першому наближенні, вважатися постійною. Тільки на інтервалах часу більше базового періоду її мінливість повинна обов'язково враховуватися. Напроти, $u(t)$ – інтенсивність вкладень у накопичувальний фонд є швидко осцилюючою функцією, яка може змінюватися подібно біржовим індексам. Випадковим характером цієї функції не можна нехтувати, якщо тільки вона гарантовано не є детермінованою.

Таким чином, $x(t)$ є випадковою функцією у всіх випадках, коли $u(t)$ гарантовано не може вважатися детермінованою і, отже, для дослідження процесу нагромадження фінансового активу (фонду) необхідно використовувати теорію випадкових процесів.

Розглянемо питання прогнозування параметрів короткострокового накопичувального процесу, що дозволяє вважати випадковою тільки функцію вкладень $u(t)$.

Нехай $x(t)$ – величина накопичувального фонду в момент часу t і в початковий момент часу t_n усі траєкторії випадкового процесу виходять із нуля $x(t_n) = 0$, похідна $x(t)$ у лівій частині (9.75) розглядається у сенсі середньоквадратичної збіжності. Оскільки розглядаються питання прогнозування параметрів короткострокового накопичувального процесу, то мінливістю $p(t)$ можна знехтувати і вважати силу зростання постійною ($p(t) = p$). У першому наближенні функцію вкладень $u(t)$ можна вважати при кожному t рівномірно розподіленою випадковою величиною ($u(t) = U$) на відрізку $[Umin, Umax]$ і $Umax>Umin>0$.

Знайдемо, при цих припущеннях, математичне очікування й дисперсію випадкової величини $x(t_к)$, де $t_к > t_n$ деякий довільний момент часу. Оскільки рівняння (9,75) має в даному конкретному випадку вид:

$$\dot{x}(t) = px(t) + U, \tag{9.76}$$

то його розв'язок можна представити в такий спосіб:

$$x(t) = \int_{t_ï}^{t} \exp(p(t-s))U ds, \tag{9.77}$$

оскільки інтеграл в (9.77) існує, то диференціюючи його по верхній межі, переконуємося, що він є розв'язком рівняння (9.76).

Використовуючи властивості інтеграла від випадкової функції, одержується вираз для математичного очікування $x(t)$:

$$M(x(t)) = \int_{t_ï}^{t} \exp(p(t-s))M(U)ds. \tag{9.78}$$

Знаючи, що для рівномірно розподіленої на відрізку $[Umin, Umax]$ випадкової величини U виконується співвідношення $M(U)=(Umax\text{-}Umin)/2$, одержуємо з (9.78) значення математичного очікування для $x(t)$:

$$M(x(t)) = \frac{(Umax + Umin)}{2p}(e^{p(t-t_ï)} - 1). \tag{9.79}$$

Співвідношення (9.79) дозволяє знайти момент часу $t_к$, коли математичне очікування величини накопиченого фонду досягнеться деякого заданого значення S. Підставивши в (9.79) $t = t_к$ $M(x(t_к)) = S$, одержуємо:

$$t_{\hat{e}} = t_{\ddot{i}} + \frac{1}{p}\ln + \left(1 + \frac{2pS}{Umax + Umin}\right). \qquad (9.80)$$

Співвідношення (9.80) на відміну від детермінованого випадку, дозволяє тільки оцінити середнє значення накопичувального фонду до деякого заданого моменту часу. Вичерпну характеристику випадковій величині $x(t)$ дає її функція розподілу. З її допомогою можна знайти ймовірність влучення випадкової величини в будь-який заданий інтервал. Оскільки інтеграл в (9.77) можна розуміти як траекторний, то має місце рівність:

$$x(t) = \frac{U}{p}(e^{p(t-t_{\ddot{i}})} - 1, \qquad (9.81)$$

з якої можна визначити функцію розподілу $x(t)$:

$$F_{x(t)}(y) = F_U\left(\frac{py}{e^{p(t-t_{\ddot{i}})} - 1}\right). \qquad (9.82)$$

Таким чином, можна не тільки оцінити за допомогою (9.80) середній час формування накопичувального фонду, але й знайти ймовірність влучення величини накопиченого фонду в заданий інтервал, оскільки функція розподілу U $F_U(y)$ відома.

Припущення про рівномірний розподіл u(t) не є істотним. Тим же способом завдання прогнозування вирішується при будь-якому законі розподілу, якщо він не залежить від часу. Наприклад, можна вважати, що u(t) нормальний закон розподілу, а математичне очікування й дисперсія не залежать від часу. Явна залежність джерела фінансування від часу може бути задана директивно або спрогнозована економіко-математичними методами. У цьому випадку модель потрібно розширити за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь.

Контрольні запитання:

1. Які основні стохастичні фінансові процеси описуються при моделювання банківської діяльності?
2. Як характеризується поняття «потік» у контексті економічної системи?
3. Що розуміється під випадковим процесом?
4. У чому полягає сутність мультиплікативної стохастичної моделі динаміки фінансового ресурсу?
5. У чому полягає сутність рекурентних моделей динаміки фінансових ресурсів?
6. Які поняття покладені в основу стохастичного моделювання динаміки відносних збільшень ціни акції?
7. Які поняття покладені в основу моделювання динаміки накопичувального фінансового фонду в умовах невизначеності?

Завдання для самостійної роботи

Тести:

1. Виберіть правильне визначення терміна «потік» (*flow*):

a) $x_j = \int_0^t \dot{x}_j(\tau)d\tau$;

b) економічна величина, яка характеризує швидкість зміни характеристик стану банку $x_j^{'}(t) = \dfrac{dx_j(t)}{dt}$;

c) потік – вектор похідних характеристик;

d) величина, що характеризує траєкторію системи;

e) величина, що характеризує значення якого-небудь показника на деякий фіксований момент часу.

2. Що розуміється під випадковим процесом?

а) під випадковим процесом (випадковою функцією часу, стохастичним процесом або імовірнісним процесом) розуміється функція $\tilde{x}(t)$, яка може мати ту або іншу конкретну реалізацію (траєкторію) з деякої фіксованої множини можливих траєкторій $X = \{x(t,\theta) \mid \theta \in \Theta\}$;

б) економічна величина, яка характеризує швидкість зміни характеристик стану банку;

в) величина, яка може ухвалювати те або інше випадкове значення;

г) система первинних ресурсних потоків;

д) модель динаміки банківських ресурсів.

3. Мультиплікативна модель ресурсу на дискретному відрізку часу $[0, n]$ – це:

a) $x_n = x_0 \cdot \alpha^n$;

b) $x_n = x_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$;

c) $x_j^{'}(t) = \dfrac{dx_j(t)}{dt}$;

d) $x_n = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$;

e) $x_n = x_0 \cdot \exp(n \ln \alpha)$.

4. Чому дорівнює математичне очікування випадкової величини $\tilde{\alpha}_i$, якщо щільність розподілу задається виразом

$$f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) = \frac{1}{\alpha\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln\alpha - \mu_i)}{2\sigma_i^2}\right], \ \alpha > 0 \ ?$$

a) $m_i = M\tilde{\alpha}_i = \int_0^{+\infty} \exp\left(\mu_i + \dfrac{\sigma_i^2}{2}\right) d\alpha$;

b) $m_i = \exp(2\mu_i + 2\sigma_i^2) - \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)$;

c) $m_i = M\tilde{\alpha}_i = \int_0^{+\infty} \alpha f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) d\alpha = \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)$;

d) $m_i = \mu_i + \frac{\sigma_i}{2}$;

r) $m_i = \exp(\mu_i - \frac{\sigma_i}{2})$.

5.Чому дорівнює дисперсія випадкової величини $\tilde{\alpha}_i$, якщо щільність розподілу задається виразом

$$f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) = \frac{1}{\alpha\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln\alpha - \mu_i)}{2\sigma_i^2}\right],\ \alpha > 0\ ?$$

a) $s_i^2 = D\tilde{\alpha}_i^2 = M\tilde{\alpha}_i^2 - m_i^2 = \exp(2\mu_i + 2\sigma_i^2) - \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)$;

b) $s_i^2 = \exp(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2})$;

c) $s_i^2 = \exp(\mu_i + \frac{\sigma_i}{2})$;

d) $s_i^2 = \exp(\mu_i + 2\sigma_i^2)$;

e) $s_i^2 = \exp(2\mu_i + \sigma_i^2) - \exp(\mu_i + 2\sigma_i^2)$.

6.Яким співвідношенням визначається величина власних засобів у рекурентній моделі динаміки ресурсів?

a) $q_{t+1} = q_t - u \cdot (\theta \cdot q_t + x_{t+1}) + v \cdot x_t$;

b) $q_{t+1} = q_t + u \cdot (\theta \cdot q_t + x_{t+1}) + v \cdot x_t$;

c) $q_{t+1} = q_t + u \cdot (\theta \cdot q_t - x_{t+1}) + v \cdot x_t$;

d) $q_{t+1} = q_t - u \cdot (\theta \cdot q_t + x_{t+1}) - v \cdot x_t$;

e) $q_{t+1} = q_t + u \cdot (\theta \cdot q_t + x_{t+1}) - v \cdot x_t$.

7.Що розуміється під z-перетворенням функції дискретного аргументу?

a) функція $F(z) = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$;

b) під z-перетворенням функції дискретного аргументу *f(k)* = f_k, k = 0,1,… розуміється функція $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$, визначена на деякій області комплексного аргументу z;

c) функція $F(z) = \int_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} dz$;

d) функція $F(z) = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (f_k + z^{-k})$;

e) функція $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^k$.

8. Вираз для прогнозування обсягу власних засобів на момент t – це:

a) $\bar{q}_t = q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot \dfrac{u \cdot \bar{A} - v}{\bar{A} - \rho} \cdot (A^t - \rho^t)$;

b) $h_t = q_0 \cdot (\rho^t - 1) + \sum\limits_{i=0}^{t-1} \tilde{A}_i \cdot \rho^{t-i-1}$;

c) $\tilde{A}_t = x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_t - v) \cdot \prod\limits_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i$;

d) $x = \varphi(v) = c \cdot (1 - (1 + \alpha \cdot v) \cdot \exp(-\alpha v)$;

e) $q_t = q_0 \cdot \rho^t + \dfrac{A}{\rho - 1} \cdot (\rho^t - 1)$.

9. Оригінал для $\dfrac{z}{z - \rho}$ – це:

a) $\dfrac{a}{z-1} + \dfrac{b}{z - \rho}$;

b) послідовність ρ^{-t};

d) послідовність ρ^t;

d) послідовність $q_i \cdot \rho^t$;

e) $\eta_t = \begin{bmatrix} 0, \ t < 0, \\ 1, \ t \geq 0 \end{bmatrix}$.

10. Від чого залежить обсяг власних засобів фінансової фірми в рамках багатоетапної динаміки на базі мультиплікативної стохастичної моделі?

a) від точності моделі;

b) від величини початкового капіталу;

c) від результатів діяльності по залученню засобів і одержанню доходів від їхнього активного використання;

d) від величини початкового капіталу; від результатів діяльності по залученню засобів і одержанню доходів від їхнього активного використання;

e) ні від чого не залежить.

Відповіді до тестових завдань:

№ теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
відповідь	b, e	a	d	c	a	e	b	a	d	d

РОЗДІЛ 10. ЯКІСНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ ТА ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ КОЦЕПЦІЙ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ

10.1. Якісний аналіз динамічних систем

Динамічні моделі нелінійних систем, наприклад, системи звичайних диференціальних рівнянь, містять різного роду нелінійні залежності. Дослідження моделей таких систем включає пошук розв'язку, тобто інтегрування системи. Ця мета досяжна тільки для лінійних систем з постійними коефіцієнтами й для деяких дуже спеціальних рівнянь, які можна проінтегрувати у квадратурах.

Не варто сподіватися, що ці динамічні нелінійні рівняння вдасться розв'язати в загальному виді й у такий спосіб передбачити поведінку системи при заданих початкових умовах. Знайти всі інтеграли досліджуваної нелінійної системи диференціальних рівнянь означало б не просто успіх, а рідку удачу, і тому звичайно на це розраховувати не доводиться. Тому для багатьох задач доречне використання методів нелінійної динаміки, яка досліджує якісні властивості динамічної системи: стійкість, кількість станів рівноваги, існування періодичних траєкторій і т.д.

Основна концепція дослідження якісної поведінки нелінійних динамічних систем базується на трьох ідеях:

- Реальний інтерес представляють тільки ті моделі, які демонструють рухи, що якісно не міняються при обмеженому «ворушінні» параметрів. Такі моделі, або динамічні системи називаються *грубими*.
- Зрозуміти динаміку системи означає з'ясувати всі основні можливі види її поведінки при довільних початкових даних, тобто досліджувати потрібно не частинний розв'язок при конкретних, заданих початкових умовах, а поведінку моделі «у цілому».
- Аналіз поведінки системи «у цілому» дозволяє ввести поняття *топологічної еквівалентності* динамічних систем, а потім і локальних, і глобальних біфуркацій при зміні параметрів.

Розбивка простору параметрів на області з різною поведінкою дає повне уявлення про потенційні можливості досліджуваної динамічної моделі. При цьому поведінка динамічної системи в межах однієї області при малій зміні параметрів якісно не міняється.

У якісній теорії динамічних систем для побудови фазових портретів використовується поняття якісної (топологічної) еквівалентності.

- ***Якісна (топологічна) еквівалентність систем***

Дві системи диференціальних рівнянь першого порядку називаються *якісно* (*топологічно*) *еквівалентними*, якщо існує безперервне взаємно однозначне перетворення, яке переводить фазовий портрет однієї системи у фазовій портрет другої зі збереженням орієнтації траєкторій. Фазові портрети таких систем також являються якісно (топологічно) еквівалентними.

На фазовій площині грубих систем можуть бути тільки прості стани рівноваги: фокус, вузол, сідло, стійкий та нестійкий граничні цикли.

Таким чином, будь-яка лінійна система на площині якісно еквівалентна однієї із систем, фазові портрети яких зображені на рис. 10.1. Десять фазових портретів представляють типи поведінки лінійних систем.

Отже, усі стійкі (нестійкі) вузли й стійкі (нестійкі) фокуси еквівалентні один одному.

Це означає, що класи алгебраїчно еквівалентних систем можна групувати в класи якісно еквівалентних. У цьому змісті для лінійних систем існує тільки чотири типи якісної поведінки: асимптотична стійкість (a),
центр (b), сідло (c) і нестійкість (d).

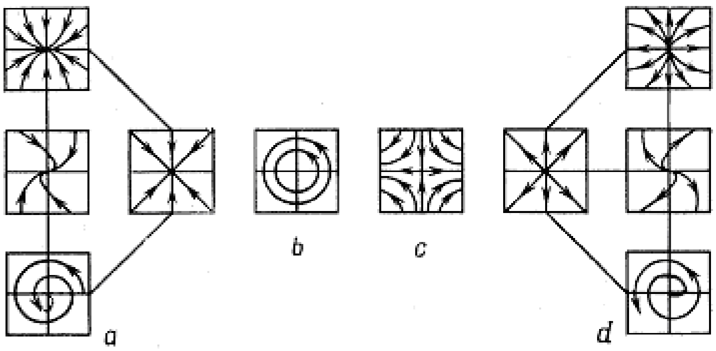


Рис. 10.1. Фазові портрети та типи якісної поведінки лінійних систем.

Необхідною умовою практичної застосовності математичних моделей є їхня *структурна стійкість*. Типові нестійкі ситуації (режими функціонування), що виникають у соціально-економічних процесах, зв'язані, як правило:

– з обмеженнями деяких ресурсів,
– з боротьбою учасників системи за деякі ресурси,
– з істотною нерівномірністю розподілу ресурсів у системі.

Структурна стійкість динамічної системи тісно пов'язана з поняттям грубості.

- ***Грубі динамічні системи.***

Розглянемо дві динамічні системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}, \qquad (10.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) + p(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) + q(x,y) \end{cases}. \qquad (10.2)$$

При цьому існує таке мале δ, що будь-які функції $p(x, y)$ і $q(x, y)$ в (10.2) задовольняють нерівності

$$|p(x,y)| + |q(x,y)| + \left|\frac{p(x,y)}{x}\right| + \left|\frac{p(x,y)}{y}\right| + \left|\frac{q(x,y)}{x}\right| + \left|\frac{q(x,y)}{y}\right| < \delta \qquad (10.3)$$

Динамічна система (10.1) називається *грубою*, якщо системи (10.1) та (10.2) являються топологічно еквівалентними, тобто мають однакову структуру розбиття фазової площини на траєкторії.

- ***Біфуркації.***

Важливим поняттям у якісній теорії динамічних систем є поняття біфуркації.

Біфуркація – зміна топологічної структури розбиття фазового простору динамічної системи на траєкторії при малій зміні її параметрів.

Біфуркації розділяють на локальні й нелокальні. *Локальні біфуркації* діагностуються за допомогою лінійного аналізу Ляпуновських показників (власних чисел). *Нелокальні біфуркації* не можна визначити на основі лінійного аналізу околиці стаціонарного стану. Їхня діагностика вимагає проведення нелінійного аналізу системи. До нелокальних біфуркацій відносяться утвір сепаратрисних петель, торкання атрактором сепаратрисних кривих або поверхонь.

Басейн атрактора – область притяжіння атрактора – та частина фазового простору, з якої траєкторії прямують до атрактору.

Біфуркації атракторов підрозділяють на *м'які (внутрішні) біфуркації* й *кризи* (жорсткі *біфуркації*). Внутрішні біфуркації приводять до топологічних змін самих множин, що притягають, не зачіпаючи *їх* басейнів притяжіння.

Кризи – біфуркації атракторів, що супроводжуються якісною перебудовою границь областей притяжіння (басейнів) атракторів.

Біфуркаційною множиною називається границя, що розділяє області простору керуючих параметрів з якісно різною поведінкою досліджуваної системи.

Якісне дослідження динамічної системи, що містить параметри, полягає в розбитті простору параметрів системи на області з однаковою якісною поведінкою. У випадку двох параметрів розбиття проводиться біфуркаційними кривими. У випадку n параметрів розбиття проводиться біфуркаційними плівками або гіперплощинами в n-мірному просторі параметрів. Потім визначається тип якісної поведінки в кожній області.

Методи якісного дослідження динамічної системи, праві частини якої містять параметри, що використовують теорію біфуркацій, опираються на наступне твердження: якщо відома множина всіх бифуркаційних значень параметрів (або доведена їхня відсутність), відомий характер усіх біфуркацій при проходженні через різні біфуркаційні значення й, крім того, відома якісна структура динамічної системи при яких-небудь частинних значеннях параметрів, то, використовуючи міркування безперервності, можна на підставі цих відомостей визначити якісну структуру для будь-якої точки у всьому просторі параметрів.

Таким чином, знання бифуркаційних значень параметрів є дуже важливою задачею, що дозволяє поряд з поділом на області з різними якісними структурами провести дослідження якісної поведінки системи в цих областях.

Звичайна задача якісного дослідження такої системи полягає у встановленні областей значень параметрів з тієї або іншої якісною структурою (тобто з наявністю тих або інших режимів). При цьому найбільш важливим є визначення тих областей значень параметрів, у яких існують граничні цикли або в яких граничні цикли відсутні. Наявність/відсутність граничних циклів у кожній з областей значень параметрів однозначно визначає наявність/відсутність у них автоколивань.

- ***Етапи дослідження соціально-економічного процесу***

Розглянемо основні етапи дослідження соціально-економічного процесу:

1. Побудова математичної моделі досліджуваного процесу.
2. Динамічний аналіз досліджуваного процесу. Виявлення причин виникнення дисипативних структур. Знаходження керуючого параметра і його граничних значень, при яких у соціально-економічній системі виникає нестійкість.
3. Використання принципу підпорядкування параметрів для зниження порядку вихідної системи рівнянь.
4. Визначення стаціонарних точок системи рівнянь математичної моделі.
5. Лінеаризація вихідної системи рівнянь в околиці стаціонарних точок.
6. Дослідження власних значень характеристичного рівняння лінеаризованої матриці за допомогою першого методу Ляпунова й біфуркаційоного аналізу.

6.1. Визначення типу стійкості точок.

6.2. Визначення наявності й типу біфуркацій, точок біфуркації.

7. У складному випадку – проведення дослідження за допомогою методу перетинів Пуанкаре й визначення типу атракторів, типу можливих біфуркацій у системі.
8. Використання методу показників Ляпунова для з’ясування, чи є динаміка вихідної системи хаотичною.
9. Якщо система рівнянь задана в дискретній формі – перевірка властивостей відображення й використання теорії універсальності Фейгенбаума для пошуку точок біфуркації.

Далі розглянемо типові ефекти нелінійної динаміки.

10.2. Особливості моделювання нелінійної динаміки соціально-економічних систем

Нелінійна динаміка виявляє собою єдиний методологічний підхід, що дозволяє аналізувати розвиток соціально-економічних систем різного рівня складності на основі об'єктивних законів. Аналіз і розуміння еволюції й кризових явищ у таких системах неможливі без використання основних принципів, методів, ефектів і алгоритмів нелінійної динаміки. Зокрема, ефекти нелінійної динаміки можуть бути використані як для підвищення технічної й економічної ефективності, так і для стійкості розвитку як інструментів антикризового керування.

Споконвічно основні математичні моделі нелінійної динаміки були розроблені для технічних і природничо-наукових додатків. Згодом з'ясувалося, що аналогічні ефекти, закономірності поведінки властиві й іншим системам: економічним, фінансовим, соціальним. Однією з відмінних рис даних систем є наявність достатньо великого кола проблем, невдалий розв'язок яких може спровокувати втрату стійкості соціального середовища.

Історично математичні моделі нелінійної динаміки розвивалися від простих до складних. Перші моделі, побудовані на основі лінеаризації вихідної системи, не відбивали переважної більшості різноманітних динамічних ефектів, що були присутні у поведінці реальних динамічних систем. При використанні таких моделей у багатьох випадках розв'язок мав експонентний вигляд, що обмежувало застосовність моделей вузьким діапазоном значень параметрів. При подальшому уточненні були враховані малі нелінійні доданки в моделях, і цей напрямок дозволив провести аналіз деяких нелінійних ефектів на початку – середині XX століття. Поява ЕОМ і пов'язаних з ними можливостей використовувати чисельні методи аналізу нелінійних систем дозволило проводити чисельний аналіз суттєво нелінійних динамічних систем. При цьому були відкриті, підтверджені в натурних і чисельних експериментах численні ефекти, що раніше спостерігалися в реальних системах, але, що не мали теоретичного обґрунтування. Подальший розвиток цього напрямку привів до появи узагальнюючих наукових напрямків: синергетики, теорії катастроф, эконофізики, синергетичної економіки. У таблиці 10.1 представлена класифікація розглянутих систем і моделей за рівнем складності й можливим очікуваним результатам моделювання.

В області технічних і природничо-наукових додатків для енергетики, досягнутий високий ступінь відповідності результатів моделювання й поведінки об'єктів-прототипів. Що стосується економічних і соціальних додатків, то можна говорити тільки про якісний збіг – поведінка реальної системи й розв'язок моделі містять однакові якісні ефекти, але поки не досягнутий кількісний збіг. У прикордонному положенні перебуває метеорологія: короткострокові прогнози мають високу вірогідність, довгострокові прогнози безперспективні через «ефект метелика» - невелике відхилення в початкових умовах може приводити до кардинальних змін у поведінці складної системи й відповідної до моделі по закінченні деякого часу.

Таблиця 10.1

Класифікація моделей за рівнем складності й результатам моделювання				
Рівень складності моделі	Рівень складності системи	Складна система (метеорологія)	Економіка	Соціально-економічна система
Прості лінійні моделі	Природничо-наукова й технічна система невеликої розмірності	Украй вузька застосовність	Експонентне зростання показників (невідповідність реаліям)	Експонентне зростання показників (невідповідність реаліям)
Квазілінійні моделі невеликої розмірності	Втрата стійкості. Біфуркація. Синхронізація.	Деякі нелінійні ефекти	Деякі нелінійні ефекти	Деякі нелінійні ефекти
Суттєво нелінійні моделі невеликої розмірності	Різноманітні нелінійні ефекти. Детермінований хаос	Дивний аттрактор. Ефект метелика	Осциляції показників поблизу тренда. Втрата стійкості тренда як економічна криза	Ефект юрби як кризовий прояв синхронізації
Синергетика. Теорія катастроф	Теорія самоорганізації	Смерч як втрата стійкості ламінарного плину	Эконофізика. Синергетична економіка	Упорядкований розвиток, рівень свободи, як захід диссипації системи, хаос і порядок

Основними причинами такого погіршення якості моделювання в міру ускладнення об’єктів-прототипів від природничо-наукових і технічних додатків до соціальних систем є ускладнення систем і пов’язані із цим два додаткові фактори (вірогідність вихідних даних і роль інформації як зовнішнього впливу на систему).

- ***Вірогідність вихідних даних***

В природничо-наукових і технічних системах вона досить висока й визначається необхідним рівнем точності. Об’єктивні викривлення підлягають виправленню, суб’єктивні – є підставою для розслідування. Метеорологічна система складніше, відповідно, комплексний і змінний у часі характер вихідних даних проявляється в більшій степені. Вихідні дані для економічного й соціально-економічного моделювання набагато менш достовірні. Частки тіньової економіки різних країн оцінюється різними авторами від 16% до 48% за інформацією Всесвітнього банку. Природно, при такому розкиді відомостей щодо навіть частки, що не враховується у вихідних даних продукції й послуг складно очікувати кількісного збігу в поведінці реальної системи й моделі.

- ***Роль інформації як зовнішнього впливу на систему***

Даний фактор, визначає труднощі при одержанні кількісного збігу результатів моделювання для економічних і соціальних систем. Наприклад, усний натяк особи, що ухвалює рішення, про намір «послати докторів» в одну з великих компаній привів до істотного падіння котирувань цінних паперів відповідної галузі. Виступ лідерів фінансового ринку завжди є керуючим впливом на поведінку відповідних індикаторів.

Аналогічний ефект впливу інформації спостерігається й для соціальних систем. Описуваний вплив помітно підсилюється з розвитком технічних засобів передачі інформації. Поряд з економічними факторами з’явилася можливість використовувати інформаційний або дезінформаційний зовнішній вплив для управління системою. А от більш прості технічні, природничо-наукові, метеорологічні системи зовсім не піддані інформаційному впливу й розвиваються відповідно до об'єктивних законів.

Очевидно, саме згадані два фактори є причиною того, що в техніці нелінійні ефекти розраховуються з достатнім ступенем точності, а в економіці й соціальних науках спостерігається тільки якісний збіг. Наприклад, використання математичних моделей, за які присуджувалися нобелівські премії з економіки, зовсім не гарантує фінансовий успіх.

- ***Цільова функція економічної системи***

Відзначимо ще одна істотну відмінність у технічних і економічних додатках. Цільова функція технічної системи, як правило, відповідає досягненню максимально можливого технічного ефекту при наявності обмежень технічного й вартісного характеру. Цільова функція економічної системи поєднує декілька різнорідних складових. Наприклад, валовий внутрішній продукт (ВВП) включає товари першої необхідності (наприклад, поварену сіль), споживання яких в умовах нормального стану економіки відповідає рівню природньої потреби. У ВВП входить також група товарів і послуг, попит на які з боку широких кіл споживачів значно перевищує природню потребу. На жаль, у число таких товарів потрапили енергетичні ресурси. Автомобілі з масою й об'ємом, що свідомо перевищують технічно обґрунтовану необхідність, величезні приміщення, які треба опалювати взимку й прохолоджувати влітку. Ці складові ВВП характеризуються завищеним споживанням енергії, зв'язаним не стільки з доданням товару споживчих властивостей, скільки з його використанням для демонстрації соціального статусу споживача. Крім того, має місце завищене споживання енергії за рахунок використання застарілих енергоємних технологій. Ще одна складова ВВП – предмети розкоші, які в основному важливі завдяки не споживчим якостям, а придатності для демонстрації соціального статусу споживача. При виробництві таких товарів не ставиться задача оптимізації технічних характеристик, зокрема енергоспоживання.

Кризовий стан складної системи, зокрема економіки, описаний в термінах нелінійної динаміки, пов'язаний із втратою стійкості. І нераціональне споживання основних ресурсів, зокрема енергетичних, може спровокувати втрату стійкості економічної системи. У цей час ця небезпека усе більш очевидна, наприклад, проведений день Землі покликано привернути увагу суспільства до проблеми скорочення нераціонального споживання енергії. Помітимо, що на рівні індивідуального споживача розуміння шкоди надмірного споживання енергії у вигляді їжі виражається у вигляді масової боротьби з надлишковою вагою.

10.3. Огляд ефектів нелінійної динаміки

Перейдемо до огляду ефектів нелінійної динаміки й можливостям їх використання для аналізу й управління економічною ефективністю, антикризового управління.

1. Відсутність принципу суперпозиції, характерного для лінійних моделей. Результат додавання рухів нелінійної системи, що виникають під впливом різних факторів, не є сумою окремих складових. Це повністю відповідає економічним реаліям: наприклад, подвоєння вкладень зовсім не гарантує вдвічі більшу віддачу, тому що можуть виявитися нелінійні властивості – обмеження попиту, наявності комплектуючих, можливостей виробництва й т.п.
2. Можливість існування декількох стійких станів. У механічних системах – наявність декількох точок з мінімальною потенційною енергією. В економіці – альтернативні проекти, кожний з яких може реалізовуватися незалежно. В енергетиці – альтернативні рентабельні джерела енергії. Перехід від одного стійкого стану до іншого можливий або під впливом технічного прогресу, або під впливом зовнішньої дії (наприклад, аварія на одному із джерел провокує перехід до іншого джерела).
3. Неізохронність власних коливань – залежність частоти таких коливань від амплітуди. Для найпростіших лінійних систем частота власних коливань не залежить від амплітуди. Коливання, властиві економічним системам, мають досить складний, комплексний характер, і в них амплітуда і частота взаємозалежні.
4. Можливість існування декількох стійких і нестійких динамічних режимів при тих самих параметрах системи й (або) зовнішнього впливу. В економіці реалізується в різноманітних сценаріях розвитку.
5. Виникнення супер- і субгармонійних коливань. У соціально-економічних процесах часто присутні високочастотні супергармонійні коливання на тлі низькочастотних субгармонійних.
6. Існування стійких автоколивань із обмеженою амплітудою. У лінійних моделях амплітуда автоколивань экспоненціально зростає, у нелінійних – амплітуда обмежена. У реальній економіці реалізується другий варіант, як приклад можна привести коливання індексу в спокійних умовах на ринку.
7. Можливість м'якого й жорсткого самозбудження автоколивань. Після виникнення умов для збудження або автоколивання можуть поступово збільшувати амплітуду до якогось стабільного значення (м'яке збудження), або відразу виникне рух зі стабільною амплітудою (тверде збудження). Ці два сценарії визначаються особливостями поведінки фазових траєкторій.
8. Ефект захоплювання. Динамічна система перебуває в режимі стійких автоколивань із певною частотою. Якщо на цю систему діє зовнішній вплив із близькою частотою, то система може перейти в режим коливань із частотою зовнішнього впливу. Ще більш складним може бути процес взаємного впливу автоколивань і коливань, обумовлених зовнішніми впливами (змушених коливань). При цьому можливо як посилення результуючих коливань, так і взаємне гасіння коливань. В економіці цей ефект здатний проявлятися як вплив,

можливо взаємний, зв'язаних економічних систем. При цьому, як правило, більш сильна економіка визначає динаміку пов'язаних з нею економік.

9. Ефект синхронізації. Даний ефект уважається глобальною властивістю нелінійних динамічних систем різного масштабу – від найпростіших механічних до соціально-економічних. При цьому розглядається кілька динамічних систем (не менш двох). При відсутності взаємодії ці системи поводяться незалежно, їхні динамічні властивості проявляються індивідуально. При наявності навіть досить слабких зв'язків між динамічними системами рух цих систем стає взаємозалежним, погодженим. Установлюється єдина (або порівнянна) частота коливань.

Очевидно, уперше цей ефект спостерігав у XVII ст. Християн Гюйгенс, який виявив, що двоє маятникових годинників, якщо їх підвісити до легкої балки, починали ходити точно в такт. Пізніше, в XIX ст., Джон Вільям Рєлей виявив, що дві органні труби з малою розстройкою і з розташованими поруч отворами звучать в унісон, причому іноді одна труба може «змусити» іншу практично замовчати, тобто відбувається взаємна синхронізація двох автоколивальних систем при встановленні протифазних або близьких до них коливань. На початку XX ст. був відкритий ефект синхронізації в електричних мережах і в деяких електромеханічних обладнаннях. Класичним прикладом синхронізації є рух Місяця, який завжди звернен до Землі однієї стороною: обертання Місяця навколо своєї осі й рух Місяця по орбіті навколо Землі синхронізовані. Ефекти синхронізації й захоплювання спостерігаються й у поведінці біологічних об'єктів і співтовариств. Очевидно, проявом ефекту синхронізації є й так званий ефект юрби, коли під дією об'єднуючого фактору (зв'язки) співтовариство людей поводиться не так, як поводяться окремі люди, що не перебувають під впливом фактору й ситуації, у тих же умовах. Бурхливі, тривалі оплески, що переходять в овацію, – ще один приклад синхронізації співтовариства людей. З хаосу окремих ударів у долоні утворюється синхронізований, упорядкований періодичний рух – овація. Поведінка фанатів або спортивних уболівальників – приклад синхронізації під впливом зовнішнього впливу – подій на сцені або арені.

Одним із цікавих проявів ефекту синхронізації в соціально-економічних системах є феномен моди, що розглядається як синхронізоване відношення споживачів до товару або послуги. У сучасних умовах сполучним елементом для виникнення такої синхронізації є реклама й (або) засоби масової інформації. Однак сама по собі мода зародилася набагато раніше, ніж технічні засоби масової інформації: телебачення, радіо, газети. Отже, можна зробити висновок, що в соціально-економічному середовищі виникнення моди можливо й при досить низькому рівні зв'язків між елементами середовища. У сучасних умовах ефект моди є потужним економічним фактором для галузей економіки, що виробляють модний товар або послугу. Ці галузі вкладають частину прибутку у встановлення зв'язків, що формують синхронізацію, оплачують пряму й непряму рекламу, більш витончені засоби формування позитивного відношення споживачів до свого товару (послуги). Паралельно в суспільстві існує синхронізація на набагато більш низькому рівні, не пов'язаному із будь чиєю фінансовою підтримкою, – масові захоплення будь-чим на некомерційній основі.

Поведінка гравців на фондовому ринку синхронізоване в багатьох випадках. Особливо яскраво це проявляється в періоди біржової паніки.

В економіці до ефекту синхронізації можна віднести глобальність економічних криз, явище взаємозв'язку господарських механізмів різних економічних об'єктів і держав, вплив лідируючого сектору економіки на взаємозалежні галузі, вплив сильної валюти на пов'язані з нею більш слабкі валютні системи. Зв'язки є природньою властивістю нормально функціонуючої економічної системи, тому й синхронізація економічних систем – нормальне й часто спостережуване явище. Штучний розрив економічних зв'язків виключає потужний прискорювач, заснований на ефекті синхронізації, із числа факторів економічного розвитку.

З погляду нелінійної динаміки «острівець» стабільності економіки однієї країни в розпал світової кризи є нестійким станом, тому що інтегрована у світову систему економіка не могла залишатися локально стійкою при наявності економічних зв'язків з могутнішою економікою, що перебуває в кризовому стані.

Такого роду розриви, коли одна економіка (галузь) переживає кризу, а інша – підйом, можливі тільки тоді, коли ці системи практично не зв'язані. «Залізна завіса» – кращий засіб для попередження поширення кризи, але те ж саме справедливо й відносно підйому.

Синхронізацію можна розглядати як одне із проявів тенденції матеріальних форм до самоорганізації, тобто до впорядкованості. Ця тенденція протилежна тенденції до зростання хаотичної складової при розвитку систем, також характерної для матеріальних форм. Важливої й ще не вирішеною задачею є вивчення загальних умов, при яких та або інша із протилежних тенденцій є переважною.

10. Взаємодія різних видів динамічних процесів у нелінійних системах. У зв'язку з відсутністю в таких системах принципу суперпозиції взаємодія різних видів коливань ухвалює досить складні форми. І автоколивання, і змушені, і параметричні коливання самі по собі здатні породжувати кілька стійких і нестійких режимів, можуть виникати складні полігармонійні коливання. Їхня нелінійна взаємодія може стати джерелом різних ефектів: посилення або зниження результуючого руху, взаємного впливу різних динамічних процесів. Можливо, що результуючий рух індексу утворен таким складним набором рухів котирувань окремих паперів, що формують підсумковий індекс. При цьому на результат впливають інформаційні впливи, зовнішні й внутрішні фактори, ефекти синхронізації.

11. Біфуркації розв'язків при зміні параметра системи й (або) зовнішнього впливу. Термін «біфуркація» означає роздвоєння й у досить широкому змісті застосовується до якісних змін типів процесів при зміні (як правило, плавному) параметрів, від яких залежить процес. У процесі безперервної зміни одного (або декількох) з параметрів системи або зовнішнього впливу при деякому значенні параметра поточний динамічний процес може втратити стійкість, при цьому

утворюються нові, стійкі або нестійкі режими. Надалі система розбудовується по стійкому сценарію, якщо він існує при даному наборі параметрів. Фраза «Ми підемо іншим шляхом» у якійсь мірі ставиться до обговорюваного ефекту.

12. Зародження нових розв'язків або перехід від нестійких станів до стійких, втрата стійкості при зміні параметрів системи й (або) зовнішнього впливу багато в чому пов'язані з механізмом біфуркації. У процесі еволюції системи стан може втратити стійкість, при цьому виникають нові стани, деякі з яких є стійкими, реалізується перехід до наступного стійкого стану, у рамках якого система продовжує розбудовуватися до чергової втрати стійкості.

13. Прояви катастроф. Катастрофами називають стрибкоподібні зміни, що виникають як реакція системи на плавну зміну параметрів або зовнішніх умов. Теорія катастроф дає універсальний апарат дослідження стрибкоподібних переходів, різких якісних змін. Відомі застосування методів теорії катастроф до задач серцевих скорочень, різноманітних розділів фізики, ембріології, лінгвістики, психології, моделювання діяльності мозку й психічних розладів. Ці ж методи використані в деяких моделях економіки, поведінки біржових гравців. Різка зміна тренда від росту або стагнації до падіння при плавній зміні зовнішніх умов у термінах нелінійної динаміки – катастрофа, у термінах економіки – криза.

14. Існування в нелінійних моделях як відносно простих розв'язків, властивих лінійним моделям, так і найскладніших стійких і нестійких режимів. Як правило, нелінійні моделі містять і лінійну складову. З одного боку, цей вплив традицій, адже моделювання динамічних систем починалося з лінійних моделей. Спочатку нелінійні моделі розбудовувалися як узагальнення лінійних моделей. У такій формі нелінійного моделювання для переходу до лінійного моделювання досить було просто покласти рівними нулю коефіцієнти при нелінійних компонентах моделі. Надалі, коли в нелінійні моделі були включені залежності, обумовлені безпосередньо за результатами об'єктивного обстеження вихідного об'єкта, а не із суб'єктивним формулюванням типу «ріст параметра 1 вважаємо пропорційним параметру 2», лінійні властивості моделі стали в ній ураховуватися в тій мері, у якій вони присутні у вихідному об'єкті. Таким чином, у нелінійних моделях присутні й методи й результати, що представляються лінійним наближенням, і набагато більш широкі можливості. І область застосування нелінійних моделей значно ширше.

15. *Детермінований хаос* – хаотичний рух повністю детермінованої системи. Інтуїтивно очікується, що розв'язок для детермінованих систем буде проявляти детерміновану поведінку. Однак відносно недавно з'ясувалося, що хаотична поведінка детермінованої системи – зовсім нормальний варіант її розвитку, що часто зустрічається. Недавно отримані результати дозволяють стверджувати, що нелінійні динамічні системи можуть мати стохастичні розв'язки, тобто в цьому випадку стохастичний підхід – не наближений метод опису, а єдино вірне відбиття реальної поведінки динамічної системи. Сприйняття цього факту стосовно складних систем було підготовлено численними спостереженнями поведінки великих систем.

Наприклад, спроби реалізувати планову економіку неминуче натрапляли на неможливість реалізації наміченого плану на різних рівнях господарського механізму. Визнавалося, що хаос або, принаймні, наявність хаотичних складових у поведінці складної системи цілком природньо.

Разючі недавні математичні відкриття у відношенні дуже простих нелінійних систем невисокого порядку, розв'язки яких проявляють стохастичні властивості. Наприклад, кулька на більярдному столі з увігнутими стінками, вимушені коливання кульки в системі двох лунок. Причина виникнення хаосу в детермінованій системі – нестійкість окремих рухів, що відбуваються усередині обмеженого фазового простору при відсутності стійких рухів. Ця нестійкість усіх окремих кінцевих рухів визначає складність і різноманітність розв'язків. Існують підтверджувані експериментами теорії переходу від детермінованої поведінки до стохастичної для найрізноманітніших динамічних систем (гідродинамічних плинів, радіотехнічних генераторів випадкових сигналів, автокаталітичних хімічних реакцій і ін.). Одне з напрямків економічної динаміки також використовує подібний апарат моделювання. Може здатися природнім наступне твердження: якщо вже поведінка відносно простої нелінійної системи може бути складною, то система з більшим або нескінченним числом ступенів свободи тим більше повинна демонструвати випадкову поведінку. Однак у загальному випадку це не виконується, у системі можуть бути присутніми як упорядковані, так і хаотичні рухи.

Існують і більш глобальні узагальнення розглянутого ефекту: «з хаосу зародився впорядкований рух». Відоме гасло «Анархія – мати порядку» також відображає наявність у суспільній свідомості взаємозв'язку хаосу й упорядкованого руху.

16. Можливість існування дивного аттрактора – стійкого різноманіття нестійких траєкторій. У таких умовах усі рухи системи відбуваються усередині обмеженого простору. Цей ефект уперше виявив Эдвард Лоренц в 1963 р. при чисельному дослідженні динаміки тривимірної моделі теплової конвекції. Згодом притягаюча область, у просторі розв'язків динамічної системи, що характеризується режимом неперіодичних коливань, що встановилися, була названа дивним аттрактором. Цей термін був затверджений для позначення нерегулярних коливань в обмеженому просторі розв'язків детермінованих динамічних систем. Далеко не при всіх значеннях параметрів рух динамічних систем відповідає дивному аттрактору.

17. Біфуркації подвоєння періоду – один з можливих сценаріїв переходу до хаосу. Цей ефект проявляється в такий спосіб. Нехай система перебуває в стані впорядкованого періодичного руху. При зміні одного з параметрів системи відбувається біфуркація, виникає розв'язок з удвічі більшим періодом. При подальшій зміні цього параметра знову виникають біфуркації, щораз зароджуються розв'язки подвоєних періодів. Відрізки значень параметра між точками біфуркації утворюють геометричну прогресію, знаменник якої встановив Мітчел Фейгенбаум. Це дає можливість точно розрахувати значення параметра, при наявності якого починається хаос.

18. Ефект самоорганізації. Явища самоорганізації (виникнення впорядкованих структур з безладної організації) вивчаються із середини XX ст.

Уперше теорія самоорганізації була застосована для розв'язку задачі хімічної кінетики й біології. Виникнення впорядкованих структур у нелінійних системах різної природи описується схожими математичними моделями й розв'язками. Це дозволило поширити методологію, розроблену в нелінійній динаміці, наприклад, на дослідження поширення популяцій в екологічних системах. Виникли нові напрямки в нелінійному моделюванні – теорія самоорганізації, синергетика.

19. *Детермінований хаос – шлях до адаптації динамічної системи.* Динаміка нелінійних систем, до яких відносяться й більшість соціально-економічних процесів, надзвичайно різноманітна.

Динамічний, або *детермінований хаос* – це нерегулярна, хаотична, випадкова поведінка простої системи, що живе по регулярних, невипадкових правилах, у буквальному значенні – «народження випадкового з невипадкового».

Самоорганізація до певної міри зворотний процес: установлення впорядкованої поведінки або стану в складних системах з великим числом ступенів свободи, найчастіше всупереч навіть шумам і флуктуаціям, Для самоорганізації необхідно, щоб стан розглянутої системи був далеко від термодинамічної рівноваги.

Еволюція зберегла хаос як досить типовий режим функціонування великих і малих систем з кооперативною поведінкою. Одною з основних ознак, реалізованих природою на різних рівнях організації в системах зі складною динамікою, є багатство регулярних режимів. Системи з хаотичною динамікою працюють за межею нестійкості та характеризуються чудовими можливостями самопідстроювання, швидкими переходами з однієї моди поведінки на іншу й великою різноманітністю цих мод. Інакше кажучи, детермінований хаос – шлях до адаптації динамічної системи.

20. *Ефект швидкого реагування.* Один з постулатів теорії складних систем стверджує: «Міцність ланцюга визначається міцністю самого слабкого елемента ланцюга». Якщо в якості критерію функціонування системи обрати швидкодію або час відгуку системи на зовнішній вплив, то за аналогією одержимо: «швидкодія системи визначається швидкодією самого повільного елемента системи».

А тепер задамося питанням – чи можливо, щоб реакція ансамблю виявилася швидше реакції одного елемента? Теорія систем з хаотичною динамікою дає позитивну відповідь на дане питання. Таке можливо, наприклад, у складних системах, що складаються із сильно нелінійних осциляторів із суттєво неізохронною індивідуальною динамікою. Саме ця динаміка, що складається зі швидких і повільних рухів, характерна для більшості видів нейронів. У подібних осциляторах (або генераторах) період коливань і час перехідних процесів визначаються рухом в околиці стану рівноваги даного генератора або атракторів інших генераторів. Завдяки дуже великому числу більш-менш компенсуючих один одного впливів з боку інших генераторів, кожний індивідуальний генератор буде дуже мало часу проводити поблизу областей повільних рухів. Під дією швидко пульсуючого зовнішнього поля, яке увесь час вибивається з околиці атракторів, генератор перетвориться в елемент «швидкого реагування».

21. Багатомірні нелінійні динамічні системи демонструють прояви вище викладених ефектів в більш складній формі. Перераховані ефекти проявляються в нелінійних системах різного рівня складності – від відносно простих до дуже складних систем. У системах з декількома ступенями свободи за рахунок нелінійності й взаємного впливу реалізується новий результуючий рух. При цьому можливо утворення нових додаткових ефектів, причиною яких є саме взаємодія рухів, відповідних до різних ступенів свободи.

10.4. Ефекти нелінійної динаміки в керуванні економічною діяльністю

Розглянемо тепер можливість використання перерахованих ефектів нелінійної динаміки (як окремих, так і їх сукупності) у деяких аспектах керування економічною діяльністю, економічною ефективністю, антикризового керування, аналізу соціально-економічних систем. Економічну кризу можна трактувати як втрату стійкості тренда, біфуркацію й зародження нових станів, деякі з них будуть стійкі й реалізовані. Крім того, передкризовий стан характеризується підвищеною амплітудою коливань основних показників (аналог цього у сейсмоаналізі – провісник землетрусів). Відомі статистичні дані про циклічність криз пов’язані із субгармонійними коливаннями. На жаль, поки навіть сукупний кількісний аналіз ефектів нелінійної динаміки не може дати достовірний прогноз щодо наступної кризи. Деякі причини цього – невірогідність даних і складність обліку інформаційного впливу на економіку – обговорювалися вище.

10.4.1. Керування хаосом у складній системі

Очевидно, для систем рівня галузі, національної економіки, соціуму регулярний упорядкований стан є нестійким, постійно виникають випадкові відхилення, які, втім, можуть бути незначними в порівнянні з регулярним станом. У плановій економіці СРСР постійно виникали збої з постачанням і т. п. У той же час епізодично зароджувалися ініціативні економічні процеси, наприклад, незаконні приватні підпільні виробництва. У конкурентній економіці хаос у формі конкуренції багатьох виробників і економічних ініціатив – природній стан. У той же час у ній є присутнім і планова регулярна складова – плани фірм, бюджетів. Історичний досвід показав, що другий варіант економічно більш ефективний. Очевидно, вище керівництво СРСР на інтуїтивному рівні розуміло необхідність конкуренції, тому що воно планово й усвідомлено створювало конкуруючі між собою (і із закордонними аналогами) проекти в області авіації, ракетної техніки, обчислювальної техніки.

Роль хаотичної складової в економічному розвитку неможливо переоцінити. Саме з хаосу багатьох бізнес-ініціатив зароджуються нові стійкі напрямки, найбільш ефективні з них стають лідируючими. Особливо яскраво це проявляється в області високих технологій. При цьому деякі колишні напрямки бізнесу стають нестійкими й програють в економічному змаганні. У плановому порядку складно винайти новий лідируючий напрямок.

Ще один елемент, який добре реалізується в умовах хаосу великої системи, – поява нових напрямків не за рахунок адміністративних або економічних стимулів, а завдяки допитливості дослідників. Коли Майкл Фарадей проводив досвіди з електрикою, а Нільс Бор досліджував атом, вони навряд чи мали бізнес-план використання результатів. Проте, для практичного застосування такого роду відкриттів значима роль регулярного планового процесу впровадження – виникає новий бізнес-напрямок. Потім знову зростає роль хаотичної складової, щоб з багатьох учасників бізнес-процесу виділилися найбільш ефективні.

У найпростіших нелінійних динамічних системах керування хаосом може здійснюватися за рахунок двох узагальнюючих параметрів системи. Перший параметр – дисипація, яка характеризує відведення енергії і її перетворення в інший стан (у теплову енергію). У простій системі можна придушити хаос, значно побільшавши дисипацію енергії. Другий параметр, за рахунок якого можна усунути хаос – значний зовнішній вплив. Якщо він впливає на систему, хаотичний режим не виникає, система підкоряється потужному впливу ззовні.

Для економіки ефект, аналогічний дисипації, – виведення економічних ресурсів із системи. Наприклад, податки, тарифи на енергоносії, інші способи виключити ресурс із економічної системи. У такому випадку система переходить у депресивний регулярний стан, імовірність зародження нових ефективних напрямків знижується. Зовнішній вплив на економіку, за рахунок якого можна придушити хаос, реалізується шляхом уведення економічного ресурсу ззовні. Більші зовнішні економічні впливи визначають напрямок регулярного розвитку, при цьому хаотичні прояви значно знижуються.

У якості регулятора рівня хаосу економічної системи крім економічних факторів також можна розглядати інформаційний вплив, коли формуються очікування зміни аналогів дисипації або зовнішнього впливу. Ці фактори змінюють рівень хаотичної складової поведінки. На найпростіші технічні аналоги такий вплив не діє.

Ще один інструмент керування рівнем хаосу економічної системи – адміністративний ресурс. Як правило, його вплив зменшує хаос, тому що адміністративний ресурс по своїй сутності відповідає регулярному розвитку.

Стосовно соціально-економічних систем рівні регулярної й хаотичної складової також можуть варіюватися. В армії переважає регулярна складова, у середовищі інтелектуалів набагато більше хаотичної. Керування часток хаосу в соціумі може бути реалізовано за рахунок декількох форм впливу. Аналогом дисипації тут, очевидно, є те, які свободи надані суспільству, при повній свободі можливий хаос – анархія, при повній несвободі – жорстко регульоване суспільство, яке не допускає прояву ініціативи й, отже, приречене на програш у конкуренції (застій). Зовнішній вплив на соціум може мати економічну форму, коли за рахунок економічних факторів і стимулів усувається хаотичні прояви. Наприклад, в економічно розвиненому суспільстві мінімальні прояви хаосу в соціальних відносинах. В економічно слаборозвиненому суспільстві набагато більш імовірний перехід до хаосу.

Зовнішній вплив на соціум може виявитися у формі інформаційного впливу, який здатний збільшувати або зменшувати частку хаосу в розвитку суспільства за рахунок формування відповідних очікувань. Як правило, адміністративний тиск збільшує частку регулярної складової в динаміці суспільного розвитку.

Найважливішою глобальною задачею керування є встановлення оптимального співвідношення хаосу й регулярної складової у динаміці складної системи. При цьому неминучі компроміси, але перекіс веде або до анархії (хаосу), або до застою. Наприклад, для великого фінансово-промислового холдингу найважливішим моментом є оптимальна комбінація природно монопольних детермінованих, керованих регулятором функцій (передача електроенергії, оперативно-диспетчерське керування) і конкурентних функцій (виробництво й збут електроенергії, ремонт і сервіс), де присутні елементи самоорганізації у формуванні цін на основі попиту та пропозиції, конкурентний відбір найбільш ефективних учасників.

10.4.2. Самоорганізація в складній системі

Ще один узагальнюючий висновок з ефектів нелінійної динаміки пов'язаний з ефектом самоорганізації й керуванням складною системою. У соціумі завжди присутня самоорганізація, навіть у колективі із двох людей один є лідером, іншої – відомим. У більш складних системах може виникнути конфлікт між неформальним лідером (самоорганізація) і формальним (елемент зовнішнього керування системою, у цьому випадку – адміністративний ресурс).

Після розпаду СРСР спостерігався наступний парадокс. У результаті переходу від планової регулярної економіки СРСР до формально непланових економік ряду пострадянських держав з набагато більшою часткою конкуренції й пов'язаної з нею самоорганізацією число чиновників у цих країнах зросло в кілька разів. Порушувався принцип «Не заважай системі самоорганізовуватися».

Це надлишкове зовнішнє керування усувало оптимальну частку самоорганізації, ініціативи, тим самим зменшуючи ймовірність появи нових перспективних напрямків.

Наведені приклади прояву ефектів нелінійної динаміки в керуванні економічною ефективністю, антикризовому керуванні економічних і соціально-економічних систем далеко не вичерпують і не вирішують різноманітні наявні проблеми. Проте, облік об'єктивних закономірностей розвитку динамічних систем дозволить виробити управлінські рішення, що формують оптимальне співвідношення в системі хаосу й порядку, самоорганізації й керування.

10.5. Узагальнення нелінійних динамічних моделей для аналізу економічного розвитку.

Із множини різноманітних сценаріїв розвитку економічної системи найбільш кращими є стійкі процеси. Процес, який при малих змінах параметрів економічної системи й зовнішніх факторів зберігає свої основні характеристики будемо називати стійким економічним процесом. Це значить, що відхилення розглянутого процесу, що виникли в результаті малих відхилень параметрів, невеликі й непринципові.

Для нестійкого економічного процесу малі відхилення параметрів і середовища, завжди присутні в реальній системі, приводять до значних, іноді кардинальних змін плину процесу, що, як правило, веде до погіршення економічних показників і втраті конкурентоспроможності. Фактор втрати стійкості слід розглядати як додатковий елемент аналізу економічних ризиків.

Серед сценаріїв інноваційного розвитку економічної системи виділимо деякі варіанти:

- поступальний прискорений стійкий розвиток – найбільш кращий сценарій;
- втрата стійкості процесу розвитку, яка може бути реалізована в процесі зміни параметрів економічної системи й зовнішніх факторів і досягнення цими параметрами критичних значень;
- існування точки біфуркації – такої точки на траєкторії еволюції системи, у якій втрачає стійкість сценарій розвитку системи, що реалізувався раніше. У ній зароджуються нові варіанти продовження еволюції системи. Деякі з яких можуть бути стійкими, інші – нестійкими;
- реалізація режиму детермінованого хаосу, тобто такого сценарію розвитку, коли процес має хаотичний характер при повністю детермінованих параметрах системи й зовнішніх факторів. З погляду ризик-аналізу цей режим може в певних випадках бути додатковим чинником ризику;
- зародження принципове нового, що не існував при попередніх значеннях змінюваних параметрів системи, стійкого процесу, який може бути досить бажаним варіантом (наприклад, поява нової перспективної технології й пов’язаного з нею високоприбуткового бізнесу).

Наведений набір сценарних варіантів інноваційного розвитку не претендує на повноту, однак він дає уявлення про складність обговорюваних процесів і їх залежності від параметрів системи й зовнішніх факторів. В одній і тій же системі залежно від значень параметрів і початкових умов можуть реалізовуватися різні варіанти розвитку.

Принципова відмінність економічних систем від технічних з погляду побудови математичних моделей – набагато більший рівень невизначеності функціонування економічної системи. Особливо сильно ця відмінність проявляється при аналізі інноваційних сценаріїв розвитку, коли невизначеність еволюції економічної системи суттєво збільшується в порівнянні із традиційними економічними процесами. При цьому в економічній системі можуть реалізовуватися й революційні сценарії розвитку, наприклад, зародження нових ефективних бізнес-напрямків, поява яких робить неконкурентоспроможними деякі існуючі раніше економічні рішення. Наприклад, поява тепловозів викликала згортання виробництва паровозів, поява стільникового зв’язку привела до вгасання бізнесу, заснованого на обслуговуванні пейджерів, нарощування потужності й зниження вартості комп’ютерів приводить до перерозподілу ринку обчислювальної техніки, поява інтернету суттєво змінила ринок поштових послуг і т.д. Очевидно, що ці приклади з різних галузей економіки й різних епох відповідають тому самому явищу – інноваційна економіка, заснована на нових технічних рішеннях, робить економічно неефективною (нестійкою) колишню галузь, засновану на застарілих технічних рішеннях. При цьому в перехідний період часто виникають елементи хаотичної поведінки взаємозалежних технічних і економічних систем. На основі інноваційного наукового й технологічного рішення виникає множина технічних реалізацій, які конкурують між собою в частині технічної й економічної ефективності. У результаті цієї конкуренції, що має ознаки хаотичної поведінки, виявляються найбільш ефективні техніко-економічні рішення, які стають на якийсь час стійким трендом розвитку даного напрямку. У цей час початок такого процесу спостерігається в областях розвитку альтернативних джерел енергії й створення гібридних і електричних автомобілів. У той же час деякі інноваційні рішення, що сформувалися, можуть виявитися нестійкими й неконкурентоспроможними із традиційними рішеннями. Прикладом цього є надзвукова пасажирська авіація. Цілком можливо, що на наступному рівні розвитку техніки цей напрямок зможе конкурувати із традиційними пасажирськими авіаперевезеннями, і займе частку ринку у відповідному сегменті далеких перевезень, тобто стане стійким у нових умовах. З погляду аналізу ризиків конкурентне хаотичне середовище може бути як джерелом чистого ризику в порівнянні із процесом економічного розвитку, більш близьким до детермінованого, так і джерелом спекулятивного ризику, коли можливий позитивний результат.

Наведені приклади з реальних інноваційних для свого часу техніко-економічних рішень показують, що динаміка інноваційного економічного розвитку має загальні якісні риси з нелінійною динамікою. Ця дисципліна включає розвинутий апарат для побудови математичних моделей, що дозволяють проводити аналіз розв’язків нелінійних динамічних систем, досліджувати еволюцію розв’язків при змінах параметрів системи й зовнішніх впливів, втрату стійкості, біфуркації, області хаотичної поведінки розв’язків. Моделі нелінійної динаміки мають гарну точність для багатьох природничо-наукових додатків у техніці, фізиці, хімії, біології. Для економічних і техніко-економічних інноваційних систем має місце тільки якісний збіг багатьох ефектів. З погляду кількісного аналізу економічна система має більшу невизначеність функціонування, ніж системи в технічних й природничо-наукових додатках. Для економічних і, тим більше, для соціально-економічних систем поки не побудовані математичні моделі, здатні на кількісному рівні аналізувати економічний процес із урахуванням динаміки й нелінійних ефектів.

Для процесів інноваційного економічного розвитку згадані труднощі мають ще більше значення у зв’язку з невизначеністю, що збільшується, пов’язаною з інноваційним характером процесу.

Природнім продовженням якісного аналізу інноваційного розвитку економічної системи є дослідження підходів до побудови математичної моделі відповідного динамічного процесу. І головна складність полягає в побудові математичної моделі еволюції економічної системи. Облік інноваційного сценарію розвитку можна трактувати як постбіфуркаційне зародження нового стійкого розв’язку, що відповідає інноваційному економічному напрямку.

У якості одного з підходів до проблеми побудови математичної моделі економічної динаміки, що враховує ефекти, пов’язані з інноваційним характером економічної системи, розглянемо узагальнення моделі простої динамічної системи, яка має дві області, що притягають (рис. 10.1).

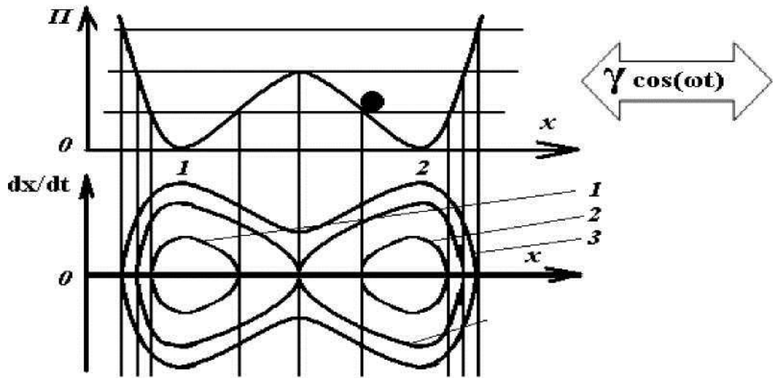


Рис. 10.1. Динамічна система із двома областями, що притягають. Криві 1 і 2 на фазовій площині відповідають рухам в областях 1 і 2 відповідно, крива 3 – охоплює обидві області, що притягають.

Рівняння руху має вигляд:

$$m\ddot{x} + \delta\dot{x} - \beta x + \alpha x^3 = \gamma\cos\omega t \qquad (10.4)$$

Тут

m – параметр, що визначає інерційні характеристики системи (у механіці це маса),

δ – параметр дисипативних властивостей,

β – параметр, що визначає лінійну складову відгуку системи на зовнішній вплив,

α – параметр, що визначає нелінійну складову відгуку,

γ, *ω* – відповідно амплітуда й частота зовнішнього періодичного впливу.

Ця модель є частинним випадком узагальненої динамічної системи із двома областями, що притягають. Іншими окремими випадками такої узагальненої динамічної системи можна вважати дві конкуруючі бізнес-системи в економіці, двопартійну систему в політології, коливання кульки в системі двох лунок у механіці, систему на основі двох базових мов у лінгвістиці.

Для відносно простої моделі (10.4) були проведені різноманітні чисельні дослідження. Результати цих досліджень показують, що навіть у такій простій динамічній системі існують різноманітні розв'язки й численні нелінійні ефекти, що якісно повторюються в набагато більш складних системах, у тому числі й в інноваційному розвитку економічної системи. Поряд з відносно простими розв'язками, що повністю відповідають зовнішньому періодичному впливу, у моделі (10.4) виявлені:

– біфуркації розв'язків з подвоєнням періоду;
– існує зона параметрів, де розв'язок має хаотичний характер при повністю детермінованих параметрах системи (10.4) (дивний аттрактор, детермінований хаос);
– існують стійкі й нестійкі періодичні розв'язки різних періодів, що зовсім не відповідають зовнішньому впливу.

Для ілюстрації на рис. 10.2 представлений хаотичний розв'язок детермінованої системи (10.4).

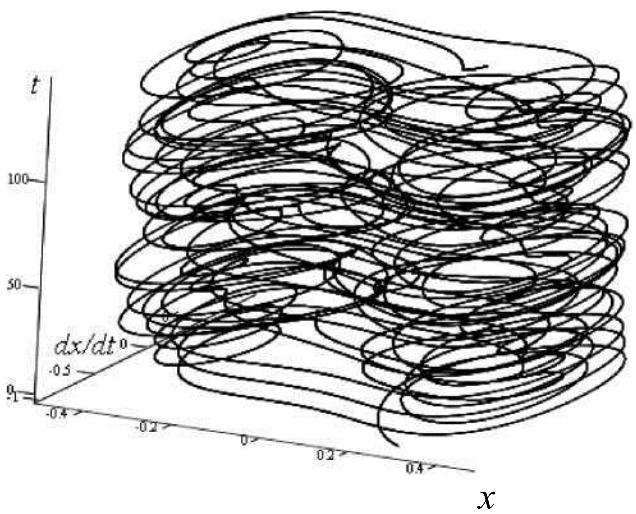


Рис. 10.2. Хаотичний розв'язок системи (10.4), представлений в тривимірному просторі (координата x – швидкість x' – час t)

Розглянемо деякі можливі узагальнення й ускладнення системи (10.4), які можуть бути затребувані при застосуванні обговорюваного підходу для аналізу задач економічної динаміки.

1. Кубічний вид нелінійності в рівнянні (10.4) може бути без обмеження спільності замінений на будь-яку криву, максимально відповідну до вихідної системи. При цьому методика дослідження змінюється непринципово. Для залежностей, що задаються чисельно, що характерно для задач економічної динаміки, таблиця, що визначає вид нелінійної залежності, може бути апроксимована сплайном. При цьому система (10.4) приймає більш загальний вид

$$m(x,t)\ddot{x} + B(\dot{x}) + C(x) = W(t) \qquad (10.5)$$

Тут

m(x, t)	–	узагальнений параметр, що визначає інерційні властивості системи,
$B(\dot{x})$	–	функція, що визначає дисипативні властивості системи,
C (x)	–	узагальнений відгук,
W(t)	–	зовнішній вплив,
t	–	час.

Для економічних систем *x(t)* може розглядатися як економічний індикатор, *m(x, t)* – функція, що визначає інерційні властивості економічної системи стосовно інвестицій, $B(\dot{x})$ – нелінійна функція, що визначає опір економічної системи змінам під впливом зовнішнього інвестиційного впливу, *C(x)* – функція відгуку, *W(t)* – інвестиційний вплив.

2. Симетрична форма областей, що притягають, на Рис.10.1 може бути замінена на несиметричну (Рис. 10.3), що відбиває відмінність в областях, що притягають. Можливий облік більшої кількості областей, що притягають.

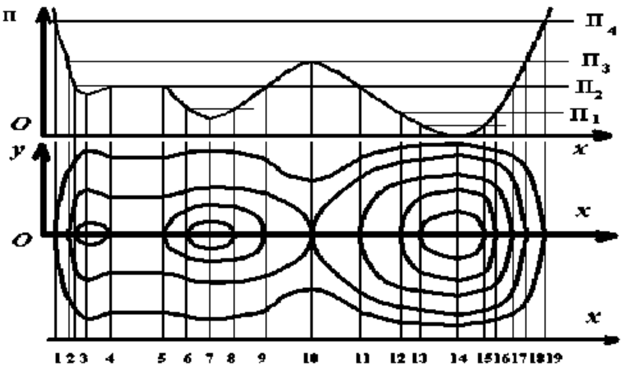


Рис. 10.3. Узагальнення виду форми областей, що притягають.

3. Модель із одним ступенем свободи (10.4) може бути узагальнена для систем з декількома ступенями свободи. У цьому випадку *x* у моделі (10.5) уважається вектором відповідної розмірності. При цьому значно зростає різноманіття виявлених ефектів за рахунок обліку взаємного впливу різних динамічних режимів, відповідних до різних ступенів свободи.

4. У якості змінюваних параметрів системи, що впливають на вид розв'язку, можуть використовуватися як параметри зовнішнього впливу, так і параметри – визначальні властивості системи – інерційність, дисипація, нелінійна функцію відгуку.

5. Якщо для природничо-наукових додатків основні параметри систем (10.4) і (10.5), як правило, певним чином визначаються з вихідної системи, то для економічної системи нетривіальною задачею є визначення інерційних і дисипативних властивостей. Функції відгуку можуть бути побудовані за реальним даними економічного аналізу з використанням эконометричних методів.

6. Економічна криза може трактуватися як втрата стійкості попереднього тренда розвитку, при цьому відбувається біфуркація й зароджуються нові

розв’язки, деякі з них стійкі. Ціль керування при цьому – визначити розв’язок, що відповідає економічному інноваційному росту, забезпечити його стійкість за рахунок добору параметрів системи й зовнішнього впливу, а розв’язок, що відповідає стагнації або спаду зробити нестійким.

7. Відзначимо, що багато соціальних явищ можуть трактуватися як синхронізація динамічної соціальної системи. Стосовно до моделей розглянутого класу ефекти синхронізації присутні в багатомірному узагальненні систем виду (10.5).

Контрольні запитання:

Охарактеризуйте топологічну еквівалентність систем.

Поясніть явище біфуркації.

Визначте етапи дослідження соціально-економічного процесу.

Проаналізуйте роль інформації як чинника зовнішнього впливу на систему.

Як здійснюється керування хаосом у складній системі інноваційного розвитку?

Які можуть бути узагальнення й ускладнення системи при аналізі задач економічної динаміки?

Завдання для самостійної роботи

Тести:

1. Назвіть основні причини погіршення якості моделювання природничо-наукових, технічних і соціально-економічних систем:

a) подальше ускладнення систем
b) високий рівень вірогідності вихідних даних
c) зростання ролі інформації як зовнішнього впливу на систему
d) всі відповіді вірні

2. «Ефект метелика»: невелике відхилення в початкових умовах може приводити до … змін у поведінці складної системи й відповідної до моделі по закінченні деякого часу.

a) невеликих
b) суттєвих
c) кардинальних
d) катастрофічних

3. Принцип суперпозиції для лінійних моделей: результат додавання рухів нелінійної системи, що виникають під впливом різних факторів, … окремих складових.

a) є сумою
b) не є сумою
c) є лінійною комбінацією
d) є нелінійною комбінацією

4. Ізохронність коливань це …
a) залежність частоти коливань від амплітуди
b) незалежність частоти коливань від амплітуди
c) залежність частоти коливань від фази
d) незалежність частоти коливань від погодних умов

5. М'яке самозбудження автоколивань:
a) автоколивання можуть поступово зменшувати амплітуду до якогось стабільного значення
b) автоколивання можуть поступово збільшувати амплітуду до якогось стабільного значення
c) автоколивання можуть стрімко збільшувати амплітуду до якогось стабільного значення
d) відразу виникає рух зі стабільною амплітудою

6. Ефект синхронізації:
a) при відсутності зв'язків між динамічними системами рух цих систем стає взаємонезалежним
b) при наявності слабких зв'язків між динамічними системами рух цих систем стає взаємонезалежним
c) при наявності сильних зв'язків між динамічними системами рух цих систем стає взаємозалежним
d) при наявності навіть досить слабких зв'язків між динамічними системами рух цих систем стає взаємозалежним

7. Катастрофами називають
a) повільні зміни, що виникають як реакція системи на стрибкоподібну зміну параметрів або зовнішніх умов
b) повільні зміни, що виникають як реакція системи на плавну зміну параметрів або зовнішніх умов
c) стрибкоподібні зміни, що виникають як реакція системи на плавну зміну параметрів або зовнішніх умов
d) стрибкоподібні зміни, що виникають як реакція системи на стрибкоподібну зміну параметрів або зовнішніх умов

8. Детермінований хаос це …
a) детермінований рух повністю хаотичної системи
b) хаотичний рух повністю детермінованої системи
c) хаотичний рух частково детермінованої системи
d) хаотичний рух частково хаотичної системи

9. Причина виникнення хаосу в детермінованій системі:
a) нестійкість окремих рухів, що відбуваються усередині обмеженого фазового простору при відсутності стійких рухів

b) нестійкість окремих рухів, що відбуваються усередині необмеженого фазового простору при відсутності стійких рухів
c) стійкість окремих рухів, що відбуваються усередині обмеженого фазового простору при наявності нестійких рухів
d) нестійкість окремих рухів, що відбуваються усередині обмеженого фазового простору при наявності стійких рухів

10. Дивний аттрактор це:
a) нерегулярні коливання в обмеженому просторі розв'язків детермінованих динамічних систем
b) стійке різноманіття нестійких траєкторій
c) нестійке різноманіття стійких траєкторій
d) нестійке різноманіття нестійких траєкторій

11. Стала Фейгенбаума це:
a) чисельник геометричної прогресії відрізків значень параметра між точками біфуркацій
b) знаменник арифметичної прогресії відрізків значень параметра між точками біфуркацій подвоєння періоду
c) знаменник геометричної прогресії відрізків значень параметра між точками біфуркацій
d) знаменник геометричної прогресії відрізків значень параметра між точками біфуркацій подвоєння періоду

12. Самоорганізація це:
a) виникнення впорядкованих структур у нелінійних системах різної природи
b) виникнення невпорядкованих структур у нелінійних системах різної природи
c) виникнення невпорядкованих структур у лінійних системах різної природи
d) зникнення впорядкованих структур у нелінійних системах різної природи

13. Стійким економічний процес, це процес, який …
a) при суттєвих змінах параметрів економічної системи й зовнішніх факторів зберігає свої основні характеристики
b) при малих змінах параметрів економічної системи й зовнішніх факторів зберігає свої основні характеристики
c) при великих змінах параметрів економічної системи й внутрішніх факторів зберігає свої основні характеристики
d) при великих змінах параметрів економічної системи й внутрішніх факторів змінює свої основні характеристики

14. Інструментами керування рівнем хаосу економічної системи є:
a) виведення економічних ресурсів із системи

b) введення економічних ресурсу ззовні
c) інформаційний вплив, коли формуються очікування зміни аналогів дисипації або зовнішнього впливу
d) адміністративний ресурс. Як правило, його вплив зменшує хаос

15. Математична модель динамічної системи має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau}(x_0 - x) - k_1 x, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau} y + k_1 x - k_2 y.$$

Визначити, якій із представлених нижче систем якісно еквівалентна дана система:

a		b
$\frac{dx}{dt} = -5y, \ \frac{dy}{dt} = -3x + 2$		$\frac{dx}{dt} = -2y, \ \frac{dy}{dt} = 8x + 2$
c		d
$\frac{dx}{dt} = 2x + 2y, \ \frac{dy}{dt} = -x + 2y$		$\frac{dx}{dt} = -2x - y, \ \frac{dy}{dt} = x - 2y$

Відповіді до тестових завдань:

№ теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
відповідь	d	c	a, c	b	b	d	c	b	a	a , b	d	a	b	a, b, c, d	d

РОЗДІЛ 11. МЕТОДИ ЕКОНОМІЧНИХ ЗМІН ТА ЇХ АНАЛІЗ

11.1. Модель розвитку економіки України.
11.2. Технологічна концепція моделі суспільної еволюції.
11.3. Граничні цикли та фазові переходи в соціально-економічних системах.
11.4. Характеристики швидкості та інтенсивності зміни динамічного ряду.
11.5. Модель Вайдліха.

11.1 Модель розвитку економіки України

Розглянемо одну з моделей макроекономічної системи в якій представлені основні взаємозв'язки між виробництвом споживанням, нагромадженням і грошовою маси. Дана модель була запропонована В.С.Міхалевічем як одна з моделей сценаріїв розвитку перехідної економіки.

Для побудови моделей були обрані наступні змінні:

X(t) — величина внутрішнього валового продукту в ***t-й*** період;

Y(t) — національний доход у ***l***-й період;

А — матеріалоємність валового продукту;

R(t) - частина НД, що затрачається на споживання (фонд споживання) у ***t-й*** період;

W — норма нагромадження;

S(t) — величина платоспроможного попиту в ***t-й*** період;

с — норма споживання;

D(t) — грошова маса, що забезпечує платоспроможний попит у ***l-й*** період;

D_0 (t) — запаси коштів у населення в ***l-й*** період;

$\Delta D_0(t)$ - приріст запасів коштів за одиничний період у ***t-й*** період;

P(t) — індекс споживчих цін щодо базового періоду часу в ***l-й*** період;

m — коефіцієнт еластичності цін;

Е — коефіцієнт ефективності інвестицій;

q — частка доходів населення в НД;

r — коефіцієнт, що враховує зниження валового продукту за рахунок утрат унаслідок затоварення, неплатежів, розриву економічних зв'язків і т.д.

Розглянемо основні рівняння моделі.

1. Рівняння динаміки ВВП

$X(t) = AX(T + Y(t)$

2. Рівняння динаміки ВВП (динамічна функція Кобба-Дугласа з обліком нейтрального НТП)

$X(t) = \gamma(t) \cdot L_l^{\alpha_1} \cdot K_l^{\alpha_2}$

3. Рівняння впливу інвестицій на зміну ВВП

а) $\dfrac{dX(t)}{dt} = E \cdot W \cdot Y(t)$ - ситуація росту обсягів виробництва;

б) $\dfrac{dX(t)}{dt} = (E \cdot W - r) \cdot Y(t)$ - ситуація падіння обсягів виробництва.

4. Балансове рівняння невиробничого споживання

$R(t) = c \cdot Y(t)$

5. Рівняння динаміки платоспроможного попиту

$$S(t) = \left[\frac{D(t)}{P(t)}\right]$$

6. Рівняння динаміки цін

$P(t) = m \cdot (S(t) - R(t))$

7. Баланс коштів

$\Delta D_0(t) = P(t) \cdot [q \cdot Y(t) - \min(S(t), R(t))]$

Величина S(t) у ринковій економіці залежить від безлічі факторів, які можна підрозділити на два класи: екзогенні (зовнішні) фактори й ендогенні (внутрішні) фактори.

Екзогенні фактори — це фактори, що відбивають стан макроекономічної системи, такі, як рецесія (спад), стагнація або зростання виробництва, інфляція, податкове тягар і т.д.

Ендогенні фактори — це внутрішні фактори, що формуються на основі розглянутих у даній системі показників. Величина платоспроможного попиту S(t) залежить від рівня доходів населення (не тільки поточних, як представлено в цій моделі, але і за попередні періоди).

Розглянемо методи розв'язку систем диференціальних рівнянь і проведемо дослідження моделей механізму споживчого попиту.

Траєкторія динаміки фонду споживання ***R(t)*** при умові росту виробництва - $R(t) = R(0) \cdot e^{(1-A) \cdot E \cdot W \cdot t} = R(0) \cdot e^{\lambda t}$

Вираження національного доходу ***Y(t)*** та внутрішнього валового продукту ***X(t)*** через фонд споживання ***R(t)***:

$$Y(t) = \frac{R(t)}{c} = \frac{R(0)}{c} \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$X(t) = \frac{R(t)}{(1-A) \cdot c} = \frac{R(0)}{(1-A) \cdot c} \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Вираженняфункціональноїзалежностінеобхідноїкількостігрошовоїмаси ***D(t)*** від величини платоспроможного попиту ***S(t):***

$$D(t) = P(t) \cdot (S(t) - S(0)) = D(0) \cdot \frac{P(t)}{P(0)}$$

Приріст (зміна) запасів грошових засобів:

$\Delta D_0(t) = P(t) \cdot [q \cdot Y(t) - \min(S(t), R(t))] = P(t) \cdot [q \cdot Y(t) - R(t)]$

Зміна грошових запасів $\Delta D_0(t) = P(t) \cdot R(0) e^{\lambda t} \left[\dfrac{q}{c} - 1\right]$

Динаміка рівня цін: $P(t)=\frac{1}{m\cdot\beta\cdot R(0)}\cdot\left(e^{\left(\frac{m\cdot\beta\cdot R(0)}{\lambda-1}\right)e^{\lambda t}}-1\right)$

11.2. Технологічна концепція моделі суспільної еволюції

Розглядаючи суспільство як самоорганізовану систему, що містить в собі джерело власного розвитку, маємо, що кожна соціальна цілісність маєв ласну долю.

Концепція долі як траєкторія розвитку, а тим паче множина можливих сценаріїв еволюції, які потенційно містяться у внутрішній структурі функціональних зв’язків, неявно присутня в наукових теоріях.

Математичне моделювання необхідним чином передбачає верифікацію параметрів і функціональних зв’язків, які використовуються при побудові моделі.

Досвід прогнозування і ретроспективний аналіз еволюційних процесів дозволяє уточнити параметри моделей, а також виявити функціональні механізми і причинні зв’язки.

Найбільш характерною властивістю системи, що самоорганізовується є їх властивість до підтримки власного гомеостазиса або стійкого функціонування шляхом матеріального і енергетичного обміну з навколишнім середовищем.

Фактор залишкового населення як одна з основних рухомих сил історії; відлік часу в хроніці починається з міграційних процесів, які призвели в рух племена.

Г.Х. фон Врінг припускає розподіл на внутрішні і зовнішні причини історичних подій. Внутрішні причини: зміна в мотивації і когнітивних установок людей; зміни в технології, в результаті яких стають каузально можливими досягненнями.

Як відкрита самоорганізаційна система соціум володіє здатністю технологічно ускладнюватися і розширювати територію, що займають. Територіальний масштаб системи безпосередньо пов’язаний з ефективністю суспільного поділу праці, густини заняття населення.

Комп’ютерне моделювання еволюції систем в рамках формалізму процесів „народження – і – смерті” дозволяє дослідити динаміку системи на індивідуальному рівні.

11.3. Граничні цикли і фазові переходи в соціально-економічних системах

Конкуренція за трудові відносини між різними технологіями може приводити до автоколивальних режимів в дисипативних системах.

Дослідимо логічний ланцюжок з функціональним відношенням типу „хижак – жертва”.

$F_1 = x_1(N-\gamma x_4 - x_1);$

$F_2 = x_2(\alpha x_1 - \lambda x_4 - x_2)$;
$F_3 = x_3(bx_2 - x_3)$;
$F_4 = x_4(px_3 - x_4)$.

Ця модель має регресивний розв'язок Троіча:

$x_i^{(5)} = C_0\alpha_i^{(5)} - N\beta_i^{(5)}$, $i \neq 2$,

$x_i^{(5)} = 0$

Біфуркаційний параметр $\boldsymbol{C}_0$ неоднозначно пов'язаний з рівнем технологічної складності системи.

*Основні вимоги до макромоделей***.**

- Макромоделі повинні бути геометрично наочними і, відповідно, містити чим поменше параметрів;
- Незважаючи на малу розмірність, макромоделі повинні володіти складністю для того, щоб якісно пояснити нелінійні ефекти і виявити неочевидні закономірності поведінки системи.

Емпірична залежність між споживанням та виробництвом може бути подана у вигляді функцій споживання: $C = \alpha P + \beta$.

11.4. Характеристики швидкості та інтенсивності зміни динамічного ряду

Основними показниками розвитку є *абсолютний приріст, темп зростання, темп приросту.*

У динамічному аналізі ці показники важливо використовувати спільно.

Абсолютний приріст: $\delta_{1/0} = Q_1 - Q_0$;

Темп зростання: $\eta_{1/0} = Q_1 - Q_0$;

Коефіцієнт зростання: Q_1 / Q_0.

Темп приросту: $\rho_{1/0} = \dfrac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$.

Граничні (неперервні) абсолютні і відносні приросту:

$$\hat{\delta}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+1) - Q(t)}{\Delta t} = \frac{\partial Q(t)}{\partial t};$$

Абсолютне прискорення: $\varphi_t = \delta_{t+1/t} - \delta_{t/t-1}$

Відносне прискорення: $\chi = \dfrac{\varphi}{\delta}$

Темп приросту абсолютного приросту: $\hat{\chi} = \dfrac{\dfrac{d\hat{\delta}(t)}{dt}}{\hat{\delta}(t)} = \dfrac{d \ln \hat{\delta}(t)}{dt}$

11.5. Модель Вайдліха

Одна з найбільш перспективних математичних моделей, які використовуються зараз істориками, розроблена профессором Штутгартського університету Вольфгангом Вайдліхом на початку 90-х років. У класичній моделі Вайдліха рівнянь всього два, і вони пов'язують між собою лише дві змінні.

Взагалі-то число ступенів свободи для людського суспільства прямує до нескінченності, просто історики навчилися виділяти першорядне. Модель застосовна до розгляду економічної або політичної ситуації, яка, наприклад, адекватно описує політику президента СРСР у період перебудови.

Однак те, що ми бачимо на малюнку - не розрахунки для конкретного суспільства, а лише приклад. Це фазовий портрет модифікованої моделі Вайдліха, розглянутий групою дослідників (А.О.Короткевич, С.А.Плуготаренко і інші) під керівництвом доктора історичних наук Л.І.Бородкіна (МДУ). На цій площині у вигляді крапок видно всі моменти (фази) життя одного гіпотетичного суспільства, все, що в ньому відбувалося, відбувається і буде відбуватися, а також все, що можливо чи було можливо. Точки шикуються в фазові траєкторії – це долі країни, шляхи її розвитку. Всі вони однаково ймовірні. Але в кожний момент часу реально здійснюється лише один.

Згідно з моделлю Вайдліха, мінлива X трактується як ступінь впливу і участі народу в демократичних процесах прийняття рішень, а мінлива Y - як ступінь сили і влади уряду (можливі й інші застосування моделі, наприклад, коли макрозмінні характеризують економічну, а не політичну ситуацію). Гіпотеза авторів роботи полягала в тому, як виглядають рівняння з участю X і Y. Ці рівняння були потім чисельно вирішені:

$$a(x) = exp(-k(x - s/2) ** 2) - 0,5$$
$$b(y) = exp(-k(y - s/2) ** 2) - 0,5$$

Така функція має форму "гірки", вершина якої знаходиться в точці s/2, а крутизна визначається параметром k. У термінах моделі Вайдліха це "функції впливу" X на Y та Y на X.

Рішення ілюструє одну з дивовижних історичних закономірностей, відкритих останнім часом. Переломні моменти історії не обов'язково збігаються з такими гучними подіями, як війни, революції та великі відкриття. Момент, коли суспільство стоїть перед вибором, може бути і зовсім ніким не помічений, тим більше ніхто не дізнається про можливості, надавалися колись і безповоротно втрачені.

Ми бачимо в центрі площини точку (мовою нелінійної динаміки -- аттрактор), куди фазові траєкторії як би спрямовуються з метою закінчитися в ній. Всі похідні за часом в цій точці дорівнюють нулю; іншими словами, якщо значення змінних якимось чином досягли X (S), Y (S), то ні в кій доступній для огляду перспективі вони вже практично мінятися не будуть. При будь-якому трохи зміниться, X або Y система, потрапивши на будь-яку з найближчих фазових траєкторій, скоро, плавно і безболісно повернеться в початковий стан.

Це і є та сама стабільність, яка в усі часи вважалася першою ознакою процвітання. Які її характеристики? Параметр Y в точці A досить великий, значить, уряд сильний. Але велике і значення X, що говорить про демократичний режим. Словом, точку A можна назвати сприятливою в усіх відношеннях.

Але на тій же фазовій площині є і ще один аттрактор: при наближенні до лівого нижнього кута до значень X = 0, Y = 0 "лінії життя ", втягуються в нього точно у вир. Що це за точка? Анархія, повний розпад що втратив силу держави і беззахисність народу, також не що має впливу. Причому така ситуація знову-таки триватиме необмежено довго, адже при всякій спробі вибратися з неї шляхом зміни X або Y суспільство буде відкинуто назад, на вихідні позиції. Чи варто говорити, наскільки ця точка небажана! Але країна неминуче потрапить до неї, якщо виявиться на одному з провідних туди шляхів.

Придивившись уважніше, ми побачимо сепаратрісу, що розділяє області притягання точки A і точки 0. На малюнку вона позначена літерами CD. Ця лінія - слизький шлях. На ньому не можна втриматися довго: всі "випадкові" змінні X або Y неодмінно виштовхнуть нас вище сепаратріси, звідки всі шляхи так чи інакше зведуться в точку A, або нижче, звідки ми рано чи пізно потрапимо в точку 0. Ось він, момент, в який певні урядові заходи можуть стати найважливішою історичною подією! У масштабах всієї площини – це політичний ривок, свідомо зроблений народом і урядом, може бути зовсім невеликим. Але якщо він дозволить втекти від сепаратріси, то це визначить долю країни на довгі роки вперед.

Контрольні питання:

1. У чому суть моделі, запропонованої В. С. Міхалевічем?
2. Як уданій моделі відбивається платоспроможний споживчий попит?
3. Якими методами в даній моделі зважується система диференціальних рівнянь?
4. Проведіть аналіз результатів моделювання за даними економіки України за 2009 — 2011 р.
5. У чому сутність технологічної концепції суспільної еволюції?
6. На яких рівняннях заснована дана модель?
7. Проведіть аналіз дисипативних систем для макроекономіки
8. Проінтерпретуйте поняття граничний цикл і фазові переходи.

1) Обґрунтуйте модель Вайдліха. Які основні вимоги пред'являють до макромоделей і параметрів їхнього опису?

РОЗДІЛ 12. СИНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД У МОДЕЛЮВАННІ ТА АНАЛІЗІ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

12.1. Синергетична парадигма вивчення складних економічних систем

Сучасним етапом розвитку ідей кібернетики, загальної теорії систем та системного аналізу можна вважати науковий напрямок, відомий як синергетика (грец. «synergeia», «synergetikos» — такий, що діє спільно, спільний, сприяння, співробітництво). Цю назву запропонував професор Штутгартського університету Герман Хакен, якого вважають засновником синергетики. Зазначений термін акцентує увагу на узгодженості, взаємодії частин системи у процесі утворення її структури як єдиного цілого.

Поряд із терміном *синергетика* часто використовують терміни теорія складності (complexity theory), теорія динамічних (складних) систем (dynamic (complex) system theory), теорія хаосу (chaos theory), нелінійна динаміка (nonlinear dynamic) або більш загальний — нелінійна наука (nonlinear science), увиразнюючи при цьому принципову нелінійність, нерівноважність, складність досліджуваних явищ. Фундаментальні результати в цій галузі здобули Г. Хакен, І. Пригожин, Б. Мандельброт, М. Мойсеєв, С. Курдюмов, Г. Малинецький, О. Самарський, О. Тихонов, Р. Том та інші. Надалі послуговуватимемося термінами «синергетика», «нелінійна динаміка», «теорія складних систем».

Синергетика вивчає складні системи, які містять багато підсистем різної природи, маючи на меті виявити, в який спосіб взаємодія таких підсистем приводить до виникнення нових стійких просторових, часових чи просторово-часових структур або режимів функціонування, а також досліджує характерні масштаби й швидкості перехідних процесів.

Синергетика акцентує увагу на явищах, що виникають завдяки спільній дії кількох (багатьох) факторів, кожний з яких окремо до цього явища не приводить. Синергетику часто визначають як науку про самоорганізацію.

Під самоорганізацією розуміють мимовільне, спонтанне самоускладнення форми (у загальнішому випадку — структури системи та законів її функціонування) унаслідок повільної та плавної зміни її параметрів. Іншими словами, самоорганізація — це утворення впорядкованих структур із хаосу.

Отже, синергетика являє собою нову узагальнювальну науку, що вивчає основні закони самоорганізації складних систем.

Винятково важливим етапом у розвитку нового, нелінійного способу мислення було виникнення та уточнення поняття *патерну* (наближено можна перекласти як шаблон, зразок). Засновник тектології (в якій було закладено основні кібернетичні принципи та ідеї ще на початку XX ст.) О. Богданов першим спробував об'єднати поняття організації, патерну та складності в послідовну теорію систем. Кібернетика зосередилась на патернах зв'язку та управління — зокрема на патернах кругової причинності, на яких ґрунтується концепція зворотного зв'язку; завдяки цьому в кібернетиці вперше було чітко розмежовано патерн організації системи та її фізичну структуру.

За останні двадцять років було знайдено та проаналізовано недостатні «елементи» — концепцію самоорганізації (синергетика) та нову математику складних систем. Нова математика складних систем є, по суті, математикою візуальних патернів — дивних атракторів, фазових портретів, фракталів тощо, які аналізуються в контексті топологічної структури, вперше розробленої А. Пуанкаре.

Синергетика та кібернетика як міждисциплінарні наукові напрямки мають багато спільного. Системи, що є предметом їх вивчення, можуть бути різної природи (хімічні, фізичні, біологічні, економічні, соціальні тощо). Зрозуміло, що ці системи змістовно вивчаються багатьма іншими спеціальними науками. Кожна з них досліджує певну множину об'єктів своїми, тільки їй притаманними методами, формуючи результати «власною» мовою опису. Але через наявну диференціацію науки досягнення однієї з її галузей часто стають важкозрозумілими або й недоступними для фахівців з інших наукових напрямків.

Тим часом синергетика та кібернетика абстрагуються від специфічної природи систем, намагаючись описувати їх функціонування (еволюцію) універсальною мовою. Це досягається відшуканням ізоморфізму різних досліджуваних специфічними засобами багатьох наук явищ, які можна, проте, описати однаковими (однотипними) моделями. Отже, виявляючи єдину модель, спільну для зазначених явищ, синергетика та кібернетика переносять результати однієї галузі науки в інші.

Але між синергетикою та кібернетикою існують і певні відмінності. Кібернетика та різноманітні напрямки загальної теорії систем вивчають процеси підтримання рівноваги (процеси гомеостазису) у системах за рахунок зворотних зв'язків, а також процеси управління такими системами. Кібернетика намагається описувати нелінійні процеси еволюції систем за допомогою лінійних моделей (принаймні на окремих етапах, коли це можливо).

У синергетиці на відміну від кібернетики акцент робиться не на процесах управління та обміну інформацією, а на принципах побудови, організації, розвитку та самоускладнення систем і їхній еволюції. Синергетика досліджує принципово нерівноважні (такі, що перебувають далеко від стану рівноваги) системи, принципово нелінійні (такі, що за певних умов деякі збурення —

внутрішні або зовнішні — можуть привести систему до принципово нових станів, до виникнення нових стійких структур) процеси еволюції систем.

Головні відмінності між синергетикою та кібернетикою разом із системними дослідженнями наведено в табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Співвідношення системних досліджень і синергетики

№	Системні дослідження (загальна теорія систем, системний аналіз, системний підхід)	Синергетика
1	Акцент роблять на статиці систем, їхній морфологічному і, рідше, функціональному описі	Акцентує увагу на процесах росту, розвитку і руйнування систем
2	Надають великого значення упорядкованості, рівновазі	Вважає, що хаос відіграє важливу роль у процесах руху систем, причому не тільки деструктивну
3	Вивчають процеси організації систем	Досліджує процеси самоорганізації систем
4	Найчастіше зупиняючи на стадії аналізу структури системи, абстрагуються від кооперативних процесів	Підкреслює кооперативность процесів, що лежать в основі самоорганізації і розвитку систем
5	Проблема взаємозв'язку розглядається, в основному, як взаємозв'язок компонентів усередині системи	Вивчає сукупність внутрішніх і зовнішніх взаємозв'язків системи
6	Джерело руху бачить у самої системі	Визнає велику роль середовища в процесі зміни

З погляду синергетики процеси у відкритих нерівноважних системах характеризуються принциповою нелінійністю, присутністю зворотних зв’язків, що зумовлює появу якісно нових можливостей здійснення керуючого впливу на систему.

Синергетика дала змогу по-новому зрозуміти відмінність між випадковими та детермінованими процесами. Довгий час вважалось, що існують лише два класи об’єктів. Перший - становлять детерміновані. Якщо відомий аналітичний вигляд закону, за яким вони функціонують, то спрогнозувати їхнє поводження можна практично на довільний часовий інтервал. До другого класу належать стохастичні об'єкти, поводження яких описується деяким випадковим процесом (є його реалізацією). Для цього класу процесів неможливо зробити детермінований прогноз, але якщо ми достатньо довго спостерігатимемо за їхнім поводженням, то зможемо знайти відповідні розподіли ймовірності та обчислити статистичні характеристики (середні, дисперсії, інтервали довіри тощо) і спрогнозувати їхнє поводження в «середньому» з певною ймовірністю.

З погляду кібернетики процес управління складними системами полягає у здійсненні керуючих впливів системи управління на керовані підсистеми для досягнення оптимального функціонування об'єкта в цілому. Оптимальне управління настає за умови, що система перебуває у стійкому стані гомеостатичної рівноваги. У цьому стані вона досягає максимуму своєї ефективності, найбільш продуктивного режиму економічного зростання.

Тому головне завдання кібернетичного управління великими економічними системами полягає в пошуку та реалізації таких керуючих впливів, які за наявності зовнішніх і внутрішніх збурень забезпечать гомеостатичний режим функціонування та розвитку системи.

Методологія управління економічними об'єктами у своїх загальних положеннях ґрунтується на системних принципах теорії автоматичного регулювання (див. попередній розділ). Автоматичне управління (авторегуляція) є способом самоорганізації, який характеризується здатністю складних систем відновлювати та зберігати нормальний функціональний стан чи самостійно вибирати новий, більш бажаний стан та переходити в нього.

Отже, авторегуляція приводить до підвищення організованості нерівноважних систем у результаті вибору оптимальних станів на шляху до свого вдосконалення. Це наочно виявляється в живих системах управління, в яких зростання стійкості та адаптованості до зовнішнього середовища (за рахунок гомеостатичних механізмів) нерозривно пов'язане зі зростанням їхньої організованості (тобто зі зниженням ентропії).

На відміну від кібернетичного підходу в синергетиці вважається, що визначальною умовою для забезпечення оптимального поводження складних економічних систем є саме наявність нерівноважних станів та процесів самоорганізації. Нерівновага дає змогу здійснювати вільний вибір варіанта подальшого розвитку з цілого спектра можливих напрямків. Якщо рівноважний стан є необхідною умовою для стаціонарного існування економічних систем, то нерівноважний стан являє собою момент переходу до якісно нового стану, в якому економічна система може здобути більш високий рівень організації та продуктивності.

Тільки тоді, коли економічна система втрачає функціональну стійкість, виникають самоорганізаційні процеси формування нових ефективних структур. В нових умовах функціонування економічна система проходить свої рівноважні стани як проміжні етапи на траєкторіях нерівноважної самоорганізації. Ідеться про те, що в періоди нестабільності можуть спонтанно виникати паралельні неформальні структури, наприклад відпрацьовані схеми ухилення від податків, спрямування фінансових потоків в офшорні зони, неплатежі постачальникам, бартерні схеми розрахунків, виплати заробітної платні «чорною» готівкою тощо. За певних умов вони можуть бути досить стійкими, що свідчить про стихійний вихід системи на не оптимальну щодо економічної ефективності траєкторію розвитку.

З погляду синергетики неефективне управління соціально-економічними системами полягає в нав'язуванні системі такого поводження, яке їй не властиве. Згідно із синергетичною концепцією більш ефективним буде так зване, «м'яке» управління (на відміну від «жорсткого», програмного). М'яке управління — це управління за допомогою незначних, але належних резонансних впливів, які мають відповідати власним внутрішнім тенденціям розвитку системи. Головна мета такого управління полягає в тому, щоб завдяки незначному резонансному впливу «підштовхнути систему» до одного із її власних сприятливих шляхів розвитку. Своєчасні резонансні впливи можуть виявити значні, потужні внутрішні резерви системи.

Синергетичне управління базується на таких положеннях:

існують спектри можливих майбутніх станів, і тому завдання управління полягає у виборі найкращого з доступних варіантів;

хоча шляхів розвитку може бути багато, але їх кількість скінченна;

у процесі управління необхідно враховувати не тільки стан зовнішнього середовища, а й власні тенденції еволюції системи;

головним є не сила (інтенсивність, тривалість) управлінського впливу, а його правильна топологія (просторова та часова) і узгодженість із власними тенденціями розвитку системи.

Таким чином, сутність синергетичного підходу до ефективного управління системою полягає в тому, що він орієнтований не на зовнішні властивості, не на цілі та сподівання суб'єкта управлінської діяльності, а на внутрішні властивості системи, її власні закони еволюції та самоорганізації. При цьому увага приділяється погодженості управлінського впливу із власними тенденціями динаміки системи.

Синергетичний підхід до управління орієнтований на пізнання закономірностей самої системи та процесів її самоорганізації. Незначний, але погоджений резонансний вплив в точках біфуркації може призвести до суттєвих змін у траєкторії руху (поводженні) системи.

Але дослідження кількох останніх десятиріч показали, що існує ще один важливий клас об'єктів. Формально вони є детермінованими, тобто якщо ми точно знаємо їхній поточний стан, то можемо спрогнозувати подальше їхнє поводження, але тільки на доволі обмежений проміжок часу. Навіть як завгодно мала неточність у визначенні поточного стану таких систем призводить з часом до розбігання їхніх можливих траєкторій розвитку. Система починає поводитися хаотично, початкові відхилення з часом наростають і незначні причини призводять до вельми відчутних наслідків. Такі системи, що дуже чутливі до початкових умов, дістали назву хаотичних.

Отже, підсумовуючи сказане, доходимо висновку, що правила, які визначають поводження складних систем, істотно відрізняються від тих, за якими функціонують рівноважні системи і які є основою традиційних класичних методів аналізу систем. Тому саме синергетика, яка акцентує увагу на явищах еволюції у відкритих нерівноважних системах, на виникненні порядку із хаосу, явищах самоорганізації, зі своїм міждисциплінарним арсеналом методів та алгоритмів може стати адекватним інструментом для аналізу складних динамічних процесів, що відбуваються в сучасному суспільстві та економіці.

До основних понять синергетики належать поняття структури, хаосу, еволюції, дисипативної системи, дивного атрактора, точок біфуркації, фракталів тощо, які ми розглянемо далі.

12.2. Розвиток концепції самоорганізації

Паралельно із синергетичними дослідженнями розвивалася і теорія самоорганізації на основі термодинаміки нерівновагих процесів. Фундаментальні результати, отримані в дослідженні термодинаміки нерівновагих процесів, зв'язані насамперед з ім'ям лауреата Нобелівської премії И. Пригожина і його Брюссельською школою.

На відміну від класичної термодинаміки, що розглядала системи в рівновазі або поблизу її, Пригожий зосередився на вивченні систем, сильно вилучених від рівноважного стану. Іншим принциповим моментом теорії Пригожина є те, що вона розглядає відкриті системи. Класична термодинаміка вивчала замкнуті системи, але такі складають лише невелику частину фізичного світу. Більшість систем у Всесвіті відкриті: вони обмінюються речовиною, енергією або інформацією з навколишнім середовищем.

Згідно Пригожина, усі системи містять підсистеми, що безупинно флуктуруют. В окремих випадках, збурювання або їхні комбінації в результаті позитивного зворотного зв'язку можуть стати настільки сильними, що це приведе до руйнування системи.

Оскільки високоорганізованим системам для своєї підтримки потрібно розсіювати значну кількість енергії, Пригожин назвав їх дисипативними структурами. Типовими дисипативними структурами є структури, що утворяться в результаті реакції Білоусова — Жаботинського.

Використовуючи результати нерівновагої термодинаміки, Пригожин створив теоретичну модель, названу брюсселятором, на честь Брюссельської школи, що адекватно описує процес виникнення цих незвичайних структур.

З робіт Пригожина випливає висновок, що має найважливіше філософське значення, а саме: у станах, далеких від рівноваги, дуже слабкі збурювання (флуктуації) можуть підсилюватися до гігантських масштабів, що руйнують сформовану структуру.

Як показали роботи школи Пригожина, найважливішою спільною рисою широкого класу процесів самоорганізації є втрата стійкості з наступним переходом до стійких дисипативних структур. У точці зміни стійкості в результаті галуження мають виникнути щонайменше два розв’язки, котрі відповідають стійкому (близькому до рівноважного) стану і дисипативній структурі.

Вивчення об'єктів космічного масштабу привело до побудови моделей нестаціонарного всесвіту, що пояснюють еволюційний характер її змін і спростовують гіпотезу «теплової смерті».

Таким чином, еволюційність виявляє себе на мікро-, макро- та мегарівні організації матерії.

У цілому синергетику і теорію змін дуже важко відділити друг від друга, оскільки, будучи дуже близькими за об'єктамита методамидослідження, вони всотали понятійний апарат один одного.

Адаптація - це самонастроювання, що забезпечує системі, що розвивається, стійкість при даних конкретних умовах зовнішнього середовища. Вивчаючи ці умови, можна прогнозувати тенденції в зміні основних параметрів системи, що будуть відбуватися під дією цих механізмів.

Існує інший клас механізмів розвитку, названий «біфуркаційним». Відповідно до нього організація системи має граничні стани, перехід через які веде до різкої якісної зміни процесів, що протікають у ній, до зміни самої організації. Більш того, у цьому випадку перехід від старої організації системи до нового неоднозначний, тобто можливе ціла безліч різних нових форм організацій.

Біфуркаційний механізм дозволяє пояснити діалектичну суперечливість еволюції, коли поряд з ускладненням, диференціацією, виникненням якісно нових структур у природі і суспільстві можливі деградація, необоротний розпад і зникнення системи.

Методологія рішення задач «на загострення» може дати новіпідходи до рішення проблем колапсу — швидкого стиску речовин хімічної кінетики, метеорології (катастрофічні явища в атмосфері Землі), екології (ріст і вимирання популяцій), фізіології (моделювання поширення сигналів), економіці (феномени бурхливого економічного росту або фінансового обвалу).

Безсумнівним успіхом синергетики з'явилося розкриття механізмів розвитку, переходу систем у стан з нової організацій у нову якість.

12.3. Основні поняття самоорганізації

Розглянуті вище концепції синергетики і самоорганізації формують загальний понятійний апарат і дозволяють виділити основні принципи синергетичного підходу до моделювання.

Найбільш істотний вплив синергетика зробила на поняття розвитку. Як правило, *розвиток* представляється необоротною, направленою, закономірною зміною матерії і свідомості.

Перша група дослідників зв'язує розвиток з реалізацією нових цілей, цілеспрямованістю змін. Цей підхід реалізує кібернетика, у якій розвитку протиставляється функціонування, що відбувається без зміни мети.

Друга розглядає його як процес адаптації до навколишнього середовища, що також є лише умовою — необхідним, але аж ніяк не достатнім.

Третя група підмінює розвиток його джерелом — протиріччями системи.

Четверта — ототожнює розвиток з однієї з його ліній — прогресом або ускладненням систем, або однієї з його форм — еволюцією.

Революція в теоріях самоорганізації одержала назву *стрибка, фазового переходу або катастрофи. Еволюція* є формою розвитку, а останнє являє собою якісну зміну. Під еволюцією ми будемо мати на увазі поступальна, повільна, якісна зміна, а під революцією, як це і прийнято -стрибкоподібна, швидка якісна зміна.

Під *самоорганізацією* розуміється процес встановлення в системі порядку, що відбуває винятково за рахунок кооперативної дії і зв'язків її компонентів і відповідно до її попередньої історії, що приводить до зміни її просторової, тимчасової або функціональної структури.

Фактично, *самоорганізація* являє собою встановлення організованості, порядку за рахунок погодженої взаємодії компонентів усередині системи при відсутності впливів, що упорядковують, з боку середовища.

Щоб система була самоорганізуємою і, отже, мала можливість прогресивно розвиватися, вона повинна задовольняти, принаймні таким вимогам:

• система повинна бути відкритої, тобто обмінюватися із середовищем речовиною, енергією або інформацією;

• процеси, що відбуваються в ній, повинні бути кооперативними (корпоративними), тобто дії її компонентів повинні бути погодженими один з одним; система повинна бути динамічної;

• знаходитися удалині від стану рівноваги.

Типологія флуктуацій, що приводиться нижче, відповідно до якої розрізняються *вільні коливання, вимушені і автоколивання.*

До *вільних* відносять коливальні рухи, що поступово загасають у реальній системі (як загасають коливання вільно підвішеного маятника), що досягає, таким чином, стану рівноваги.

Змушені флуктуації виникають при впливі на систему зовнішньої сили (приміром, людину, що підштовхує маятник), у результаті якого система раніш або пізніше буде флуктувати з частотою й амплітудою, яку задає зовнішній вплив.

Автоколивання - це незатухаючі, що самі підтримуються, коливання, що відбуваються в дисипативних (макроскопічних, відкритих, далеких від рівноваги) системах, тобто системах, що визначаються параметрами, властивостями і природою самої системи.

Змушені коливання й автоколивання характерні для відкритих систем, а вільні — для закритих, прагнучих до рівноваги.

Вплив на систему як зовнішніх, так і внутрішніх флуктуацій різних видів (включаючи резонансні із системою) засновано на дії двох ефектів:

- *петля позитивного зворотного зв'язку* уможливлює в далеких від стану рівноваги посилення дуже слабких збурювань до значних, що руйнують сформовану структуру, хвиль, що приводять систему до революційної зміни — різкому якісному t хитавицю.

- *кумулятивний ефект* полягає в тім, що незначна причина викликає ланцюг наслідків, кожне з яких усе більш попереднього. Нерідко він безпосередньо пов'язаний з петлею позитивного зворотного зв'язку.

Множини, що характеризують значення параметрів системи на альтернативних траєкторіях, називаються *аттракторами*. У якості аттрактора може виступати і стан рівноваги, і граничний цикл, і дивний аттрактор (хаос).

Настання революційного етапу в розвитку системи — **с***трибка* — можливо тільки при досягненні параметрами системи під впливом внутрішніх і/або зовнішніх флуктуацій визначених критичних або біфуркаційних значень.

Таким чином, із проведених досліджень понятійного апарата синергетики випливає:

- у процесі свого розвитку система проходить дві стадії: *еволюційну* (або адаптаційну) і *революційну* (стрибок, катастрофа);
- під час розгортання еволюційного процесу відбувається повільне нагромадження кількісних і якісних змін параметрів системи і її компонентів, відповідно до яких у точці біфуркації система вибере один з можливих для неї аттракторів.
- еволюційний етап розвитку характеризується наявністю механізмів, що придушують сильні флуктуації системи, її компонентів або середовища і повертають неї в стійкий стан, властиве їй на цьому етапі.
- на фазі стрибка розвиток здобуває непередбачений характер, оскільки він викликається не тільки внутрішніми флуктуаціями, силу і спрямованість яких можна прогнозувати, проаналізувавши історію розвитку і сучасний стан системи, але і зовнішніми, що вкрай ускладнює, а те й унеможливлює прогноз.

12.3.1. Відкриті системи та дисипативні структури

Синергетика вивчає відкриті нерівноважні системи. Нагадаємо, що відкрита система — це система, що обмінюється речовиною, енергією й інформацією з навколишнім середовищем.

Розглянемо властивості відкритих систем, що перебувають далеко від стану рівноваги.Такі системи нестійкі, і тому повернення до початкового стану для них є необов’язковим. У деякій точці, що називається точкою біфуркації (розгалуження), поводження системи стає неоднозначним.

За наявності нестійкості змінюється роль зовнішніх впливів. За певних умов незначний вплив на відкриту систему може призвести до значних та непередбачуваних наслідків.

У відкритих системах, далеких від рівноваги, виникають *ефекти узгодження*, коли елементи системи корелюють, узгоджують своє поводження. Таке кооперативне, погоджене поводження характерне для систем різних типів: атомів та молекул, клітин та живих істот, економічних об’єктів та соціальних груп тощо.

Урезультаті погодженої взаємодії відбуваються процеси впорядкування, виникнення з хаосу певних структур, перетворення й ускладнення систем. Чим більше відхилення від стану рівноваги, тим сильніше охоплення кореляціями та взаємозв’язками, тим вища узгодженість процесів, що відбуваються навіть у віддалених областях і, на перший погляд, не зв’язані один з одним.

Відкриті системи, в яких спостерігається приріст ентропії, називають *дисипативними*. У дисипативних системах енергія впорядкованого руху переходить в енергію невпорядкованого (хаотичного) руху, тобто відбувається дисипація. Якщо закриту систему виведено зі стану рівноваги, то вона завжди намагається набути стану з максимальною ентропією. У відкритій системі відплив ентропії може врівноважити її зростання в самій системі, і тому існує ймовірність виникнення стаціонарного стану.

Якщо ж відплив ентропії перевищує її внутрішнє зростання, то виникають і розростаються до макроскопічного рівня великомасштабні флуктуації, а за певних умов у системі починають відбуватися самоорганізаційні процеси, спрямовані на створення впорядкованих структур.

Отже, у відкритих системах, що обмінюються з навколишнім середовищем потоками речовини чи енергією, однорідний стан рівноваги може втрачати стійкість і незворотно переходити у стаціонарний стан, стійкий щодо малих збурень Такі стаціонарні стани дістали назву *дисипативних структур*.

Термін «дисипативна структура» запропонував І. Пригожин, засновник «бельгійської школи» синергетики, яка розвиває термодинамічний підхід до самоорганізації. Основне поняття синергетики Хакена — поняття структури як стану, що виникає в результаті когерентного (погодженого) поводження великої кількості частин, — бельгійська школа замінює більш спеціальним поняттям дисипативної структури.

Виникнення дисипативних структур має граничний характер. Нерівноважна термодинаміка пов'язала граничний характер із нестійкістю, довівши, що нова структура завжди є результатом розкриття нестійкості внаслідок флуктуацій. Отже, ідеться про «порядок через флуктуації».

Таким чином, дисипативні структури є результатом розвитку власних внутрішніх нестійкостей у системі. А процеси самоорганізації можливі, коли відбувається обмін енергією і масою з навколишнім середовищем, тобто підтримується стан поточної рівноваги, причому втрати на дисипацію компенсуються ззовні.

12.3.2. Хаос і порядок

Поняття «порядок» тісно пов'язане з поняттям структури. Іншими словами, *порядок* передбачає наявність певної структури — ключового поняття для всіх наук, що вивчають ті чи інші аспекти процесів самоорганізації. Структура – це сукупність відношень між вирізненими у довільний спосіб елементами системи (безвідносно до їх природи). Отож під її формуванням розумітимемо зміни у цій сукупності.

Отже, структура припускає певну «жорсткість» об'єкта — здатність зберігати тотожність самому собі за різних зовнішніх і внутрішніх змін.

Інтуїтивно поняття структури протиставляється поняттю хаосу як стану, що цілком позбавлений будь-якої структури. Однак, як свідчать новітні дослідження, таке уявлення про хаос є настільки ж поверховим, наскільки поверховим є уявлення про фізичний вакуум у теорії поля як про порожнечу:

хаос може бути різним, мати різний ступінь упорядкованості, різну структуру тощо.

Тому в синергетиці під **хаосом** розуміють нерегулярний рух, що описується детерміністичними рівняннями. Його ще називають **динамічним хаосом**. Дослідження різних сценаріїв переходу до динамічного хаосу пов'язане з аналізом властивостей так званих дивних атракторів.

12.3.3. Атрактори

Вивчаючи динаміку систем, їх часто описують системою диференціальних рівнянь. Зображення розв'язків цих рівнянь як руху деякої точки у просторі з розмірністю, яка дорівнює кількості змінних, називають *фазовими траєкторіями* системи. Аналіз поводження фазової траєкторії (у сенсі її стійкості) показує, що існують випадки, коли всі розв'язки системи зосереджуються зрештою на деякій замкненій підмножині. Така підмножина називається *атрактором* (від англ. «to attract» — притягувати).

Атрактор має певну «область притягання» (множину початкових точок). Із часом усі фазові траєкторії , що зародилися у множині початкових точок, тяжіють (намагаються збігтися) саме до цього атрактора. Рух точки в таких випадках має періодичний характер.

Основні типи атракторів такі:

стійкі граничні точки;

стійкі цикли (траєкторія тяжіє до деякої замкненої кривої);

тори (до поверхні яких наближається траєкторія).

Нехай, наприклад, точка, рухаючись у фазовому просторі, залишає за собою слід, тоді динамічному хаосу відповідає клубок траєкторій, зображений на рис. 12.1.

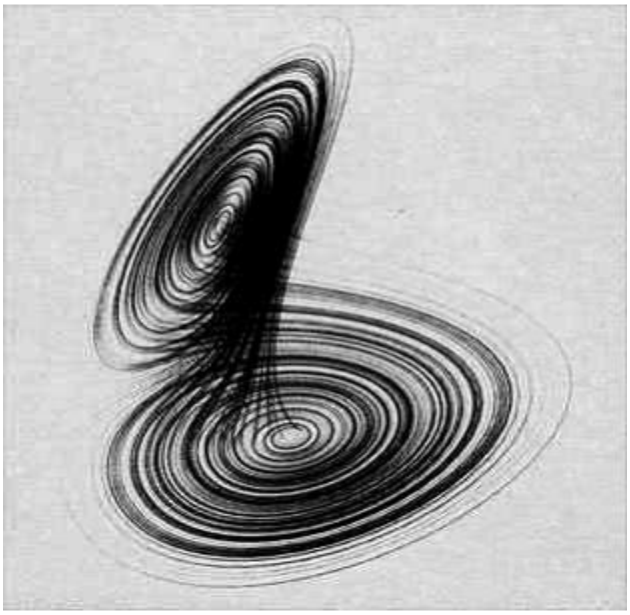


Рис. 12.1. Зображення дивного атрактора у тривимірному фазовому просторі

Для сталих коливань, що відповідають динамічному хаосу, запропоновано назву *дивний атрактор*. Рух точки на таких атракторах є нестійким, хистким, будь-які дві траєкторії на них завжди розбігаються, мала зміна початкових умов приводить до різних шляхів розвитку. Іншими словами, динаміка систем із дивними атракторами є хаотичною.

Ці атрактори дістали таку назву, бо вони у фазовому просторі справді виглядають незвично, являючи собою ні точку, ні періодичну траєкторію, ні поверхню. Їх порівнюють іноді з поверхнею, що складається з нескінченної множини шарів. А головне полягає в тому, що взятий навмання розв'язок блукатиме в дивному атракторі і через значний проміжок часу пройде досить близько до будь-якої його точки. Тут дуже високий ступінь чутливості до початкових умов.

Приклад 12.1.

Розглянемо *атрактор Лоренца.* Американський метеоролог Е. Лоренц виявив складне поводження порівняно простої динамічної системи, що складається з трьох звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку (12.2) й описує конвекцію повітря:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \tag{11.1}$$

де σ , r , b — деякі параметри.

Або так:

$$\begin{gathered} dx/dt = \sigma\,(y - x) \\ dy/dt = x(r - z) - y \\ dz/dt = xy - bz \end{gathered} \tag{11.2}$$

де σ , r , b — деякі параметри.

При певних значеннях параметрів траєкторія системи поводилася настільки химерно, що здавалась випадковою та хаотичною.

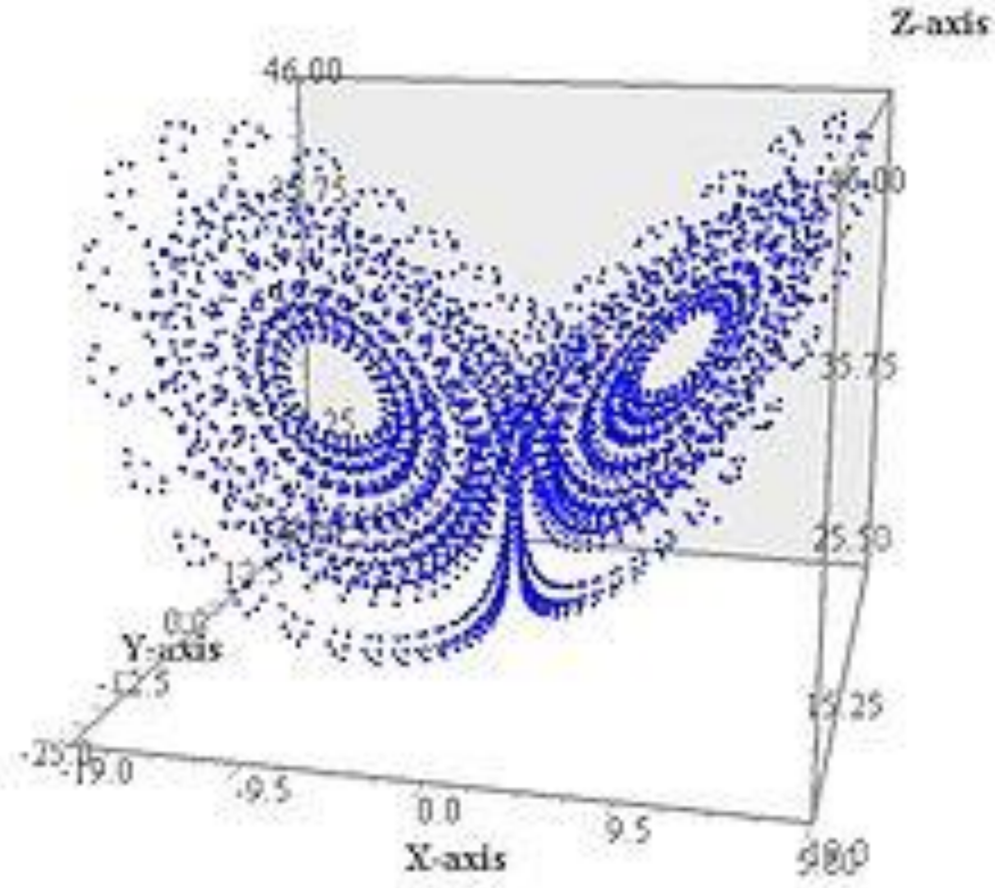


Рис. 12.2.Розв'язок системи при r = 28

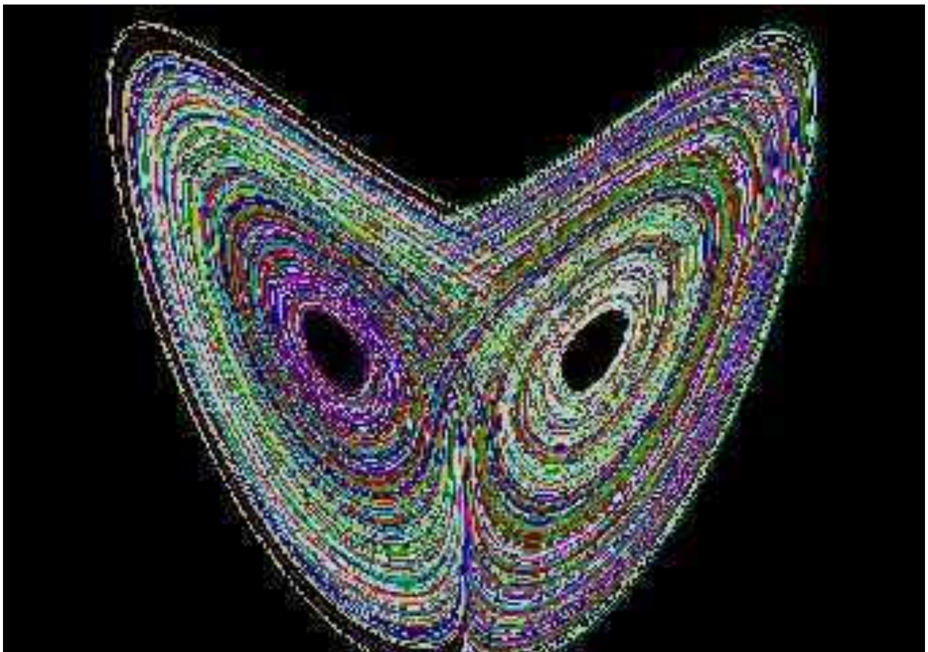


Рис.12.3. Атрактор «метелик»

Комп'ютерний аналіз системи Лоренца привів до принципового результату: з переходом до режиму динамічного хаосу, тобто неперіодичного руху в детермінованих системах, де майбутнє однозначно визначається минулим, горизонт прогнозування поводження системи стає обмеженим.Річ у тім, що коли ми знову візьмемо дві близькі траєкторії, то вони розбігаються.

Швидкість розбігання визначається так званим *показником Ляпунова*, і від цієї величини залежить інтервал часу, на який можна подати прогноз. При цьому для кожної системи існує свій горизонт прогнозу.

Унікальною властивістю дивних атракторів є *масштабна самоповторюваність*. Це означає, що, збільшуючи ділянку атрактора, яка містить нескінченну кількість кривих, переконуємося: атрактор на ній подібний до великомасштабного подання його частини. Об'єкти, що мають здатність нескінченно повторювати власну структуру на мікрорівні, дістали спеціальну назву — *фрактали*.

12.3.4. Точки біфуркації

Динамічні системи, як правило, повільно змінюють характер свого поводження внаслідок незначної зміни внутрішніх або зовнішніх параметрів. Однак можуть існувати такі критичні значення параметрів, при яких система зазнає якісної перебудови і, відповідно, різко змінюється динаміка системи, наприклад втрачається її стійкість. Такі критичні значення параметрів називаються *точками біфуркації*.

Втрата стійкості відбувається, як правило, переходом від точки стійкості до стійкого циклу (м'яка втрата стійкості), виходом траєкторії зі стійкого стану (жорстка втрата стійкості), народженням циклів із подвоєним періодом тощо. З подальшою зміною параметрів можливе виникнення у фазовому просторі таких топологічних структур, як тор, а далі — дивних атракторів, тобто хаотичних процесів.

Поводження всіх систем, що самоорганізуються, у точках біфуркації характеризується загальними закономірностями.

Розглянемо найважливіші з них.

Точки біфуркації часто провокуються зміною управляючих параметрів або підсистеми управління, що веде систему до нового стану.

Потенційних траєкторій розвитку системи багато, і тому точно спрогнозувати, до якого стану перейде система після проходження точки біфуркації, неможливо. Це пояснюється тим, що вплив середовища має випадковий характер.

Вибір траєкторії розвитку може бути також пов'язаний з життєздатністю і стійким типом поводження системи. Відповідно до принципу стійкості серед можливих форм розвитку реалізуються лише стійкі, а хисткі якщо й виникають, то швидко руйнуються.

Підвищення розмірності та складності системи спричинюється до збільшення кількості станів, за яких може відбуватися стрибок (катастрофа), і кількості можливих шляхів розвитку, тобто чим різнорідніші елементи системи і складніші її зв'язки, тим вона хисткіша.

Чим більше система нерівноважна, тим більшу кількість можливих шляхів розвитку вона може вибирати в точці біфуркації.Два близькі стани можуть породити зовсім різні траєкторії розвитку. Однакові траєкторії розвитку можуть реалізовуватися неодноразово. Наприклад, серед соціальних систем є суспільства, що багаторазово обирали тоталітарні сценарії розвитку.

Часова межа катастрофи визначається *«принципом максимального зволікання»*: система робить стрибок тільки тоді, коли в неї немає іншого вибору.

У результаті розгалуження (біфуркації) виникають граничні цикли — періодичні траєкторії у фазовому просторі, кількість яких тим більша, чим більш структурно хисткою є система.

Катастрофа змінює організованість системи, причому не завжди в бік збільшення.

Отже, у процесі руху від однієї точки біфуркації до іншої відбувається розвиток системи. У кожній точці біфуркації система вибирає шлях розвитку, траєкторію свого руху.

У точці біфуркації відбувається катастрофа — перехід системи від області притягання одного атрактора до іншого. Як атрактор може виступати і стан рівноваги, і граничний цикл, і дивний атрактор (хаос). Систему притягає один із атракторів і вона в точці біфуркації може стати хаотичною і зруйнуватися, перейти до стану рівноваги або вибрати шлях формування нової впорядкованості.

Якщо система притягається станом рівноваги, вона стає закритою і до чергової точки біфуркації живе за законами, властивими закритим системам. Якщо хаос, породжений точкою біфуркації, затягнеться, стане можливим руйнування системи, внаслідок чого її компоненти рано чи пізно ввійдуть як складові до іншої системи і притягатимуться вже її атракторами. Якщо, нарешті, як у третьому випадку, система притягається яким-небудь атрактором відкритості, то формується нова дисипативна структура — новий тип динамічного стану системи, за допомогою якого вона пристосовується до умов навколишнього середовища, що змінилися.

12.4. Загальні поняття про фрактали

Термін «*фрактал*» споконвічно відносився до чистої математики і був запропонований Б. Мандельбротом для позначення нерегулярних, але самоподібних структур. Одне з визначень фракталу – це структура, що складається з частин, що у якомусь змісті подібні цілому».

Властивість об’єктів виглядати в кожному як завгодно малому масштабі приблизно однаково називають *масштабною інваріантістю* (самоподібністю), а множини, що мають цю властивість, — фракталами (від англ. «fractal» — дробовий, неповний, частковий).

Це означає, що малий фрагмент структури такого об'єкта подібний іншому, більш великому фрагментові або навіть структурі в цілому.

Фрактальними є процеси зі зворотним зв'язком, у яких вихідні характеристики функціонально зв'язані з вхідними, причому цей зв'язок є нелінійним.

Теорія фракталів — найбільш адекватна системній природі соціальних і економічних процесів, що протікають в умовах нелінійної динаміки безлічі факторів зовнішнього і внутрішнього середовища.

Фрактальність - це міра неправильності, фрактальність і цикли — дві сторони однієї «медалі». Просторове відображення процесів має риси фрактальності, тимчасове відображення динаміки фракталів сприймається як цикли. Або інакше - при реалізації в просторі цикли мають фрактальний вид, а фрактали в часі — хвильової.

Поняття «фрактал» нерозривно зв'язане з поняттям хаос.

Хаос — це відсутність передбачуваності. Хаос виникає вдинамічних системах, коли для двох дуже близьких початкових значень система веде себе зовсім по-різному

Фрактали визначають структуру хаосу. Фрактали, власне кажучи, є новою мовою, що дає опис форм хаосу, вони дозволяють аналізувати тонку структуру хаосу і навіть знайти в ньомупрояв порядку.

Образ хаосу у фазовому просторі — *хаотичний аттрактор* - має дуже складну структуру: це *фрактал.* У силу незвичайності властивостей його називають також *дивним аттрактором*.

Точковий аттрактор - це найпростіший спосіб привнести порядок у хаос. Це єдиний стан, до якого прямує система в загальному випадку при нескінченному часі.

Характеристика *циклічного аттрактора* — рух назад - вперед, подібно маятникові або циклічному магнітові.

Аттрактор торас - починає складну циркуляцію, що повторює себе по мірі руху вперед. Його основна характеристика — це повторювана дія.

Дивний аттрактор - самоорганізуючий. Це місце народження волі і розуміння, як у дійсності працює ринок. Характеристикою дивного аттрактора виступає чутливість до початкових умов, що іноді називається «ефект метелика».

Фрактали — це геометричні об'єкти з так званою дробовою розмірністю.Часто вважають, що розмірність об'єкта (тіла, поверхні, чи кривої) є його внутрішньою характеристикою. Але засновник фрактальної геометрії Б. Мандельброт звернув увагу на те, що розмірність об'єкта може залежати від спостерігача, точніше від зв'язку об'єкта із зовнішнім світом.

Приклад 12.2.

Уявімо, що ми розглядаємо клубок ниток. Коли відстань, що відокремлює нас від клубка, досить велика, ми бачимо клубок як точку, позбавлену будь-якої внутрішньої структури, тобто геометричний об'єкт з евклідовою (інтуїтивно сприйманою) розмірністю 0.

Наблизившись до клубка на деяку відстань, ми бачитимемо його як плоский диск, тобто як геометричний об'єкт розмірності 2.

Наблизившись до клубка ще на кілька кроків, ми побачимо його у вигляді кульки, але не зможемо розрізнити окремі нитки — клубок стане геометричним об'єктом розмірності 3.

З подальшим наближенням до клубка ми побачимо, що він складається з ниток, тобто евклідова розмірність клубка стане такою, що дорівнює 1. Нарешті, якби наші очі розрізняли окремі атоми, то, проникнувши всередину нитки, ми побачили б окремі точки — клубок розсипався б на атоми, став геометричним об'єктом розмірності 0.

Мандельброт запропонував за міру «нерегулярності» (зрізаності, звивистості) взяти розмірність Безиковича—Хаусдорфа. Ця розмірність завжди не менша за евклідову і збігається з нею для регулярних геометричних об'єктів (кривих, поверхонь і тіл, досліджуваних у евклідовій геометрії).

Розглянемо ідею, яку покладено в основу обчислення зазначеної розмірності. Поділимо відрізок прямої на N рівних частин. Тоді кожну частину можна вважати копією всього відрізка, зменшеною в r раз. Очевидно, що N та r пов'язані між собою співвідношенням Nr = 1. Якщо квадрат розбити на N рівних квадратів з площею, у 1/r2 раз меншою за його площу, то аналогічне співвідношення запишеться у вигляді Nr2 = 1. А коли куб розбити на N рівних кубів, об'єм яких у 1/r3 раз менший за його об'єм, то відповідне співвідношення набере вигляду Nr3 = 1. У загальному випадку можемо записати:

$$Nrd = 1, \qquad (12.2)$$

де d — розмірність об'єкта; N — кількість рівних підоб'єктів, на яку поділено вихідний об'єкт з коефіцієнтом подібності r.

Якщо деякий вихідний об'єкт (множину) можна розбити на N неперетинних підоб'єктів (підмножин), утворених масштабуванням оригіналу з коефіцієнтом подібності r, і d буде дробовим числом, то такий об'єкт (множину) називають самоподібним фракталом, а величину d — фрактальною розмірністю, явний вигляд якої знаходимо логарифмуванням обох частин виразу (11.2):

$$d = logN(r)/(\mathrm{log1/r}) \qquad (12.3)$$

Різниця між розмірністю Безиковича—Хаусдорфа та Евкліда — «надлишок розмірності» — може бути мірою відмінності геометричних образів від регулярних. Наприклад, плоска траєкторія руху броунівської частинки має розмірність, більшу від 1, але менше від 2: ця траєкторія вже не звичайна гладка крива, але ще не плоска фігура. Розмірність Безиковича—Хаусдорфа дивного атрактора Лоренца більша за 2, але менша за 3: атрактор Лоренца вже не гладка поверхня, але ще не об'ємне тіло.

Багато природних об'єктів є фракталами (наприклад, берегові смуги, хмари, крижинки, дерева, скелі, нервова та кровоносна системи тварин і людини і т. ін.). На перший погляд може здатися, що теорія фракталів має суто теоретичну цінність і зовсім не стосується дослідження реальних економічних об'єктів. Проте насправді часові ряди багатьох фінансово-економічних показників (валютних курсів, курсів акцій) мають фрактальну структуру, і тому з метою їх дослідження можна використовувати апарат фрактального аналізу, зокрема R/S аналіз, який базується на обчисленні статистики Херста, що є мірою випадковості часового ряду.

1) Геометричні фрактали.

Фрактали цього класу самі наочні. У двовимірному випадку одержують за допомогою деякої ламаної (або поверхні в тримірному випадку), називаної генератором. За один крок алгоритму кожен з відрізків, що складають ламану, заміняється на ломану-генератор, у відповідному масштабі. У результаті нескінченного повторення цієї процедури, виходить геометричний фрактал.

Процес побудови фрактала ілюструє рис. 12.4 - 12.5.

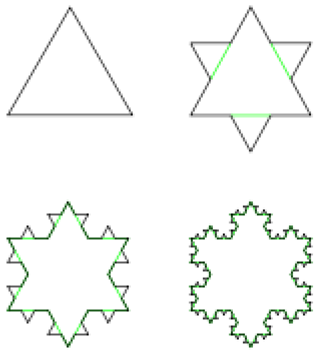


Рис. 12.4. Приклад побудови фрактала — крижинки Коха

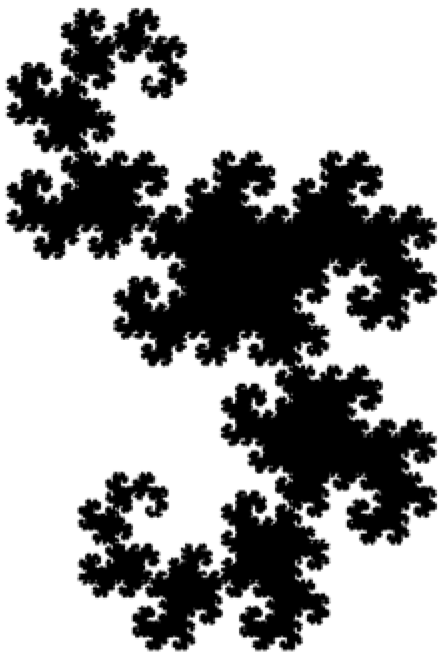


Рис. 12.5   Побудова «дракона» Харпера — Хейтуея

2) Алгебраїчні фрактали.

Це сама велика група фракталів. Одержують ї за допомогою нелінійних процесів у ***n***-вимірних просторах. Найбільш вивчені двовимірні процеси.

Як приклад розглянемо множину Мандельброта. Алгоритм його побудови досить простий і заснований на простому ітеративному виразі:

Z[i+l] = Z[i]xZ[i]+ C, де Z[i] і C — комплексні змінні.

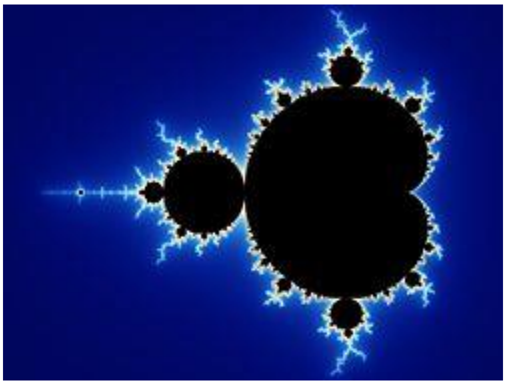


Рис. 12.6 Множина Мандельброта – класичний зразок фрактала

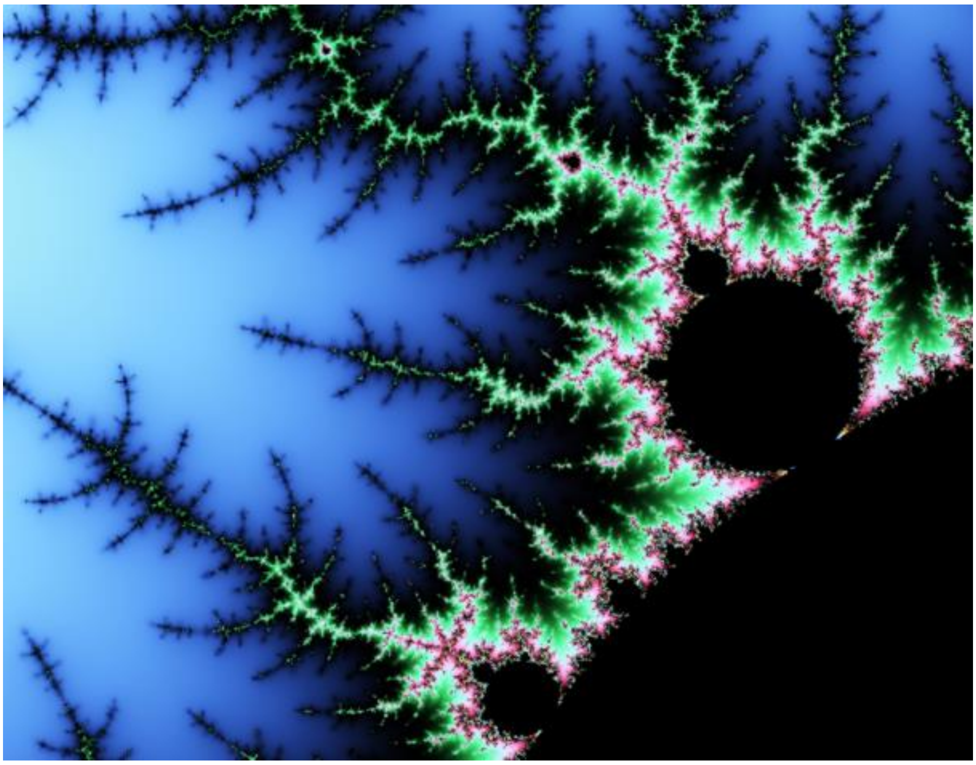


Рис. 12.7 Наближення однієї з ділянок множини Мандельброта

3) Стохастичні фрактали.

Ще одним відомим класом фракталів є стохастичні фрактали, що виходять у тому випадку, якщо в ітераційному процесі випадковим образом змінювати які-небудь його параметри. При цьому виходять об'єкти дуже схожі на природні — несиметричні дерева, порізані берегові лінії і т.д. Двовимірні стохастичні фрактали використовуються при моделюванні рельєфу місцевості і поверхні моря.

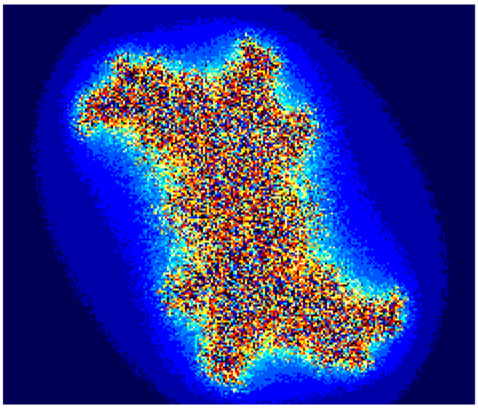


Рис. 12.7. Стохастичний фрактал.

Контрольні питання:

1. Які причини появи синергетики і її часткових напрямів?
2. Сформулюйте основні положення синергетики.
3. У чому розходження системного і синергетичного підходів до дослідження складних систем?
4. Дайте характеристику ідеї И. Пригожина, Н. Мойсеєва, Л. Курдюмова, Г. Хакена.
5. У чому розходження і спільність підходів ідей різних шкіл?
6. Охарактеризуйте основні поняття самоорганізації?
7. Які явища називаються фракталами?
8. Для чого застосовуються фрактали в дослідженні складних систем?
9. Який зв'язок фракталів і хаосу?
10. Які існують види фракталів?
11. Що таке аттрактор і які їхні основні види?

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

1. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт

1.1. Порядок виконання роботи

1. Продемонструвати викладачу знання теоретичного матеріалу стосовно теми лабораторної роботи та відповісти на контрольні запитання.
2. Вибрати програмне середовище, в якому виконуватиметься робота, та обґрунтувати свій вибір.
3. Розробити алгоритм розв'язання задачі та програмну реалізацію.
4. Забезпечити дружній інтерфейс для введення вихідних даних та графічної інтерпретації результатів розрахунків.
5. Оформити звіт з лабораторної роботи.

1.2. Правила оформлення звіту з лабораторної роботи

Звіт з лабораторної роботи повинен містити:

- титульний аркуш;
- мету роботи;
- необхідні теоретичні відомості;
- опис алгоритму розв'язання задачі;
- опис програмного забезпечення;
- опис інтерфейсу користувача, правила подання екзогенних змінних задачі і представлення результату;
- висновки по роботі.

1.3. Перелік лабораторних робіт

1.3.1. Лабораторна робота № 1

Тема. Застосування апарату диференційних рівнянь першого порядку для побудови найпростіших математичних моделей економічних динамічних систем з неперервним часом

Завдання. Побудувати математичні моделі задач, умови яких подано нижче, надати розв'язання задачі та геометричну інтерпретацію за допомогою програмного середовища Excel.

Задача Л1.1. За допомогою програмного середовища Excel побудувати графік функції, що має постійну еластичність, яка дорівнює k.

Задача Л1.2. Для заданих залежностей функції попиту та пропозиції від ціни за допомогою програмного середовища Excel побудувати програму, яка визначає :

1. рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит та пропозиція врівноважуються;
2. еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни;
3. зміну добутку при збільшенні ціни на $k\%$ від рівноважної.

Задача Л1.3. Швидкість знецінювання устаткування внаслідок його зносу пропорційна в кожен даний момент часу його фактичної вартості. Початкова вартість – A_0. Яка буде вартість устаткування після закінчення t років.

Задача Л1.4. Нехай $y(t)$ – кількість продукції, що випускається галуззю за час t; p – ціна продукції. Сума інвестицій (засобів, спрямованих на розширення виробництва) $I(t)$ пропорційна доходові $py(t)$ з коефіцієнтом пропорційності m ($m=const\ \ 0<m<1$). Збільшення швидкості випуску продукції пропорційно збільшенню інвестицій з коефіцієнтом пропорційності η. Потрібно знайти кількість продукції, що випускається галуззю за час t, якщо в початковий момент часу $t=t_0$, $y=y_0$.

Задача Л1.5. Нехай попит та пропозиція на товар визначаються відповідно співвідношеннями

$Q= a_1 p' - a_2 p + a_3$,

$S= a_4 p' + a_5 p - a_6$,

де p – ціна товару, p' – тенденція формування ціни (похідна ціни за часом).

Зауваження Л2. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 – постійні, які призначаються викладачем в залежності від номеру варіанту.

Нехай також у початковий момент часу ціна p за одиницю товару складала 1 гр. од. Враховуючи вимогу відповідності попиту пропозиції, знайти закон зміни ціни в залежності від часу.

Приклад розв'язання задачі Л1.2.

Ґрунтуючись на емпіричних даних, установлено вигляд функцій попиту $D=\dfrac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $S=p + 0.5$, де D, S – кількість товару, який купується і пропонується на продаж відповідно в одиницю часу, p – ціна товару. Знайти:

1. рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит та пропозиція врівноважуються;
2. еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни;
3. зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язання.

1. Рівноважна ціна визначається з умови $D=S$.

$$\frac{p+8}{p+2}=p + 0.5.$$

Розв'язок: p=2, тобто рівноважна ціна = 2 гр.од.

2. Еластичність попиту та пропозиції знаходиться за формулою:

$$E_x(y)= \frac{x}{y}y'.$$

Тоді $q'=\dfrac{-6}{(p+2)^2}$; $S'=1$; $E_p(q)= \dfrac{-6p}{(p+2)(p+8)}$; $E_p(S)=\dfrac{2p}{2p+1}$.

Для рівноважної ціни p=2 маємо $E_p(S)=0.8$. $E_p(q)=-0.3$;

Отримані значення еластичностей за абсолютною величиною менше одиниці, отже, попит, і пропозиція даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні щодо ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції.

3. Доход y визначається формулою $y = D{\cdot}p$. Позначимо вихідний доход y_0. Еластичність попиту за ціною дорівнює $E_p(D)=-0.3$, тобто при збільшенні ціни на *1%* попит зменшиться на *0.3%*. Збільшення ціни на 5% від рівноважної означає зменшення попиту на *1,5%*. Отже, доход y при зміні ціни обчислюватиметься на формулою $y= 0,985q{\cdot}1,05p=1,03435\ y_0$, тобто збільшиться.

1.3.2. Лабораторна робота № 2

Тема. Застосування апарату диференційних рівнянь другого порядку та систем диференціальних рівнянь для аналізу поведінки економічних динамічних систем з неперервним часом.

Завдання. Побудувати математичні моделі задач, умови яких подано нижче, надати розв’язання задачі та забезпечити графічне подання фазових портретів (фазових траєкторій з різними значеннями початкових умов) розв’язків диференційного рівняння другого порядку, яке є математичною моделлю задачі, що розглядається, за допомогою програмного середовища Excel або іншої програмної системи (C++ Builder, Delphi).

Задача Л2.1. Нехай попит та пропозиція на товар визначаються співвідношеннями

$Q= a_1 p'' - a_2 p' - a_3 p + a_4,\quad S= a_5 p'' + a_6 p' + a_7 p + a_8.$

де p – ціна на товар, p' – тенденція формування ціни, p'' – темп зміни ціни,

Нехай також у початковий момент часу

$p(0)= a_9,$

$Q() = S(0)= a_{10},$

де $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ – постійні, які призначаються викладачем для кожного студенту окремо в залежності від номеру варіанту.

Враховуючи вимогу відповідності попиту пропозиції і використовуючи відповідну програмну систему, знайти залежність ціни від часу.

ЗауваженняЛ2. Використайте приклад 2.5.

Задача Л2.2. У результаті економічного аналізу встановлено, що поведінка системи залежить від двох змінних x і y та описується системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2, \end{cases}$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, d_1, d_2$ – постійні параметри, які призначаються викладачем в залежності від номеру варіанту.

При заданих значеннях параметрів визначити:
- тип динамічної системи,
- координати точки рівноваги системи у фазовому просторі,
- тип поведінки системи: стійкість, наявність атрактора.

1.3.3. Лабораторна робота № 3

Тема. Застосування апарату різницевих рівнянь першого та другого порядку для аналізу поведінки економічних динамічних систем з дискретним часом.

Завдання. Розробити алгоритм та програмну реалізацію різницевого рівняння першого та другого порядку за допомогою програмного середовища Excel або іншої програмної системи (C++ Builder, Delphi).

Задача Л3.1. Побудувати алгоритмічну та програмну реалізацію моделі соціальної мобілізації як лінійного різницевого рівняння першого порядку та забезпечити графічне подання інтегральних кривих розв’язку, враховуючи можливість завдання значення довільної постійної C.

Задача Л3.2. Побудувати алгоритмічну та програмну реалізацію розв’язання лінійного неоднорідного різницевого рівняння другого порядку та забезпечити подання фазових портретів (фазових траєкторій з різними значеннями початкових умов) розв’язків.

1.3.4. Лабораторна робота № 4

Тема. Побудова та аналіз математичних моделей динамічних економічних систем з неперервним часом, поданих у вигляді диференційного рівняння.

Завдання. Побудувати математичну модель даної економічної системи, розробити алгоритм та програмну реалізацію математичної моделі допомогою програмного середовища Excel або іншої програмної системи (C++ Builder, Delphi).

Задача Л4.1. Побудувати математичну модель наступної задачі у вигляді задачі Коші, знайти загальний розв’язок та частинний розв’язок задачі, який відповідає початковій умові:

Нехай торговельними установами реалізується продукція, про яку в момент часу t з числа потенційних покупців N знає лише x покупців. Після проведення рекламних оголошень швидкість зміни числа покупців, що знають про продукцію, пропорційна як числу покупців, що знають про товар, так і числу покупців, які про товар ще не знають.

Відомо, що в початковий момент часу t про товар довідалося N/β людей (час відраховується після рекламних оголошень), β - задане число. Знайти закон зміни в залежності від часу числа x покупців, що знають про продукцію.

Задача Л4.2. Побудувати алгоритмічну та програму реалізацію розв’язання вищенаведеної задачі, та забезпечити подання інтегральних кривих задачі для різних значень початкових умов.

Задача Л4.3. Побудувати алгоритмічну та програму реалізацію розв'язання моделі Еванса (п.3.3) та забезпечити подання інтегральних кривих задачі для різних значень початкових умов.

1.3.5. Лабораторна робота № 5

Тема. Побудова та аналіз математичних моделей динамічних економічних систем з неперервним часом, поданих у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Завдання. Розробити алгоритм та програмну реалізацію математичних моделей економічних динамічних систем за допомогою програмного середовища Excel або іншої програмної системи (C++ Builder, Delphi).

Задача Л 5.1. Побудувати алгоритмічну та програмну реалізацію моделі гонки озброєнь як системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку та забезпечити графічне подання фазового портрету розв'язку.

Передбачити всі варіанти можливих сполучень значень екзогенних змінних

Задача Л 5.2. Побудувати алгоритмічну та програмну реалізацію моделі Вальраса регулювання ціни як системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку та забезпечити графічне подання фазового портрету розв'язку.

Передбачити всі варіанти можливих сполучень значень екзогенних змінних (параметрів моделі), які генерують стійкий вузол або стійкій фокус.

Задача Л5.2. Побудувати алгоритмічну та програму реалізацію спрощеної моделі національної економіки як неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку та забезпечити графічне подання фазового портрету розв'язку.

1.3.6. Лабораторна робота № 6

Тема. Застосування апарату різницевих рівнянь для побудови і дослідження павутиноподібної моделі – аналіз динаміки ринку з досконалою конкуренцією.

Завдання. Ґрунтуючись на вивченні павутиноподібної моделі, побудувати програмну реалізацію процесу розв'язання даної задачі та геометричну інтерпретацію за допомогою програмного середовища Excel або іншого.

У програмній реалізації передбачити можливість:

1. виконання побудови і дослідження поведінки кривих попиту та пропозиції;

2. дослідження процесу виходу ринку, який описується традиційними кривими попиту та пропозиції при наявності запізнювання в часі процесу пропозиції товару, до стану рівноваги;

3. дослідження стійкості цін і обсягів товарів на ринку

1.3.7. Лабораторна робота № 7

Тема. Застосування апарату різницевих рівнянь для побудови і дослідження динамічних економічних моделей з мультиплікатором.

Завдання. Ґрунтуючись на вивченні ефекту мультиплікатору, побудувати програмну реалізацію процесу розв'язання задач та геометричну інтерпретацію за допомогою програмного середовища Excel або іншого.

У програмній реалізації передбачити можливість:

1. виконання побудови і дослідження поведінки динаміки моделей, що розглядаються:

Задача Л7.1. Динамічна модель з мультиплікатором; випадок автономного інвестування (п. 7.2.2.1);

Задача Л7.2. Динамічна модель з мультиплікатором; випадок частково автономного інвестування (п. 7.2.2.2);

Задача Л7.3. Модель зовнішньої торгівлі (п. 7.2.3);

задача Л7.4. Динамічна модель з оподаткуванням (п. 7.2.4);

задача Л7.5. Динамічна модель із мультиплікатором зовнішньої торгівлі (п. 4.2.4).

2. визначення діапазонів параметрів моделей, що забезпечують стабільність точки рівноваги;

1.3.8. Лабораторна робота № 8

Тема. Застосування апарату різницевих рівнянь для побудови і дослідження динамічних економічних моделей взаємодії мультиплікатора-акселератора.

Завдання. Ґрунтуючись на вивченні ефекту взаємодії мультиплікатора-акселератора, побудувати програмну реалізацію процесу розв'язання задач та геометричну інтерпретацію за допомогою програмного середовища Excel або іншого.

У програмній реалізації передбачити можливість виконання побудови і дослідження поведінки динаміки моделей, що розглядаються:

задача Л7.1. Динамічна модель взаємодії мультиплікатора й акселератора – модель Самуельсона-Хікса (п. 7.3.2);

задача Л7.2. Динамічна модель Тевеса (п. 7.3.4).

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Алгоритм — скінченний впорядкований набір точних правил, які вказують, які дії і в якому порядку необхідно виконувати, щоб за скінченну кількість кроків досягти поставленої мети або дістати розв'язок поставленої задачі.

Аналіз — науковий підхід, який спрямований на послідовне розчленовування цілого на частини та дослідження властивостей цих частин.

Атрактор — підмножина точок фазового простору, яка «притягує» до себе фазові траєкторії динамічної системи.

Валідація моделі — перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному процесу в економіці.

Верифікація моделі — перевірка правильності структури (логіки) моделі.

Виробнича функція — функція, що виражає стійкі кількісні співвідношення між входами економічної системи (витрати ресурсів) та її виходами (обсяг продукції).

Виходи системи — результат реакції системи на вплив зовнішнього середовища та функціонування системи для досягнення певної мети.

Вхід системи характеризується сукупністю впливів на неї зовнішнього середовища.

Гомеостазис — підтримка істотних внутрішніх параметрів системи в певних (як правило, досить вузьких) межах для забезпечення оптимального режиму функціонування.

Гомоморфізм — відношення подібності двох систем у деякому структурному або функціональному аспекті, узагальнення поняття «ізоморфізм» на випадок однозначної відповідності в один бік.

Дані — інформація, подана в певних формах, адекватних можливим процесам її обробки.

Динамічна система — система, в якій із часом відбуваються деякі зміни.

Дисипативні структури — структури, що виникають спонтанно у відкритих нерівноважних системах.

Економічна інформація — інформація, що виникає під час підготовки та у процесі виробничо-господарської діяльності й використовується для управління цією діяльністю.

Економічна кібернетика — напрямок кібернетики, що вивчає функціонування, розвиток та процеси управління економіки як цілеспрямованої цілісної системи, а передусім — інформаційні за своїм змістом механізми управління економічними процесами.

Економічна система — система, що здійснює виробництво, розподіл, обмін та споживання матеріальних благ.

Елемент системи — частина системи, яка не підлягає подальшому поділу, є неподільною з погляду задачі, що розв'язується, та виконує специфічну функцію.

Емерджентність системи — важлива властивість системи, яка полягає в тому, що сукупне функціонування взаємозв'язаних елементів системи породжує якісно нові функціональні властивості системи. Звідси випливає важливий висновок: система не зводиться до простої сукупності елементів; поділяючи систему на частини, досліджуючи кожну з них окремо, неможливо пізнати всі властивості системи в цілому.

Ентропія — кількісна міра невизначеності ситуації або події.

Зв'язки — спосіб, за допомогою якого елементи системи взаємодіють між собою. Зворотні зв'язки — складні механізми причинної залежності в системі, які полягає у тому, що вихід системи впливає на її вхід. Розрізняють негативні (послаблюють вплив вихідного сигналу) та позитивні (посилюють вплив вихідного сигналу) зворотні зв'язки.

Зовнішнє середовище — це все те, що перебуває зовні системи, необхідні умови існування та розвитку системи.

Ієрархія системи — це розташування частин або елементів системи за певним порядком від вищого до нижчого.

Ізокванти — лінії нульового зростання виробничої функції.

Ізоклиналі — лінії найбільшого зростання виробничої функції (ортогональні ізоквантам).

Ізоморфізм — відношення тотожності (взаємно однозначної відповідності) двох систем в деякому структурному або функціональному аспекті.

Інформаційна технологія — сукупність методів і способів збору, нагромадження, обробки, зберігання, передавання, подання та використання інформації.

Інформація — повідомлення, відомості про якусь подію, чиюсь діяльність або розвиток якогось процесу, що зменшує нашу необізнаність про ці явища.

Канал зв'язку — система чи середовище, де здійснюється передавання сигналу.

Кібернетика — наука про управління системами довільної природи, яка акцентує увагу на інформаційних аспектах управління.

Кодування — процес подання інформації у вигляді деякої послідовності символів (кодових комбінацій).

Коефіцієнт еластичності (у виробничих функціях) — коефіцієнт, що показує, на скільки відсотків зросте випуск продукції, якщо фактор зросте на 1 %.

Критерій — це кількісна модель якісних цілей, що повинна точніше її відтворювати.

Моделювання — дослідження реальних систем, явищ і об'єктів за допомогою моделей, що охоплює побудову моделей, дослідження властивостей моделей та перенесення здобутих відомостей на реальні системи.

Модель системи є деяким умовним образом об'єкта дослідження. Модель будується для того, щоб відобразити характеристики системи (властивості, взаємозв'язки, структурні та функціональні якості, поводження та ін.), істотні для мети дослідження.

Надмірність інформації — властивість, що характеризує можливість подання тієї самої інформації, тих самих повідомлень у більш економічній формі, тобто коротшими кодами.

Параметри порядку — параметри системи, що визначають її поводження.

Підсистема — сукупність елементів, об'єднаних спільним процесом функціонування, які, взаємодіючи, реалізують певну операцію, необхідну для досягнення поставленої перед системою в цілому мети.

Подія (у теорії інформації) — кількісна чи якісна визначеність станів динамічної системи, яка фіксується спостереженнями.

Показники Ляпунова — характеризують швидкість розбігання фазових траєкторій. Вони визначають інтервал часу, на який може бути зроблено прогноз (глибину горизонту прогнозу).

Рівновага — здатність системи зберігати свій стан як найдовше за відсутності зовнішніх збурень чи за постійного впливу зовнішнього середовища.

Самоорганізація — виникнення в системах певних просторових, часових або функціональних структур без специфічного впливу на систему з боку зовнішнього середовища, тобто поява чи зростання впорядкованості, виникнення порядку із хаосу.

Сигнал — фізичний процес, що являє собою матеріальне втілення повідомлення.

Синергетика — науковий напрямок, предметом дослідження якого є закони та закономірності глобальної еволюції довільних відкритих складних нерівноважних систем, головною рисою яких є нестійкість, нерівноважність та нелінійність.

Синтез — науковий підхід, що полягає в поєднанні частин, виявленні системних властивостей, притаманних усій системі в цілому, за своїм змістом протилежний аналізу.

Система — сукупність елементів, що перебувають у певних відношеннях та зв'язках між собою, утворюючи деяку цілісну єдність.

Системний аналіз — методологія дослідження об'єктів довільної природи шляхом їх подання як систем з подальшим аналізом і синтезом цих систем.

Стан системи характеризується значеннями ознак системи в даний момент часу. Стан системи в довільний момент часу можна описати за допомогою набору певних величин (параметрів), що характеризують виходи системи. Зміну станів системи із часом називають рухом системи.

Стійкість системи — здатність системи повертатися до стану рівноваги після виведення її з цього стану під впливом зовнішніх збурень.

Структура системи — стійка впорядкованість та зв'язок між елементами та підсистемами системи.

Точки біфуркації — такий стан системи, коли порівняно незначні зміни її параметрів або зовнішніх факторів можуть призвести до значних якісних змін у поводженні системи, її стані, траєкторії або структурі.

Управління (системою) — діяльність, яка має на меті забезпечити цілеспрямоване поводження системи під час зміни умов зовнішнього середовища або умов її функціонування. Системи з управлінням називають кібернетичними системами.

Фазова траєкторія системи. Вивчаючи динаміку системи, її часто описують системою диференціальних рівнянь. Зображення розв'язків цих рівнянь як руху деякої точки у просторі з розмірністю, яка дорівнює кількості змінних, називають фазовою траєкторією.

Фазовий простір — абстрактний багатовимірний математичний простір, координатами якого є незалежні параметри руху системи.

Фрактал — геометричний об'єкт, що характеризується властивістю самоподібності, або масштабною інваріантністю, тобто зберігає подібну, схожу структуру у процесі зміни масштабу. Фрактали мають дробову розмірність.

Функція системи полягає у перетворенні її входів на виходи. Іноді функцію системи ототожнюють із функціонуванням системи, визначаючи її як спосіб, засіб або як дії для досягнення цілі.

Хаос — у синергетиці під хаосом розуміють нерегулярний рух, що описується детерміністичними рівняннями. Його ще називають динамічним хаосом.

Цілісність системи — властивість системи, яка полягає в тому, що остання, з одного боку, — це цілісне утворення, а з другого — в її складі чітко можна виділити окремі цілісні об'єкти (елементи). Але не компоненти становлять ціле (систему), а навпаки, ціле породжує під час свого поділу компоненти системи.

«Чорна скринька» — умовна назва системи, в якій зовнішньому спостерігачеві доступні лише вхідні та вихідні величини, а внутрішня будова та процеси, що в ній відбуваються, невідомі.

Data mining (розробка, добування даних) — дослідження та виявлення «машиною» (алгоритмами, засобами штучного інтелекту) у «сирих» даних прихованих структур і залежностей, які раніше не були відомі, нетривіальні, мають практичну цінність, доступні для інтерпретації людиною тощо.

Knowledge Discovery in Databases (виявлення знань у базах даних) — аналітичний процес дослідження значних обсягів інформації із залученням засобів автоматизованого дослідження даних, що має на меті виявити приховані в даних структурах залежності та взаємозв'язки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алексеев А.А. Модель накопления в коммерческой деятельности при условиях инфляции // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 2. – С. 174-177.
2. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Уч. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
3. Долятовский В. А., Касаков А. И., Коханенко И. К. Методы эволюцион ной и синергетической экономики в управлении. — Ростов-на-Дону, 2001. — 577 с.
4. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / Н. В. Островская (пер. с англ.). — М.: Мир, 1999. — 336 с.
5. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего. — М.: Эдиториал УРСС, 2001.
6. Кирдина С. Г., Малков С. Ю. 2008. Моделирование самоорганизации экономики отраслей с повышающимися и понижающимися предельными издержками. Эволюционная теория, теория самовоспроизводства и экономическое развитие. М.: Институт экономики РАН. С. 155-176.
7. Клебанова Т. С, Дубровина Н. А., Полякова О. Ю. Моделирование экономической динамики: Учебное пособие / Клебанова Т. С., Дубровина Н. А., Полякова О. К)., Раевнева Е. В., Милов
8. Коротаев А. В., Малков А. С, Халтурина Д. А. 2005. Компактная математическая макромодель технико-экономического и демографического развития Мир-Системы (1-1973 гг.). История и синергетика: Математическое моделирование социальной динамики *I* Ред. С. Ю. Малков, А. В. Коротаев. М.: КомКни-ra/URSS. С. 6-48.
9. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.
10. Кузнецов С. П. Динамический хаос (курс лекций). — М.: Физматлит, 2001. — 296 с.
11. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. — М.: Эдиториал УРСС, 2002. — 256 с.
12. Милованов В. П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и саморганизация. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 264 с.
13. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики: Учебное посо бие. – СПб.: Питер, 2002 – 176 с.
14. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Ведение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 344 с.
15. Окунев О.Б.Динамическое моделирование макроэкономических систем: эндогенные модели Н. Калдора и М. Калецкого//Экономика, с. 201-206.
16. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала: Пер. с англ. — М.: Мир, 2000. — 333 с.

17. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоатомиздат, 1996. — 544 с.
18. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой: Пер. с англ. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 312 с.
19. Сарыгулов А. И. Структурная динамика макроэкономических систем. Монография. – СПб.: СПбГПУ, 2011. – 393 с.
20. Сергеева Л. Н. Моделирование поведения экономических систем методами нелинейной динамики (теории хаоса). — Запорожье: Запорож. гос. ун-т, 2002. — 227 с.
21. Сергеева Л. Н. Нелинейная экономика: модели и методы. — Запорожье: Полиграф, 2003. — 217 с.
22. Серегина С. Ф. Роль государства в экономике. Синергетический подход. — М.: Изд-во «Дело и сервис», 2002. — 288 с.
23. Тимохин В.Н. Методология моделирования экономической динамики: Монография. / Научн. ред. проф. Ю.Г. Лысенко. – Донецк: ООО "Юго-Восток, Лтд.", 2007. – 269с.
24. Форрестер Дж. Мировая динамика. – М.: Наука, 1978. - 248 с.
25. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985. – 424 с.
26. Хоменко Л. Г. История отечественной кибернетики и информатики. — К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, 1998. – 455 с.